11/06/2019

Variável Aleatória Contínua

X pode assumir qualquer valor entre $-\infty$ e $+\infty$

Pergunta-se a probabilidade de X ocorrer no intervalo $a \leq x \leq b$.

Em particular, qual a probabilidade de X assumir um valor menor do que x?

$$F_X(x) = P(-\infty < X < x)$$

Densidade de probabilidade

$$f_X = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

de forma que: $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

Probabilidade conjunta e condicional:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{X|Y}(x|y)\, f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x)\, f(x)$$

Traço sob uma das variáveis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = f_X(x)$$

Se as variáveis são independentes:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

Média: $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, x\,dx$

Média do produto:

$$\langle xy \rangle = \int dx \int dy\, f_{X,Y}(x,y)\, xy$$

Momentos: $$M_n = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f_x(x)\, x^n$$

Distribuições Especiais

Uniforme: $$f_x(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se} \quad 0 > x > 1 \end{cases}$$

Gaussiana: $$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

Teorema do Limite Central

Dada a variável aleatória X_i como a soma de muitas variáveis aleatórias Y_j.

$$X_i = \sum_{j=1}^{N} Y_j \quad ; \quad \langle X \rangle = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} X_i = \frac{1}{M}\sum_{i,j=1}^{N,M} Y_i = \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} Y_j}_{\bar{Y}_j} = \sum_{j=1}^{N} \bar{Y}_j$$

$$\sigma_x^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \sum_{j=1}^{N} \langle (Y_j - \langle Y_j \rangle)^2 \rangle = \sum_{j=1}^{N} \sigma_j^2$$

Supondo $\sigma_j^2 \ll \sum_{j=1}^{N} \sigma_j^2 \implies$ A distribuição de X é uma gaussiana.

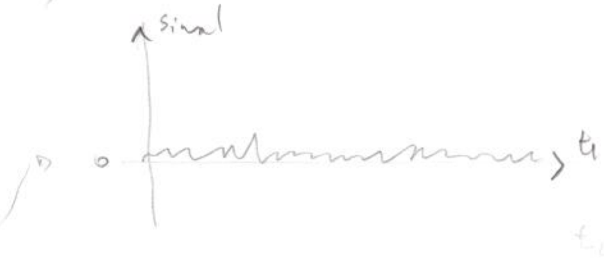
Exercício: Usando um gerador uniforme definido no intervalo [-1, 1], mostre que a distribuição da variável:

$$X = \sum_{j=1}^{N} Y_j$$

tende para uma gaussiana quando N aumenta.

Calcule o desvio quadrático médio de X para diferentes valores de N e ajuste uma gaussiana em cada caso.

Dinâmica estocástica



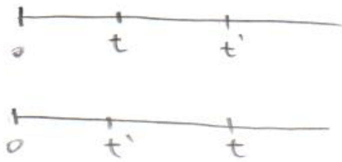
→ Ruído Branco: 1) $\langle \xi(t) \rangle = 0$

2) $\langle \xi(t_1), \xi(t_2) \rangle = \delta(t_2 - t_1)$ → 2) significa que sinais em tempos diferentes não são correlacionados.

→ Processo de Winner:

$$W(t) = \int_0^t \xi(t) \, dt' \qquad 1) \; \langle W(t) \rangle = \int_0^t \langle \xi(t) \rangle \, dt' = 0$$

2) $$\langle W(t) W(t') \rangle = \int_0^t \int_0^{t'} \underbrace{\langle \xi(t'') \, \xi(t''') \rangle}_{\delta(t'' - t''')} dt'' dt'''$$



Se $t < t'$: $$\int_0^t \int_0^{t'} \delta(t'' - t''') \, dt'' dt''' = t$$

Se $t' < t$: $$\int_0^t \int_0^{t'} \delta(t'' - t''') \, dt'' dt''' = t'$$

então: $$\boxed{\langle W(t) \, W(t') \rangle = \min(t, t')}$$

3) $W(t)$ é o limite de uma soma de variáveis aleatórias (Processo Estocástico Markoviano)

$$P_W(w, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{-w^2}{2t}}$$

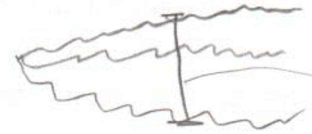
4) $\Delta W = W(t+dt) - W(t) \Rightarrow \sigma_W = \sqrt{\Delta t}$

Portanto $\dfrac{dW}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta W(\Delta t)}{\Delta t} \sim \dfrac{\sqrt{\Delta t}}{\Delta t} \to \infty$

13/06/2019

$$W(t) = \int_0^t \xi(t')\,dt'$$

$$P(w,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{(w-w_0)^2}{t}}$$



$$\Delta W = W(t+\Delta t) - W(t)$$

Equação de Langevin

$$\dot{X}(t) = \frac{dX(t)}{dt}$$

Seja uma partícula de massa m sob efeito de uma força estocástica $\alpha\,\xi(t)$, em um meio viscoso de viscosidade γ e sob ação de forças derivadas de um potencial

$\vec{R}$: posição de uma partícula

$$m\ddot{\vec{R}} = F(\vec{R}) - \gamma\dot{\vec{R}} + \alpha\,\xi(t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\vec{R}}{dt} &= \vec{v} \\ m\frac{d\vec{v}}{dt} &= F(\vec{R}) - \gamma\vec{v} + \alpha\,\xi(t) \end{aligned}}$$

$$X = (x, y, z, v_x, v_y, v_z)$$

$$\boxed{\dot{X} = A(X(t),t) + B(X(t),t)\,\xi(t)}$$

(se $B = cte$, ruído aditivo)

Em 1D:

$$\left.\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} x \\ v_x \end{pmatrix} \\ A &= \begin{pmatrix} v_x \\ F(x,t) - \gamma v(t) \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}\ \text{Eq. de Langevin em 1D}$$

Ruído Aditivo

$$\dot{X} = A(x) + B\,\xi(t)$$

$$\int_t^{t+\Delta t} dX(t') = \int_t^{t+\Delta t} A(x)\,dt' + B\int_t^{t+\Delta t} \xi(t')\,dt'$$

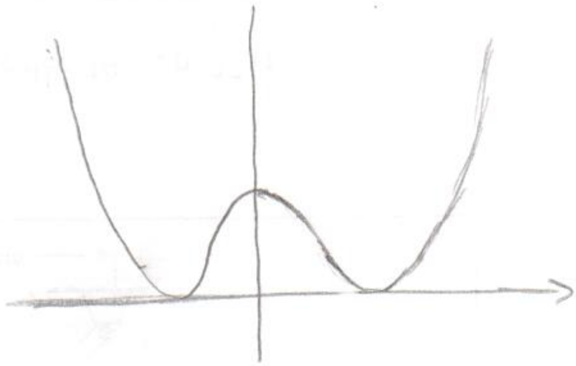
$$X(t+\Delta t) - X(t) = \bar{A}\,\Delta t + B\,(\omega(t+\Delta t) - \omega(t))$$

$$X(t+\Delta t) - X(t) = \bar{A}\,\Delta t + B\,\underbrace{R_g\sqrt{\Delta t}}$$

semente de número aleatório de dist. gaussiana

OBS: Para a integração desta equação, não vale a pena utilizar métodos mais sofisticados (como RK4), pois o erro de $\sqrt{\Delta t}$ cresce com suas derivadas. Euler já é suficiente.

Exercício: Duplo poço



$$V(x) = ax^4 - bx^2$$

$a>0;\ b>0;$

$$F(x) = 4ax^3 - 2bx = \alpha x - x^3$$

Reescrevendo a eq. diferencial:

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - 4ax^3 + 2bx + \beta\,\xi(t) \quad ; \quad \gamma = 1;\ 4a = 1;\ 2b = \alpha$$

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\gamma v \underbrace{- 4ax^3 + 2bx}_{f} + \beta\,\xi(t) \end{cases}$$

Considerando:

Aproximação de Stokes:

(Limite de aceleração nula)

$$0 = -\gamma \dot{x} - 4a' x^3 + 2b' x + \beta' \xi(t)$$

$$\gamma \dot{x} = -4a' x^3 + 2b' x + \beta' \xi(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = -4a x^3 + 2bx + \beta \xi(t)$$

$$\Delta x = (-4ax^3 + 2bx)\Delta t + \beta \underbrace{\Delta W}_{R_g \sqrt{\Delta t}}$$

//

18/06/2019

Equação de Langevin com ruído multiplicativo

(Equações Diferenciais Estocásticas)

$$\frac{dx}{dt} = A(x,t) + B(x,t)\,\xi(t)$$

$$\Delta x = \int_t^{t+\Delta t} A(x(t'),t')\,dt' + \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} B(x(t'),t')\,\underbrace{\xi(t')\,dt'}_{\propto\sqrt{\Delta t}}}_{\text{Resolve-se usando os cálculos de Ito ou Stratonovick}}$$

Convergência em média quadrática

$$\lim_{n\to\infty} \langle (x_n - x)^2 \rangle \to 0$$

Representação: $\boxed{MS-\lim_{n\to\infty} x_n = x}$

No caso de variáveis aleatórias de um processo estocástico (PE), a equação acima é uma média sobre realizações de um PE.

$$\boxed{\langle (x_n(t) - x(t))^2 \rangle = \frac{1}{N}\sum_{R=1}^{N} (x_{n,R}(t) - x_R(t))^2}$$

Integral de Ito

Seja $G(x,t)$ uma função de um P.E.

$$\int_{t_0}^{t} G(x(t'),t')\bullet dW(t') = MS-\lim_{\Delta t\to 0} \sum_{n=0}^{N} G(x(t_n),t_n)\,\Delta W(t_n)$$

simboliza que estamos fazendo uma integral de Ito.

$$N = \frac{t-t_0}{\Delta t} \; ; \quad t_n = t_0 + n\Delta t$$

$$\Delta W(t_n) = W(t_{n+1}) - W(t_n)$$

Propriedades:

1) $$\int_{t_0}^{t} W(t') \cdot dW(t') = \frac{1}{2}\left[W^2(t) - W^2(t_0) - (t-t_0) \right]$$

2) $$\int_{t_0}^{t} W(t')^n \cdot dW(t') = \frac{1}{n+1}\left[W(t)^{n+1} - W(t_0)^{n+1} \right] + \frac{n}{2}\int_{t_0}^{t} W(t')^{n-1}\, dt'$$

3) A média sobre realizações da integral é nula:

$$\left\langle \int_{t_0}^{t} G(x(t'), t') \cdot dW(t') \right\rangle = 0$$

4) Pode-se definir qualquer potência de dW:

$$\int_{t_0}^{t} G(x(t'), t') \cdot dW^m = \underset{\Delta t \to 0}{\text{MS-lim}} \sum_{n=1}^{N} G(x(t_n), t_n)\, \Delta W_n^m$$

e mostra-se que: $$\int_{t_0}^{t} G(x(t'), t') \cdot dW^2(t') = \int_{t_0}^{t} G(x(t'), t')\, dt'$$

e

$$\int_{t_0}^{t} G(x(t'), t') \cdot dW(t')^m = 0 \quad \forall\ m > 2$$

Diferencial de Ito

Seja $F(w(t), t) \equiv F$

$$dF(t) = F(t+\Delta t) - F(t)$$

$$= \frac{\partial F}{\partial w} dw(t) + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial w^2}(\delta w)^2 + \dots$$

ou seja:

$$dF(t) = \frac{\partial F}{\partial w} \cdot dw(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial w^2}\right) dt$$

Equação diferencial estocástica de Ito

Seja a Eq. de Langevin na forma

$$\Delta X = \int_t^{t+\Delta t} A(x(t'), t')\,dt' + \int_t^{t+\Delta t} B(x(t'), t')\,\overbrace{\xi(t')\,dt'}^{dW}$$

Calculamos a integral em B no meio do intervalo Δt:

$$\Delta X = A(x(t), t)\,\Delta t + B\left(x(t) + \frac{\Delta x}{2}, t\right)\Delta W$$

Expandindo $B(x + \Delta x)$:

$$\Delta X = A(x(t), t)\,\Delta t + B(x(t), t)\,\Delta W + \frac{1}{2}\frac{dB}{dx}\,\Delta W\,\underbrace{\Delta X}_{\left[A(x(t), t)\,\Delta t + B(x(t), t)\,\Delta W + \dots\right]}$$

No limite infinitesimal:

$\Delta t \to dt$; $\Delta X \to dx$; $\Delta W \to dw$

$$dx = A(x(t), t)\,dt + B(x(t), t) \cdot dw(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial x} B(x(t), t)\,\overset{dt}{\widetilde{(dW(t))^2}}$$

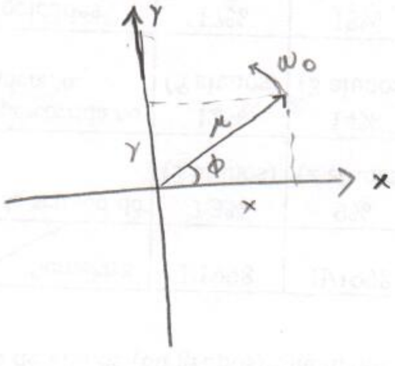
$$A^{(I)} = A(x(t), t) + \frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial x} B(x(t), t)$$

$$\boxed{dx(t) = A^{I}(x(t), t)\, dt + B(x(t), t) \cdot dW(t)}$$

Eq. diferencial estocástica de Ito-Langevin

Vetor girante por cálculo de Ito

$$\vec{\mu} = \underbrace{\mu_0}_{=1}(x, y)$$



$$X(t) = \cos(\phi(t))$$

$$Y(t) = \mathrm{sen}(\phi(t))$$

$$d\phi = \omega_0 dt + \beta\, dW(t)$$

Integrando: $\boxed{\phi(t) = \omega_0 t + \beta W(t)}$

$$X(t) = \cos(\omega_0 t + \beta W(t)) \quad (1)$$

$$Y(t) = \mathrm{sen}(\omega_0 t + \beta W(t)) \quad (2)$$

$$dx(t) = d(\cos(\omega_0 t + \beta W(t)))$$

$$dy(t) = d(\mathrm{sen}(\omega_0 t + \beta W(t)))$$

$$dF(t) = \frac{\partial F}{\partial W} \cdot dW + \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial W^2}\right) dt$$

Então:

$$dx(t) = \frac{\partial(\cos(\omega_0 t + \beta W(t)))}{\partial W} dW + \left(\frac{\partial(\cos(\omega_0 t + \beta W(t)))}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\cos(\omega_0 t + \beta W(t)))}{\partial W^2}\right) dt$$

$$dx(t) = -\beta\, \mathrm{sen}(\omega_0 t + \beta W(t))\, dW - \omega_0\, \mathrm{sen}(\omega_0 t + \beta W(t))\, dt - \frac{1}{2}\beta^2 \cos(\omega_0 t + \beta W(t))\, dt$$

Analogamente para dy; substituindo com (1) e (2):

$$\boxed{\begin{aligned} dX(t) &= \left(-\omega_0 Y(t) - \frac{\beta^2}{2} X(t)\right) dt - \beta Y(t) \cdot dW(t) \\ dY(t) &= \left(\omega_0 X(t) - \frac{\beta^2}{2} Y(t)\right) dt + \beta X(t) \cdot dW(t) \end{aligned}}$$

—— // ——

27/06/2019

Cálculo de Stratonovich

$$\int_{t_0}^{t} G(x(t'), t')\, dW(t') = \underset{\Delta t \to 0}{\text{MS-lim}} \sum_{n=0}^{N} G\left(\frac{x(t_n) + x(t_{n+1})}{2}, t_n\right) \Delta W(t_n)$$

Quando $X(t) = x(W(t), t)$ usam-se as regras usuais da integração de Riemann, e.g.

$$\int_{t_0}^{t} W(t')\, dW(t') = \frac{1}{2}\left[W(t)^2 - W(t_0)^2\right]$$

Na diferenciação mantém-se também a semelhança entre o cálculo elementar e o de Stratonovich:

$$\frac{dx}{dt} = A(t) + B(t)\, \xi$$

$$dx = A(t)\, dt + B(t)\, dW \longleftarrow \text{Stratonovich}$$

$$dx = A^{I}(x(t), t)\, dt + B(x(t), t) \cdot dW(t) \longleftarrow \text{Ito}$$

$$dX(t) = A(x(t), t) - \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial x} B(x(t), t)\, dt + B(x(t), t)\, dW$$

Vetor Girante

$$dx_j = -\omega_0 y_j\, dt + \beta y_j\, dW_j$$

$$dy_j = \omega_0 x_j\, dt + \beta x_j\, dW_j$$

$$\Delta x_j = -\omega_0 y_j \Delta t + \beta\left(y_j + \frac{\Delta y_j}{2}\right) dW_j$$

$$\Delta y_j = \omega_0 y_j \Delta t + \beta\left(y_j + \frac{\Delta y_j}{2}\right) dW_j$$

Tipo um preditor corretor

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta x_j &= -\omega_0\left(y_j + \frac{\Delta y_j}{2}\right)\Delta t + \beta\left(y_i + \frac{\Delta y_i}{2}\right) dW_j \\ \Delta y_j &= \omega_0\left(x_j + \frac{\Delta x_j}{2}\right)\Delta t + \beta\left(x_j + \frac{\Delta x_j}{2}\right) dW_j \end{aligned}}$$

EXTRA: Equação de Fokker - Planck

A cada sistema de equações diferenciais estocásticas corresponde uma E.D.P. com as distribuições de probabilidades associados a cada variável.

$$dx = A(x,t)\,dt + B(x,t)\cdot dW$$

Ito!

Mostra-se que:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big[K(x,t)\,P(x,t)\Big] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big[D(x,t)\,P(x,t)\Big] \qquad \text{(Eq. de F-P)}$$

Onde $K(x,t) = -A(x,t)$ e $D(x,t) = B^2(x,t)$

Em uma simulação de caminhantes aleatórios

se todos começam em x_0:

$$\boxed{P(x,0) = \delta(x - x_0)}$$

$$\boxed{T(x,t \mid x_0, 0) = P(x,t)}$$ ← Probabilidade de transição

Se a equação diferencial estocástica for de Stratonovich

a forma da E.D.P. é a mesma, mas:

$$\boxed{\begin{aligned} K(x,t) &= -A(x,t) + \frac{1}{2} B \frac{\partial B}{\partial x} \\ D(x,t) &= B^2(x,t) \end{aligned}}$$

$$m\ddot{x} + \gamma \dot{x} = -Kx + \beta \xi(t)$$

Aproximação de Stokes: $\ddot{x} = 0$

$$\gamma \dot{x} = -kx + \beta' \xi(t)$$

$$dx = -kx\,dt + \beta\,dW$$

A EFP correspondente é:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k x P(x,t)\right] + \frac{1}{2} \beta'^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

Fokker-Planck para um processo estocástico vetorial

$$X = \left[x_1, x_2, x_3, \dots, x_N \right]$$

$$\frac{\partial P(X,t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial [K(X,t)\, P(X,t)]}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1} \frac{\partial^2 [D_{ij}\, P(X,t)]}{\partial x_i\, \partial x_j}$$

$$K_i(x,t) = -A_i(x_i,t) \quad ; \quad D_{ij}(x,t) = \sum_{\alpha=1}^{N} B_{i\alpha}(x,t)\, B_{\alpha j}(x,t)$$