“Estudiar todos los ejercicios resueltos en clase y los exámenes. Hacer cada problema paso a paso, entendiendo su desarrollo … y ¡mucha suerte!”

Señales y Sistemas

Clase de problemas nº 11

13.12.2019

Material basado en el libro “Problemas resueltos de señales y sistemas” S. Marini, E. Gimeno y en los apuntes del profesor Stephan Marini.

Daniel Puerto Garcia

Señales y sistemas – Problemas 11

Sistemas discretos LTI en el dominio de la frecuencia. Respuesta en frecuencia.

Si aplicamos la transformada de Fourier a la expresión: y[n] = x[n] * h[n]

Obtenemos:

$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\, H(e^{j\omega})$, *donde*

$Y(e^{j\omega})$ - *Espectro de la respuesta*

$X(e^{j\omega})$ - *Excitación*

$H(e^{j\omega})$ - *Transformada de Fourier de la respuesta impulsiva o* ***respuesta en frecuencia del sistema***

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

Señales y sistemas – Problemas 11

Problema 3. Examen julio 2008. Considera el sistema:

$$y[n] = 0{,}9\, y[n-1] + b\, x[n]$$

a) Calcular su respuesta en frecuencia y después determina la constante *b* para que $H(e^{j\cdot 0}) = 1$.

Aplicamos la DTFT sobre la ecuación en diferencias: $x[n] = A\delta[n-n_0] \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = Ae^{-j\omega n_0}$

$$Y(e^{j\omega}) = 0{,}9 \cdot Y(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\omega} + b\, X(e^{j\omega}); \quad Y(e^{j\omega}) \cdot (1 - 0{,}9 \cdot e^{-j\omega}) = b\, X(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot \frac{b}{(1 - 0{,}9 \cdot e^{-j\omega})}$$

$$\boxed{Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\, H(e^{j\omega});\ H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{X(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \frac{b}{(1 - 0{,}9 \cdot e^{-j\omega})};$$

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = \frac{b}{(1 - 0{,}9 \cdot e^{-j\omega})}}$$

$$\boxed{H(e^{j\cdot\omega})_{\omega = 0} = 1}$$

$$1 = \frac{b}{(1 - 0{,}9 \cdot e^{-j0})}; \qquad 1 = \frac{b}{(1 - 0{,}9 \cdot 1)} = \frac{b}{0{,}1};\ b = 1 \cdot 0{,}1 = 0{,}1$$

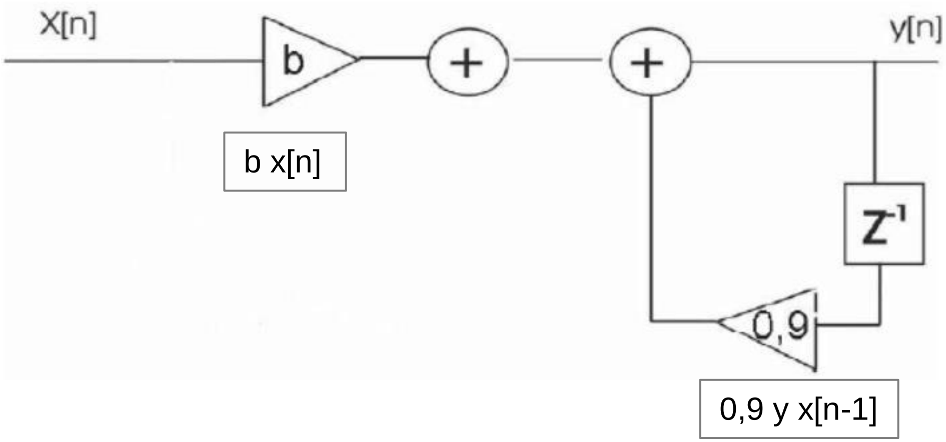
$$\boxed{b = 0{,}1}$$

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = \frac{0{,}1}{(1 - 0{,}9 \cdot e^{-j\omega})}}$$

Señales y sistemas – Problemas 11

b) Representar el diagrama de bloque del sistema ¿Es un filtro IIR o FIR?

$$y[n] = 0{,}9\, y[n-1] + b\, x[n]$$



El diagrama de bloques tiene sólo una celda de retardo en la parte recurrente mientras que la excitación no tiene retardo

Es un filtro IIR de orden N=1, ya que tiene parte recurrente.

IIR (Infinite Impulse Response, Respuesta infinita al impulso). Si la entrada es una señal impulso, la salida tendrá un *número **infinito** de términos no nulos*, es decir, nunca vuelve al reposo, <u>porque tiene parte recurrente</u>.

FIR (Finite Impulse Response, Respuesta finita al impulso). La respuesta a una señal impulso como entrada tendrá un *número **finito** de términos no nulos*.

Señales y sistemas – Problemas 11

c) Suponer que b=0,1 y calcular la respuesta **y[n]** ante la señal:

$$x_1[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

$$\mathrm{y[n]} = \left\langle \begin{array}{l} \mathrm{x[n]} * \mathrm{h[n]} \\ \\ \mathrm{X}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right) \cdot \mathrm{H}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right) \xrightarrow{\mathrm{DTFT}^{-1}} \mathrm{y[n]} \end{array} \right.$$

Para calcular Y=H·X, utilizamos H del apartado anterior y el espectro de la señal de excitación X.

$$\boxed{\mathbf{X}\left(\boldsymbol{e}^{\mathbf{j}\boldsymbol{\omega}}\right) = \frac{\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{j\omega}}}{\mathbf{1} - {}^{\mathbf{1}}\!/_{\mathbf{2}}\ \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{j\omega}}}}$$

Espectro de la secuencia exponencial real

$$a^n \cdot u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - a \cdot e^{-j\omega}}$$

$$a^{n-1} \cdot u[n-1] \leftrightarrow \frac{e^{-j\omega}}{1 - a \cdot e^{-j\omega}}$$

DTFT - Transformada de Fourier en Tiempo Discreto
DTFT^{-1} - Transformada Inversa de Fourier en Tiempo Discreto

Señales y sistemas – Problemas 11

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot \mathrm{X}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \frac{0{,}1}{(1 - 0{,}9 \cdot e^{-j\omega})} \cdot \frac{e^{-j\omega}}{(1 - {}^{1}/_{2}\, e^{-j\omega})}$$

Para invertir el espectro de la salida hay que aplicar el método de descomposición en fracciones simples:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{A_1}{(1 - 0{,}9 \cdot e^{-j\omega})} + \frac{A_2}{(1 - 0{,}5 \cdot e^{-j\omega})}$$

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} = 0{,}9\,;\, e^{-j\omega} = {}^{1}/_{0{,}9}}$$

$$A_1 = \lim_{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} \to 0{,}9} Y(e^{j\omega})(1 - 0{,}9 \cdot e^{-j\omega}) = \lim_{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} \to 0{,}9} \frac{0{,}1 \cdot e^{-j\omega} \cdot \cancel{(1 - 0{,}9 \cdot e^{-j\omega})}}{\cancel{(1 - 0{,}9 \cdot e^{-j\omega})} \cdot (1 - 0{,}5 \cdot e^{-j\omega})} = \frac{0{,}1 \cdot ({}^{1}/_{0{,}9})}{1 - 0{,}5 \cdot ({}^{1}/_{0{,}9})} = \mathbf{0{,}25}$$

$$A_2 = \lim_{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} \to 0{,}5} Y(e^{j\omega})(1 - 0{,}5 \cdot e^{-j\omega}) = \lim_{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} \to 0{,}5} \frac{0{,}1 \cdot e^{-j\omega} \cdot \cancel{(1 - 0{,}5 \cdot e^{-j\omega})}}{\cancel{(1 - 0{,}5 \cdot e^{-j\omega})} \cdot (1 - 0{,}9 \cdot e^{-j\omega})} = \frac{0{,}1 \cdot ({}^{1}/_{0{,}5})}{1 - 0{,}9 \cdot ({}^{1}/_{0{,}5})} = -\mathbf{0{,}25}$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{0{,}25}{(1 - 0{,}9 \cdot e^{-j\omega})} + \frac{-0{,}25}{1 - 0{,}5 \cdot e^{-j\omega}} \xrightarrow{\mathrm{DTFT}^{-1}} y[n];$$

$$\boxed{\frac{1}{1 - a \cdot e^{-j\omega}} \leftrightarrow a^n \cdot u[n]}$$

$$\boxed{\mathbf{y[n] = 0{,}25(0{,}9)^n \cdot u[n] - 0{,}25(0{,}5)^n \cdot u[n];}}$$

$$\boxed{y[n] = 0{,}25[(0{,}9)^n - (0{,}5)^n] \cdot u[n-1]}$$

Señales y sistemas – Problemas 11

d) Para b=0,1, calcular la respuesta $y_2[n]$ ante la señal:

$$x_2[n] = 5 + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

Trabajamos en el dominio de la frecuencia (φ ($\omega_{d1,}$ ω_{d2}))

$$x_2[n] = x_{2a}[n] + x_{2b}[n] = 5 + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right); \qquad x_{2a} = 5; \quad A=5,\ \varphi = 0 \rightarrow \omega = 0$$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}}{2}}$$

$$x_{2b} = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right);\ \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}n} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}n}; \quad A=\frac{1}{2},\ \varphi = 0 \begin{cases} \omega_{d1} = \pi/2 \\ \omega_{d2} = -\omega_{d1} = -\pi/2 \end{cases}$$

$$\boxed{Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\, H(e^{j\omega})}$$

$$y_2[n] = 5\, H(e^{j\omega})_{\omega = 0} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}n}\, H(e^{j\omega})_{\omega = \pi/2} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}n}\, H(e^{j\omega})_{\omega = -\pi/2}$$

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = \frac{0{,}1}{(1 - 0{,}9\cdot e^{-j\omega})}}$$

$$H(e^{j\omega})_{\omega = 0} = \frac{0{,}1}{1 - 0{,}9e^{-j\omega}}\Big|_{\omega = 0} = \frac{0{,}1}{1 - 0{,}9} = 1 \begin{cases} \| = 1 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

Señales y sistemas – Problemas 11

$e^{j\varphi} = \cos\varphi - \mathrm{jsen}\varphi$

$$H(e^{j\omega})_{\omega = \pi/2} = \frac{0{,}1}{1 - 0{,}9e^{-j\omega}}\Big|_{\omega = \pi/2} = \frac{0{,}1}{1 - 0{,}9e^{-j\pi/2}} = \frac{0{,}1}{1 - 0{,}9(\underbrace{\cancel{\cos \pi/2}}_{0} - j\underbrace{\cancel{sen\, \pi/2}}_{1})} =$$

$$= \frac{0{,}1}{1 - 0{,}9 \cdot (-j)} = \frac{0{,}1}{1 + j0{,}9} \cdot \frac{1 - j0{,}9}{1 - j0{,}9} = \ldots\ldots\ldots\ldots \boxed{(a+jb)} \begin{cases} \| = 0{,}074 \\ \varphi = -0{,}732 \end{cases}$$

Ver Problemas 1, pag 10

$$\mathrm{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})_{\omega = \pi/2} = 0{,}074^{\,-j0{,}732} \;;\; \mathrm{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})_{\omega = -\pi/2} = \mathrm{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})_{\omega = \pi/2} = 0{,}074^{\,+j0{,}732}$$

Por último sustituimos:

$$y_2[n] = 5 \cdot 1 + \tfrac{1}{2} \cdot e^{j\pi/2 n} \cdot 0{,}074 \cdot e^{-j0{,}732} + \tfrac{1}{2} \cdot e^{-j\pi/2 n} \cdot 0{,}074 \cdot e^{+j0{,}732} =$$

$$= 5 + \frac{0{,}074}{2}\left(e^{j\left(\frac{\pi}{2}n - 0{,}732\right)} + e^{-j\left(\frac{\pi}{2}n - 0{,}732\right)}\right);$$

$\cos\varphi = \dfrac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} = \cos\varphi$

$x[n] = 5 + \cos\dfrac{\pi}{2}n$

$$\boxed{y_2[n] = 5 + 0{,}074\cos\left(\frac{\pi}{2}n - 0{,}732\right)}$$

Es casi un filtro paso bajo!

Señales y sistemas – Problemas 11

Ejercicio 1.4.7. Considerar un sistema discreto lineal e invariante causal, descrito por la ecuación en diferencias:

$$y[n] - \frac{1}{9}\, y\,[n-2] = x[n]$$

Ver tema 4, pag 13

Determinar la función de transferencia $H\left(e^{j\omega}\right)$ y la respuesta impulsiva h[n]

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad y[n] = x[n] * h[n]$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right) - \frac{1}{9}Y\left(e^{j\omega}\right) \cdot e^{-2j\omega} = \mathrm{X}\left(e^{j\omega}\right)$$

$$\boxed{Y\left(e^{j\omega}\right) = H\left(e^{j\omega}\right)X\left(e^{j\omega}\right)}$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{9} \cdot e^{-2j\omega}\right) = \mathrm{X}\left(e^{j\omega}\right); \qquad Y\left(e^{j\omega}\right) = \frac{\mathrm{X}\left(e^{j\omega}\right)}{\left(1 - \frac{1}{9} \cdot e^{-2j\omega}\right)}$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{9} \cdot e^{-2j\omega}} \cdot \mathrm{X}\left(e^{j\omega}\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{e}^{j\omega}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}} \cdot \boldsymbol{e}^{-2j\omega}}} \quad \xrightarrow{??} \quad h[n]$$

Señales y sistemas – Problemas 11

Resolviendo la ecuación de 2º grado: $1-\frac{1}{9}\cdot x^{-2}=0\,;\quad x^2-\frac{1}{9}=0\,;\quad x_{1/2}=\pm\frac{1}{3}$

$$1-\frac{1}{9}\cdot e^{-2j\omega}=0 \longrightarrow \left(1-\frac{1}{3}\cdot e^{-j\omega}\right)\left(1+\frac{1}{3}\cdot e^{-j\omega}\right)=0$$

Para calcular $H\left(e^{j\omega}\right)$ aplicamos el método de descomposición en fracciones simples:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{9}\cdot e^{-2j\omega}}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\cdot e^{-j\omega}\right)\left(1+\frac{1}{3}\cdot e^{-j\omega}\right)}=$$

$$=\frac{A_1}{\left(1-\frac{1}{3}\cdot e^{-j\omega}\right)}+\frac{A_2}{\left(1+\frac{1}{3}\cdot e^{-j\omega}\right)}$$

Señales y sistemas – Problemas 11

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\cdot e^{-j\omega}\right)\left(1+\frac{1}{3}\cdot e^{-j\omega}\right)}$$

$$A_1 = \lim_{e^{j\omega}\to 1/3} H\left(e^{j\omega}\right)\left(1 - {}^{1}/_{3}\cdot e^{-j\omega}\right) = \frac{1}{\left(1 + {}^{1}/_{3}\cdot e^{-j\omega}\right)}\Big|_{e^{j\omega} = 1/3} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{1}} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

$$A_2 = \lim_{e^{j\omega}\to -1/3} H\left(e^{j\omega}\right)\left(1 + {}^{1}/_{3}\cdot e^{-j\omega}\right) = \frac{1}{\left(1 - {}^{1}/_{3}\cdot e^{-j\omega}\right)}\Big|_{e^{j\omega} = -1/3} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{3}{1}\right)} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{{}^{1}/_{2}}{\left(1-\frac{1}{3}\cdot e^{-j\omega}\right)} + \frac{{}^{1}/_{2}}{\left(1+\frac{1}{3}\cdot e^{-j\omega}\right)} \xRightarrow{DTFT\_1}$$

$$\boxed{\frac{1}{1-a\cdot e^{-j\omega}} \leftrightarrow a^{n}\cdot u[n]}$$

$$\boxed{\boldsymbol{h[n] = {}^{1}/_{2}\left({}^{1}/_{3}\right)^{n} u[n] + {}^{1}/_{2}\left(-{}^{1}/_{3}\right)^{n} u[n]}}$$

Señales y sistemas – Problemas 11

A MODO DE RESUMEN – LO MÁS IMPORTANTE

Saber representar ecuaciones en diagrama de bloques y viceversa.

Calcular la respuesta impulsiva total de un sistema formado por subsistemas.

Calcular la respuesta y[n] del sistema a la entrada x[n]

¡ESTUDIAR Y SUERTE!