SEÑALES Y SISTEMAS

Examen convocatoria de Julio

Grado en Ing. multimedia.

Fecha: 29 de junio de 2017 Duración: 2:15 h

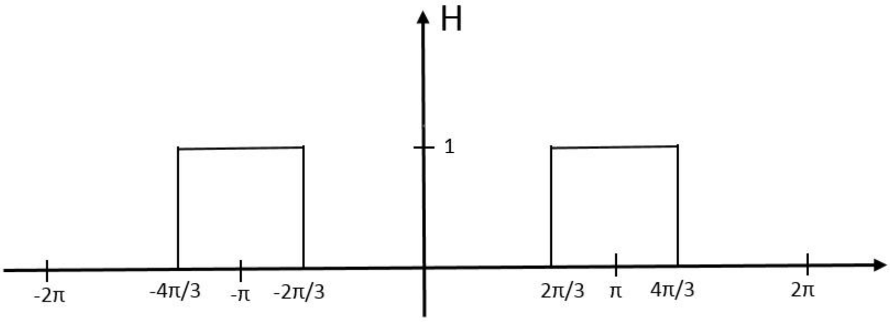
Problema 1 (3 PUNTOS) Sea la secuencia

$$x[n] = \frac{1}{2} + cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + 2cos\left(\frac{\pi n}{3} - \frac{\pi}{2}\right) + 3sen\left(\frac{15\pi n}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$$

a) (1,5 P) Calcula los coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier discreto.

b) (1,0 P) Calcula la transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ discreta. Representa su espectro en amplitud y fase por $-2\pi \leq \omega \leq 2\pi$.

c) (0,5 P) Obtén la expresión completa de la respuesta $y[n]$ a la señal $x[n]$ de un sistema LTI cuya respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ es la siguiente:



Problema 2 (2 PUNTOS) Se dispone de un cuantificador de 8 bits cuya zona granular está comprendida entre los valores $x_{max} = 3,3$ y $x_{min} = -3,3$ voltios. La función característica del cuantificador $Q(x)$ es la siguiente:

$$x_q = Q(x) = \begin{cases} \left(E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot sign(x), & |x| < x_{max} \\ \frac{L-1}{2} \cdot \Delta \cdot sign(x), & |x| \geq x_{max} \end{cases}$$

A cada valor de x_q se le asigna una palabra de código binaria de acuerdo con una codificación signo-magnitud, con el bit de signo 1 para valores de tensión negativos y viceversa.

a) (2,0 P) Considera las muestras $x_1 = 1,35$ V, $x_2 = -0,5$ V y $x_3 = -3,3$ V. Calcula su valor cuantificado, su palabra de código y el error relativo de cuantificación en tanto por ciento.

Problema 3 (2 PUNTOS) Dadas las señales

$$x[n] = u[n] - u[n-5]$$

$$y[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]$$

a) (0,5 P) Indica si la señal $x[n]$ es estable y causal.

b) (1,5 P) Calcula la convolución $z[n] = x[n] * y[n]$.

Problema 4 (3 PUNTOS) Considera el sistema LTI descrito por la siguiente ecuación en diferencias

$$y[n] = x[n] + x[n-1] + \tfrac{1}{4}y[n-1]$$

a) (0,5 P) Dibuja el diagrama de bloque del sistema.¿Que tipo de filtro es, FIR o IIR?

b) (0,5 P) Encuentra $H(e^{j\omega})$.

c) (1,0 P) Calcula la respuesta $y1[n]$ del sistema a la entrada:

$$x1[n] = \delta[n] - \tfrac{1}{4}\delta[n-1].$$

d) (1,0 P) Encuentra la salida $y2[n]$ del sistema a la entrada:

$$x2[n] = \left(\tfrac{1}{5}\right)^n u[n]$$

SEÑALES Y SISTEMAS

Examen convocatoria de Julio

Grado en Multimedia.

Fecha: 1 de Julio de 2016 Duración: 2:15 h

SOLUCIÓN

Problema 1 (3 PUNTOS)

a) (1.5P) La señal $x[n]$ es periodica y es la suma de tres sinusoides

$$N_0 = M.C.M.\{N_{01}, N_{02}, N_{03}\} = 12 \text{ utd}$$

Para calcular los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier (DSF) discreto de $x[n]$ es más cómodo transformar su expresión hasta obtener una suma de sinusoides complejas:

$$x[n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi n}{3}} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi n}{3}} + e^{j(\frac{\pi n}{3} - \frac{\pi}{2})} + e^{-j(\frac{\pi n}{3} - \frac{\pi}{2})} + \frac{3}{2}e^{j(\frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4})} + \frac{3}{2}e^{-j(\frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4})}$$

Donde se ha tenido en cuenta que $\omega = \frac{15\pi}{6} = \frac{15\pi}{6} - 2\pi = \frac{\pi}{2}$.
El DSF de $x[n]$ es de la forma

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k e^{j\frac{2\pi kn}{N_0}} = \sum_{k=0}^{11} c_k e^{j\frac{\pi kn}{6}}$$

Comparando ambas expresiones de $x[n]$ se obtienen los coeficientes c_k

$$c_0 = \frac{1}{2}$$

$$c_4 = \frac{1}{2}\ ;\ \ c_8 = \frac{1}{2}$$

$$c_2 = e^{-j\frac{\pi}{2}};\ \ c_{10} = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$c_3 = \frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}};\ \ c_9 = \frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

El resto de coeficientes son cero.

b) (1.0P) La transformada de Fourier discreta de la señal $x[n]$ es

$$X(e^{j\omega}) = \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k) + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{3} - 2\pi k\right) + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{3} - 2\pi k\right) +$$
$$2\pi e^{-\frac{j\pi}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{\pi}{3} - 2\pi k\right) + 2\pi e^{\frac{j\pi}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega + \frac{\pi}{3} - 2\pi k\right) + 3\pi e^{\frac{-j\pi}{4}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{\pi}{2} - 2\pi k\right) +$$
$$3\pi e^{\frac{j\pi}{4}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega + \frac{\pi}{2} - 2\pi k\right)$$

Por lo tanto su espectro en amplitud y fase serán:

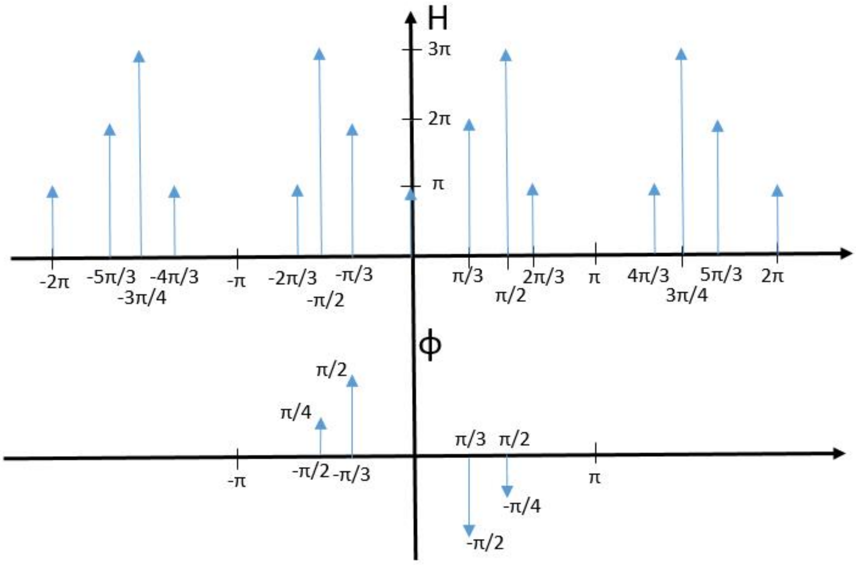


Figura 1: Espectro de amplitud y fase de $X(e^{j\omega})$ en $-2\pi \leq \omega \leq 2\pi$.

c) (0.5P) El sistema es un filtro paso alto con pulsación de corte $\omega_c = \frac{2\pi}{3}$ rad/utd. Por lo tanto el filtro eliminará las componentes de $x[n]$ de frecuencia más baja (es decir menor que $\omega_c = \frac{2\pi}{3}$).

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega}) = \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{3} - 2\pi k\right) + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{3} - 2\pi k\right)$$

La salida entonces será:

$$y[n] = \frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi n}{3}} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi n}{3}} = cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$

Problema 2 (2 PUNTOS)

a) (2 P) Como los valores que limitan la zona normal de funcionamiento del cuantificador son: $x_{min} = -3{,}3$ V y $x_{max} = 3,3$ V; las muestras x_1 y x_2 caen en la zona granular, la x_3 en zona de saturación. El número de niveles de cuantificación viene determinado por el número de bits:

$$L = 2^b = 2^8 = 256 \text{ niveles}$$

Para calcular los valores cuantificados necesitamos saber el tamaño del escalón de cuantificación:

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{L} = \frac{6{,}6}{256} = 0{,}02578 \text{ V}$$

La palabra de código que corresponde a cada muestra será la concatenación del bit de signo (bit de más peso) y un valor N expresado en binario con 7 bits. Es sencillo comprobar que el valor de la magnitud N viene dado en este caso por:

$$N = \left(E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right]\right)$$

Para la primera muestra:

$$x_{q1} = Q(x_1) = \left(E\left[\frac{|x_1|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot sign(x_1) = 1{,}35351 \text{ V}$$

El error de cuantificación relativo cometido en tanto por ciento es:

$$e_{qr1} = \frac{|x_{q1}-x_1|}{|x_1|}100 = \frac{|1{,}35351-1{,}35|}{|1{,}35|}100 = 0{,}26\,\%$$

Para la palabra de código tenemos que el bit de signo es 0 y la magnitud

$$N1 = \left(E\left[\frac{|x_1|}{\Delta}\right]\right) = 52$$

Por lo que le corresponde a esta: 00110100
Para la segundo muestra:

$$x_{q2} = Q(x_2) = (E\left[\frac{|x_2|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2})\Delta \cdot sign(x_2) = -0{,}50273 \text{ V}$$

El error de cuantificación relativo cometido en tanto por ciento es:

$$e_{qr2} = \frac{|x_{q2}-x_2|}{|x_2|}100 = \frac{|-0{,}50273+0{,}5|}{|0{,}5|}100 = 0{,}54\,\%$$

Para la palabra de código tenemos que el bit de signo es 1 y la magnitud

$$N2 = \left(E\left[\frac{|x_2|}{\Delta}\right]\right) = 19$$

Así que a la segunda muestra le corresponde la secuencia de bits: 10010011.

La tercera muestra está en saturación por lo tanto

$$x_{q3} = \frac{L-1}{2} \cdot \Delta \cdot sign(x_3) - 3{,}2871 \text{ V.}$$

Así que le corresponde la secuencia de bits: 11111111, y el error de cuantificación relativo cometido en tanto por ciento es $e_{q3} = 0{,}39\,\%$

Problema 3 (2.0 PUNTOS)

a) La señal $x[n]$ es causal ya que es distinta de cero para $n < 0$. Además es estable ya que es de duración finita.

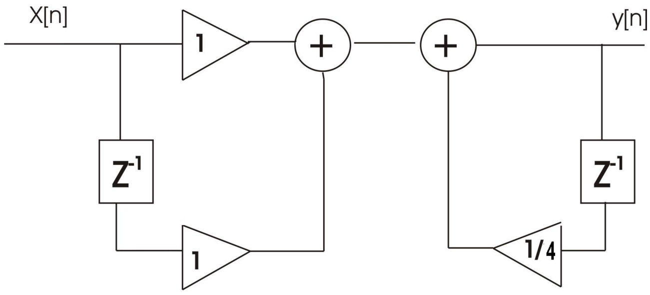
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mid x[n] \mid = \sum_{n=0}^{4} \mid x[n] \mid = 5$$

b) Para realizar la convolución hay que utilizar la gráfica ya que es una convolución de duración infinita. La solucioón se puede escribir, teniendo en cuenta los tres posibles casos de solape entre señales:

$$z[n] = \begin{cases} 0, & para \quad n < 0 \\ 2(1-(1/2)^{(n+1)}), & para \quad 0 \le n \le 4 \\ 2((1/2)^{(n-4)} - (1/2)^{(n+1)}), & para \quad n > 4 \end{cases}$$

Problema 4 (3.0 PUNTOS)

a) (0,5 P) El diagrama de bloque del sistema es



b) (0,5 P) Pasando la ecuación en diferencias a frecuencia se obtiene

$$Y(e^{j\omega}) - \frac{1}{4}Y(e^{j\omega})e^{-j\omega} = X(e^{j\omega}) + X(e^{j\omega})e^{-j\omega}$$

Así que

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1+e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

c) (1,0 P) Si se pasa al dominio de la frecuencia $x1[n]$ se tendrá:

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

y como

$$Y_1(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X_1(e^{j\omega}) = 1 + e^{-j\omega}$$

Se obtiene que la salida, que es la DTFT inversa de $Y_1(e^{j\omega})$, será:

$$y1[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$$

d) (1,0 P) La respuesta del sistema a la entrada $x2[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$ es la convolución entre la entrada y la respuesta impulsiva o en frecuencia

$$Y_2(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$$

Donde

$$X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{5}e^{-j\omega}}$$

Entonces se obtiene que

$$Y_2(e^{j\omega}) = \frac{1+e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5}e^{-j\omega}}$$

Para invertir la salida hay que aplicar el método de descomposición en fracciones simples,

$$Y_2(e^{j\omega}) = \frac{A}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-\frac{1}{5}e^{-j\omega}}$$

Con

$$A = \text{lím}_{e^{j\omega}\to\frac{1}{4}} Y_1(e^{j\omega}) \cdot (1 - \tfrac{1}{4}e^{-j\omega}) = \frac{1+4}{1-\frac{4}{5}} = 25$$

$$B = \text{lím}_{e^{j\omega}\to\frac{1}{5}} Y_1(e^{j\omega}) \cdot (1 - \tfrac{1}{5}e^{-j\omega}) = \frac{1+5}{1-\frac{5}{4}} = -24$$

Luego finalmente, la DTFT inversa de $Y_2(e^{j\omega})$ es:

$$y2[n] = 25\left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n] - 24\left(\tfrac{1}{5}\right)^n u[n]$$