

## Relatório do Laboratório 3 - Projeto de Servomotor de velocidade

### 1. Controlador P + *feedforward*

A função de transferência de malha fechada é:

$$G_r(s) = \frac{(K_p + K_f) K_t}{(Ls + R)(J_{eq}s + B_{eq}) + (K_p + K_t)K_t}$$

A função de transferência do distúrbio é:

$$G_d(s) = \frac{Ls + R}{(Ls + R)(J_{eq}s + B_{eq}) + (K_p + K_t)K_t} \cdot \frac{1}{N^2 \eta}$$

Calculando  $E(s) = R_I - \Omega_s$  para entrada degrau unitário:

$$E(s) = \frac{(Ls + R)(J_{eq}s + B_{eq}) + (K_t - K_f)K_t}{(Ls + R)(J_{eq}s + B_{eq}) + (K_p + K_t)K_t} \cdot \frac{1}{s}$$

Anulando o erro em regime pelo teorema do valor final:

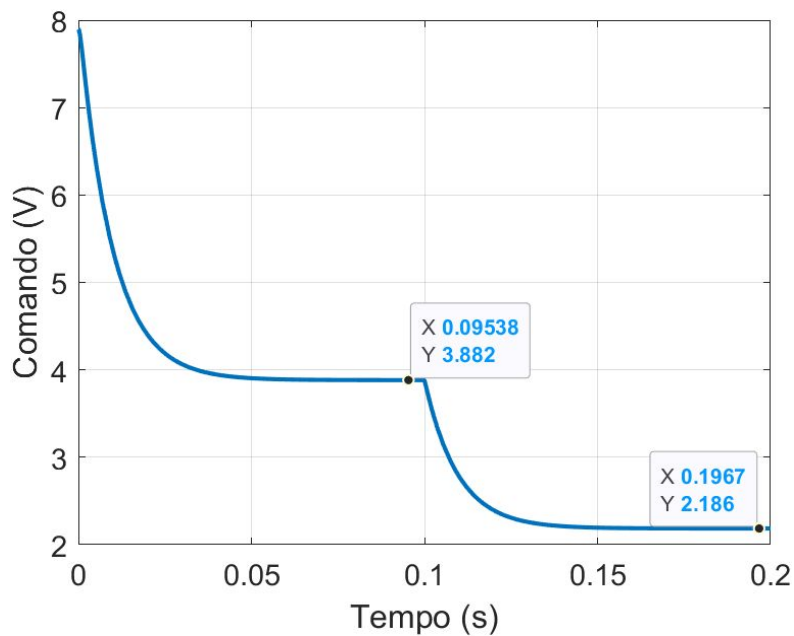
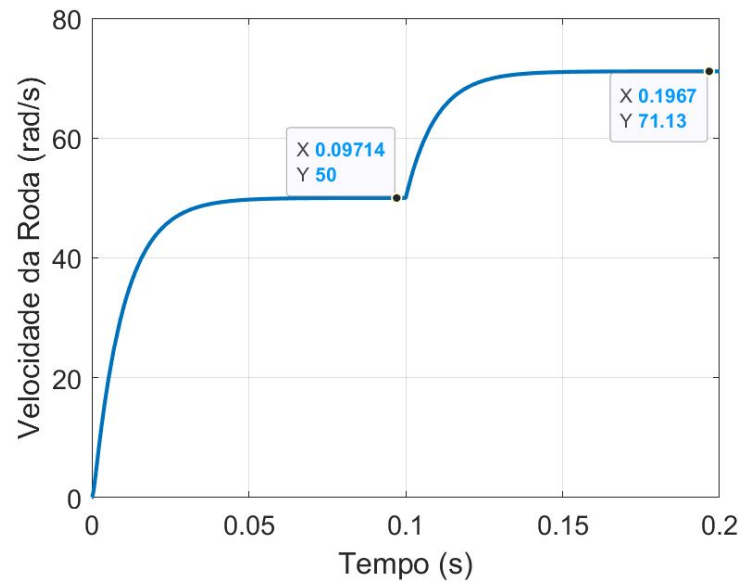
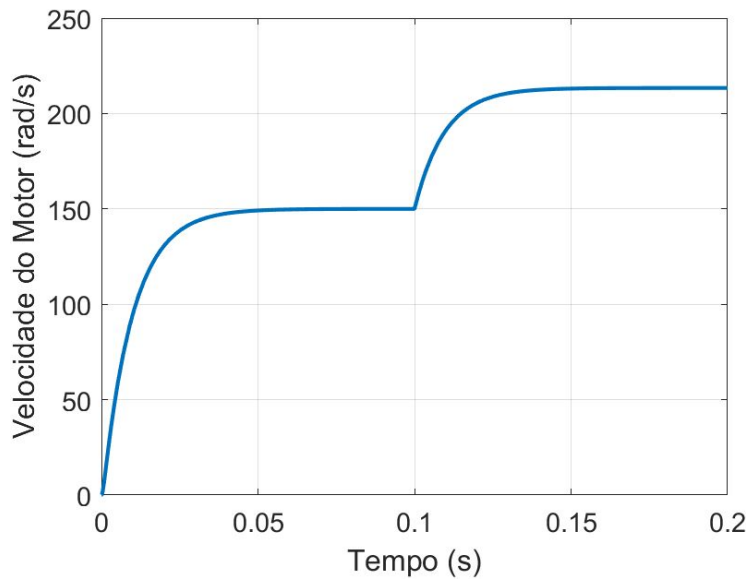
$$K_f = \frac{R B_{eq}}{K_t} + K_t$$

Obs: esse resultado é válido para qualquer valor de  $L$ , ou seja, o erro em regime é nulo mesmo considerando o indutor.

Considerando  $L = 0$ , verifica-se que o sistema é equivalente a um sistema de primeira ordem com seguinte constante de tempo:

$$\tau = \frac{R J_{eq}}{R B_{eq} + (K_p + K_t)K_t}$$
$$K_p = \frac{R J_{eq}}{\tau K_t} - \frac{R B_{eq}}{K_t} - K_t$$

Resultado da simulação:



- As velocidades do motor e da roda, de acordo com a teoria, seguem a seguinte relação:  $N\omega_l = \omega_m$ , sendo  $N$  uma constante de relação entre os números de engrenagens. Desse modo, os gráficos de velocidade do motor e da roda devem ter o mesmo formato, com uma mudança apenas de escala, o que é realmente observado nos gráficos obtidos.

- Como o valor da indutância do sistema é muito pequeno quando comparado com os outros fatores do sistema, podemos considerar que o sistema é aproximadamente de primeira ordem. Assim, antes do início da perturbação, a velocidade da roda converge para a referência de acordo com um sistema de primeira ordem e sem erro em regime. A perturbação na forma de degrau, por sua vez, atua sobre o sistema deslocando-o para uma nova referência (esse deslocamento também ocorre na dinâmica de um sistema de primeira ordem).
- Antes do início da perturbação, o erro em regime é nulo, como foi deduzido neste exercício (o valor de  $K_f$  foi escolhido de forma a anular esse erro quando não há perturbação). Quando há perturbação, portanto, temos de aplicar o princípio da superposição para calcular o erro em regime:

$$E(s) = \frac{(Ls+R)(50 J_{eq}s+50 B_{eq}-\frac{0.2}{N^2\eta})+50(K_t-K_f)K_t}{(Ls+R)(J_{eq}s+B_{eq})+(K_p+K_t)K_t} \cdot \frac{1}{s}$$

Aplicando aqui o teorema do valor final e substituindo os valores de  $K_f$  e  $K_p$  escolhidos:

$$e_{\infty} = \frac{R(50 B_{eq}-\frac{0.2}{N^2\eta})+50(K_t-K_f)K_t}{RB_{eq}+(K_p+K_t)K_t} = \frac{-0.2 \tau}{N^2 \eta J_{eq}} = -21.13 \text{ rad/s}$$

Assim, pode-se verificar no gráfico da velocidade da roda que há um erro de aproximadamente 20 rad/s em relação à velocidade de referência em regime quando há perturbação.

- A equação da tensão, pela teoria, é:

$$V(t) = K_f N r_l + (r_l N - \omega_l N)K_p$$

Sem perturbação, temos em regime:

$$r_l = 50 \text{ rad/s}$$

$$\omega_l = 50 \text{ rad/s}$$

$$V_{\infty}(t) = K_f N r_l = 3.89 \text{ V}$$

Com perturbação, temos em regime:

$$r_l = 50 \text{ rad/s}$$

$$\omega_l = 50 - e_{\infty} = 71.13 \text{ rad/s}$$

$$V_{\infty}(t) = 2.19 \text{ V}$$

Assim, observando o gráfico podemos concluir que os valores são condizentes.

## 2. Controlador PI com pré filtro

A função de transferência de malha fechada é:

$$G_r(s) = \frac{K_t K_i}{(Ls+R)(J_{eq}s+B_{eq})s+(K_i+(K_p+K_t)s)K_t}$$

A função de transferência do distúrbio é:

$$G_d(s) = \frac{(Ls+R)s}{(Ls+R)(J_{eq}s+B_{eq})s+(K_i+(K_p+K_t)s)K_t} \cdot \frac{1}{N^2\eta}$$

Para que os requisitos sejam atendidos, é necessário que  $G_r$  siga um **sistema de segunda ordem padrão** quando fazemos  $L = 0$ , com as seguintes relações:

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{|\ln(M_p)|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(M_p)}} \\ \omega_n &= \frac{\pi - \arccos(\xi)}{t_r(\sqrt{1-\xi^2})} \\ K_i &= \frac{R J_{eq} \omega_n^2}{K_t} \\ K_p &= (2 \xi \omega_n - \frac{B_{eq}}{J_{eq}}) \frac{R J_{eq}}{K_t} - K_t\end{aligned}$$

Aplicando uma entrada de degrau unitário, a equação do erro é a seguinte:

$$E(s) = R_l - \Omega_l = \frac{(Ls+R)(J_{eq}s+B_{eq})+(K_p+K_t)K_t}{(Ls+R)(J_{eq}s+B_{eq})s+(K_i+(K_p+K_t)s)K_t}$$

Pelo teorema do valor final:

$$e_{\infty} = 0$$

Aplicando agora uma perturbação de degrau unitário junto a uma entrada degrau unitário, a equação do erro é a seguinte:

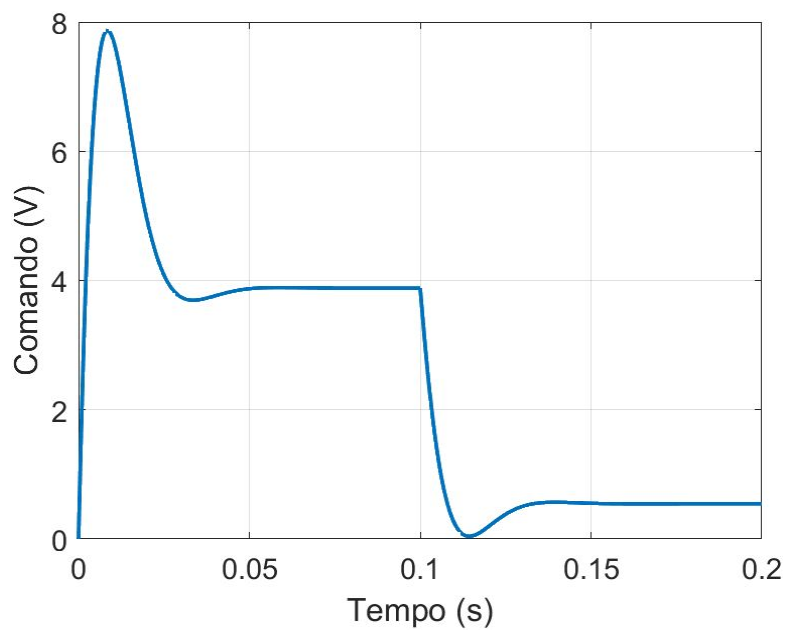
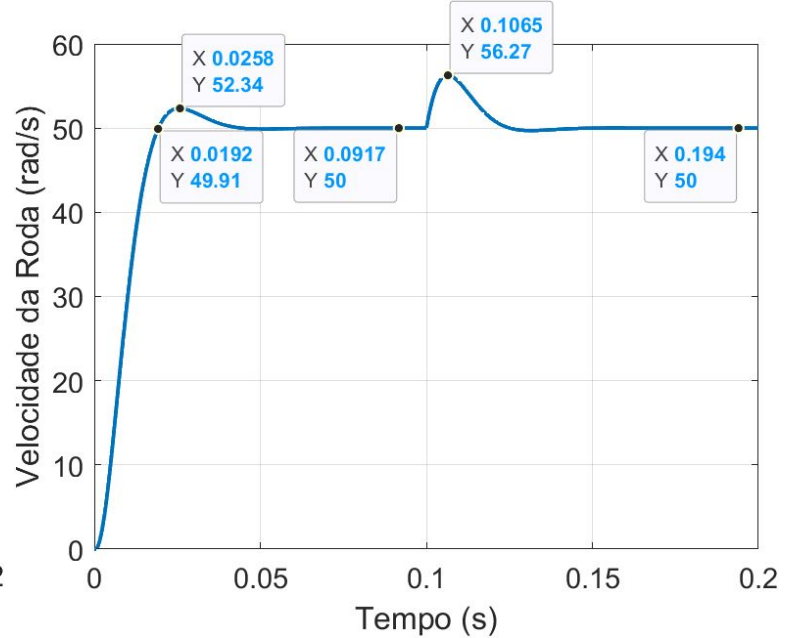
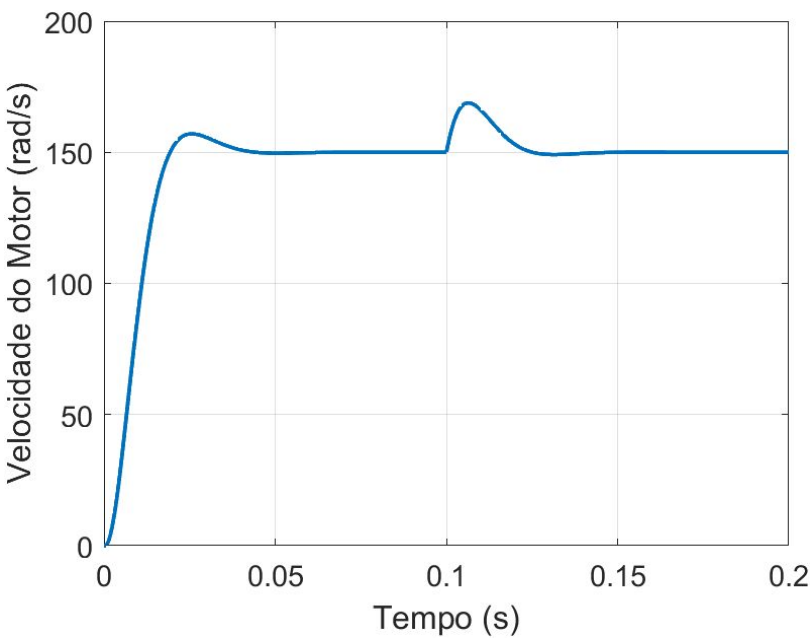
$$E(s) = R_l - \Omega_l = \frac{(Ls+R)(J_{eq}s+B_{eq}-\frac{1}{N^2\eta})+(K_p+K_f)K_t}{(Ls+R)(J_{eq}s+B_{eq})s+(K_i+(K_p+K_t)s)K_t}$$

Pelo teorema do valor final:

$$e_{\infty} = 0$$

Obs: esses resultados são válidos para qualquer valor de  $L$ , ou seja, o erro em regime é nulo mesmo considerando o indutor.

Resultado da simulação:

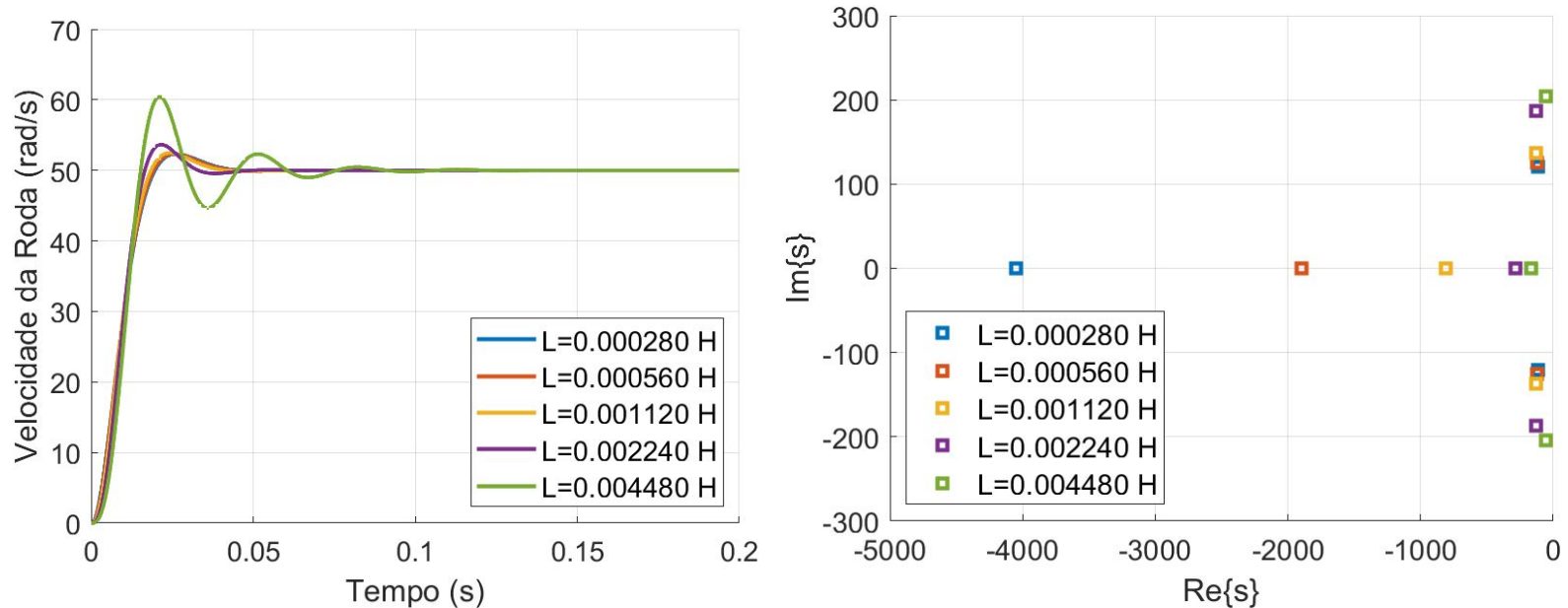


- Como observamos no gráfico de velocidade da roda, o tempo de subida é de aproximadamente  $0.02\text{ s}$  e o sobressinal sem perturbação é de aproximadamente  $0.047$ , de modo que os resultados são condizentes com a teoria
- Também é evidente que, após o distúrbio, a velocidade da roda se estabiliza novamente em  $50\text{ rad/s}$ , de modo que o erro em regime é nulo

- O termo que elimina o erro em regime é o integrativo. Isso ocorre pois esse termo, por meio de sua integral, só fica estável quando o erro tende a zero. Em outras palavras: quanto maior o 'histórico' de erro do sistema, mais esforço o termo integrativo realiza na direção contrária para diminuir o valor dessa integral; dessa forma, o sistema oscila ao redor da posição de equilíbrio, com o erro tendendo a zero e o termo integrativo tendendo à estabilidade.
- Nesse caso, dois fenômenos precisam ser driblados pelo controlador: o distúrbio (força externa) e a força de atrito viscoso.

### 3. Aproximação por polos dominantes

Resultado da simulação de avaliação do indutor:



- Para valores menores de indutância, fazendo a aproximação em um sistema de segunda ordem temos que os polos devem estar aproximadamente nos seguintes locais:

$$p_{1,2} = -\xi \omega_n \pm \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} j$$

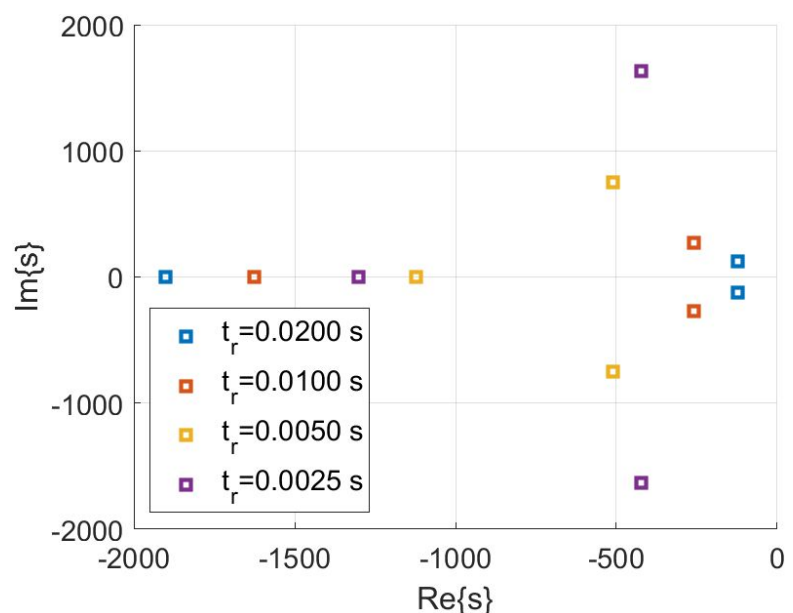
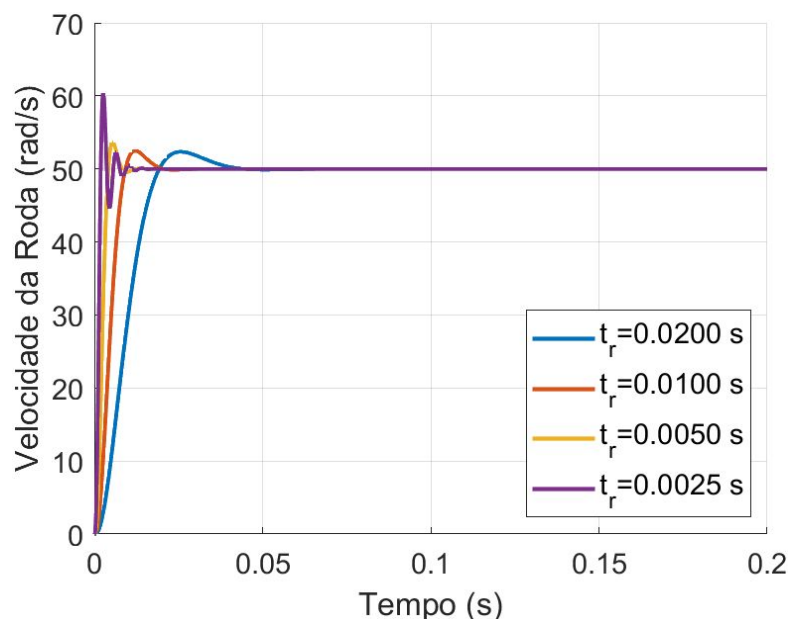
Obtendo  $\omega_n$  e  $\xi$  pelas equações do item anterior:

$$p_{1,2} = -115 \pm 117 j$$

Assim, observa-se no gráfico que, quanto menor o valor da indutância, mais próximo os polos complexo-conjugados estão dos valores obtidos acima.

- À medida que há um aumento na indutância, os polos complexo-conjugados se afastam dos valores obtidos no item anterior se distanciando do centro (há um aumento do módulo) e o polo real vai em direção ao centro (diminui em módulo). Assim, a razão entre os módulos dos polos diminui à medida que a indutância aumenta. Isso pode ser relacionado com a aproximação por polos dominantes, pois ela diz que um polo pode ser ignorado quando seu módulo é ao menos  $\times$  vezes maior que o módulo dos outros polos (o valor adotado geralmente é 5)
- Ao considerar a indutância, a adição de um terceiro polo real negativo implica a aparição de um termo exponencial na equação de velocidade da roda. Quanto maior for a indutância, maior a influência desse novo termo (vale notar que esse termo é uma exponencial de número real negativo, ou seja, quanto menor seu módulo mais tempo ela demora para convergir para zero) e maior os termos imaginário e real dos polos complexo-conjugados (ou seja, senóides com mais amplitude e frequência), o que tem como resultado uma oscilação mais acentuada e veloz.

Resultado da simulação de tempo de subida:



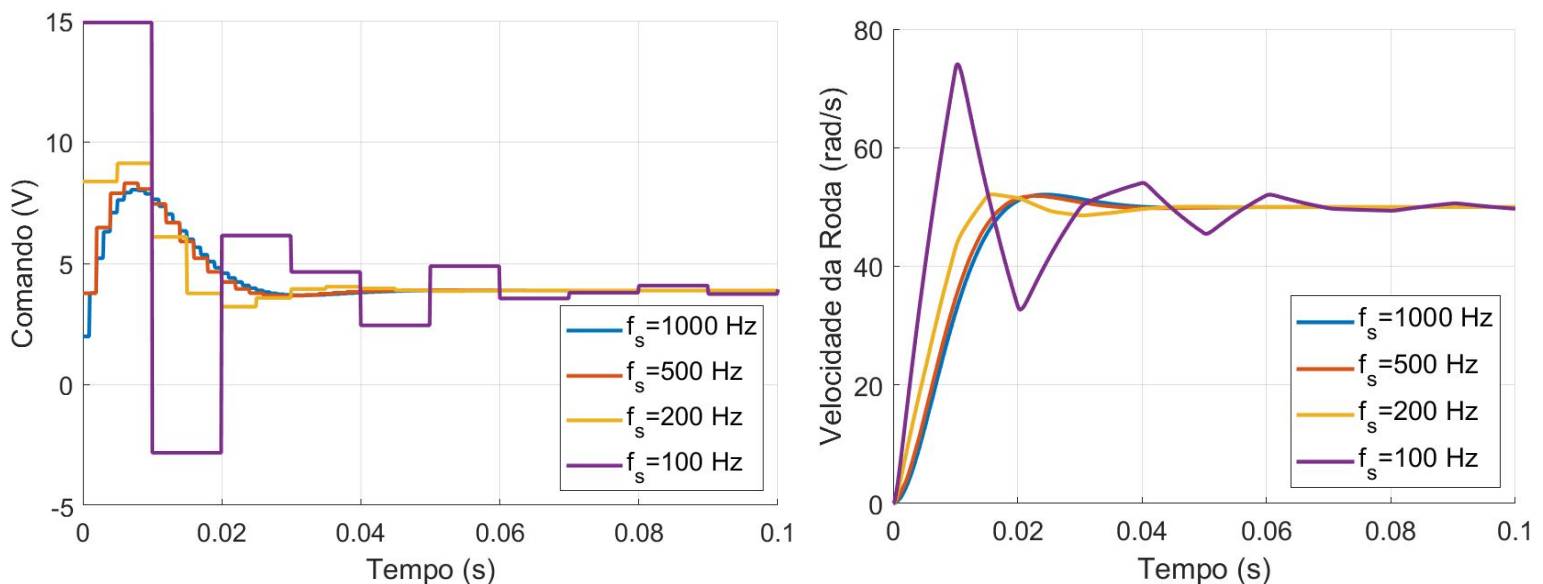
- À medida em que há uma diminuição do tempo de subida, há um aumento nos fatores  $K_i$  e  $K_p$ , o que é intuitivo, visto que é necessário variações mais bruscas no comando para que a velocidade de referência seja atingida mais rapidamente. Para os três maiores valores de tempo de subida, observou-se um padrão: à medida que o tempo



diminui, as raízes complexo-conjugadas se distanciam do centro, enquanto a real se aproxima. Essas variações, entretanto, não influenciam muito a resposta ao degrau, de modo que o valor de  $M_p$  continua por volta de 0.046 (isso indica que, para esses valores de tempo de subida, uma aproximação por polos dominantes é válida). Para o valor de tempo de subida de 0.0025 s, porém, há uma quebra nesse padrão, de modo que há um aumento brusco do sobressinal, o que indica que uma aproximação por polos dominantes não é mais tão precisa, e o sistema passa a seguir mais as regras de um sistema de terceira ordem.

#### 4. Implementação digital

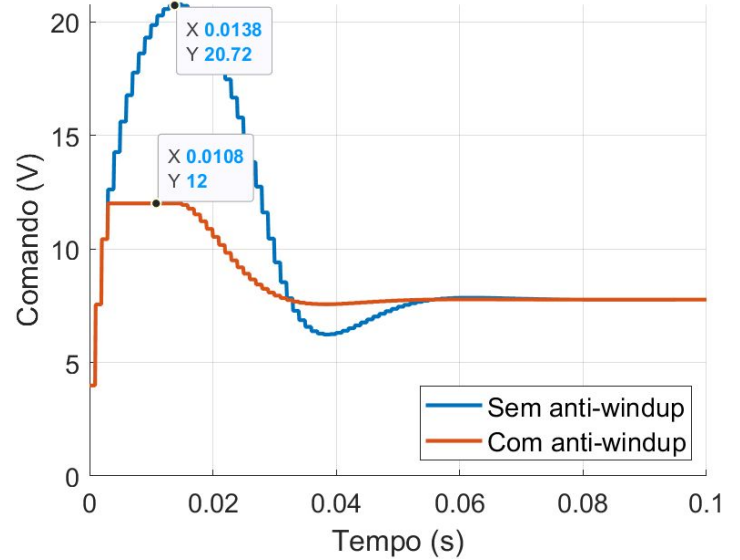
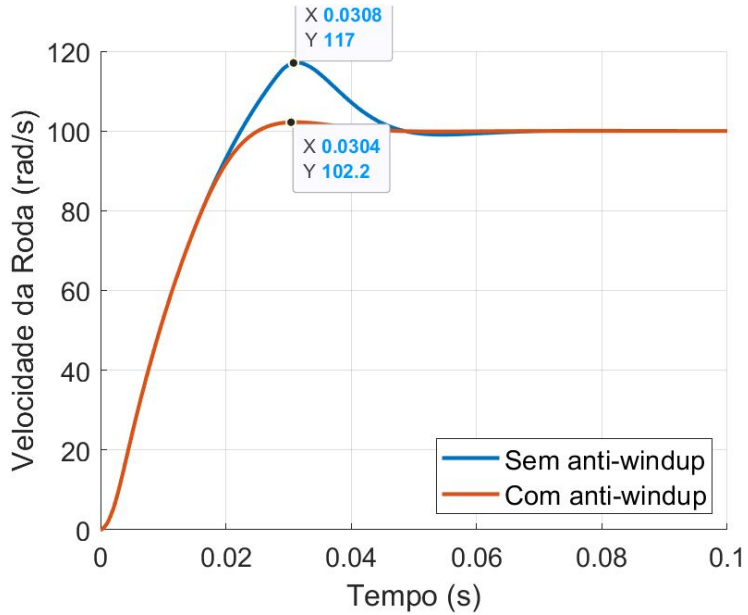
Resultado da simulação:



- De acordo com os gráficos acima, fica evidente que a simulação por discretização pode degradar significativamente o desempenho de um controlador caso a taxa de amostragem não seja suficientemente alta. A degradação é observada tanto nas amplitudes quanto nos formatos dos traçados. Isso ocorre pois, a taxas mais lentas, os erros causados pelo atraso da amostragem são propagados para seus sucessores (visto que o cálculo de discretização é feito com base nos valores anteriores). Assim, as deformações causadas pela discretização são previstas teoricamente e devem ser contornadas de acordo com as especificações e objetivos de cada problema.

## 5. Anti-windup

Resultado da simulação:



- Como observa-se nos gráficos, a implementação do anti-windup foi muito benéfica, pois fez o sistema oscilar menos e diminuiu o *overshoot*. No problema sem anti-windup, o *overshoot* elevado (de aproximadamente 0.17) ocorreu pois o integrador, aliado à discretização do problema, fez com que ocorresse um acúmulo de erro e consequente ampliação da instabilidade