SEÑALES Y SISTEMAS

Examen recuperación parcial, Enero 2015

Grado en Ingeniería Multimedia.

Fecha: 15 de Enero de 2015 Duración: 1:00 h

Problema 1 (5,5 PUNTOS) A partir de la señal

$$\widehat{x}[n] = 2\delta[n+1] + \delta[n] + 3\delta[n-1]$$

se genera la señal periódica discreta

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{x}[n-4k]$$

a) (1 P) Representa la señal $x[n]$ en función del tiempo discreto e índica su periodo N_0.

b) (3,5 P) Calcula el desarrollo en serie de Fourier discreto de $x[n]$ y sus coeficientes c_k.

c) (1 P) Representa el espectro en amplitud y fase de los coeficientes c_k en función de la frecuencia discreta.

Problema 2 (4,5 PUNTOS) Se dispone de un cuantificador de 5 bits cuya zona granular está comprendida entre los valores $x_{max} = 0,5$ y $x_{min} = -0,5$ Voltios. La función característica del cuantificador $Q(x)$ es la siguiente:

$$x_q = Q(x) = \begin{cases} \left(E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot \text{sign}(x), & |x| < x_{max}, \\ \frac{L-1}{2} \cdot \Delta \cdot \text{sign}(x), & |x| \geq x_{max}. \end{cases}$$

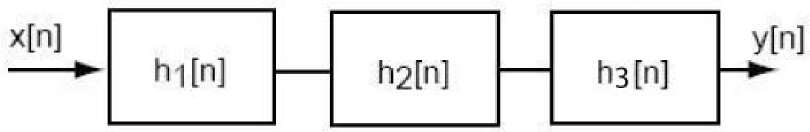
Donde L es el número de niveles y Δ es el escalón de cuantificación. A cada valor de x_q se le asigna una palabra de código binaria de acuerdo con una codificación signo-magnitud, con el bit de signo 1 para valores de tensión negativos y viceversa.

a) (3 P) Considera las muestras $x_1 = 0,093$ V, $x_2 = -0,294$ V y $x_3 = 0,65$ V. Calcula su valor cuantificado, su palabra de código y el error relativo de cuantificación en tanto por ciento.

b) (1 P) Suponiendo que se quiera muestrear y cuantificar la señal $x(t) = 0{,}5\cos(0{,}2\pi t)$ y considerando estos dos otros cuantificadores uniformes, cuya características son
2) $bits = 4, \quad 2X_m = 1,$
3) $bits = 6, \quad 2X_m = 1.$
Entre las tres opciones de cuantificación (la primera y estas últimas dos), ¿cuál es la que cuantificaría mejor la señal $x(t)$ ajustándose a sus características? Justifica tu elección.

c) (0,5 P) Suponiendo que la señal se encuentre siempre dentro del margen dinámico del cuantificador, para la opción mejor de los tres cuantificadores anteriores, cuál sería el error absoluto más grande?

Problema 3 (4,5 PUNTOS) Dado el sistema LTI de la figura



siendo

$$h_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$h_2[n] = (n-1)\,u[n-1]$$

$$h_3[n] = \delta[n+2] - \delta[n+1]$$

a) (1 P) Estudia la causalidad y estabilidad del primer sistema LTI, $h_1[n]$.

b) (3,5 P) Calcula la respuesta total del sistema $h_T[n]$.

Problema 4 (5,5 PUNTOS) Considera el siguiente sistema:

$$y[n] = bx[n] - \tfrac{3}{5}x[n-1] + \tfrac{7}{10}y[n-1] - \tfrac{1}{10}y[n-2].$$

a) (0,75 P) Representa el diagrama de bloques del sistema. ¿De que tipo de filtro se trata y cuál es su orden?

b) (1 P) Calcula su respuesta en frecuencia y después determina la constante b para que $H(e^{j\cdot 0}) = 1$.

c) (2 P) Supón $b = 1$. Calcula la respuesta impulsiva $h[n]$ del sistema.

d) (1,75 P) Supón $b = 1$. Calcula la respuesta $y[n]$ ante la señal

$$x[n] = \delta[n] - \tfrac{1}{2}\delta[n-1].$$

SEÑALES Y SISTEMAS

Examen recuperación de Enero

Grado en Ingeniería Multimedia.

Fecha: 15 de Enero de 2015 — Duración: 1:00 h

SOLUCIÓN

Problema 1 (5,5 PUNTOS)

a) La señal $x[n]$ es periódica de periodo $N_0 = 4$, sus valores son $x[n] = \{1, 3, 0, 2\}$ para $n = \{0, 1, 2, 3\}$.

b) Los coeficientes c_k serán:

$$c_0 = \frac{1}{4}(1 + 3 + 0 + 2) = \frac{3}{3} = 1{,}5$$

$$c_1 = \frac{1}{4}(1 - 3j + 2j) = \frac{1}{4} - \frac{j}{4}.$$
$$|c_1| = \frac{\sqrt{2}}{4}, \qquad \Phi_{c1} = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$c_2 = \frac{1}{4}(1 - 3 - 2) = \frac{-4}{4} = -1.$$
$$|c_2| = 1, \qquad \Phi_{c2} = \arctan\left(\frac{0}{-1}\right) = \pi \text{ rad.}$$

$$c_3 = \frac{1}{4}(1 + 3j - 2j) = \frac{1}{4} + \frac{j}{4}$$
$$|c_3| = \frac{\sqrt{2}}{4}, \qquad \Phi_{c3} = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

Sustituyendo los coeficientes en la ecuación del DSF discreto de $x[n]$ se obtiene

$$x[n] = \sum_{k=0}^{3} c_k e^{j\frac{\pi k n}{2}} = c_0 + c_1 e^{j\frac{\pi n}{2}} + c_2 e^{j\pi n} + c_3 e^{j\frac{3\pi n}{2}} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j\frac{\pi n}{2}} + e^{j\pi} e^{j\pi n} + \frac{\sqrt{2}}{4} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{j\frac{3\pi n}{2}}$$

Problema 2 (4,5 PUNTOS)

a) Las primeras dos muestras caen en zona granular mientras la tercera está en saturación:

$$x_{q1} = 0{,}07812\,V,\ 00010,\ e_{q1} = 16\,\%,$$
$$x_{q2} = -0{,}29687\,V,\ 11001,\ e_{q2} = 0{,}97\,\%,$$
$$x_{q3} = 0{,}48437\,V,\ 01111,\ e_{q3} = 25{,}5\,\%.$$

b) Para elegir la mejor opción hay que fijarse en el margen dinámico del cuantificador y calcular el escalón de cuantificación:

$$\Delta_1 = 1/32 = 0{,}03125\,V,$$
$$\Delta_2 = 1/16 = 0{,}0625\,V,$$
$$\Delta_3 = 1/64 = 0{,}01562\,V.$$

El margen dinámico es idéntico para los tres cuantificadores y coincide con la amplitud de la señal $x(t)$, pero tenemos que $\Delta_3 < \Delta_1 < \Delta_2$. Por lo tanto la mejor opción es la tercera.

c) El error absoluto, si trabajamos en zona granular será siempre $|e_q| \leq \frac{\Delta}{2}$, por lo tanto el más grande, considerando el tercer cuantificador, será:

$$|e_q| \leq \frac{\Delta_3}{2} = 0{,}007812\,V.$$

Problema 3 (4,5 PUNTOS)

a) El sistema $h_1[n]$ es causal ya que $h_1[n] = 0$ por $n < 0$, también es estable ya que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\ h_1[n]\ | = \sum_{n=0}^{\infty} |\ h_1[n]\ | = 2 < \infty.$$

b) Para obtener la respuesta impulsiva total hay que realizar dos convoluciones:

$$h_{eq23} = h_2[n] * h_3[n] = (n+1)\,u[n+1] - n\,u[n] = u[n],$$

donde el último resultado se puede obtener utilizando una tabla o una gráfica. Finalmente

$$h_T[n] = h_1[n] * h_{eq23}[n] = (1/2)^n\,u[n] * u[n].$$

Esta convolución es de duración infinita y tiene valores diferentes de cero solo para $n \geq 0$:

$$h_T[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k = 2\left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right) u[n] = \left(2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right) u[n].$$

Problema 4 (5,5 PUNTOS)

a) El filtro es un filtro de tipo IIR de orden $N = 2$.

b) Aplicando la DTFT sobre la ecuación en diferencias, y por las propiedades de esta transformada se llega a que

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{b - \frac{3}{5}e^{-j\omega}}{1 - \frac{7}{10}e^{-j\omega} + \frac{1}{10}e^{-j2\omega}}$$

De la condición de que $H(e^{j\cdot 0}) = 1$, cuando la pulsación $\omega = 0$, se obtiene que $b = 1$.

c) Los polos del denominador de $H(e^{j\omega})$ son $p1 = 1/2$ y $p2 = 1/5$. Por lo tanto la respuesta en frecuencia se puede escribir descomponiendo en fracciones simples:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{3}{5}e^{-j\omega}}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{5}e^{-j\omega})} = \frac{-\frac{1}{3}}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})} + \frac{\frac{4}{3}}{(1 - \frac{1}{5}e^{-j\omega})}.$$

Por lo tanto antitransformando en el tiempo se obtiene

$$h[n] = -\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\ u[n] + \tfrac{4}{3}\left(\tfrac{1}{5}\right)^n\ u[n].$$

d) En frecuencia tenemos que

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

con $X(e^{j\omega}) = (1 - \frac{1}{2}e^{j\omega})$, así que simplificando el término en común

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{3}{5}e^{-j\omega}}{(1 - \frac{1}{5}e^{-j\omega})} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{5}e^{-j\omega})} - \frac{\frac{3}{5}e^{-j\omega}}{(1 - \frac{1}{5}e^{-j\omega})}.$$

En el dominio del tiempo se obtiene

$$y[n] = \left(\tfrac{1}{5}\right)^n\ u[n] - \tfrac{3}{5}\left(\tfrac{1}{5}\right)^{n-1}\ u[n-1].$$