“Convoluciones de duración infinita”

Señales y Sistemas

Clase de problemas nº 9

22.11.2019

Material basado en el libro “Problemas resueltos de señales y sistemas” S. Marini, E. Gimeno y en los apuntes del profesor Stephan Marini.

Daniel Puerto Garcia

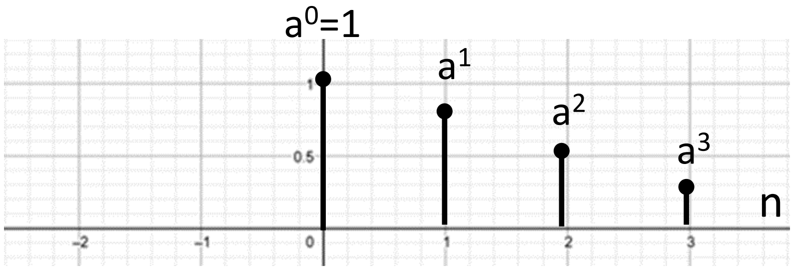
Señales y sistemas – Problemas 9

CONVOLUCIONES DE DURACIÓN INFINITA

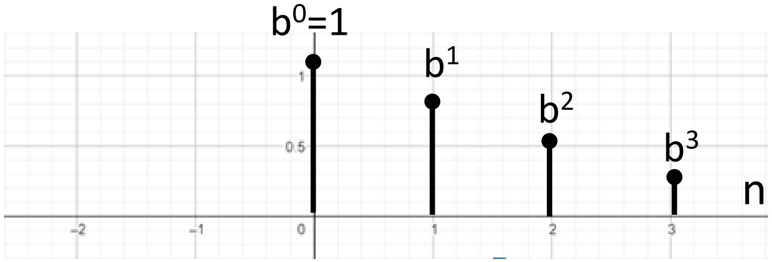
Ejercicio 1.3.2. Calcula la convolución $z[n]=x[n]*y[n]$ de las siguientes secuencias:

c) $$\begin{aligned} x[n] &= a^n \cdot u[n], \quad a \in \mathbb{R},\ 0 < a < 1, \\ y[n] &= b^n \cdot u[n], \quad b \in \mathbb{R},\ 0 < b < 1, \end{aligned}$$

$x[n] = a^n \cdot u[n]$



$x[n] = b^n \cdot u[n]$



$Z_{ini} = X_{ini} + Y_{ini} = 0 + 0 = 0$

$$0 \leq n \leq \infty$$

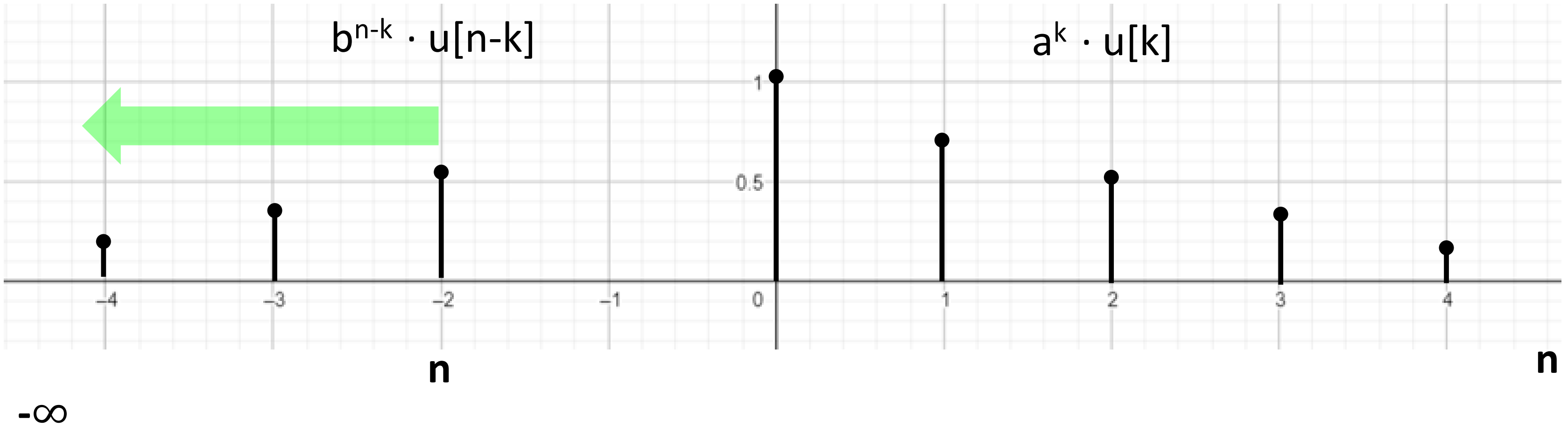
$Z_{fin} = X_{fin} + Y_{fin} = \infty + \infty = \infty$

Señales y sistemas – Problemas 9

Se usa la definición de convolución y la gráfica

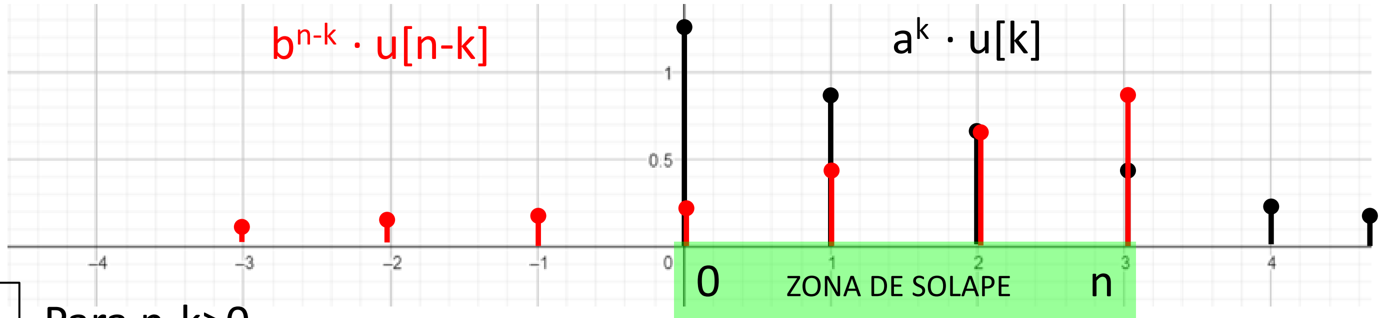
$$z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] * y[n-k]$$

En primer lugar se determinan los intervalos de solape:



$\boxed{\text{Si } \mathbf{n < 0}}$ no hay solape. Z[n] = 0

Señales y sistemas – Problemas 9



$\boxed{\text{Si } \mathbf{n \geq 0}}$ Para n-k>0

$$z[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k] * y[n-k] = \sum_{k=0}^{n} a^k \cdot b^{n-k} = b^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{a}{b}\right)^k = b^n \cdot \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^0 - \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)} =$$

$$= b^n \cdot \frac{\mathbf{1} - \left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right)^{\boldsymbol{n+1}}}{\left(\frac{b-a}{b^1}\right)} = \frac{\cancel{b^{n+1}}}{b-a} \cdot \frac{\boldsymbol{b^{n+1} - a^{n+1}}}{\cancel{\boldsymbol{b^{n+1}}}} = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(b-a)}$$

Por lo tanto:

$$z[n] = \begin{cases} 0 \quad , & n < 0 \\ \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(b-a)} \, , & n \geq 0 \end{cases} \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(b-a)} \cdot u[n]$$

$$\boxed{b^{n-k} = b^n \left(\frac{1}{b}\right)^k}$$

$$\boxed{\textit{Progresión geométrica}: \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^0 - x^{n+1}}{1-x}}$$

Señales y sistemas – Problemas 9

Ejercicio 1.3.3. Considera los sistemas en cascada (serie) cuyas respuestas impulsivas son:

$$h_1[n] = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] \qquad h_2[n] = \delta[n] + \tfrac{3}{2}u[n-1]$$

Si la secuencia de entrada es x[n] = u[n], obtén la salida y[n].

$$\xrightarrow{\boldsymbol{x[n]}} \boxed{h_1} \longrightarrow \boxed{h_2} \xrightarrow{\boldsymbol{y[n]}}$$

a) Calcular primero $h_{eq}[n] = h_1[n] * h_2[n]$

b) Y después calcular $y[n] = h_{eq}[n] * x[n]$

a) $h_{eq}[n] = h_1[n] * h_2[n]$ → h_{eq} es de duración infinita.

$$h_{eq}[n] = \left(\left(-{}^{1}\!/_{2}\right)^n \cdot u\,[n]\right) \ * \ \left(\delta[n] + {}^{3}\!/_{2} \cdot u\,[n-1]\right) =$$

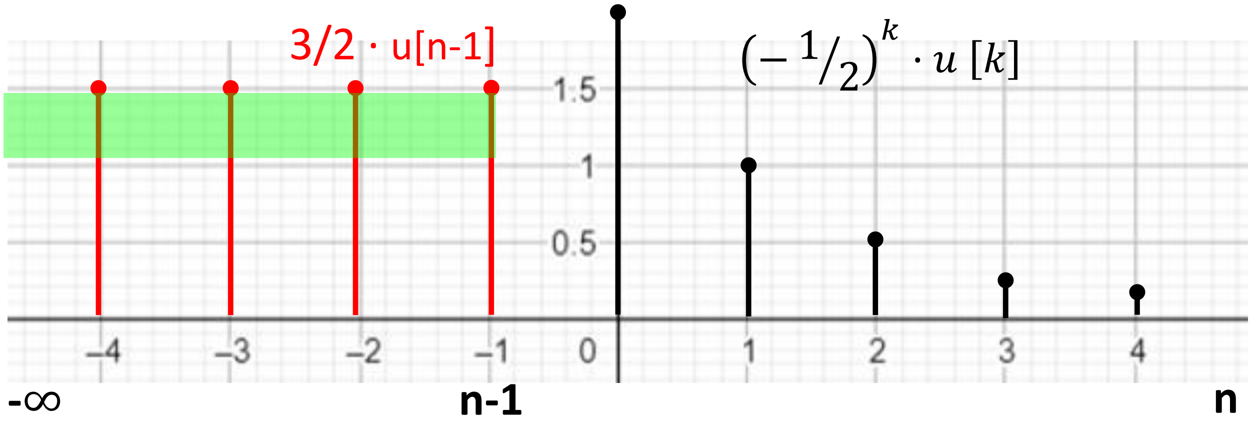
$\delta[n]$ = 1

$$= \left[\left(-{}^{1}\!/_{2}\right)^n \cdot u\,[n] * \delta[n]\right] + \left[\left(-{}^{1}\!/_{2}\right)^n \cdot u\,[n] * {}^{3}\!/_{2} \cdot u\,[n-1]\right] =$$

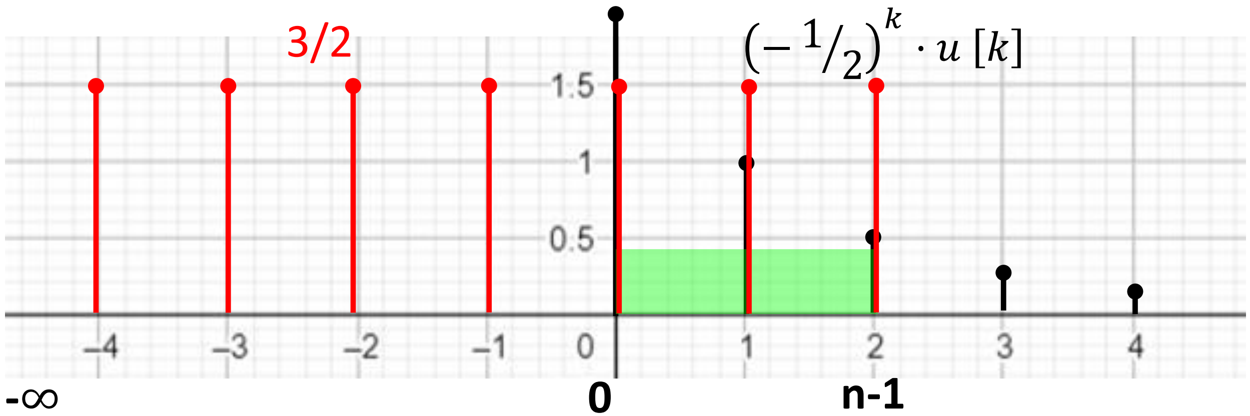
$$= \left(\left(-{}^{1}\!/_{2}\right)^n \cdot u\,[n]\right) \ + \ \left[\left(-{}^{\boldsymbol{1}}\!/_{\boldsymbol{2}}\right)^{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{u}\,[\boldsymbol{n}] * {}^{\boldsymbol{3}}\!/_{\boldsymbol{2}} \cdot \boldsymbol{u}\,[\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1}]\right]$$

Señales y sistemas – Problemas 9

$$s[n] = \left(-{}^{1}\!/_{2}\right)^{n} \cdot u[n] * \left({}^{3}\!/_{2} \cdot u[n-1]\right) \begin{cases} Inicio = 0 + 1 \quad = 1 \\ Final = \ \infty + \ \infty = \ \infty \end{cases}$$



Si n-1 < 0 → n<1 → s[n]=0, no hay solape



Si n ≥ 1

Señales y sistemas – Problemas 9

Aplicamos la definición de convolución y obviamos **u**

$$z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] * y[n-k]$$

$$s[n] = \sum_{k=0}^{n-1} \left(-{}^{1}/_{2}\right)^{k} \cdot {}^{3}/_{2} = {}^{3}/_{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(-{}^{1}/_{2}\right)^{k} = {}^{3}/_{2} \cdot \frac{\left(-{}^{1}/_{2}\right)^{0} - \left(-{}^{1}/_{2}\right)^{n-1+1}}{1 - \left(-{}^{1}/_{2}\right)} =$$

$$= \cancel{{}^{3}/_{2}} \; \frac{1 - (-{}^{1}/_{2})^{n}}{\cancel{{}^{3}/_{2}}} = \left(1 - (-{}^{1}/_{2})^{n}\right)$$

$$s[n] = \left\{ \begin{matrix} 0 & n < 1 \\ \left(1 - (-{}^{1}/_{2})^{n}\right) & n \geq 1 \end{matrix} \right\} \equiv 1 - (-{}^{1}/_{2})^{n}\, \mathrm{u[n\text{-}1]}$$

$$h_{eq}[n] = (-{}^{1}/_{2})^{n}\, \mathrm{u[n]} + \left(1 - (-{}^{1}/_{2})^{n}\right) \cdot u[n-1] = u[n];$$

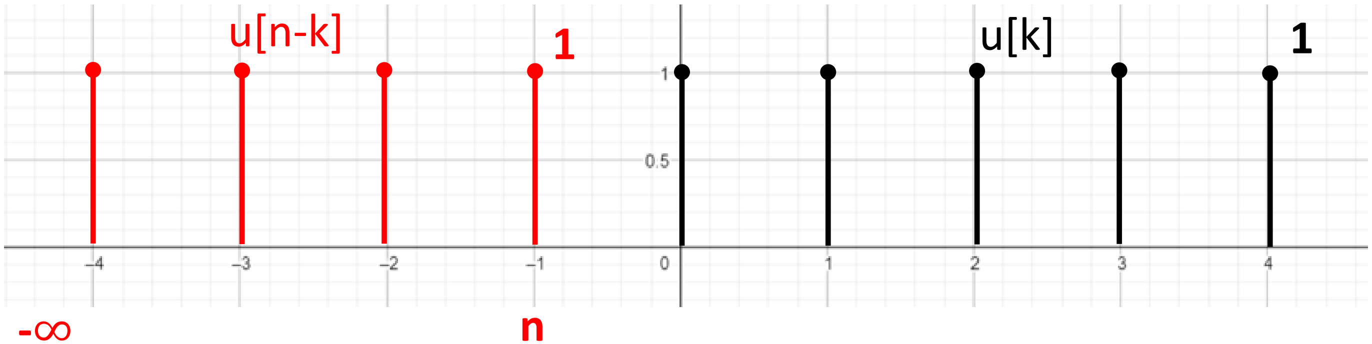
n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
$\left(-{}^{1}/_{2}\right)^{n} \cdot u[n]$	1	-1/2	-1/4	-1/8	…
$1 - \left(-{}^{1}/_{2}\right)^{n} \cdot u[n-1]$		3/2	5/4	9/8	
	1	1	1	1	1 = **u[n]** …

-1/2+(3/2)= -0,5 +1,5=1

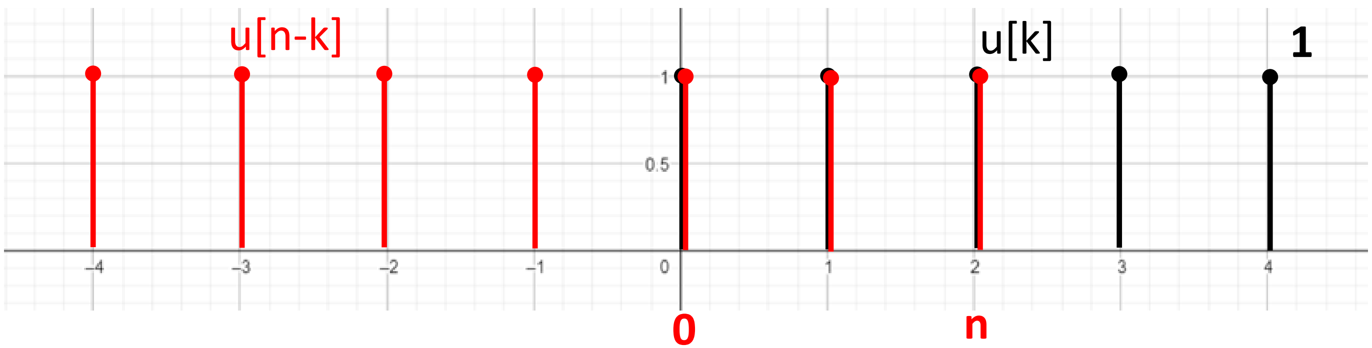
$$\mathbf{h_{eq}[n]} = \boldsymbol{u[n]}$$

Señales y sistemas – Problemas 9

b) Calcular $y[n] = h_{eq}[n] * x[n] = u[n] * u[n]$ → duración ∞



Si $n < 0 \rightarrow y[n]=0$



Si $n \geq 0$

$$\boldsymbol{y}[\boldsymbol{n}] = \sum_{k=0}^{n} x[k] \cdot h[n-k] = \sum_{k=0}^{n} (1 \cdot 1) = \sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1) \equiv (\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1}) \cdot \boldsymbol{u}[\boldsymbol{n}]$$

Señales y sistemas – Problemas 9

Ejercicio 1.3.4. Determina la respuesta $y[n]$ para la conexión en cascada de los sistemas:

$h_1[n] = \text{sen}(8n)$ y $h_2[n] = a^n \cdot u[n]$ con $|a| < 1$

Siendo la excitación $x[n] = \delta[n] - a\delta[n-1]$ con $|a| < 1$

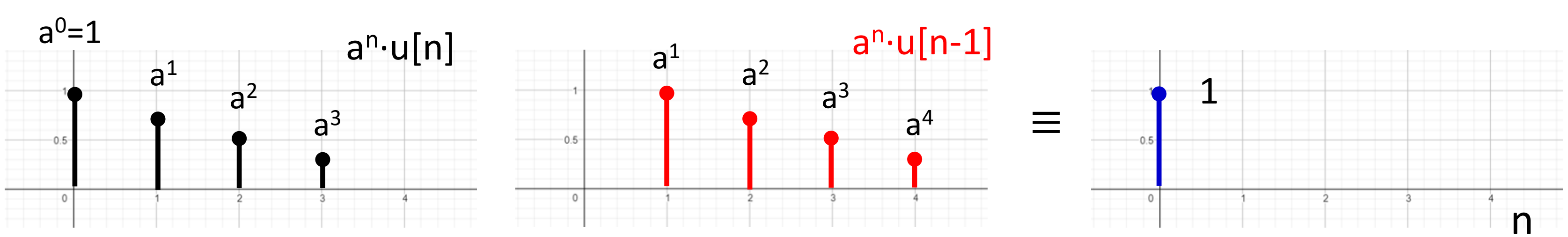
$$y[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = (x[n] * h_2[n]) * h_1[n]$$

$\delta[n] = 1$

$a \cdot a^{(n-1)} = a \cdot \frac{a^n}{a^1}$

$$x[n] * h_2[n] = (\delta[n] - a\delta[n-1]) * a^n \cdot u[n] = a^n \cdot u[n] - a \cdot a^{(n-1)} \cdot u[n-1] =$$

$$= a^n \cdot u[n] - a^n \cdot u[n-1] = \boldsymbol{\delta[n]}$$



$\delta[n] = 1$

$$y[n] = \delta[n] * \text{sen}(8n) = \textbf{sen(8n)}$$

by ARC

Señales y sistemas – Problemas 9

TEMA 4. TRANSFORMADA DE FOURIER EN TIEMPO DISCRETO

A una secuencia y su transformada de Fourier: $x[n] \leftrightarrow X\left(e^{j\omega}\right)$
le llamamos habitualmente par de transformadas.

Espectro de la secuencia exponencial real *(expresiones 31 y 32 del Tema 4).*

$$\boxed{x[n] = a^n u[n] \quad \forall a \text{ real, tal que} \quad |a| < 1} \leftrightarrow \boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}}$$

Ejercicio 1.4.1. Calcular la Transformada de Fourier para cada una de las secuencias siguientes:

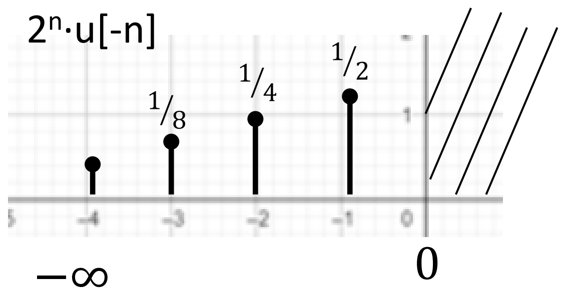
$c)\ x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ |1/4| < 1, por lo tanto ¡HAY PAR DE TRANSFORMADAS!

$a^n \cdot u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-a\cdot e^{-j\omega}}$ Si |a| < 1

$$({}^1/_4)^n \cdot u[n] \rightarrow \boxed{\mathbf{x}(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{4}\right)\cdot e^{-j\omega}}}$$

Señales y sistemas – Problemas 9

$b)\ \ x[n] = 2^n u[-n]$, $|2| > 1$, por lo tanto ¡**NO** HAY PAR DE TRANSFORMADAS!



$2^n \cdot u[-n] \rightarrow 2^{-1} = \frac{1}{2^1}$

Se usa la definición de DTFT y el cálculo analítico de la Transformada de Fourier (e.21)

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{0} a^n \cdot e^{-j\omega n}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n_1}^{n_2} (r)^n = \frac{1^{er}\ \text{termino} - (\text{ult.termino}) \times r}{1-r}$$

$$x(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{0} 2^n \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{0} (2 \cdot e^{-j\omega})^n = \frac{\cancelto{0}{(2 \cdot e^{-j\omega})^{-\infty}} - (2 \cdot e^{-j\omega})^{0+1}}{1 - (2 \cdot e^{-j\omega})} =$$

dividir

$$= \frac{-(2 \cdot e^{-j\omega})}{1 - 2 \cdot e^{-j\omega}} = \frac{-(2 \cdot e^{-j\omega}) / -(2 \cdot e^{-j\omega})}{1-(2 \cdot e^{-j\omega}) / -(2 \cdot e^{-j\omega})} = \frac{1}{1-(2 \cdot e^{-j\omega}) / -(2 \cdot e^{-j\omega})} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \boldsymbol{e^{j\omega}}}$$