2.4. Examen 4

SEÑALES Y SISTEMAS

Segundo Parcial, curso 2012-13

Grado en Ingeniería Multimedia

Fecha: 18 de Diciembre de 2012 Duración: 1:00 h

Problema 1. (5 PUNTOS) Dado el sistema LTI de la figura 2.10,

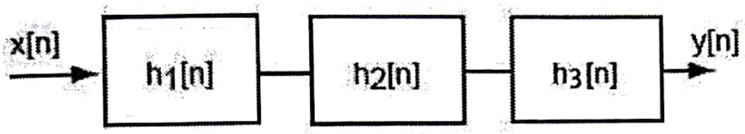

Figura 2.10. Sistema LTI.

siendo

$$h_3[n] = \left(\tfrac{1}{4}\right)^n (u[n] - u[n-3]),$$

$$h_2[n] = \delta[n+2],$$

$$h_1[n] = u[n-1].$$

a) (2,5 P) Calcula la respuesta impulsiva total del sistema $h_T[n]$.

b) (1 P) Indica si el sistema total es estable y causal.

c) (1,5 P) Encuentra $y[n]$ cuando la entrada del sistema es $x[n] = \delta[n+1] - 2\delta[n-1]$.

Problema 2. (5 PUNTOS) Considera el sistema LTI descrito por la siguiente ecuación en diferencias

$$y[n] = x[n] - x[n-1] + \frac{5}{6}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2].$$

a) (0,5 P) Dibuja el diagrama de bloques del sistema.

b) (0,5 P) Encuentra $H(e^{j\omega})$.

c) (2,5 P) Calcula $h[n]$.

d) (1,5 P) Encuentra la salida $y[n]$ ante la señal de entrada $x[n] = 2 \cdot e^{j(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4})}$.

SEÑALES Y SISTEMAS

Examen segundo parcial, curso 2012-13

Grado en Ingeniería Multimedia

Fecha: 18 de Diciembre de 2012 Duración: 1:00 h

SOLUCIÓN

Problema 1. (5 PUNTOS)

a) La $h_T[n]$ es la convolución de los tres sistemas:

$$h_T[n] = (h_1[n] * h_2[n]) * h_3[n].$$

El resultado de la primera convolución será

$$(h_1[n] * h_2[n]) = \delta[n+2] * u[n-1] = u[n+1].$$

Finalmente $h_T[n]$ será

$$h_T[n] = u[n+1] * h_3[n] = u[n+1] * \left[\left(\tfrac{1}{4}\right)^n (u[n] - u[n-3])\right] =$$
$$= u[n+1] * \left(\delta[n] + \tfrac{1}{4}\delta[n-1] + \tfrac{1}{16}\delta[n-2]\right) = u[n+1] + \tfrac{1}{4}u[n] + \tfrac{1}{16}u[n-1].$$

Extrayendo los elementos correspondientes a mismos instantes de tiempo o realizando una tabla se obtiene que

$$h_T[n] = \delta[n+1] + \tfrac{5}{4}\delta[n] + \tfrac{21}{16}u[n-1].$$

b) El sistema global no es causal ya que $h_T[n] \neq 0$ para $n < 0$, y no es estable ya que es de duración infinita y

$$\sum_{n=-1}^{+\infty} |h_T[n]| = \infty.$$

c) La salida del sistema ante la entrada $x[n]$ será

$$y[n] = x[n] * h_T[n] = (\delta[n+1] + \tfrac{5}{4}\delta[n] + \tfrac{21}{16}u[n-1]) * (\delta[n+1] - 2\delta[n-1]).$$

Después de realizar las convoluciones correspondientes y simplificando factores, se obtiene

$$y[n] = \delta[n+2] + \tfrac{5}{4}\delta[n+1] - \tfrac{11}{16}\delta[n] - \tfrac{19}{16}\delta[n-1] - \tfrac{21}{16}u[n-2].$$

Problema 2. (5 PUNTOS)

a)) El diagrama de bloques del sistema se muestra en la figura 2.11.

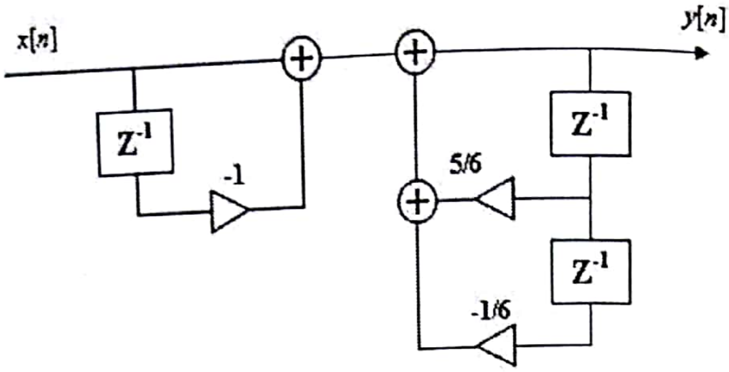

Figura 2.11. Diagrama de bloques del sistema.

b) Pasando la ecuación en diferencias a frecuencia se obtiene

$$Y(e^{j\omega}) - \tfrac{5}{6}Y(e^{j\omega})e^{-j\omega} + \tfrac{1}{6}Y(e^{j\omega})e^{-2j\omega} = X(e^{j\omega}) - X(e^{j\omega})e^{-j\omega}.$$

Así que

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1-e^{-j\omega}}{1-\frac{5}{6}e^{-j\omega}+\frac{1}{6}e^{-2j\omega}}.$$

c) Antes de descomponer en fracciones parciales, hay que buscar los dos polos del denominador, que resolviendo la ecuación de segundo grado del denominador son $p_1 = 1/2$ y $p_2 = 1/3$. Factorizando el denominador de $H(e^{j\omega})$,

$$1 - \tfrac{5}{6}e^{-j\omega} + \tfrac{1}{6}e^{-2j\omega} = (1 - \tfrac{1}{2}e^{-j\omega}) \cdot (1 - \tfrac{1}{3}e^{-j\omega}),$$

entonces se obtiene que

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1-e^{-j\omega}}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})\cdot(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})}.$$

Para invertir la salida hay que aplicar el método de descomposición en fracciones simples,

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1-e^{-j\omega}}{1-\frac{5}{6}e^{-j\omega}+\frac{1}{6}e^{-2j\omega}} = \frac{A}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}},$$

con

$$A = \text{lím}_{e^{j\omega}\to\frac{1}{2}} H(e^{j\omega})\cdot(1-\tfrac{1}{2}e^{-j\omega}) = \frac{1-2}{1-\frac{2}{3}} = -3,$$

$$B = \text{lím}_{e^{j\omega}\to\frac{1}{3}} H(e^{j\omega})\cdot(1-\tfrac{1}{3}e^{-j\omega}) = \frac{1-3}{1-\frac{3}{2}} = 4.$$

Luego, finalmente, la DTFT inversa de $H(e^{j\omega})$ es, aplicando la propiedad de linealidad y conocido el par de transformadas de una exponencial limitada por la izquierda:

$$h[n] = -3\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] + 4\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n].$$

d) La salida del sistema ante una entrada $x[n] = A\,e^{j(\omega_d n+\phi_0)}$, dado que el sistema es LTI, será

$$y[n] = A'\,e^{j\left(\omega_d n+\phi_0'\right)},$$

donde

$$A' = A\cdot|H(e^{j\omega_d})|,$$

$$\phi_0' = \phi_0 + \Phi_H(e^{j\omega_d}).$$

En nuestro caso

$$A' = 2\cdot|H(e^{j\pi/2})|,$$

$$\phi_0' = \tfrac{\pi}{4} + \Phi_H(e^{j\pi/2}).$$

Es decir, hay que calcular $H(e^{j\omega_d})$ a la pulsación $\omega_d = \pi/2$ rad/utd. Se obtiene un numero real positivo (argumento cero):

$$H(e^{j\pi/2}) = \frac{1-e^{-j\pi/2}}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\pi/2})\cdot(1-\frac{1}{3}e^{-j\pi/2})} = \frac{1+j}{5/6+j5/6} = 6/5 = 1{,}2,$$

$$|H(e^{j\pi/2})| = 1{,}2, \qquad \Phi_H(e^{j\pi/2}) = 0 \text{ rad}.$$

Por lo tanto, la respuesta del sistema a la señal $x[n]$ será

$$y[n] = A'\,e^{j\left(\omega_d n+\phi_0'\right)} = 2\cdot 1{,}2 e^{j(\frac{\pi n}{2}+\frac{1}{4}\pi)} = 2{,}4 e^{j(\frac{\pi n}{2}+\frac{1}{4}\pi)}.$$

El filtro amplifica la señal de entrada y no afecta a su fase.

2.8. Examen 8

SEÑALES Y SISTEMAS

Segundo Parcial, curso 2013-14

Grado en Ingeniería Multimedia

Fecha: 18 de Diciembre de 2013 Duración: 1:00 h

Problema 1. (5 PUNTOS) Dado el sistema LTI de la figura 2.16,

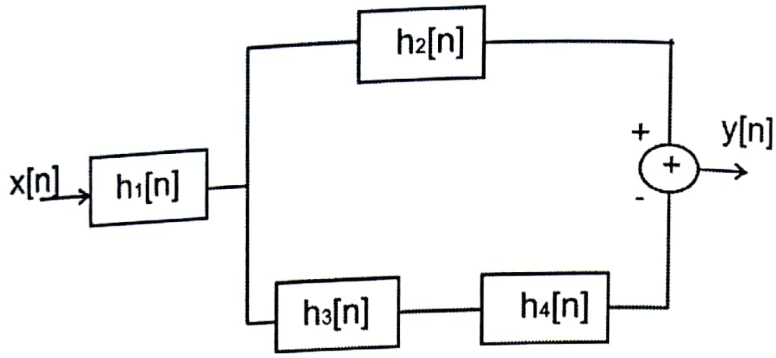

Figura 2.16. Sistema LTI.

siendo

$$h_1[n] = \left(-\tfrac{1}{6}\right)^n u[n],$$

$$h_2[n] = 4\delta[n-1] + 6\delta[n-2],$$

$$h_3[n] = 4\left(\tfrac{1}{2}\right)^n (u[n] - u[n-3]),$$

$$h_4[n] = u[n-1].$$

a) (4 P) Calcula la respuesta impulsiva total del sistema $h_T[n]$.

b) (1 P) Indica si $h_1[n]$ es estable y causal.

Problema 2. (5 PUNTOS) Considera el sistema LTI descrito por la siguiente ecuación en diferencias

$$y[n] = x[n] + x[n-1] + \tfrac{1}{2}y[n-1],$$

a) (0,5 P) Dibuja el diagrama de bloques del sistema.

b) (0,5 P) Encuentra $H(e^{j\omega})$.

c) (2,5 P) Calcula la salida $y1[n]$ ante la señal de entrada $x1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$.

d) (1,5 P) Encuentra la salida $y2[n]$ ante la señal de entrada $x2[n] = 4 \cdot e^{j(\frac{\pi n}{2}+1{,}249)}$.

SEÑALES Y SISTEMAS

Examen segundo parcial, curso 2013-14

Grado en Ingeniería Multimedia

Fecha: 18 de Diciembre de 2013 Duración: 1:00 h

SOLUCIÓN

Problema 1. (5 PUNTOS)

a) Se procede a simplificar el sistema completo poco a poco. En primer lugar:

$$h_{eq1}[n] = h_3[n] * h_4[n],$$

donde $h_3[n]$ se puede escribir en función de señales tipo impulso unidad:

$$h_3[n] = 4\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2].$$

Por lo tanto,

$$h_{eq1}[n] = h_3[n]*h_4[n] = u[n-1]*(4\delta[n]+2\delta[n-1]+\delta[n-2]) = 4u[n-1]+2u[n-2]+u[n-3].$$

Sacando los términos que se encuentran en el mismo instante de tiempo discreto, se obtiene también

$$h_{eq1}[n] = h_3[n] * h_4[n] = 4\delta[n-1] + 6\delta[n-2] + 7u[n-3].$$

El sistema ahora a considerar será el paralelo entre $h_2[n]$ y $h_{eq1}[n]$, es decir la diferencia entre estas dos respuestas:

$$h_{eq2}[n] = h_2[n] - h_{eq1}[n] = 4\delta[n-1] + 6\delta[n-2] - (4\delta[n-1] + 6\delta[n-2] + 7u[n-3]) = \\ = -7u[n-3].$$

El último paso es considerar las dos respuestas $h_1[n]$ y $h_{eq2}[n]$ en serie, siendo esta última convolución de duración infinita. Gráficamente se puede obtener que el resultado de esta convolución es diferente de cero a partir de $n \geq 3$ (invirtiendo $h_{eq2}[n]$):

$$h_t[n] = h_1[n] * h_{eq2}[n] = \begin{cases} 0, & n < 3, \\ \sum_{k=0}^{-3+n} h_1[k] \cdot h_{eq2}[n-k], & n \geq 3. \end{cases}$$

$$h_t[n] = h_1[n] * h_{eq2}[n] = \begin{cases} 0, & n < 3, \\ \sum_{k=0}^{n-3} -7 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^k = -7\frac{1-\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-2}}{\frac{7}{6}}, & n \geq 3. \end{cases}$$

Es decir

$$h_t[n] = -6\left(1 - \left(-\tfrac{1}{6}\right)^{n-2}\right) u[n-3].$$

b) El sistema es causal, ya que $h_1[n] = 0$ para $n < 0$, y es estable, ya que aunque es de duración infinita la suma de sus valores tiende a un valor finito:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |h_1[n]| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\tfrac{1}{6}\right)^n = \tfrac{6}{5} < \infty.$$

Problema 2. (5 PUNTOS)

a) El diagrama de bloques del sistema es el de la figura 2.17.

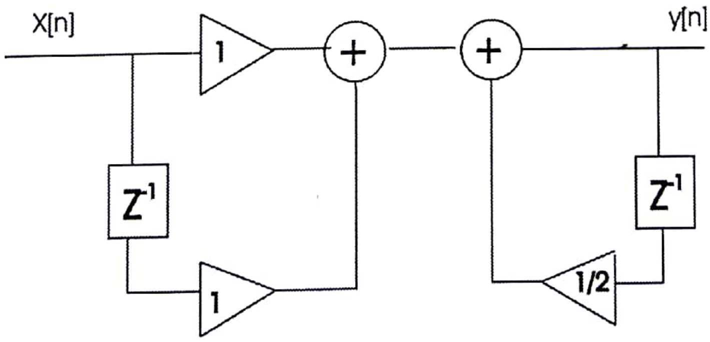

Figura 2.17. Diagrama de bloques del sistema.

b) Pasando la ecuación en diferencias a frecuencia se obtiene

$$Y(e^{j\omega}) - \tfrac{1}{2}Y(e^{j\omega})e^{-j\omega} = X(e^{j\omega}) + X(e^{j\omega})e^{-j\omega}.$$

Así que

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1+e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}.$$

c) La respuesta del sistema a la entrada $x1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ es la convolución entre la entrada y la respuesta impulsiva. En frecuencia se cumple entonces

$$Y1(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X1(e^{j\omega}),$$

donde

$$X1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}.$$

Se obtiene la salida

$$Y1(e^{j\omega}) = \frac{1+e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}.$$

Para invertir la transformada de Fourier de la salida, hay que aplicar el método de descomposición en fracciones simples,

$$Y1(e^{j\omega}) = \frac{A}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}},$$

con

$$A = \lim_{e^{j\omega}\to\frac{1}{2}} Y1(e^{j\omega}) \cdot (1-\tfrac{1}{2}e^{-j\omega}) = \frac{1+2}{1-\frac{1}{2}} = 6,$$

$$B = \lim_{e^{j\omega}\to\frac{1}{4}} Y1(e^{j\omega}) \cdot (1-\tfrac{1}{4}e^{-j\omega}) = \frac{1+4}{1-4\frac{1}{2}} = -5.$$

Luego, finalmente, la DTFT inversa de $Y1(e^{j\omega})$ es:

$$y1[n] = 6\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] - 5\left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n].$$

d) Las sinusoides son autofunciones de los sistemas LTI. Por ello se cumple en estos sistemas que ante una excitación de la forma

$$x2[n] = A\, e^{j(\omega_d n+\phi_0)},$$

la respuesta será

$$y2[n] = A'\, e^{j\left(\omega_d n+\phi_0'\right)},$$

donde

$$A' = A \cdot |H(e^{j\omega_d})|,$$

$$\phi_0' = \phi_0 + \Phi_H(e^{j\omega_d}).$$

En nuestro caso:

$$|H(e^{j\pi/2})| = \frac{1+e^{-j\pi/2}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\pi/2}} = |\tfrac{2}{5} - j\tfrac{6}{5}| = 1{,}265,$$

$$\Phi_H(e^{j\pi/2}) = \arctan(\tfrac{-6/5}{2/5}) = \arctan(-3) = -1{,}249 \text{ rad}.$$

Por lo tanto,

$$A' = A \cdot |H(e^{j\pi/2})| = 4 \cdot 1{,}265 = 5{,}06,$$

$$\phi_0' = \phi_0 + \Phi_H(e^{j\pi/2}) = 1{,}249 - 1{,}249 = 0 \text{ rad}.$$

Finalmente, la respuesta del sistema a la señal $x2[n]$ será

$$y2[n] = A'\, e^{j\left(\omega_d n + \phi_0'\right)} = 5{,}06 \cdot e^{j(\pi/2n)}.$$

El sistema amplifica la amplitud de la sinusoide y cancela su fase inicial.