Simulación

Primavera 2019
Certamen 1
04/10/19
Tiempo límite: 90 Minutos

Nombre: ______________________________

Código de honor:
No he dado ni recibido
ayuda durante este certamen

Firma ______________________________

Este certamen contiene 9 páginas (incluyendo esta cubierta) y 6 preguntas. Cerciorece que su copia contiene todas las páginas. Ponga su iniciales arriba de cada página en el caso de que separe las hojas y estas se puedan perder.

Usted **PUEDE** utilizar una hoja A4 escrita en una de sus carillas para el certamen.

Se requiere que muestre su trabajo para cada problema en este certamen. Las siguientes reglas aplican:

- **Organize su trabajo**, de forma razonablemente ordenada, en el espacio entregado. Trabajo desorganizado difícil de evaluar recibirá poco o nada de puntaje (independiente de su exactitud).
- **Respuestas misteriosas o sin fundamentos no recibirán puntaje**. Una respuesta correcta, sin soporte de calculos, explicación, o trabajo algebraico **NO** recibirá puntaje; una respuesta incorrecta que sea el resultado de calculos intermedios correctos podría recibir puntaje parcial.
- Si necesita mas espacio, use el reverso de la página; indique claramente cuando haga esto.

No escriba en la tabla a la derecha.

Problem	Points	Score
1	5	
2	15	
3	10	
4	20	
5	15	
6	15	
Total:	80	

Probability theory

1. (5 points) Sea X una variable aleatoria discreta, con soporte en $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$. Además su función de probabilidad de masa $p_X(x)$ esta dada por:

$$p_X(x) = \begin{cases} \binom{3}{x} \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{3-x} & , x \in R_X \\ 0 & , x \notin R_X \end{cases} \tag{1}$$

Donde,

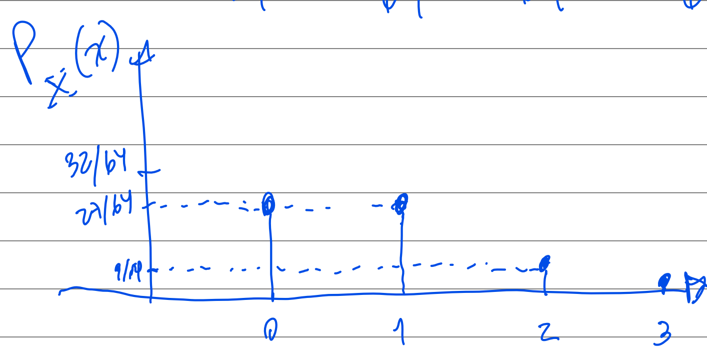
$$\binom{3}{x} = \frac{3!}{x!\,(3-x)!} \tag{2}$$

(a) Calcule la probabilidad $P(X < 3)$.

$$P(X<3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= \left(\frac{6}{6} * 1 * \frac{27}{64}\right) + \left(\cancel{\frac{6}{2}}^{3} * \frac{1}{4} * \frac{9}{16}\right) + \left(\cancel{\frac{6}{2}}^{3} * \frac{1}{16} * \frac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{27}{64} + \frac{27}{64} + \frac{9}{64} = \frac{63}{64}$$



2. Se lanzan tres monedas al aire y la posibilidad de los resultados de cada una puede ser cara (H) o sello (T). La primera moneda no esta cargada pero la segunda lo esta en 0.6 para H, y la tercera en 0.9 para H. El experimento se realiza como parte de un juego en el cual por cada cara (H) se pierden \$1000 y por cada sello se ganan \$1000.

(a) (8 points) Defina el espacio muestral del experimento y sus probabilidades.

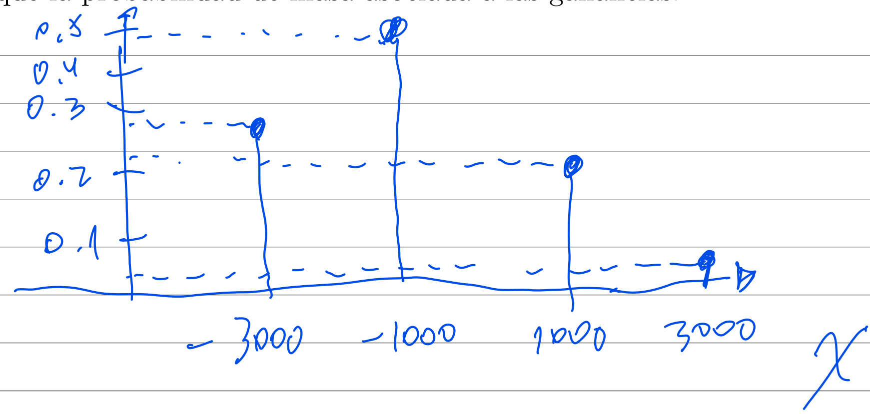
result / coin	1	2	3	$P(\omega)$		$X(\omega)$
1	H	H	H	$0.5 \times 0.6 \times 0.9$	$= 0.27$	-3000
2	H	H	T	$0.5 \times 0.6 \times 0.1$	$= 0.03$	-1000
3	H	T	H	$0.5 \times 0.4 \times 0.9$	$= 0.18$	-1000
4	H	T	T	$0.5 \times 0.4 \times 0.1$	$= 0.02$	1000
5	T	H	H	$0.5 \times 0.6 \times 0.9$	$= 0.27$	-1000
6	T	H	T	$0.5 \times 0.6 \times 0.1$	$= 0.03$	1000
7	T	T	H	$0.5 \times 0.4 \times 0.9$	$= 0.18$	1000
8	T	T	T	$0.5 \times 0.4 \times 0.1$	$= 0.02$	3000
					1	

(b) (4 points) Defina la variable aleatoria que caracteriza las ganancias del juego.

x	$P(X = x)$
-3000	0.27
-1000	0.48
1000	0.23
3000	0.02
	1

$$P_X(x) = \begin{cases} 0.27, & \text{si } x = -3000 \\ 0.48, & \text{si } x = -1000 \\ 0.23, & \text{si } x = 1000 \\ 0.02, & \text{si } x = 3000 \\ 0, & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

(c) (3 points) Grafique la probabilidad de masa asociada a las ganancias.



3. (10 points) Sea X una variable aleatoria continua de dimensiones 2×1 y defina sus componentes como X_1 y X_2. Además, defina el soporte de X como $R_X = [0,2]\times[0,3]$ (el conjunto de vectores de dimension 2×1 tal que el primer componente pertenece al intervalo $[0,2]$ y el segundo al $[0,3]$). La función de densidad conjunta de X es:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/6 & \text{, si } x \in R_X \\ 0 & \text{, de otra forma.} \end{cases} \tag{3}$$

(a) Calcule $P(1 \le X_1 \le 3, -1 \le X_2 \le 1)$

$$P(1 \le x_1 \le 3, -1 \le x_2 \le 1) = \int_1^2 \int_0^1 1/6 \, dx_2 \, dx_1$$

$$= \int_1^2 \left[\int_0^1 1/6 \, dx_2 \right] dx_1$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{1}{6} x_2 \Big|_0^1 \right] dx_1$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{6} \, dx_1$$

$$= \left[\frac{1}{6} x_1 \Big|_1^2 \right] = \frac{1}{6}$$

Cálculo de métricas en simulación

4. Usted decide testear si su entendimiento sobre como opera internamente una simulación es el adecuado. Para ello va a un restaurant y comienza a observar su operación y registra todo lo que observa en una hoja, tal como se observa en la Tabla 4.

	Tiempo	**Cliente**	**Trabajadores**	**Proceso**
0	0	-	1	Abre tienda - Heladero 1 desocupado
176	2:56	1	1	Llega Cliente 1 - Heladero 1 ocupado
441	7:21	1	1	Sale Cliente 1 - Heladero 1 desocupado
650	10:50	2	1	Llega Cliente 2 - Heladero 1 ocupado
690	11:30	3	1	Llega Cliente 3 - Espera en cola
907	15:07	4	1	Llega Cliente 4 - Espera en cola
1006	16:46	-	2	Llega Heladero 2 - Se prepara para trabajar
1030	17:10	3	2	Cliente 3 comienza servicio - Heladero 2 ocupado
1040	17:20	2 - 4	2	Sale Cliente 2 - Cliente 4 comienza servicio
1112	18:32	5	2	Llega Cliente 5 - Espera en cola
1160	19:20	3	1	Sale Cliente 3 - Heladero 2 toma un descanso
1200	20:00	-	-	Fin periodo de observacion

Table 1: Mi Hoja de Registros

(a) (5 points) ¿Cuál es el tiempo promedio de los clientes en el sistema?

Sale − Llegada   Time in sec.

Cliente1 7:21 − 2:56 = 377

Cliente 2 17:20 − 10:50 = 490

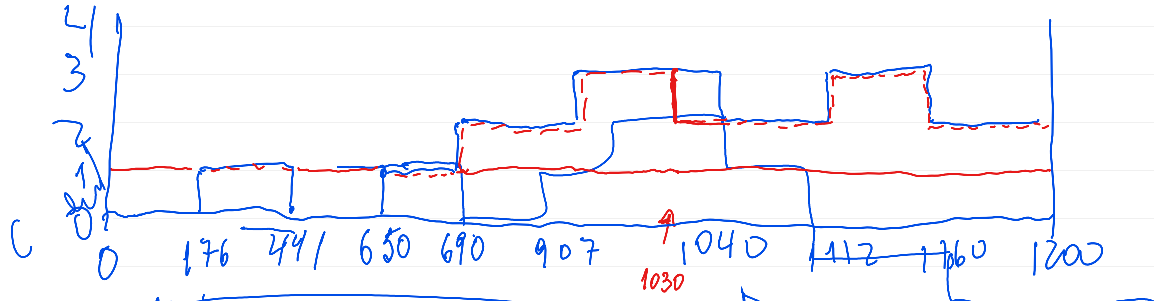
Cliente 3 19:20 − 11:30 = 530

tiempo promedio en Systema $= \frac{377+490+530}{3}$

$= 466$ sec.

$= 7$ min, 46 sec.

(b) (10 points) ¿Cuál es número promedio de clientes en el sistema?¿Cuál es el número promedio de clientes en cola?



# clientes [1]	tiempo seg [2]	[1] * [2]
0	385	0
1	305	305
2	329	658
3	181	543
+ Tiempo 0	1200	1506

\# clientes promedio en el sistema

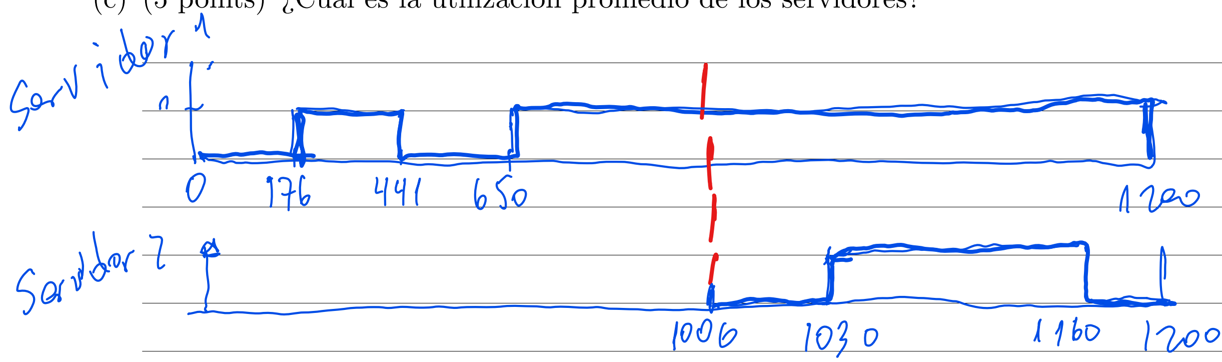
$1506/1200 = 1.255$

# Clientes en Cola [1]	tiempo seg [2]	[1] * [2]
0	690	0
1	339	339
2	171	342
		681

\# clientes promedio en cola

$681/1200 = 0.568$

(c) (5 points) ¿Cuál es la utilización promedio de los servidores?



utilización primer bloque $= 621/1006 = 0.62$

utilización segundo bloque $= \dfrac{342}{194 * 2} = 0.84$

utilización periodo observación $= 0,62 * \dfrac{1006}{1200} + 0.84 * \dfrac{194}{1200}$

$= 0.66$

Likelihood

5. Se le pide determinar el estimador de "maximum likelihood" que caracteriza el parámetro óptimo de una Bernulli . La función de densidad se presenta a continuación.

$$f(x,p) = p^x(1-p)^{1-x} \quad \text{, for } x \in \{0,1\} \tag{4}$$

(a) (15 points) Determine el parámetro $\hat{p}$.

$$L(x|p) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)}$$

$$\mathcal{L}(x|p) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(p) + \sum_{i=1}^{n}(1-x_i)\ln(1-p)$$

$$\frac{d\mathcal{L}(x|p)}{dp} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{p} - \left(n - \sum x_i\right) \cdot \frac{1}{(1-p)} = 0$$

$$\frac{\sum x_i}{p} - \frac{n}{(1-p)} + \frac{\sum x_i}{(1-p)} = 0$$

$$\frac{(1-p)\sum x_i + p \cdot \sum x_i}{p(1-p)} = \frac{n}{(1-p)}$$

$$p = \frac{\sum x_i}{n}$$

Muestreo

6. Se le entrega la siguiente función:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/c & ,1 \leq x < 2 \\ 1 & ,2 \leq x < 2.5 \\ 0 & ,\text{de otro modo} \end{cases} \tag{5}$$

(a) (3 points) Encuentre el valor de c que hace esta función una función de densidad válida.

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) = \int_1^2 \frac{1}{c}\,dx + \int_2^{2.5} dx$$

$$1 = \frac{1}{c} x \Big|_1^2 + x \Big|_2^{2.5}$$

$$1 = \frac{2}{c} - \frac{1}{c} + \frac{1}{2} \qquad 1.5$$

$$1 = \frac{1}{c} + \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{c = 2}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & 2 \leq x < 2.5 \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases}$$

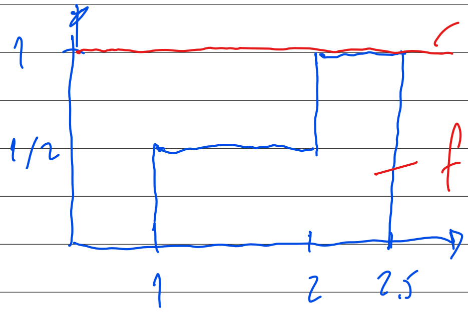
(b) (6 points) Se le entregan los números aleatorios $U_1 = 0.85$, $U_2 = 0.32$, y $U_3 = 0.78$. Genere tres muestras provenientes de la distribución por medio del método de la transformada inversa.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \int_1^x \frac{1}{2}\,db = \frac{1}{2} b \Big|_1^x = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 2 \\ \int_1^2 \frac{1}{2}\,db + \int_2^x db = x - \frac{3}{2}, & 2 \leq x < 2.5 \\ 1, & x \geq 2.5 \end{cases}$$

$$x = F^{-1}(u) = \begin{cases} u = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow 2\left(u + \frac{1}{2}\right), & 0 \leq u < 0.5 \\ u = x - \frac{3}{2} \Rightarrow \left(u + \frac{3}{2}\right), & 0.5 \leq u < 1 \end{cases}$$

$x_1 = \left(0.85 + \frac{3}{2}\right) = 2.35$ $\quad x_2 = 2\left(0.32 + \frac{1}{2}\right) = 1.64$ $\quad x_3 = \left(0.78 + \frac{1}{2}\right) = 2.28$

(c) (6 points) Intente generar 3 muestras por medio del método de aceptación y rechazo. Defina la función $t(x)$ apropiada (lo mas fácil es definir una constante) y utilize $U_1 = 0.85$, $U_2 = 0.32$, y $U_3 = 0.78$ para muestrear desde $r(x)$. Finalmente, ocupe $U_1 = 0.43$, $U_2 = 0.72$, y $U_3 = 0.98$ para decidir si acepta o rechaza la muestra generada.



$$\Rightarrow C = \int_1^{2.5} t(x) = 1.5$$

$$r(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & 1 \le x < 2.5 \\ 0, & otw \end{cases}$$

$$R(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \int_1^x \frac{2}{3}\,db = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}, & 1 \le x < 2.5 \\ 1, & x \geq 2.5 \end{cases}$$

$$x = R^{-1}(u) = \left\{ u = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{3}{2}\left(u + \frac{2}{3}\right), \quad 0 \le u < 1 \right.$$

$$Y_1 = \frac{3}{2}\left(0.85 + \frac{2}{3}\right) = 2.275$$

$$Y_2 = \frac{3}{2}\left(0.32 + \frac{2}{3}\right) = 1.48$$

$$Y_3 = \frac{3}{2}\left(0.78 + \frac{2}{3}\right) = 2.17$$

$0.43 \le \frac{f(Y_1)}{t(Y_1)} = \frac{1}{1}$, se acepta Y_1, $0.72 \le \frac{f(Y_2)}{t(Y_2)} = \frac{1/2}{1}$, se rechaza Y_2

$0.98 \le \frac{f(Y_3)}{t(Y_3)} = \frac{1}{1}$, Se acepta Y_3