

# SEÑALES Y SISTEMAS

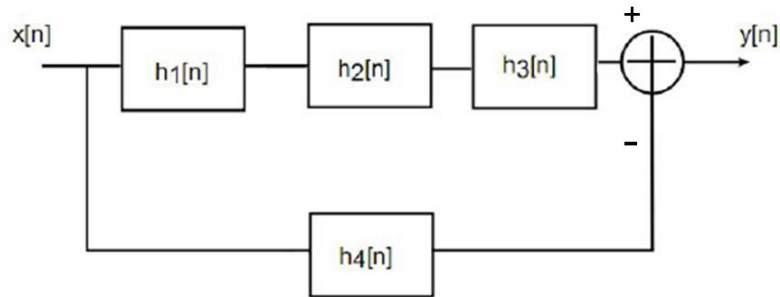
## Segundo Parcial (Mod.1)

Grado en Ingeniería Multimedia.

Fecha: 14 de diciembre de 2016

Duración: 1:00 h

**Problema 1** (5 PUNTOS) Dado el sistema LTI de la figura



siendo

$$h_1[n] = \delta[n] - \delta[n - 1]$$

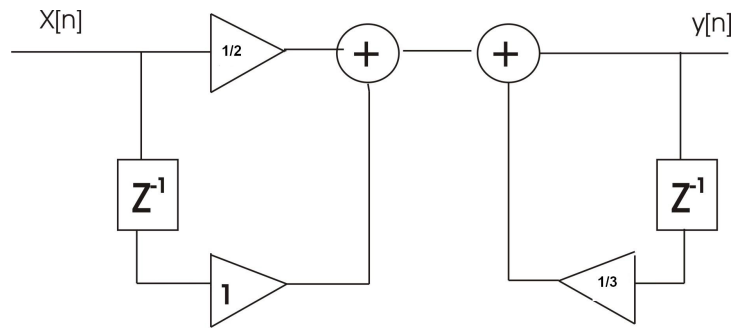
$$h_2[n] = n u[n]$$

$$h_3[n] = 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n (u[n] - u[n - 3])$$

$$h_4[n] = 4\delta[n - 2] + \frac{11}{3}u[n - 3]$$

- a) (4 P) Calcula la respuesta impulsiva total del sistema  $h_T[n]$  (se aconseja seguir el orden según la numeración de las  $h_i[n]$ ).
- b) (1 P) Indica si  $h_3[n]$  es estable y causal.

**Problema 2** (5 PUNTOS) Dado el sistema LTI representado en el diagrama de bloque



a) (0,5 P) Calcula la expresión de la ecuación en diferencias.

b) (0,5 P) Calcula  $H(e^{j\omega})$ .

c) (2,5 P) Calcula la respuesta  $y_1[n]$  del sistema a la entrada

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

d) (1,5 P) Calcula la respuesta  $y_2[n]$  del sistema a la entrada

$$x_2[n] = 2e^{j(\frac{\pi n}{2} + 1,429)}$$

**SEÑALES Y SISTEMAS**  
**Examen segundo parcial (Mod.1)**  
Grado en Ingeniería Multimedia.

Fecha: 14 de Diciembre de 2016

Duración: 1:00 h

**SOLUCIÓN**

**Problema 1 (5 PUNTOS)**

- a) Hay que reducir el sistema mediante los siguientes pasos:

$$h_{eq12}[n] = h_1[n] * h_2[n] = (\delta[n] - \delta[n-1]) * (n u[n]) = n u[n] - (n-1) u[n-1] = u[n-1].$$

donde el resultado final se puede obtener mediante una tabla o gráfica.

Teniendo en cuenta que  $h_3[h] = 3\delta[n] + \delta[n-1] + \frac{1}{3}\delta[n-2]$ , y sumando los elementos correspondientes a mismos instantes de tiempo se obtiene que

$$h_{eq123}[n] = (h_3[n] * h_{eq12}[n]) = 3u[n-1] + u[n-2] + \frac{1}{3}u[n-3] = 3\delta[n-1] + 4\delta[n-2] + \frac{13}{3}\delta[n-3].$$

Finalmente la  $h_T[n]$  es la diferencia entre  $h_{eq123}[n]$  y  $h_4[n]$ :

$$h_T[n] = h_{eq123}[n] - h_4[n] = 3\delta[n-1] + 4\delta[n-2] + \frac{13}{3}\delta[n-3] - 4\delta[n-2] - \frac{11}{3}\delta[n-3] = 3\delta[n-1] + \frac{2}{3}\delta[n-3].$$

- b)  $h_3[n]$  es causal ya que es cero por  $n < 0$ , y es estable ya que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h_3[n]| = 3 + 1 + \frac{1}{3} = \frac{13}{3} < \infty.$$

**Problema 2 (5 PUNTOS)**

- a) Desde el diagrama de bloque se puede deducir la ecuación en diferencias

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] + x[n-1] + \frac{1}{3}y[n-1].$$

- b) Para obtener  $H(e^{j\omega})$  hay que calcular la transformada de Fourier en tiempo discreto de la expresión

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}X(e^{j\omega}) + X(e^{j\omega})e^{-j\omega} + \frac{1}{3}(e^{-j\omega})Y(e^{j\omega})$$

Por lo tanto

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\frac{1}{2} + e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

- c) La respuesta del sistema a la entrada  $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$  es la convolución entre la entrada y la respuesta impulsiva o en frecuencia

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

Donde

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

Entonces se obtiene que

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{\frac{1}{2} + e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

Para invertir la salida hay que aplicar el método de descomposición en fracciones simples,

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

Con

$$A = \lim_{e^{j\omega} \rightarrow \frac{1}{2}} Y(e^{j\omega}) \cdot (1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}) = \frac{15}{2}$$

$$B = \lim_{e^{j\omega} \rightarrow \frac{1}{3}} Y(e^{j\omega}) \cdot (1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}) = -7$$

Luego finalmente, la DTFT inversa de  $Y(e^{j\omega})$  es:

$$y[n] = \frac{15}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 7 \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

- d) Las sinusoides son autofunciones de los sistemas LTI. Por ello se cumple en estos sistemas que ante una excitación de la forma

$$x[n] = A e^{j(\omega_d n + \phi_0)}$$

la respuesta será

$$y[n] = A' e^{j(\omega_d n + \phi'_0)}$$

donde

$$A' = A \cdot |H(e^{j\omega_d})|$$

$$\phi'_0 = \phi_0 + \Phi_H(e^{j\omega_d})$$

En este caso

$$A' = 2 \cdot |H(e^{j\frac{\pi}{2}})| = 2 \cdot \left| \frac{\frac{1}{2} + e^{-j\frac{\pi}{2}}}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{2}}} \right| = 2 \cdot \left| \frac{\frac{1}{2} - j}{1 + j\frac{1}{3}} \right| = 2 \left| \frac{3 - j21}{20} \right| = 2 \cdot 1,06 = 2,12$$

$$\phi'_0 = \phi_0 + \Phi_H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = 1,429 + \arctan(-7) = 1,429 - 1,429 = 0$$

Y por lo tanto, la respuesta del sistema a la señal  $x[n]$  será

$$y[n] = A' e^{j(\omega_d n + \phi'_0)} = 2,12 e^{j(\frac{\pi}{2}n)}$$