

SEÑALES Y SISTEMAS

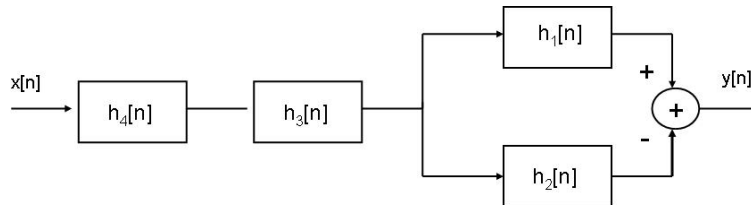
Segundo Parcial (Grupo 1)

Grado en Ingeniería Multimedia.

Fecha: 20 de Diciembre de 2017

Duración: 1:00 h

Problema 1 (5 PUNTOS) Dado el sistema LTI de la figura



siendo

$$h_4[n] = 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n (u[n] - u[n-4])$$

$$h_3[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$$

$$h_2[n] = n u[n-1]$$

$$h_1[n] = (n+1) u[n]$$

a) (4 P) Calcula la respuesta impulsiva total del sistema $h_T[n]$.

b) (1 P) Indica si $h_1[n]$ es estable y causal.

Problema 2 (5 PUNTOS) Considera el sistema LTI descrito por la siguiente ecuación en diferencias

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{15}x[n-1] + \frac{2}{15}y[n-1] + \frac{1}{15}y[n-2].$$

a) (0,5 P) Obtén la ecuación en diferencias del sistema.

b) (0,5 P) Encuentra $H(e^{j\omega})$.

c) (2,5 P) Calcula $h[n]$.

d) (1,5 P) Encuentra la salida $y[n]$ ante la señal de entrada $x[n] = 8e^{j(\pi n + \frac{\pi}{6})}$

SEÑALES Y SISTEMAS
Examen segundo parcial (Grupo 1)
Grado en Ingeniería Multimedia.

Fecha: 20 de diciembre de 2017

Duración: 1:00 h

SOLUCIÓN

Problema 1 (5 PUNTOS)

- a) Hay que reducir el sistema mediante los siguientes pasos

$$h_{eq12}[n] = (h_1[n] - h_2[n]) = u[n].$$

$$h_{eq123}[n] = (h_3[n] * h_{eq12}[n]) = u[n] + u[n-1] = \delta[n] + 2u[n-1].$$

Teniendo en cuenta que $h_4[h] = 3\delta[n] + \delta[n-1] + \frac{1}{3}\delta[n-2] + \frac{1}{9}\delta[n-3]$, finalmente se tendrá:

$$h_T[n] = h_{eq123}[n] * h_4[n] = (\delta[n] + 2u[n-1]) * (3\delta[n] + \delta[n-1] + \frac{1}{3}\delta[n-2] + \frac{1}{9}\delta[n-3]).$$

Extrayendo ahora los elementos correspondientes a mismos instantes de tiempo y realizando una tabla se obtiene:

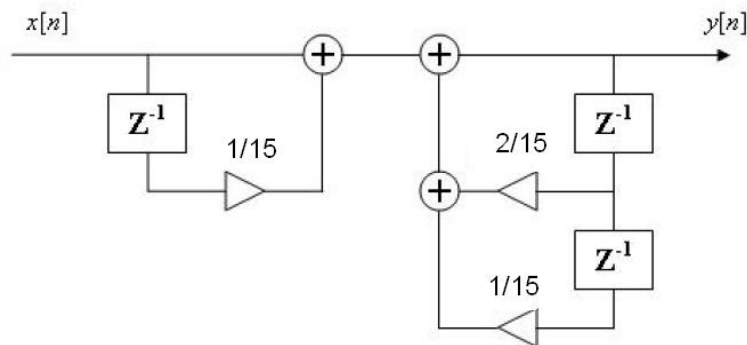
$$h_T[n] = 3\delta[n] + 7\delta[n-1] + \frac{25}{3}\delta[n-2] + \frac{79}{9}\delta[n-3] + \frac{80}{9}u[n-4].$$

- b) El sistema es causal ya que $h_1[n] = 0$ por $n < 0$, y NO es estable ya que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h_1[n]| = \infty.$$

Problema 2 (5 PUNTOS)

- a) El diagrama de bloque del sistema es



b) Pasando la ecuación en diferencias a frecuencia se obtiene

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1 + \frac{1}{15}e^{-j\omega}}{1 - \frac{2}{15}e^{-j\omega} - \frac{1}{15}e^{-2j\omega}}.$$

c) Antes de descomponer en fracciones parciales, hay que buscar los dos polos del denominador, que resolviendo la ecuación de segundo grado del denominador son $p_1 = 1/3$ y $p_2 = -1/5$. Entonces se obtiene que

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 + \frac{1}{15}e^{-j\omega}}{(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}) \cdot (1 + \frac{1}{5}e^{-j\omega})}.$$

Para invertir la salida hay que aplicar el método de descomposición en fracciones simples,

$$H(e^{j\omega}) = \frac{A}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 + \frac{1}{5}e^{-j\omega}}.$$

Con

$$A = \lim_{e^{j\omega} \rightarrow \frac{1}{3}} H(e^{j\omega}) \cdot (1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}) = \frac{3}{4}.$$

$$B = \lim_{e^{j\omega} \rightarrow -\frac{1}{5}} H(e^{j\omega}) \cdot (1 + \frac{1}{5}e^{-j\omega}) = \frac{1}{4}.$$

Luego finalmente, la DTFT inversa de $H(e^{j\omega})$ es, aplicando la propiedad de linealidad y el conocido par de transformada:

$$h[n] = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{5}\right)^n u[n].$$

d) La salida del sistema ante una entrada $x[n] = A e^{j(\omega_d n + \phi_0)}$, dado que el sistema es LTI, será

$$y[n] = A' e^{j(\omega_d n + \phi'_0)},$$

donde

$$A' = A \cdot |H(e^{j\omega_d})|,$$

$$\phi'_0 = \phi_0 + \Phi_H(e^{j\omega_d}).$$

En este caso

$$A' = 8 \cdot |H(e^{j\pi})|,$$

$$\phi'_0 = \frac{\pi}{6} + \Phi_H(e^{j\pi}).$$

Por lo tanto hay que calcular $H(e^{j\omega_d})$ a la pulsación $\omega_d = \pi$ que es un numero real (sin fase):

$$H(e^{j\pi}) = \frac{1 + \frac{1}{15}e^{-j\pi}}{(1 - \frac{1}{3}e^{-j\pi}) \cdot (1 + \frac{1}{5}e^{-j\pi})} = \frac{14/15}{16/15} = \frac{7}{8}$$

$$|H(e^{j\pi})| = \frac{7}{8}, \quad \Phi_H(e^{j\pi/2}) = 0.$$

Y por lo tanto, la respuesta del sistema a la señal $x[n]$ será

$$y[n] = A' e^{j(\omega_d n + \phi'_0)} = 8 \cdot \frac{7}{8} e^{j(\pi n + \frac{\pi}{6})} = 7 e^{j(\pi n + \frac{\pi}{6})}.$$

El filtro afecta solo la amplitud de la señal de entrada $x[n]$.