2.3. Examen 3

SEÑALES Y SISTEMAS

Primer Parcial, curso 2012-13

Grado en Ingeniería Multimedia

Fecha: 30 de Octubre de 2012 Duración: 1:00 h

Problema 1. (5,5 PUNTOS) Dada la señal de la figura 2.8:

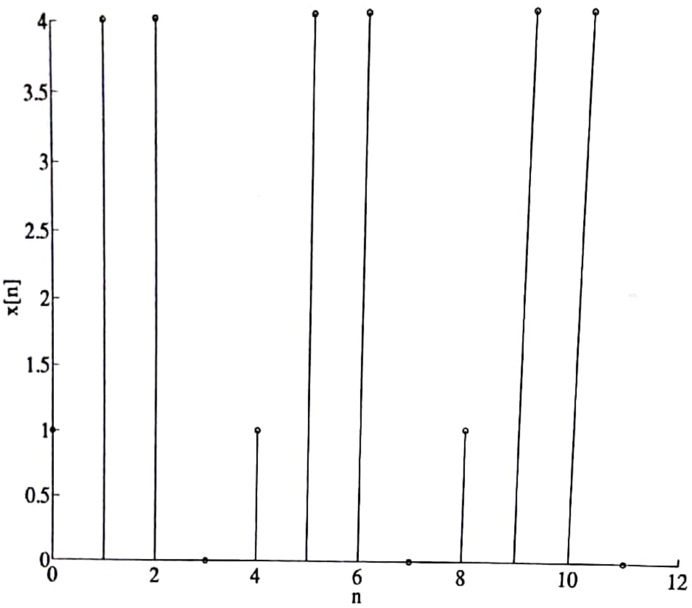

Figura 2.8. Señal periódica $x[n]$.

a) (4 P) Calcula el desarrollo en serie de Fourier discreto de $x[n]$ y sus coeficientes c_k.

b) (1,5 P) Representa el espectro de amplitud y de fase de los coeficientes c_k en función de la frecuencia discreta.

Problema 2. (4,5 PUNTOS) Se dispone de un cuantificador de 5 bits cuya zona granular está comprendida entre los valores $x_{max} = 0,5$ y $x_{min} = -0,5$ voltios. La función característica del cuantificador $Q(x)$ es la siguiente:

$$x_q = Q(x) = \begin{cases} \left(E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot \text{sign}(x), & |x| < x_{max}, \\ \frac{L-1}{2} \cdot \Delta \cdot \text{sign}(x), & |x| \geq x_{max}. \end{cases}$$

Donde L es el número de niveles y Δ es el escalón de cuantificación. A cada valor de x_q se le asigna una palabra de código binaria de acuerdo con una codificación signo-magnitud, con el bit de signo 1 para valores de tensión negativos y viceversa.

a) (3 P) Considera las muestras $x_1 = 0,073$ V y $x_2 = -0,452$ V, que se han obtenido muestreando la señal $x(t) = 0{,}5\cos(0{,}2\pi t)$. Calcula su valor cuantificado, su palabra de código y el error relativo de cuantificación en tanto por ciento.

b) (1,5 P) Considera ahora estos dos otros cuantificadores uniformes, cuya características son

2) $bits = 4, \qquad 2X_m = 1,$

3) $bits = 6, \qquad 2X_m = 2.$

Entre las tres opciones de cuantificación (la primera y estas últimas dos), ¿cuál es la que cuantificaría mejor la señal $x(t)$ ajustándose a sus características? Justifica tu elección.

SEÑALES Y SISTEMAS

Primer Parcial, curso 2012-13

Grado en Ingeniería Multimedia

Fecha: 30 de Octubre de 2012 Duración: 1:00 h

SOLUCIÓN

Problema 1. (5,5 PUNTOS)

a) El periodo es $N_0 = 4$ utd. La señal es $x[n] = \{1, 4, 4, 0\}$ en $n = 0, 1, 2, 3$. Su DSF discreto será de la forma:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k e^{j\frac{2\pi kn}{N_0}} = \sum_{k=0}^{3} c_k e^{j\frac{\pi kn}{2}}.$$

Los valores de los coeficientes c_k se calculan con la ecuación de análisis del DSF discreto:

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi kn}{N_0}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-j\frac{\pi kn}{2}} \qquad \text{con} \quad k = 0, \ldots, 3.$$

Sustituyendo se obtiene

$$c_k = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-j\frac{\pi kn}{2}} = \frac{1}{4}(x[0]+x[1]e^{-j\frac{\pi k}{2}}+x[2]e^{-j\pi k}+x[3]e^{-j\frac{3\pi k}{2}}) = \frac{1}{4}(1+4e^{-j\frac{\pi k}{2}}+4e^{-j\pi k})$$
$$\text{con} \quad k = 0, \ldots, 3.$$

O bien,

$$c_0 = \frac{9}{4} = 2{,}25,$$

$$c_1 = \frac{-3}{4} - j = \left(\frac{5}{4}\right) e^{-j2{,}2143} = \left(\frac{5}{4}\right) e^{j4{,}0689} = \left(\frac{5}{4}\right) e^{-j2{,}2143},$$

$$c_2 = \frac{1}{4},$$

$$c_3 = \frac{-3}{4} + j = \left(\frac{5}{4}\right) e^{j2{,}2143} = \left(\frac{5}{4}\right) e^{-j4{,}0689}.$$

Sustituyendo los coeficientes en la ecuación del DSF discreto de $x[n]$ se obtiene

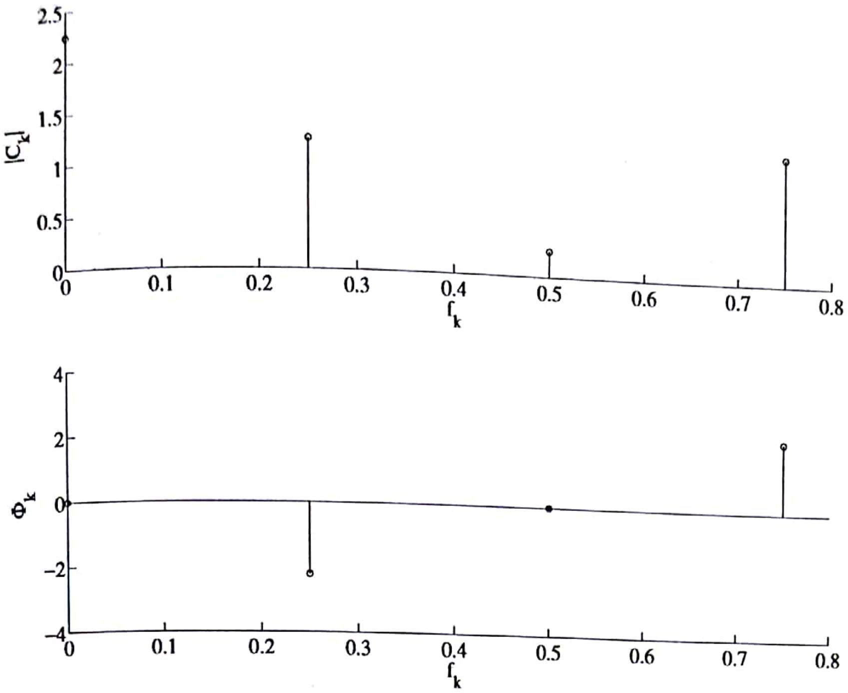

Figura 2.9. Espectro de amplitud y de fase de los coeficientes c_k en función de la frecuencia discreta.

$$x[n] = \frac{9}{4} + \left(\frac{5}{4}\right) e^{-j2{,}214} e^{j\frac{\pi n}{2}} + \left(\frac{1}{4}\right) e^{j\pi n} + \left(\frac{5}{4}\right) e^{j2{,}214} e^{j\frac{3\pi n}{2}}$$

b) Se representa el espectro de amplitud y del espectro de fase de los coeficientes c_k en función de la frecuencia discreta en la figura 2.9.

Problema 2. (4,5 PUNTOS)

a) Como los valores que limitan la zona normal de funcionamiento del cuantificador son $x_{min} = -0{,}5$ V y $x_{max} = 0{,}5$ V, las muestras x_1 y x_2 caen en la zona granular. El número de niveles de cuantificación viene determinado por el número de bits:

$$L = 2^b = 2^5 = 32 \text{ niveles.}$$

Para calcular los valores cuantificados x_{q1} y x_{q2} necesitamos saber el tamaño del escalón de cuantificación:

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{L} = \frac{1}{32} = 0{,}03125 \text{ V.}$$

La palabra de código que corresponde a cada muestra será la concatenación del bit de signo (bit de más peso) y un valor N expresado en binario con 4 bits. Es sencillo comprobar que el valor de la magnitud N viene dado en este caso por:

$$N = \left(E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right]\right).$$

Para la primera muestra:

$$x_{q1} = Q(x_1) = \left(E\left[\frac{|x_1|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot \text{sign}(x_1) = \left(E\left[\frac{|0{,}073|}{0{,}03125}\right] + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{32} = \left(2 + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{32} =$$
$$= 0{,}0781 \text{ V}.$$

El error de cuantificación relativo cometido en tanto por ciento es:

$$e_{qr1} = \frac{|x_{q1} - x_1|}{|x_1|}100 = \frac{|0{,}0781 - 0{,}073|}{|0{,}073|}100 = 6{,}98\,\%.$$

Para la palabra de código tenemos que el bit de signo es 0 y la magnitud

$$N1 = \left(E\left[\frac{|x_1|}{\Delta}\right]\right) = \left(E\left[\frac{|0{,}073|}{0{,}03125}\right]\right) = 2.$$

Por lo que le corresponde a esta secuencia binaria: 00010.

Para la segunda muestra:

$$x_{q2} = Q(x_2) = (E\left[\frac{|x_2|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2})\Delta \cdot \text{sign}(x_2) = (E[\frac{|-0{,}452|}{0{,}03125}] + \frac{1}{2})\frac{1}{32}(-1) = (14 + \frac{1}{2})\frac{-1}{32} =$$
$$= -0{,}4531 \text{ V}.$$

El error de cuantificación relativo cometido en tanto por ciento es:

$$e_{qr2} = \frac{|x_{q2} - x_2|}{|x_2|}100 = \frac{|-0{,}4531 - (-0{,}452)|}{|-0{,}404|}100 = 0{,}24\,\%.$$

Para la palabra de código tenemos que el bit de signo es 1 y la magnitud

$$N2 = \left(E\left[\frac{|x_2|}{\Delta}\right]\right) = \left(E\left[\frac{|-0{,}452|}{0{,}03125}\right]\right) = 14.$$

Así que a la segunda muestra le corresponde la secuencia de bits: 11110.

b) Calculamos el escalón de cuantificación Δ, para los otros dos cuantificadores:

$$\Delta_2 = \frac{2X_m}{2^5} = \frac{1}{16} = 0{,}0625 \text{ V},$$

$$\Delta_3 = \frac{2X_m}{2^6} = \frac{1}{32} = 0{,}03125 \text{ V}.$$

A partir de las Δ se podría pensar que la mejor opción para cuantificar la señal $x(t)$ sería la tercera opción. Sin embargo si nos fijamos en el margen dinámico de la señal, con este cuantificador sólo se utilizarían los niveles de menor valor ya que el margen dinámico de la señal está entre $-0,5$ y 0,5, desaprovechando bits. Por lo tanto, de las tres opciones la primera es la que cuantifica mejor la señal $x(t)$ ajustándose a sus características.