SEÑALES Y SISTEMAS

Examen convocatoria de Enero

Grado en Ingeniería Multimedia.

Fecha: 23 de enero de 2019 Duración: 1:00 h

Primer parcial

Problema 1 (5,5 PUNTOS) A partir de la señal

$$\widehat{x}[n] = 2\delta[n+1] + \delta[n] + 3\delta[n-1]$$

se genera la señal periódica discreta

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{x}[n-4k]$$

a) (1 P) Representa la señal $x[n]$ en función del tiempo discreto e índica su periodo N_0.

b) (3,5 P) Calcula el desarrollo en serie de Fourier discreto de $x[n]$ y sus coeficientes c_k.

c) (1 P) Representa el espectro en amplitud y fase de los coeficientes c_k en función de la frecuencia discreta.

Problema 2 (4,5 PUNTOS) Se dispone de un cuantificador de 5 bits cuya zona granular está comprendida entre los valores $x_{max} = 0,5$ y $x_{min} = -0,5$ Voltios. La función característica del cuantificador $Q(x)$ es la siguiente:

$$x_q = Q(x) = \begin{cases} \left(E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot sign(x), & |x| < x_{max}, \\ \frac{L-1}{2} \cdot \Delta \cdot sign(x), & |x| \geq x_{max}. \end{cases}$$

Donde L es el número de niveles y Δ es el escalón de cuantificación. A cada valor de x_q se le asigna una palabra de código binaria de acuerdo con una codificación signo-magnitud, con el bit de signo 1 para valores de tensión negativos y viceversa.

a) (3 P) Considera las muestras $x_1 = 0,083$ V, $x_2 = -0,294$ V y $x_3 = 0,65$ V. Calcula su valor cuantificado, su palabra de código y el error relativo de cuantificación en tanto por ciento.

b) (1 P) Suponiendo que se quiera muestrear y cuantificar la señal $x(t) = 0{,}5\cos(0{,}2\pi t)$ y considerando estos dos otros cuantificadores uniformes, cuya características son
2) $bits = 4, \qquad 2X_m = 1,$
3) $bits = 6, \qquad 2X_m = 1.$
Entre las tres opciones de cuantificación (la primera y estas últimas dos), ¿cuál es la que cuantificaría mejor la señal $x(t)$ ajustándose a sus características? Justifica tu elección.

c) (0,5 P) Suponiendo que la señal se encuentre siempre dentro del margen dinámico del cuantificador, para la opción mejor de los tres cuantificadores anteriores, cuál sería el error absoluto más grande?

Segundo parcial

Problema 3 (4,5 PUNTOS) Considera una asociación en cascada (serie) de dos sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI). Se sabe que la respuesta al impulso del primer sistema es

$$h_1[n] = \prod\left(\frac{n+1}{4}\right)$$

y la respuesta al impulso equivalente del sistema global es

$$h_{eq}[n] = 2\delta[n+3] + \delta[n+2] + 5\delta[n+1] + 2\delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] - \delta[n-3] + 2\delta[n-4].$$

a) $(2,5$ P) Calcula la respuesta al impulso del segundo sistema, $h_2[n]$.

b) $(0,5$ P) Estudia la causalidad y estabilidad del primer sistema LTI, $h_1[n]$.

c) $(1,5$ P) Calcula la convolución entre $h_1[n]$ y $x[n] = 2^n\,(u[n] - u[n-3])$.

Problema 4 (5,5 PUNTOS) Considera el sistema:

$$y[n] = \tfrac{1}{2}y[n-1] + bx[n] - \tfrac{1}{4}x[n-1]$$

a) (1 P) Calcula su respuesta en frecuencia y después determina la constante b para que $H\left(e^{j\cdot 0}\right) = 1$.

b) (0,5 P) Representa el diagrama de bloque del sistema. Que tipo de filtro es IIR o FIR.

c) (2 P) Supón ahora que $b = \frac{3}{4}$. Calcula la respuesta ante la señal

$$x_1[n] = \left(\tfrac{1}{5}\right)^n u[n]$$

d) (2 P) Para $b = \frac{3}{4}$. Calcula la respuesta ante la señal

$$x_2[n] = cos\left(\tfrac{\pi}{6}n\right)$$

SEÑALES Y SISTEMAS

Examen convocatoria de Enero

Grado en Ingeniería Multimedia.

Fecha: 23 de enero de 2019 Duración: 1:00 h

SOLUCIÓN

Problema 1 (5,5 PUNTOS)

a) La señal $x[n]$ es periódica de periodo $N_0 = 4$, sus valores son $x[n] = \{1, 3, 0, 2\}$ para $n = \{0, 1, 2, 3\}$.

b) Los coeficientes c_k serán:

$$c_0 = \frac{1}{4}(1 + 3 + 0 + 2) = \frac{6}{4} = 1{,}5$$

$$c_1 = \frac{1}{4}(1 - 3j + 2j) = \frac{1}{4} - \frac{j}{4}.$$
$$|c_1| = \frac{\sqrt{2}}{4}, \qquad \Phi_{c1} = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$c_2 = \frac{1}{4}(1 - 3 - 2) = \frac{-4}{4} = -1.$$
$$|c_2| = 1, \qquad \Phi_{c2} = \arctan\left(\frac{0}{-1}\right) = \pi \text{ rad.}$$

$$c_3 = \frac{1}{4}(1 + 3j - 2j) = \frac{1}{4} + \frac{j}{4}$$
$$|c_3| = \frac{\sqrt{2}}{4}, \qquad \Phi_{c3} = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

Sustituyendo los coeficientes en la ecuación del DSF discreto de $x[n]$ se obtiene

$$x[n] = \sum_{k=0}^{3} c_k e^{j\frac{\pi k n}{2}} = c_0 + c_1 e^{j\frac{\pi n}{2}} + c_2 e^{j\pi n} + c_3 e^{j\frac{3\pi n}{2}} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j\frac{\pi n}{2}} + e^{j\pi} e^{j\pi n} + \frac{\sqrt{2}}{4} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{j\frac{3\pi n}{2}}$$

Problema 2 (4,5 PUNTOS)

a) Las primeras dos muestras caen en zona granular mientras la tercera está en saturación:

$$x_{q1} = 0{,}07812\,V,\ 00010,\ e_{q1} = 5{,}88\,\%,$$
$$x_{q2} = -0{,}29687\,V,\ 11001,\ e_{q2} = 0{,}97\,\%,$$
$$x_{q3} = 0{,}48437\,V,\ 01111,\ e_{q3} = 25{,}5\,\%.$$

b) Para elegir la mejor opción hay que fijarse en el margen dinámico del cuantificador y calcular el escalón de cuantificación:

$$\Delta_1 = 1/32 = 0{,}03125\,V,$$
$$\Delta_2 = 1/16 = 0{,}0625\,V,$$
$$\Delta_3 = 1/64 = 0{,}01562\,V.$$

El margen dinámico es idéntico para los tres cuantificadores y coincide con la amplitud de la señal $x(t)$, pero tenemos que $\Delta_3 < \Delta_1 < \Delta_2$. Por lo tanto la mejor opción es la tercera.

c) El error absoluto, si trabajamos en zona granular será siempre $|e_q| \leq \frac{\Delta}{2}$, por lo tanto el más grande, considerando el tercer cuantificador, será:

$$|e_q| \leq \frac{\Delta_3}{2} = 0{,}007812\,V.$$

Problema 3 (4,5 PUNTOS)

a) Una forma de obtener $h_2[n]$ es realizar una tabla y calcular la convolución desplazando $h_1[n]$. Las incógnitas serán los valores de $h_2[n]$, ya que se conocen los valores de la respuesta final $h_{eq}[n]$. Además $h_2[n]$ tendrá que empezar en el instante $n = -2$ y acabar en el instante $n = 2$ ya que $h_{eq}[n]$ está comprendida entre los instantes $n = -3$ y $n = 4$:

$$n_{INh_2} = n_{INh_{eq}} - n_{INh_1} = -3 - (-1) = -2$$

$$n_{FIh_2} = n_{FIh_{eq}} - n_{FIh_1} = 4 - 2 = 2$$

Por lo tanto tenemos

k	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	k	h_{eq}
$h_2[k]$			2	-1	4	-3	2					
$h_1[k]$				1	1	1	1					
$h_1[-3-k]$	1	1	1								$k=-3$	2
$h_1[-2-k]$	1	1	1	1							$k=-2$	1
$h_1[-1-k]$		1	1	1	1						$k=-1$	5
$h_1[-k]$			1	1	1	1					$k=0$	2
$h_1[1-k]$				1	1	1	1				$k=1$	2
$h_1[2-k]$					1	1	1	1			$k=2$	3
$h_1[3-k]$						1	1	1	1		$k=3$	-1
$h_1[4-k]$							1	1	1	1	$k=4$	2

Así que se puede escribir

$$h_2[n] = 2\delta[n+2] - \delta[n+1] + 4\delta[n] - 3\delta[n-1] + 2\delta[n-2].$$

b) El sistema $h_1[n]$ no es causal ya que $h_1[n] \neq 0$ por $n < 0$, mientras es estable ya que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\, h_1[n] \,| = \sum_{n=-1}^{2} |\, h_1[n] \,| = 4 < \infty$$

c) La señal $x[n]$ se puede escribir como

$$x[n] = 2^n\,(u[n] - u[n-3]) = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 4\delta[n-2]$$

Por lo tanto la solución de la convolución será

$$y[n] = h_1[n] * x[n] = (\delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]) * x[n] = x[n+1] + x[n] + x[n-1] + x[n-2]$$

substituyendo los valores de x[n] y sumando términos en común tendremos

$$y[n] = h_1[n] * x[n] = \delta[n+1] + 3\delta[n] + 7\delta[n-1] + 7\delta[n-2] + 6\delta[n-3] + 4\delta[n-4]$$

Problema 4 (5,5 PUNTOS)

a) Aplicando la DTFT sobre la ecuación en diferencias, y por las propiedades de esta transformada se llega a que

$$Y(e^{j\omega}) = bX(e^{j\omega}) - \frac{1}{4}e^{j\omega}X(e^{j\omega}) + \frac{1}{2}e^{j\omega}Y(e^{j\omega})$$

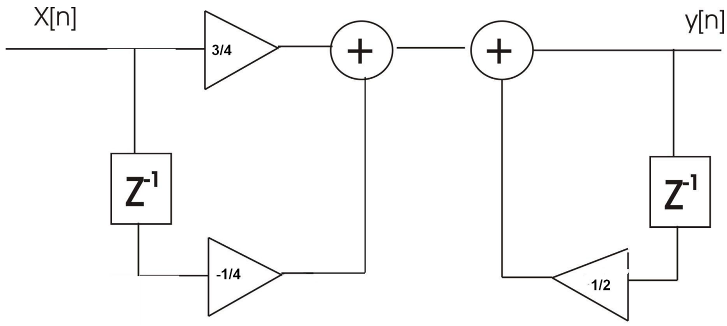
$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{b-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

De la condición de que $H(e^{j\cdot 0}) = 1$, cuando la pulsación $\omega = 0$, se obtiene que el valor de b

$$H(e^{j\cdot 0}) = \frac{b-0{,}25}{1-0{,}5\cdot 1} = 1 \Longrightarrow b = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

b) El diagrama de bloque se obtiene a partir de la ecuación en diferencias

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{3}{4}x[n] - \frac{1}{4}x[n-1]$$



El filtro es un filtro IIR ya que tiene parte recurrente.

c) En frecuencia tenemos que

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

con

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{5}e^{-j\omega}}$$

Por lo tanto

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5}e^{-j\omega}}$$

Para invertir la salida hay que aplicar el método de descomposición en fracciones simples,

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-\frac{1}{5}e^{-j\omega}}$$

Con

$$A = \text{lím}_{e^{j\omega}\to\frac{1}{2}} Y(e^{j\omega}) \cdot (1 - \tfrac{1}{2}e^{-j\omega}) = \tfrac{5}{12}$$

$$B = \text{lím}_{e^{j\omega}\to\frac{1}{5}} Y(e^{j\omega}) \cdot (1 - \tfrac{1}{5}e^{-j\omega}) = \tfrac{1}{3}$$

Podemos entonces escribir

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{\frac{5}{12}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{5}e^{-j\omega}}$$

Luego finalmente, la DTFT inversa de $Y(e^{j\omega})$ es:

$$y[n] = \tfrac{5}{12}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{5}\right)^n u[n]$$

d) La señal de entrada introducida se puede expresar mediante la ecuación de Euler como la suma de dos sinusoidales complejas

$$x_2[n] = cos\left(\tfrac{\pi}{6}n\right) = \tfrac{1}{2}(e^{(j\frac{\pi}{6}n)} + e^{(-j\frac{\pi}{6}n)})$$

La señal de entrada solamente contiene información en dos frecuencias angulares concretas, en $\pi/6$ y $-\pi/6$. Por lo tanto, la señal $y[n]$ pedida únicamente podrá contener información en esas mismas frecuencias. Así, la señal de salida $y[n]$ serán las dos mismas sinusoidales complejas de la señal de entrada con una variación en su amplitud y en su fase inicial, producidas por la respuesta en frecuencia del filtro. Para determinar estas variaciones es necesario evaluar la respuesta en frecuencia del filtro en las frecuencias de las dos sinusoides de entrada:

$$H(e^{j\cdot\frac{\pi}{6}}) = \frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{6}}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{6}}} = 0{,}869 - j0{,}1628 = 0{,}88e^{-j0{,}185}$$

$$H(e^{j\cdot\frac{\pi}{6}}) = \frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{6}}}{1-\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{6}}} = 0{,}869 + j0{,}1628 = 0{,}88e^{j0{,}185}$$

Por lo que:

$$y[n] = \tfrac{1}{2}\left(0{,}88e^{-j0{,}185} + 0{,}88e^{j0{,}185}\right)$$

y usando la ecuación de Euler

$$y[n] = \tfrac{1}{2}\left(0{,}88e^{-j0{,}185} + 0{,}88e^{j0{,}185}\right) = 0{,}88\cos(\tfrac{\pi}{6}n - 0{,}185)$$