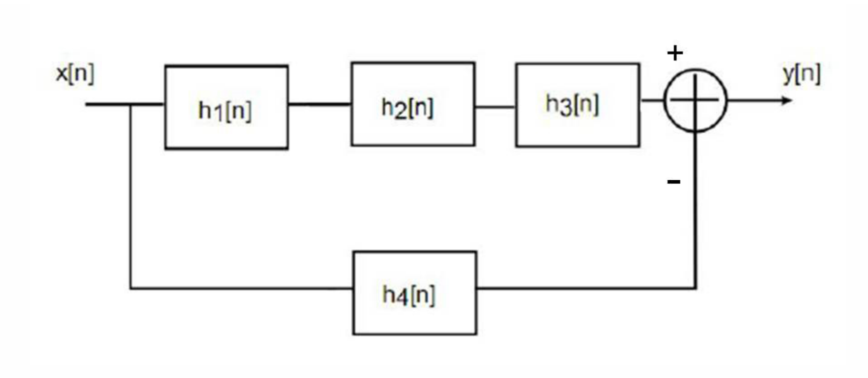
SEÑALES Y SISTEMAS

Segundo Parcial (Mod.1)

Grado en Ingeniería Multimedia.

Fecha: 21 de diciembre de 2018 Duración: 1:00 h

Problema 1 (5 PUNTOS) Dado el sistema LTI de la figura



siendo

$$h_1[n] = n\,u[n]$$

$$h_2[n] = \delta[n+1] - \delta[n]$$

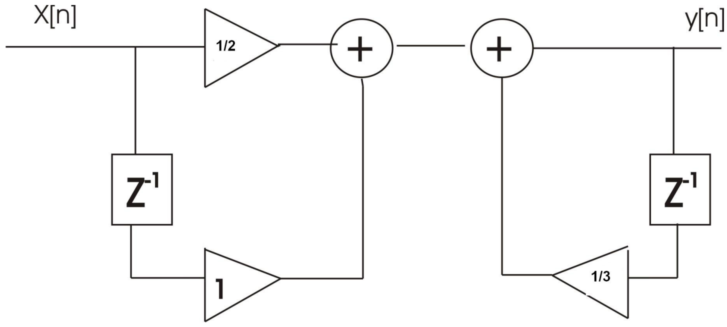
$$h_3[n] = 4\left(\tfrac{1}{4}\right)^n (u[n] - u[n-3])$$

$$h_4[n] = 2\delta[n-1] + \tfrac{1}{4}u[n-2]$$

a) (4 P) Calcula la respuesta impulsiva total del sistema $h_T[n]$ (se aconseja seguir el orden según la numeración de las $h_i[n]$).

b) (1 P) Indica si $h_1[n]$ es estable y causal.

Problema 2 (5 PUNTOS) Dado el sistema LTI representado en el siguiente diagrama de bloques



a) (0,5 P) Calcula la expresión de la ecuación en diferencias.

b) (0,5 P) Calcula $H(e^{j\omega})$.

c) (2,5 P) Calcula la respuesta $y_1[n]$ del sistema a la entrada

$$x_1[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]$$

d) (1,5 P) Calcula la respuesta $y_2[n]$ del sistema a la entrada

$$x_2[n] = 2e^{j(\frac{\pi n}{2}+1{,}429)}$$

SEÑALES Y SISTEMAS

Examen segundo parcial (Mod.1)

Grado en Ingeniería Multimedia.

Fecha: 21 de Diciembre de 2018 | Duración: 1:00 h

SOLUCIÓN

Problema 1 (5 PUNTOS)

a) Hay que reducir el sistema mediante los siguientes pasos:

$$h_{eq12}[n] = h_1[n] * h_2[n] = (\delta[n+1] - \delta[n]) * (n\, u[n]) = (n+1)u[n+1] - n\, u[n] = u[n].$$

Teniendo en cuenta que $h_3[h] = 4\delta[n] + \delta[n-1] + \frac{1}{4}\delta[n-2]$, y sumando los elementos correspondientes a mismos instantes de tiempo se obtiene que

$$h_{eq123}[n] = (h_3[n] * h_{eq12}[n]) = 4u[n] + u[n-1] + \tfrac{1}{4}u[n-2] = 4\delta[n] + 5\delta[n-1] + \tfrac{21}{4}u[n-2].$$

Finalmente la $h_T[n]$ es la diferencia entre $h_{eq123}[n]$ y $h_4[n]$:

$$h_T[n] = h_{eq123}[n] - h_4[n] = 4\delta[n] + 3\delta[n-1] + 5u[n-2].$$

b) $h_1[n]$ es causal ya que $h_1[n] \neq 0$ por $n < 0$, y no es estable ya que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h_1[n]| = \infty.$$

Problema 2 (5 PUNTOS)

a) Desde el diagrama de bloques se puede deducir la ecuación en diferencias

$$y[n] = \tfrac{1}{2}x[n] + x[n-1] + \tfrac{1}{3}y[n-1].$$

b) Para obtener $H(e^{j\omega})$ hay que calcular la transformada de Fourier en tiempo discreto de la expresión

$$H(e^{j\omega}) = \tfrac{1}{2}X(e^{j\omega}) + X(e^{j\omega})e^{-j\omega} + \tfrac{1}{3}(e^{-j\omega})Y(e^{j\omega})$$

Por lo tanto

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\frac{1}{2}+e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

c) La respuesta del sistema a la entrada $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ es la convolución entre la entrada y la respuesta impulsiva o en frecuencia

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

Donde

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

Entonces se obtiene que

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{\frac{1}{2}+e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

Para invertir la salida hay que aplicar el método de descomposición en fracciones simples,

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

Con

$$A = \text{lím}_{e^{j\omega}\to\frac{1}{2}} Y(e^{j\omega}) \cdot (1 - \tfrac{1}{2}e^{-j\omega}) = \tfrac{15}{2}$$

$$B = \text{lím}_{e^{j\omega}\to\frac{1}{3}} Y(e^{j\omega}) \cdot (1 - \tfrac{1}{3}e^{-j\omega}) = -7$$

Luego finalmente, la DTFT inversa de $Y(e^{j\omega})$ es:

$$y[n] = \tfrac{15}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] - 7\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n]$$

d) Las sinusoides son autofunciones de los sistemas LTI. Por ello se cumple en estos sistemas que ante una excitación de la forma

$$x[n] = A\, e^{j(\omega_d n+\phi_0)}$$

la respuesta será

$$y[n] = A'\, e^{j\left(\omega_d n+\phi_0'\right)}$$

donde

$$A' = A \cdot |H(e^{j\omega_d})|$$

$$\phi_0' = \phi_0 + \Phi_H(e^{j\omega_d})$$

En este caso

$$A' = 2 \cdot |H(e^{j\frac{\pi}{2}})| = 2 \cdot \left|\frac{\frac{1}{2}+e^{-j\frac{\pi}{2}}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{2}}}\right| = 2 \cdot \left|\frac{\frac{1}{2}-j}{1+j\frac{1}{3}}\right| = 2\left|\frac{3-j21}{20}\right| = 2 \cdot 1{,}06 = 2{,}12$$

$$\phi_0' = \phi_0 + \Phi_H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = 1{,}429 + \arctan(-7) = 1{,}429 - 1{,}429 = 0$$

Y por lo tanto, la respuesta del sistema a la señal $x[n]$ será

$$y[n] = A'\, e^{j\left(\omega_d n+\phi_0'\right)} = 2{,}12 e^{j(\frac{\pi}{2}n)}$$