“Sistemas lineales e invariantes (LTI) en tiempo discreto”

Señales y Sistemas

Clase de problemas nº 8

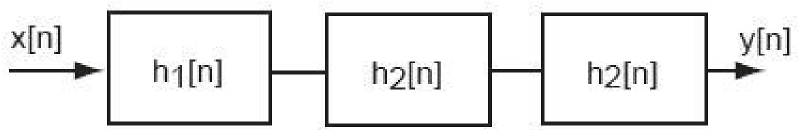
15.11.2019

Material basado en el libro “Problemas resueltos de señales y sistemas” S. Marini, E. Gimeno y en los apuntes del profesor Stephan Marini.

Daniel Puerto

Señales y sistemas – Problemas 8

Problema 4. Examen enero 2012. Considera la conexión en cascada (serie) de tres sistemas lineales e invariantes:



La respuesta impulsiva $h_2[n]$ viene dada por:

$h_2[n] = u[n] - u[n-2]$.

Considerando que la respuesta impulsiva total equivalente es:

$h_T\,[n] = \delta[n+3] + 4\delta[n+2] + 7\delta[n+1] + 7\delta[n] + 4\delta[n-1] + \delta[n-2]$.

a) Encontrar $h_1[n]$.

b) Estudiar la causalidad y la estabilidad del sistema $h_1[n]$.

Señales y sistemas – Problemas 8

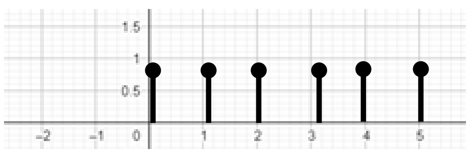
a) Encontrar h_1 [n]

Los sistemas están en serie, entonces: $h_T[n] = h_1[n]*(h_2[n]*h_2[n]) = h_1[n]*h_{2eq}[n]$

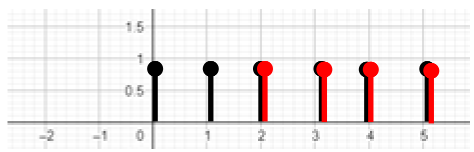
Para hallar $h_1[n]$ hay que reducir el sistema, y antes calcular: $h_{2eq}[n] = h_2[n] * h_2[n]$

Como $h_2[n] = u[n] - u[n-2]$ Aplicando las operaciones con secuencias

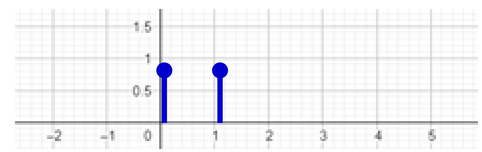
u[n]



u[n-2]



u[n]–u[n-2]



$\delta[n]+ \delta[n-1] = h_2[n]$

Tenemos, Calculando la convolución mediante el método A

$$h_{2eq} = (\delta[n] + \delta[n-1]) * (\delta[n] + \delta[n-1]) = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$$

Señales y sistemas – Problemas 8

Una forma de obtener $h1[n]$ es realizar una tabla y calcular la convolución desplazando $h_{2eq}[n]$.

Las incógnitas serán los valores de $h_1[n]$, ya que se conocen los valores de la respuesta final $h_T[n]$ y $h_{eq2}[n]$

$h_T\,[n] = h_1\,[n] * h_{eq2}\,[n]$

Ahora calculamos el instante discreto en el que comenzará y terminará $h_1[n]$.

$h_T\,[n] = \delta[n+3] + 4\delta[n+2] + 7\delta[n+1] + 7\delta[n] + 4\delta[n-1] + \delta[n-2]$
$h_{2eq} = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$

$h_{Tini} = h_{1ini} + h_{eq2ini} \rightarrow h_{1ini} = h_{Tini} + h_{eq2ini} = -3 - 0 = -3$
$h_{Tfin} = h_{1fin} + h_{eq2fin} \rightarrow h_{1fin} = h_{Tfin} + h_{eq2fin} = 2 - 2 = 0$

Por lo tanto $h_1 \neq 0$ para $-3 \leq n \leq 0$

Señales y sistemas – Problemas 8

Tabla para resolver $h_1[n]$, aplicando :

$$z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] * y[n-k]$$

$h_{2eq}[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$

$h_T[n] = \delta[n+3] + 4\delta[n+2] + 7\delta[n+1] + 7\delta[n] + 4\delta[n-1] + \delta[n-2]$

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	k	h_T
$h_1[k]$			X_1	X_2	X_3	X_4					
$h_{2eq}[n]$						1	2	1			
$h_{2eq}[-3-k]$	1	2	1							$k=-3$	1
$h_{2eq}[-2-k]$		1	2	1						$k=-2$	4
$h_{2eq}[-1-k]$			1	2	1					$k=-1$	7
$h_{2eq}[-k]$				1	2	1				$k=0$	7
$h_{2eq}[1-k]$					1	2	1			$k=1$	4
$h_{2eq}[2-k]$						1	2	1		$k=2$	1
$h_{2eq}[3-k]$							1	2	1	$k=3$	0

Señales y sistemas – Problemas 8

$h_{2eq}[n] = \delta[n] + 2\delta[n] + \delta[n-2]$
$h_T[n] = \delta[n+3] + 4\delta[n+2] + 7\delta[n+1] + 7\delta[n] + 4\delta[n-1] + \delta[n-2]$

Ahora tenemos como incógnitas X_1, X_2, X_3 y X_4.

(n=-3) $X_1\cdot 1=1$; $X_1=1/1=1$; $\mathbf{X_1=1}$

Como $X_1=1$

(n=-2) $X_1\cdot 2 + X_2\cdot 1 = 4$; $1\cdot 2 + X_2\cdot 1=4$; $X_2=4-2=2$; $\mathbf{X_2=2}$

(n=-1) De $h_{eq2}[-1-k]$ → $X_1\cdot 1 + X_2\cdot 2 + X_3\cdot 1= 7$; $1\cdot 1 + 2\cdot 2 + X_3\cdot 1=7$; $X_3=7-5=2$; $\mathbf{X_3=2}$

(n=0) $X_2\cdot 1 + X_3\cdot 2 + X_4\cdot 1= 7$; $2\cdot 1 + 2\cdot 2 + X_4\cdot 1=7$; $X_4=7-6=1$; $\mathbf{X_4=1}$

Por lo tanto $\mathbf{h_1[n] = \delta[n + 3] + 2\delta[n + 2] + 2\delta[n + 1] + \delta[n]}$

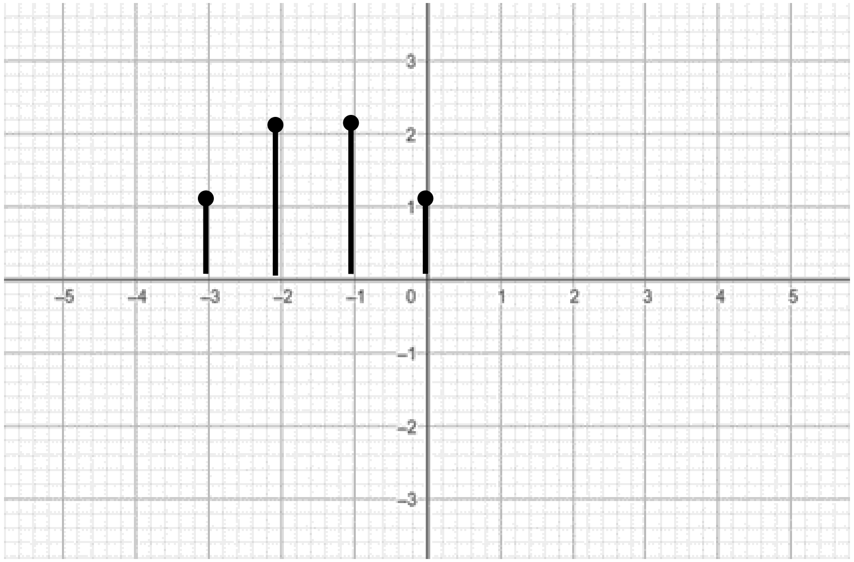
X_1 X_2 X_3 X_4

Señales y sistemas – Problemas 8

b) Estudiar la causalidad y la estabilidad del sistema $h_1[n]$.

$h_1[n] = \delta[n + 3] + 2\delta[n + 2] + 2\delta[n + 1] + \delta[n]$

Analizando h1[n] se puede afirmar que el sistema **no es causal** ya que:



$$h \neq 0 \;\; para \;\; n < 0.$$

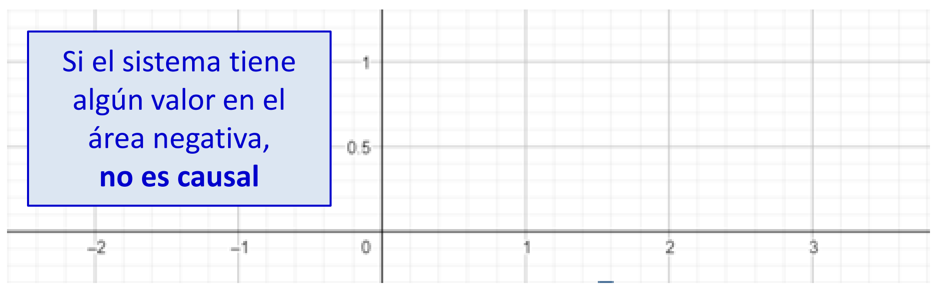
n	$h_1[n]$
0	1
-1	2
-2	2
-3	1

y que el sistema **si es estable** ya que $$\sum_{n=-3}^{0} |h_1[n]| = 1 + 2 + 2 + 1 = 6 < \infty$$

Señales y sistemas – Problemas 8

Ejercicio 1.3.7. Las siguientes expresiones corresponden a las respuestas impulsivas de sistemas lineales e invariantes en tiempo discreto. Determina en cada caso si el sistema es estable y/o causal.

Un sistema es **CAUSAL** si su respuesta solamente depende de los valores de excitación en el instante de tiempo actual y en el pasado, no en el futuro. Puesto que no puede existir respuesta antes de producirse la excitación si la excitación es el impulso unidad se tendrá que: **h[n]=0 para n < 0** .



Un sistema es **ESTABLE** si se verifica que: si la excitación es una señal acotada en todo su intervalo de definición, la respuesta también lo es.

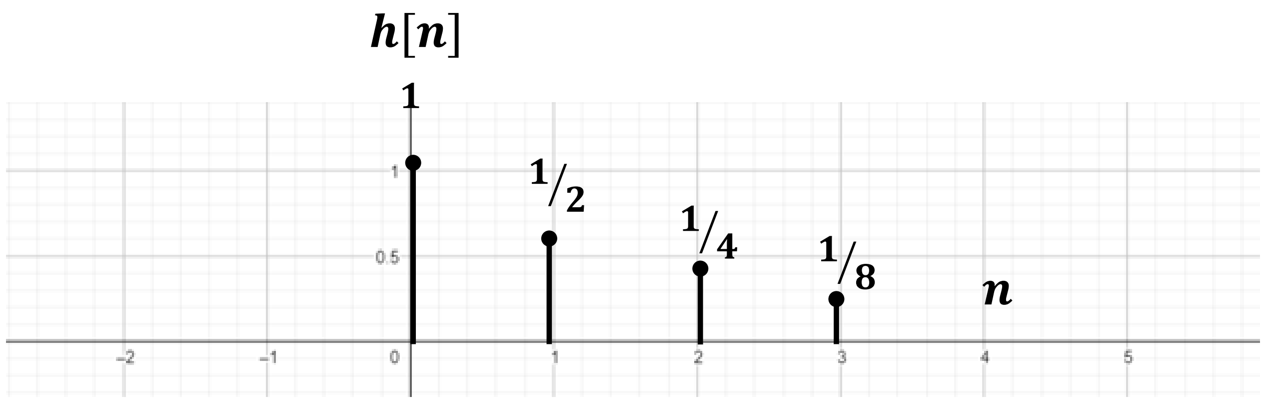
El sistema **es estable** si

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Señales y sistemas – Problemas 8

$a)\ h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n],$ (Definido entre 0 *e* ∞)

n	h[n]
0	$(½)^0=1$
1	$(½)^1=1/2$
2	$(½)^2=1/4$
3	$(½)^3=1/8$



<u>CAUSAL:</u> $h(n) \neq 0\ solo\ para\ \ n \geq 0$ y $h[n] = 0\ para\ \ n < 0.$

Por lo tanto el sistema **es causal**

$\boxed{\text{Si}\ \ 0 < x < 1, x^{\infty} = 0}$

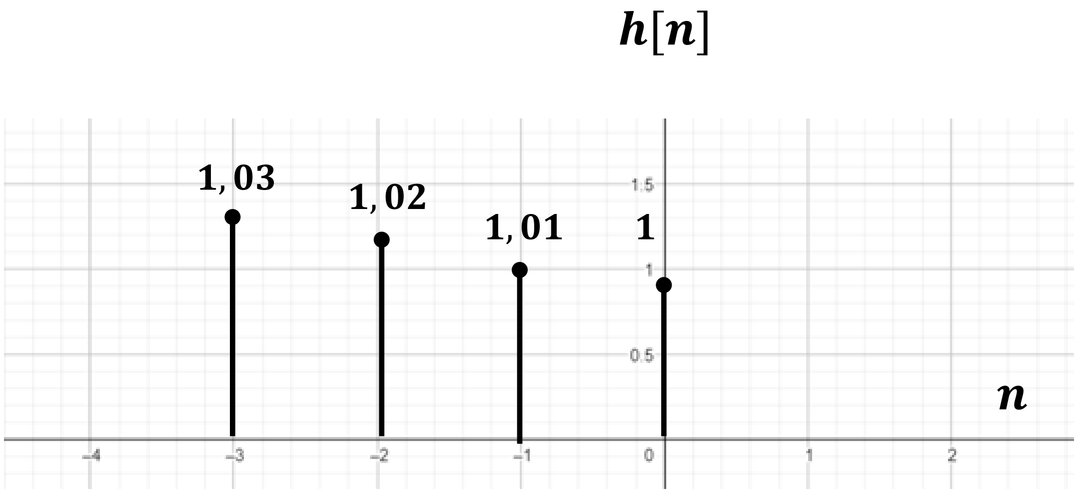
<u>ESTABLE:</u> $$\sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\left({}^1/_2\right)^n\right| = \frac{\cancelto{1}{\left({}^1/_2\right)^0} - \cancelto{0}{\left({}^1/_2\right)^{\infty}}}{1 - {}^1/_2} = \frac{1}{{}^1/_2} = 2 < \infty$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} |x| = \frac{x^0 - x^{\infty}}{1 - x}}$$

Por lo tanto el sistema **es estable**

Señales y sistemas – Problemas 8

$c)\ h[n] = 0{,}99^n u[-n],$ (Definido entre $-\infty$ y 0)



n	$(0,99)^n$
0	1
-1	1/0,99 = 1,01
-2	$1/(0,99)^2$ = 1,02
-3	$1/(0,99)^3$ = 1,03

<u>CAUSAL:</u> $h(n) \neq 0 \ para \ \ n < 0$

Por lo tanto el sistema **no es causal**

$$\text{Si} \quad 0 < x < 1, x^{-\infty} = \infty$$

<u>ESTABLE:</u>

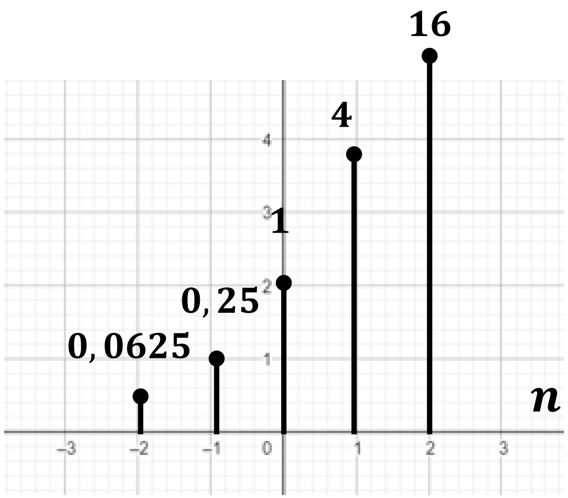
$$\sum_{n=-\infty}^{0} |(0{,}99)^n| = \frac{\overbrace{(0{,}99)^{-\infty}}^{\infty} - (0{,}99)^{0+1}}{0 - 0{,}99} = \infty$$

$$\sum_{n=-\infty}^{0} |x| = \frac{x^{-\infty} - x^{0+1}}{0 - x}$$

Por lo tanto el sistema **no es estable**

Señales y sistemas – Problemas 8

$d)\ \ h[n] = 4^n u[2-n],$ (Definido entre -∞ y 2)



n	h[n]
-2	1/16 (4^{-2})
-1	1/4 (4^{-1})
0	1 (4^{0})
1	4 (4^{1})
2	16 (4^{2})

<u>CAUSAL:</u> $h(n) \neq 0\ \ para\ \ n < 0$

Por lo tanto el sistema **no es causal**

Si $x > 1, x^{-\infty} = 0$
Si $x > 1, x^{\infty} = \infty$

<u>ESTABLE:</u> $$\sum_{n=-\infty}^{2} |(4)^n| = \frac{\overset{0}{\cancel{(4)^{-\infty}}} - (4)^{2+1}}{1-4} = \frac{-64}{-3} = \frac{64}{3} = 21{,}3 < \infty$$

$$\sum_{n=-\infty}^{2} |x| = \frac{x^{-\infty} - x^{2+1}}{1-x}$$

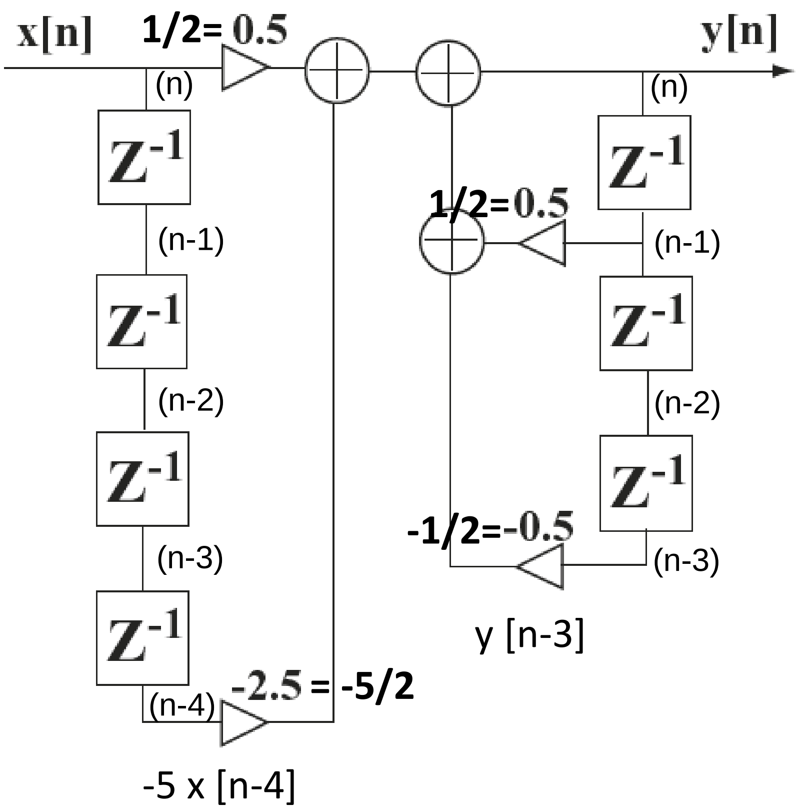
Por lo tanto el sistema **es estable**

Señales y sistemas – Problemas 8

Ejercicio 1.3.10. Representa el diagrama de bloques del siguiente sistema descritos por ecuaciones en diferencias lineales:

$2y[n] - y[n-1] + y[n-3] = x[n] - 5x[n-4] \rightarrow$

$$y[n] = \frac{1}{2}\,x[n] - \frac{5}{2}\,x[n-4] + \frac{1}{2}\,y[n-1] - \frac{1}{2}\,y[n-3]$$



En MATLAB

n=[ ];
x=[ ];
a=[1/2 0 0 0 -5/2]
b=[1 -1/2 0 1/2]
y= filter (b,a,x)

Ver apartado 7.4 del Tema 3