SEÑALES Y SISTEMAS

Examen recuperación parcial, enero 2018

Grado en Ingeniería Multimedia.

Fecha: 18 de enero de 2018 | Duración: 1:00 h

Problema 1 (5,5 PUNTOS)

A partir de la señal: $\widehat{x}[n] = 2\delta[n+1] + \delta[n] + 3\delta[n-1]$, se genera la señal periódica discreta

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{x}[n-4k]$$

a) (1 P) Representa la señal $x[n]$ en función del tiempo discreto e índica su periodo N_0.

b) (3,5 P) Calcula el desarrollo en serie de Fourier discreto de $x[n]$ y sus coeficientes c_k.

c) (1 P) Representa el espectro en amplitud y fase de los coeficientes c_k en función de la frecuencia discreta.

Problema 2 (4,5 PUNTOS) Se dispone de un cuantificador de 5 bits cuya zona granular está comprendida entre los valores $x_{max} = 0,5$ y $x_{min} = -0,5$ Voltios. La función característica del cuantificador $Q(x)$ es la siguiente:

$$x_q = Q(x) = \begin{cases} \left(E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot \text{sign}(x), & |x| < x_{max}, \\ \frac{L-1}{2} \cdot \Delta \cdot \text{sign}(x), & |x| \geq x_{max}. \end{cases}$$

Donde L es el número de niveles y Δ es el escalón de cuantificación. A cada valor de x_q se le asigna una palabra de código binaria de acuerdo con una codificación signo-magnitud, con el bit de signo 1 para valores de tensión negativos y viceversa.

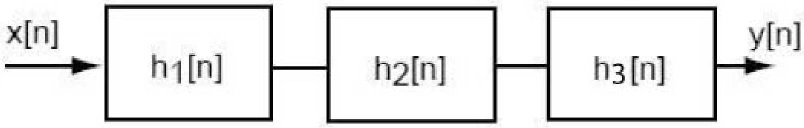
a) (3 P) Considera las muestras $x_1 = 0,093$ V, $x_2 = -0,294$ V y $x_3 = 0,65$ V. Calcula su valor cuantificado, su palabra de código y el error relativo de cuantificación en tanto por ciento.

b) (1 P) Suponiendo que se quiera muestrear y cuantificar la señal $x(t) = 0{,}5\cos(0{,}2\pi t)$ y considerando estos dos otros cuantificadores uniformes, cuya características son
2) $bits = 4, \quad 2X_m = 1,$
3) $bits = 6, \quad 2X_m = 1.$
Entre las tres opciones de cuantificación (la primera y estas últimas dos), ¿cuál es la que cuantificaría mejor la señal $x(t)$ ajustándose a sus características? Justifica tu elección.

c) (0,5 P) Suponiendo que el margen dinámico del cuantificador sea $2X_m = 5\sigma_x$, es decir 5 veces el valor cuadrático medio de la señal, calcula la relación señal a ruido de cuantificación utilizando la siguiente fórmula, donde b es el número de bits:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = 6,02 \cdot (b-1) + 10,8 - 20 \cdot \log\left(\frac{2X_m}{2\sigma_x}\right) \quad \text{dB.}$$

Problema 3 (4,5 PUNTOS) Dado el sistema LTI de la figura



siendo

$$h_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$h_2[n] = (n-1)\, u[n-1]$$

$$h_3[n] = \delta[n+2] - \delta[n+1]$$

a) (1 P) Estudia la causalidad y estabilidad del primer sistema LTI, $h_1[n]$.

b) (3,5 P) Calcula la respuesta total del sistema $h_T[n]$.

Problema 4 (5,5 PUNTOS) Considera el siguiente sistema:

$$y[n] = bx[n] - \tfrac{3}{5}x[n-1] + \tfrac{7}{10}y[n-1] - \tfrac{1}{10}y[n-2].$$

a) (0,5 P) Representa el diagrama de bloques del sistema. ¿De que tipo de filtro se trata y cuál es su orden?

b) (1 P) Calcula su respuesta en frecuencia y después determina la constante b para que $H(e^{j\cdot 0}) = 1$.

c) (2,5 P) Supón $b = 1$. Calcula la respuesta impulsiva $h[n]$ del sistema.

d) (1,5 P) Supón $b = 1$. Calcula la respuesta $y[n]$ ante la señal

$$x[n] = \delta[n] - \tfrac{1}{2}\delta[n-1].$$

SEÑALES Y SISTEMAS

Examen recuperación de Enero

Grado en Ingeniería Multimedia.

Fecha: 18 de enero de 2018 Duración: 1:00 h

SOLUCIÓN

Problema 1 (5,5 PUNTOS)

a) La señal $x[n]$ es periódica de periodo $N_0 = 4$, sus valores son $x[n] = \{1, 3, 0, 2\}$ para $n = \{0, 1, 2, 3\}$.

b) Los coeficientes c_k serán:

$$c_0 = \frac{1}{4}(1 + 3 + 0 + 2) = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$c_1 = \frac{1}{4}(1 - 3j + 2j) = \frac{1}{4} - \frac{j}{4}.$$
$$|c_1| = \frac{\sqrt{2}}{4}, \qquad \Phi_{c1} = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$c_2 = \frac{1}{4}(1 - 3 - 2) = \frac{-4}{4} = -1.$$
$$|c_2| = 1, \qquad \Phi_{c2} = \arctan\left(\frac{0}{-1}\right) = \pi \text{ rad.}$$

$$c_3 = \frac{1}{4}(1 + 3j - 2j) = \frac{1}{4} + \frac{j}{4}$$
$$|c_3| = \frac{\sqrt{2}}{4}, \qquad \Phi_{c3} = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

Sustituyendo los coeficientes en la ecuación del DSF discreto de $x[n]$ se obtiene

$$x[n] = \sum_{k=0}^{3} c_k e^{j\frac{\pi k n}{2}} = c_0 + c_1 e^{j\frac{\pi n}{2}} + c_2 e^{j\pi n} + c_3 e^{j\frac{3\pi n}{2}} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j\frac{\pi n}{2}} + e^{j\pi} e^{j\pi n} + \frac{\sqrt{2}}{4} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{j\frac{3\pi n}{2}}$$

Problema 2 (4,5 PUNTOS)

a) Las primeras dos muestras caen en zona granular mientras la tercera está en saturación:

$$x_{q1} = 0{,}07812\,V,\ 00010,\ e_{q1} = 16\,\%,$$
$$x_{q2} = -0{,}29687\,V,\ 11001,\ e_{q2} = 0{,}97\,\%,$$
$$x_{q3} = 0{,}48437\,V,\ 01111,\ e_{q3} = 25{,}5\,\%.$$

b) Para elegir la mejor opción hay que fijarse en el margen dinámico del cuantificador y calcular el escalón de cuantificación:

$$\Delta_1 = 1/32 = 0{,}03125\,V,$$
$$\Delta_2 = 1/16 = 0{,}0625\,V,$$
$$\Delta_3 = 1/64 = 0{,}01562\,V.$$

El margen dinámico es idéntico para los tres cuantificadores y coincide con la amplitud de la señal $x(t)$, pero tenemos que $\Delta_3 < \Delta_1 < \Delta_2$. Por lo tanto la mejor opción es la tercera.

c) Aplicando la fórmula se obtiene

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = 6,02 \cdot (b-1) + 10,8 - 20 \cdot \log\left(\frac{2X_m}{2\sigma_x}\right) = 26{,}92 \quad \text{dB}.$$

Problema 3 (4,5 PUNTOS)

a) El sistema $h_1[n]$ es causal ya que $h_1[n] = 0$ por $n < 0$, también es estable ya que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mid h_1[n] \mid = \sum_{n=0}^{\infty} \mid h_1[n] \mid = 2 < \infty.$$

b) Para obtener la respuesta impulsiva total hay que realizar dos convoluciones:

$$h_{eq23} = h_2[n] * h_3[n] = (n+1)\, u[n+1] - n\, u[n] = u[n],$$

donde el último resultado se puede obtener utilizando una tabla o una gráfica. Finalmente

$$h_T[n] = h_1[n] * h_{eq23}[n] = (1/2)^n\, u[n] * u[n].$$

Esta convolución es de duración infinita y tiene valores diferentes de cero solo para $n \geq 0$:

$$h_T[n] = \sum_{k=0}^{n} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k = 2\left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right) u[n] = \left(2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right) u[n].$$

Problema 4 (5,5 PUNTOS)

a) El filtro es un filtro de tipo IIR de orden $N = 2$.

b) Aplicando la DTFT sobre la ecuación en diferencias, y por las propiedades de esta transformada se llega a que

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{b - \frac{3}{5}e^{-j\omega}}{1 - \frac{7}{10}e^{-j\omega} + \frac{1}{10}e^{-j2\omega}}$$

De la condición de que $H(e^{j\cdot 0}) = 1$, cuando la pulsación $\omega = 0$, se obtiene que $b = 1$.

c) Los polos del denominador de $H(e^{j\omega})$ son $p1 = 1/2$ y $p2 = 1/5$. Por lo tanto la respuesta en frecuencia se puede escribir descomponiendo en fracciones simples:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{3}{5}e^{-j\omega}}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{5}e^{-j\omega})} = \frac{-\frac{1}{3}}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})} + \frac{\frac{4}{3}}{(1 - \frac{1}{5}e^{-j\omega})}.$$

Por lo tanto antitransformando en el tiempo se obtiene

$$h[n] = -\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] + \tfrac{4}{3}\left(\tfrac{1}{5}\right)^n u[n].$$

d) En frecuencia tenemos que

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$$

con $X(e^{j\omega}) = (1 - \frac{1}{2}e^{j\omega})$, así que simplificando el término en común

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{3}{5}e^{-j\omega}}{(1 - \frac{1}{5}e^{-j\omega})} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{5}e^{-j\omega})} - \frac{\frac{3}{5}e^{-j\omega}}{(1 - \frac{1}{5}e^{-j\omega})}.$$

En el dominio del tiempo se obtiene

$$y[n] = \left(\tfrac{1}{5}\right)^n u[n] - \tfrac{3}{5}\left(\tfrac{1}{5}\right)^{n-1} u[n-1].$$