“Convolución de secuencias”

Señales y Sistemas

Clase de problemas nº 7

15.11.2019

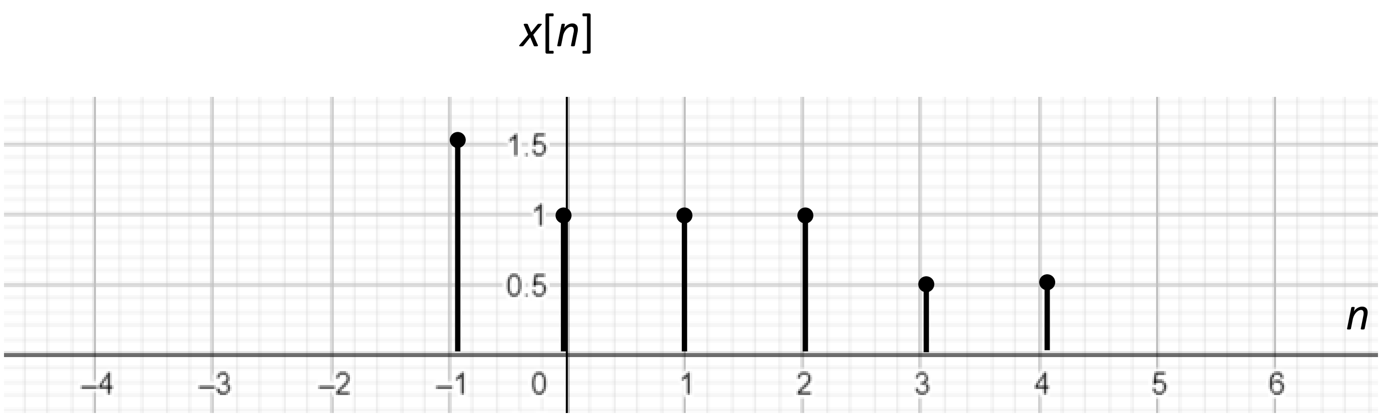
Material basado en el libro “Problemas resueltos de señales y sistemas” S. Marini, E. Gimeno y en los apuntes del profesor Stephan Marini.

Daniel Puerto

Señales y sistemas – Problemas 7

TEMA 3. SEÑALES Y SISTEMAS EN TIEMPO DISCRETO

Problema 1.3.1. **Operaciones básicas con secuencias**. Dada la señal de tiempo discreto, $x[n]$ de la figura, calcula las señales que se piden a continuación:
Ver apuntes de teoría, apartado 3.4.



n	x[n]
-1	1,5
0	1
1	1
2	1
3	0,5
4	0,5
5	0

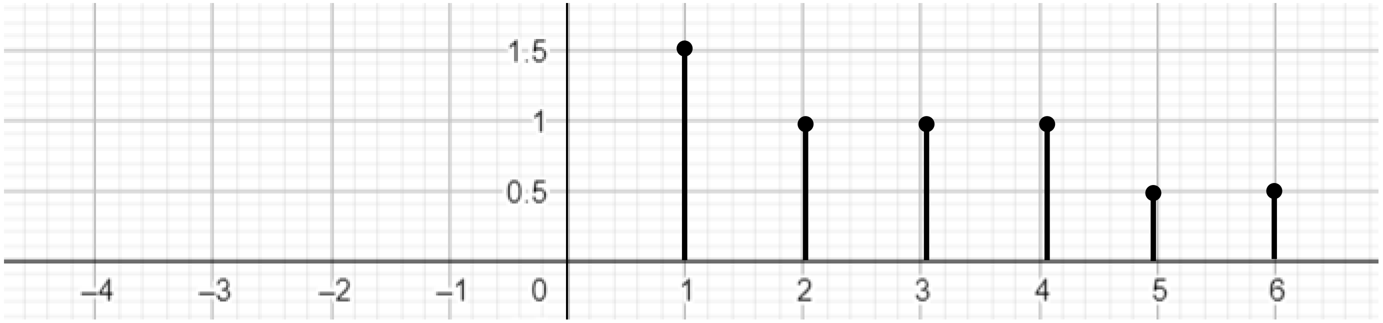
$x[n] = 1{,}5\delta\,[n+1] + 1\delta\,\delta[n] + 1\delta\,[n-1] + 1\delta\,[n\text{-}2] + 0{,}5\delta\,[n-3] + 0{,}5\delta\,[n-4] + 0\delta\,[\mathrm{n}\text{-}5]$

Señales y sistemas – Problemas 7

a) ***x*[*n* − 2].** Desplazamiento en el tiempo

Si n-2=0 → n=2 . La señal se retrasa 2 utd.

$x[n-2]$



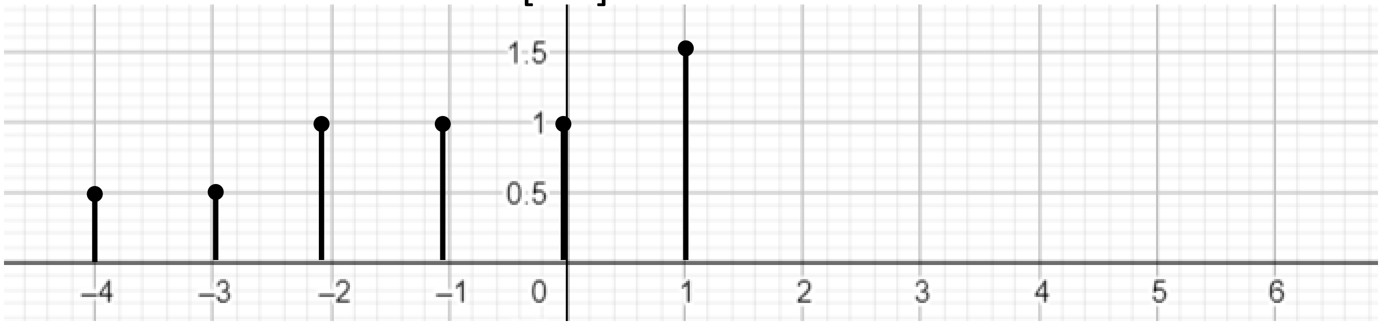
$$x[n-2] = 1{,}5\delta\,[n-1] + \delta\,[n-2] + \delta\,[n-3] + \delta\,[n-4] + 0{,}5\delta\,[n-5] + 0{,}5\delta\,[n-6]$$

Señales y sistemas – Problemas 7

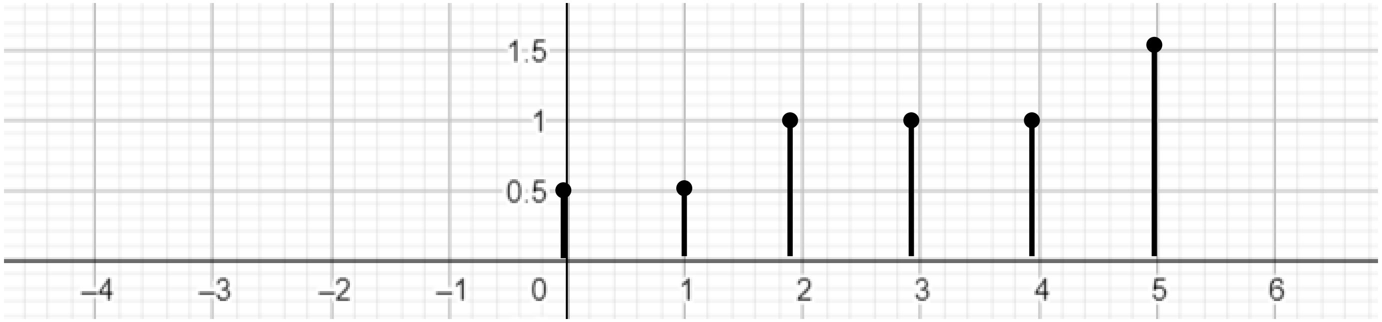
b) x[4 − n]. Inversión en el tiempo

Si 4-n=0 → n=4. Primero se invierte y luego se desplaza en el tiempo.

x[− n]



x[4− n]

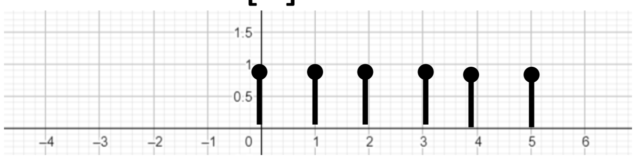


$$x[4-n] = 0{,}5\delta[n] + 0{,}5\delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4] + 1{,}5\delta[n-5]$$

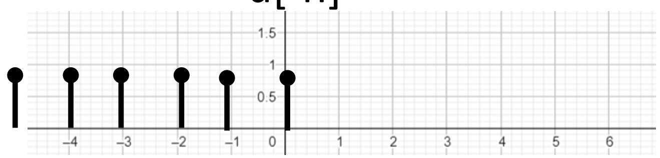
Señales y sistemas – Problemas 7

d) x[n] · u[2-n]. Multiplicación por la secuencia unidad más dos.

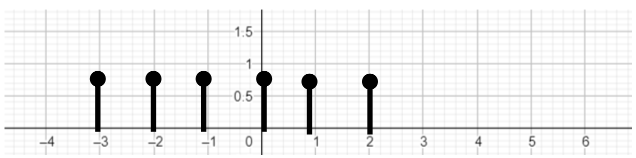
u[n]



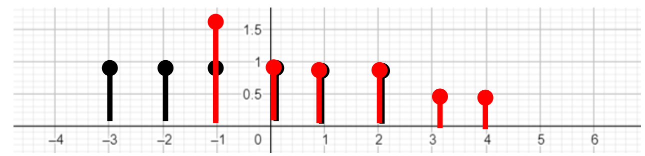
u[-n]



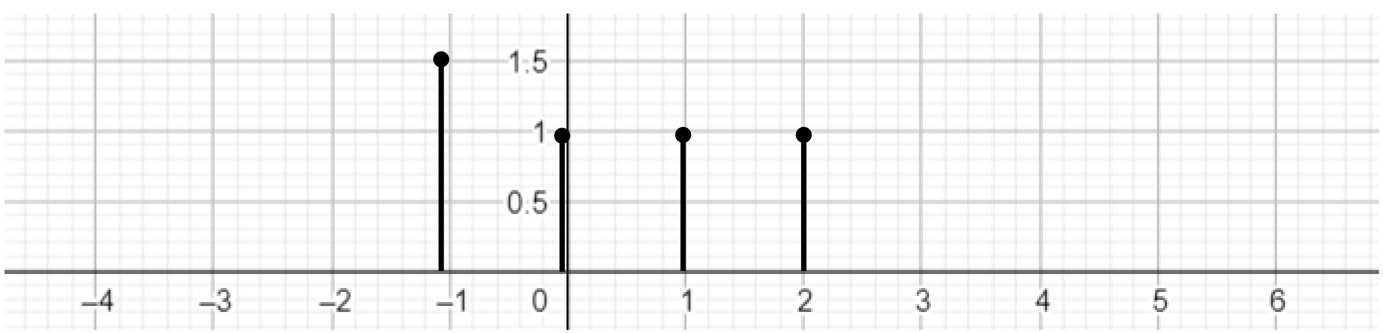
u[-n+2]



x[n] · u[-n+2]



x[n] · u[2-n]



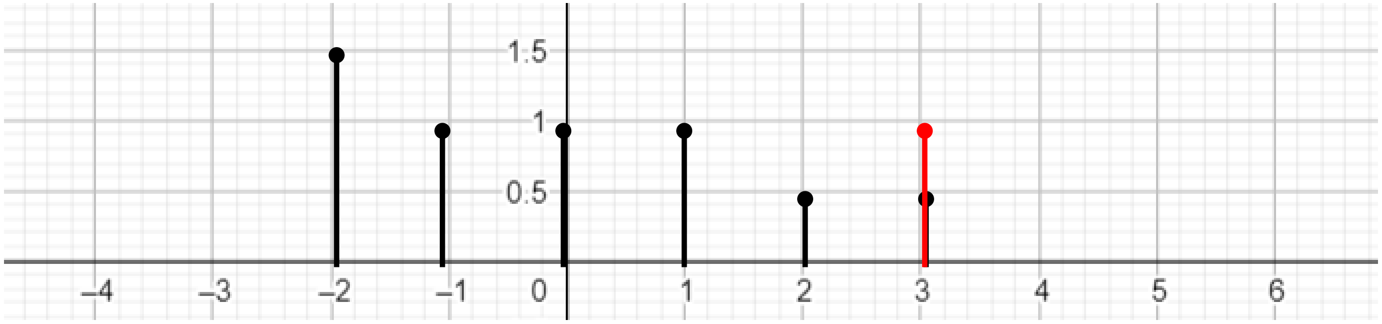
$$x[n] \cdot u[2-n] = 1{,}5\delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$$

Señales y sistemas – Problemas 7

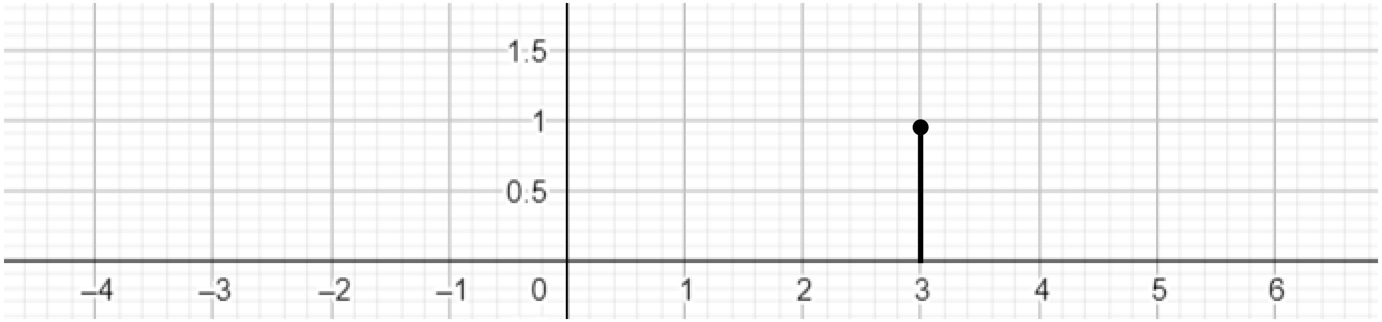
e) x[n+1] · δ[n-3]. Multiplicación por otra secuencia.

Se multiplica la secuencia original por otra que solo tiene una utd

x[n+1] · δ[n-3]



x[n+1] · δ[n-3]



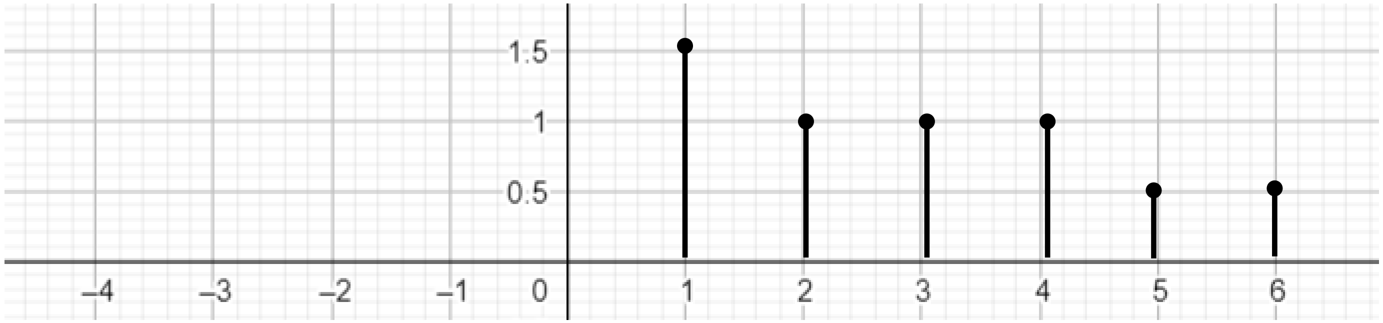
$x[n+1] \cdot \delta[n-3] = \delta[n-3].$

Señales y sistemas – Problemas 7

f) $x[n+1] * \delta[n-3]$. Convolución.

$x[n+1]*\delta[n-3] = x[n+1-3] = x[n-2]$.

Por n+1 desplazamos 1 a la izquierda, y por n-3 desplazamos 3 a derecha. En definitiva, se desplaza 2 utd a la derecha.



$$x[n+1] \cdot \delta[n-3] = 1{,}5\delta[n-1]+\delta[n-2]+\delta[n-3]+\delta[n-4]+0{,}5\delta[n-5]+0{,}5\delta[n-6]$$

Señales y sistemas – Problemas 7

CÁLCULO DE CONVOLUCIONES

Dadas las señales x[n] e y[n], calcular la convolución $z[n] = x[n] * y[n]$

$x[n] = 2\delta[n] + \delta[n-2] - \delta[n-3]$

$y[n] = \delta[n+1] + 2\delta[n] - 3\delta[n-1]$

MÉTODO A.- SUPERPOSICIÓN DE IMPULSOS UNIDAD ($\delta[n]$)

Se sustituye cada secuencia por su expresión en función de señales impulsos unidad y se opera teniendo en cuenta las propiedades distributiva, escalado en amplitud y elemento neutro de la convolución.

Señales y sistemas – Problemas 7

Primero se calcula el instante discreto
en el que comenzará y terminará z[n].
$Z_{ini} = X_{ini} + Y_{ini} = 0 - 1 = -1$
$Z_{fin} = X_{fin} + Y_{fin} = 3 + 1 = 4$

El instante es **1** si tenemos δ[*n*−**1**]

Por lo tanto z[n] ≠ 0 para -1 ≤ n ≤ 4
O sea, entre (n+1) y (n-4)

x[n] = 2δ[n] + δ[n−2] − δ[n−3]
y[n] = δ[n+1] + 2δ[n] − 3δ[n−1]

Luego se realiza el cálculo, sustituyendo y luego multiplicando factor a factor:

z[n]= x[n] ∗ y[n] = x[n] * (δ[n+1] + 2δ[n] − 3δ[n−1]) = **x**[n+1] + 2**x**[n] − 3**x**[n−1] =

(2δ[n+0] + δ[n−2] − δ[n−3]) * δ[n+1] = 2δ[n+1] + δ[n−2+1] − δ[n−3+1]+
(2δ[n+0] + δ[n−2] − δ[n−3]) * 2δ[n] = 4δ[n] + 2δ[n−2] −2δ[n−3]+
(2δ[n+0] + δ[n−2] − δ[n−3]) * -3δ[n-1] = -6δ[n-1] -3δ[n−2-1] −3(-1)δ[n−3-1]=
= 2δ[n+1] + δ[n−1] − δ[n−2]+
= 4δ[n] + 2δ[n−2] − 2δ[n−3]+
= -6δ[n-1] - 3δ[n−3] + 3δ[n−4]=

= **2δ[n+1] + 4δ[n] – 5δ[n−1] + δ[n-2] - 5δ[n−3] + 3δ[n−4]** .

Señales y sistemas – Problemas 7

MÉTODO B.- MEDIANTE TABLA.

Para cada valor de $n_{z1} \leq n \leq n_{z2}$ se calcula la convolución organizando las secuencias en una tabla, y calculando el sumatorio de los productos de $x[k]$ e $y[n - k]$.

z[n]= x[n] ∗ y[n] = $\boxed{z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] * y[n-k]}$

z[n] ≠ 0 para -1 ≤ n ≤ 4
O sea, entre (n+1) y (n-4)

Señales y sistemas – Problemas 7

$x[n] = 2\delta[n] + \delta[n-2] - \delta[n-3]$

$y[n] = \delta[n+1] + 2\delta[n] - 3\delta[n-1]$

y[n-k]·k	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	n	z[n]	
x[k]				**2** 2δ[n-0]		**1** 1δ[n−2]	**-1** −1δ[n−3]							
y[-1-k]		-3	2	1								-1	2·1=2	n+1
y[0-k]			**-3** −3δ[n−1]	**2** 2δ[n-0]	**1** 1δ[n+1]							0	2·2= 4	n
y[1-k]				-3	2	1						1	2(-3)+1·1=-6+1=-5	n-1
y[2-k]					-3	2	1					2	1·2+(-1)·1=2-1=1	n-2
y[3-k]						-3	2	1				3	1(-3)+(-1)2=-5	n-3
y[4-k]							-3	2	1			4	(-1)(-3)=3	n-4

z[n]= 2δ[n+1] + 4δ[n] – 5δ[n–1] + δ[n-2] - 5δ[n–3] + 3δ[n–4]

Señales y sistemas – Problemas 7

MÉTODO C.- RESOLUCIÓN GRÁFICA.

Similar al anterior. Para cada valor de $n_{z1} \leq n \leq n_{z2}$ se calcula la convolución mediante la representación gráfica de $x[k]$ e $y[n - k]$

z[n]= x[n] ∗ y[n] =

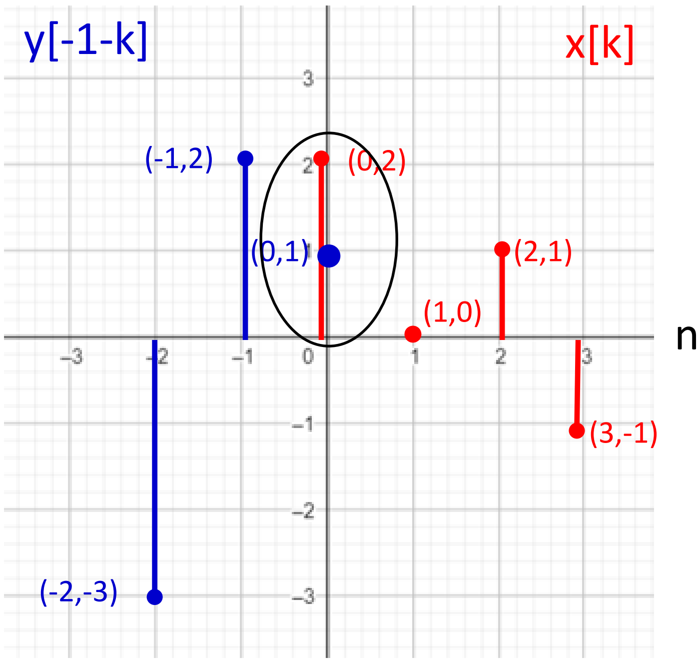
$$z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] * y[n-k]$$

z[n] ≠ 0 para -1 ≤ n ≤ 4
O sea, entre (n+1) y (n-4)

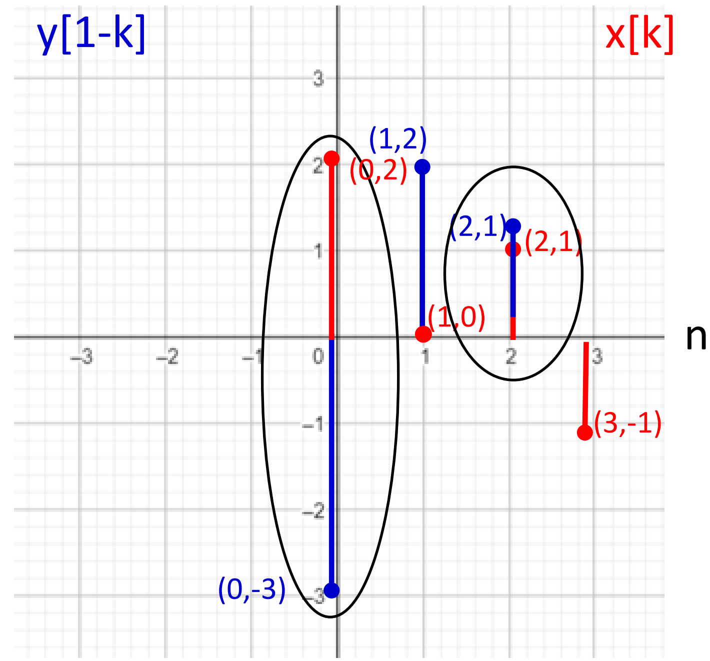
Señales y sistemas – Problemas 7

Para n=-1; $\mathbf{z}[-\mathbf{1}] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] * y[-1-k]$

Para n=1; $\mathbf{z}[\mathbf{1}] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] * y[1-k]$



2·1=2



2(-3)+1·1=-6+1=-5

z[n]= 2δ[n+1] + 4δ[n] – 5δ[n–1] + δ[n-2] - 5δ[n–3] + 3δ[n–4]