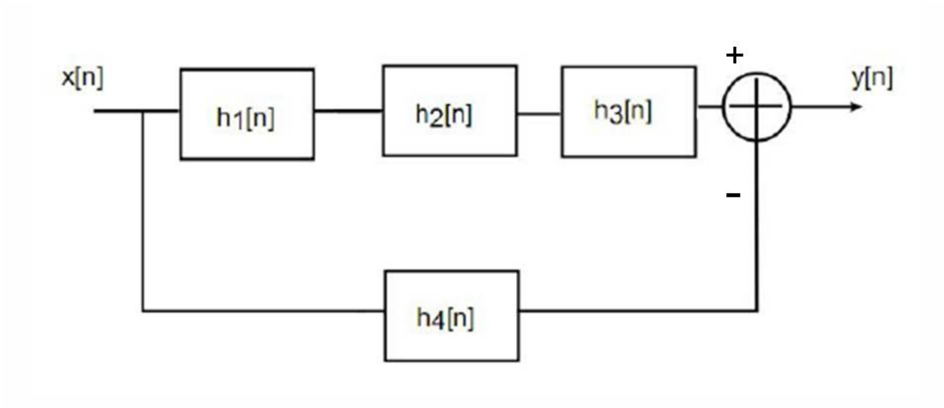
SEÑALES Y SISTEMAS

Segundo Parcial (Mod.2)

Grado en Ingeniería Multimedia.

Fecha: 17 de Diciembre de 2014 | Duración: 1:00 h

Problema 1 (5 PUNTOS) Dado el sistema LTI de la figura



siendo

$$h_1[n] = 4\left(\frac{1}{4}\right)^n (u[n] - u[n-3])$$

$$h_2[n] = \delta[n+1] - \delta[n]$$

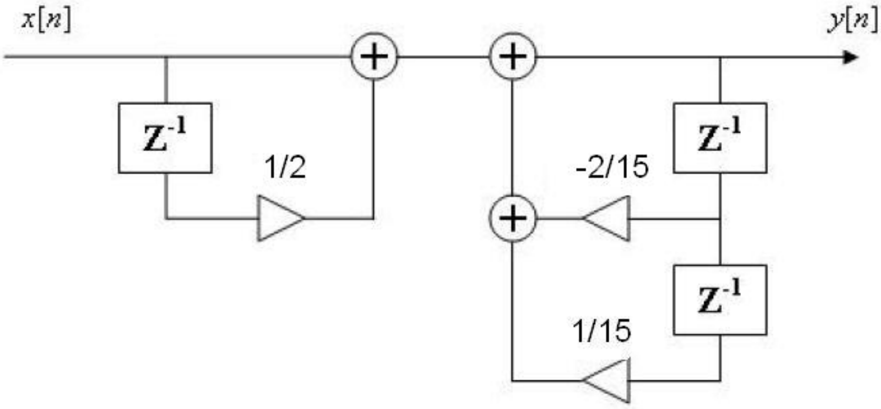
$$h_3[n] = n\,u[n]$$

$$h_4[n] = 2\delta[n-1] + \frac{1}{4}u[n-2]$$

a) (4 P) Calcula la respuesta impulsiva total del sistema $h_T[n]$.

b) (1 P) Indica si $h_3[n]$ es estable y causal.

Problema 2 (5 PUNTOS) Dado el siguiente diagrama de bloques



a) (0,5 P) Obtén la ecuación en diferencias del sistema.

b) (0,5 P) Encuentra $H(e^{j\omega})$.

c) (2,5 P) Calcula $h[n]$.

d) (1,5 P) Encuentra la salida $y[n]$ ante la señal de entrada $x[n] = e^{j(\pi n + \frac{\pi}{4})}$

SEÑALES Y SISTEMAS

Examen segundo parcial (Mod.2)

Grado en Ingeniería Multimedia.

Fecha: 17 de Diciembre de 2014 | Duración: 1:00 h

SOLUCIÓN

Problema 1 (5 PUNTOS)

a) Hay que reducir el sistema mediante los siguientes pasos:

$$h_{eq23}[n] = h_2[n] * h_3[n] = (\delta[n+1] - \delta[n]) * (n\,u[n]) = (n+1)u[n+1] - n\,u[n] = u[n].$$

Teniendo en cuenta que $h_1[h] = 4\delta[n] + \delta[n-1] + \frac{1}{4}\delta[n-2]$, y sumando los elementos correspondientes a mismos instantes de tiempo se obtiene que

$$h_{eq123}[n] = (h_1[n] * h_{eq23}[n]) = 4u[n] + u[n-1] + \tfrac{1}{4}u[n-2] = 4\delta[n] + 5\delta[n-1] + \tfrac{21}{4}u[n-2].$$

Finalmente la $h_T[n]$ es la diferencia entre $h_{eq123}[n]$ y $h_4[n]$:

$$h_T[n] = h_{eq123}[n] - h_4[n] = 4\delta[n] + 3\delta[n-1] + 5u[n-2].$$

b) $h_3[n]$ es causal ya que $h_3[n] \neq 0$ por $n < 0$, y no es estable ya que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h_3[n]| = \infty.$$

Problema 2 (5 PUNTOS)

a) Desde el diagrama de bloques se deduce que la ecuación en diferencias es:

$$y[n] = x[n] + \tfrac{1}{2}x[n-1] - \tfrac{2}{15}y[n-1] + \tfrac{1}{15}y[n-2].$$

b) Pasando la ecuación en diferencias a frecuencia se obtiene

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1+\frac{2}{15}e^{-j\omega}-\frac{1}{15}e^{-2j\omega}}.$$

c) Antes de descomponer en fracciones parciales, hay que buscar los dos polos del denominador, que resolviendo la ecuación de segundo grado del denominador son $p_1 = 1/5$ y $p_2 = -1/3$. Entonces se obtiene que

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{(1-\frac{1}{5}e^{-j\omega})\cdot(1+\frac{1}{3}e^{-j\omega})}.$$

Para invertir la salida hay que aplicar el método de descomposición en fracciones simples,

$$H(e^{j\omega}) = \frac{A}{1-\frac{1}{5}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1+\frac{1}{3}e^{-j\omega}}.$$

Con

$$A = \lim_{e^{j\omega}\to\frac{1}{5}} H(e^{j\omega}) \cdot (1 - \tfrac{1}{5}e^{-j\omega}) = \tfrac{21}{16}.$$

$$B = \lim_{e^{j\omega}\to-\frac{1}{3}} H(e^{j\omega}) \cdot (1 + \tfrac{1}{3}e^{-j\omega}) = -\tfrac{5}{16}.$$

Luego finalmente, la DTFT inversa de $H(e^{j\omega})$ es, aplicando la propiedad de linealidad y el conocido par de transformada:

$$h[n] = \tfrac{21}{16}\left(\tfrac{1}{5}\right)^n u[n] - \tfrac{5}{16}\left(-\tfrac{1}{3}\right)^n u[n].$$

d) La salida del sistema ante una entrada $x[n] = A\,e^{j(\omega_d n+\phi_0)}$, dado que el sistema es LTI, será

$$y[n] = A'\,e^{j\left(\omega_d n+\phi_0'\right)},$$

donde

$$A' = A \cdot |H(e^{j\omega_d})|,$$

$$\phi_0' = \phi_0 + \Phi_H(e^{j\omega_d}).$$

En este caso

$$A' = 1 \cdot |H(e^{j\pi})|,$$

$$\phi_0' = \tfrac{\pi}{4} + \Phi_H(e^{j\pi}).$$

Por lo tanto hay que calcular $H(e^{j\omega_d})$ a la pulsación $\omega_d = \pi$ que es un numero real (sin fase):

$$H(e^{j\pi}) = \frac{1+\frac{1}{2}e^{-j\pi}}{(1-\frac{1}{5}e^{-j\pi})\cdot(1+\frac{1}{3}e^{-j\pi})} = \frac{1/2}{12/15} = \frac{15}{24}$$

$$|H(e^{j\pi})| = \tfrac{15}{24}, \qquad \Phi_H(e^{j\pi/2}) = 0.$$

Y por lo tanto, la respuesta del sistema a la señal $x[n]$ será

$$y[n] = A'\,e^{j\left(\omega_d n+\phi_0'\right)} = \tfrac{15}{24}e^{j(\pi n+\frac{\pi}{4})}.$$

El filtro afecta solo la amplitud de la señal de entrada $x[n]$.