Minimização Lógica

Objetivo: ***reduzir o número de termos e literais de uma Função Booleana***

Conseqüência:

Reduzir transistores → ***reduz potência e tempo de propagação (atraso)***

Termo (reduzir)→ porta (reduz)

Literal (reduzir)→ Fan-in da porta (reduz)

Fan-in → reduzir transistores e tempo de atraso

Minimização Lógica

Problema: ***NP-Completo → complexidade exponencial***

Tipos de procedimento:

1) Algébrico

2) Gráfico → mapa de Karnaugh

3) Algoritmo:

3.1 Exato → Quine-McCluskey

3.2 Heurístico → Espresso (Berkeley)

Evolução do MINI (IBM - 1974)

3.3 Estado da arte: Scherzo (1994)

Minimização Lógica

Problema: ***NP-Completo → complexidade exponencial***

Tipos de minimização lógica:

1) Dois níveis → PLA, PAL, etc

2) Múltiplos níveis → VLSI, FPGA, etc

Funções Booleanas podem ser:

3.1 Simples saída

3.2 Múltiplas saídas

Mapa de Karnaugh

É uma forma de representar uma dada função de maneira que cada mintermo ou cada maxtermo mantenha-se vizinho de todos aqueles dos quais diferem apenas por uma variável (1 ou 0 e vice-versa).

Teoremas básicos:

1) XY + X'Y=Y (absorção ou cobertura);

2) XY +X'Z + YZ=XY + X'Z (Consenso → elimina redundância)

Mapa de Karnaugh

Procedimento gráfico: duas etapas

1) **Etapa →** ***construir um mapa: função canônica SOP ou POS é descrita no mapa***

2) ***Etapa → extrair do mapa o menor número de termos minimizados (implicantes primos) da função que cobrem todos os mintermos (maxtermos)***

Mapa de Karnaugh

Definições:

Mintermo → ***termo do mapa que representa 1***

Maxtermo → termo do mapa que representa 0

Implicante **→ grupo (cobre) de mintermos adjacentes (que só muda seu valor em uma variável)**

Implicante primo → Não há um outro implicante que o cobre.

Implicante primo redundante → todo o mintermo que pertence a este implicante, também pertence a um outro implicante

Implicante primo essencial → existe pelo menos um mintermo em que somente este implicante o cobre

Mapa de Karnaugh

Definições mais rigorosas:

Mintermo: ***É um produto de literais em que cada variável aparece uma única vez, complementada ou não.***

Maxtermo: ***É uma soma de literais em que cada variável aparece uma única vez, complementada ou não.***

Mapa de Karnaugh

Conceito de implicante no mapa:

Implicante → É um mintermo do mapa de Karnaugh com 1, ou um grupo (potência de 2) que podem ser combinados.

Implicante primo → Aquele que não pode ser combinado com um outro implicante para a eliminação de um literal.

Implicante primo essencial → Aquele implicante primo que é o único a cobrir determinados mintermos do mapa de Karnaugh

Obs: alguns autores chamam de implicado quando é para os maxtermos

Mapa de Karnaugh

Procedimento gráfico: ***duas etapas***

1) **Etapa →** ***construir um mapa:*** ***função canônica SOP ou POS é descrita no mapa***

2) ***Etapa →*** ***extrair do mapa o menor número de termos minimizados da função***

Mapa de Karnaugh

Exemplo-1: Seja a função Booleana de 3 variáveis descrita por uma tabela verdade

1) Etapa → construir o Mapa-K de 3 variáveis

Tabela Verdade

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Mapa de Karnaugh de 3 variáveis

Código de Gray

C \ AB	0 0	0 1	1 1	1 0
0	A'B'C'	A'BC'	ABC'	AB'C'
1	A'B'C	A'BC	ABC	AB'C

Mintermo posição - célula

Mapa de Karnaugh de 3 variáveis

C \ AB	0 0	0 1	1 1	1 0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1

Mapa de Karnaugh

Etapa 2: Geração de grupos (implicantes) e Cobertura mínima

1) **Formar grupos de 2^N células adjacentes, onde o inteiro N>0. Grupos devem ser simétricos**
2) **Formar grupos maiores a partir de grupos menores**
3) **Todos os mintermos devem estar incluídos no mínimo em um grupo. Qualquer mintermo pode estar incluído em mais de um grupo.**
4) **Eliminar os grupos redundantes**

Mapa de Karnaugh

Etapa 2: 5 grupos iniciais (mintemos); 4 grupos finais (implicantes); cobertura mínima com 3 implicantes primos.

Mapa de Karnaugh de 3 variáveis

C \ AB	0 0	0 1	1 1	1 0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1

Cobertura → Implicantes primos

C \ AB	0 0	0 1	1 1	1 0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1

Cobertura mínima → Implicantes primos

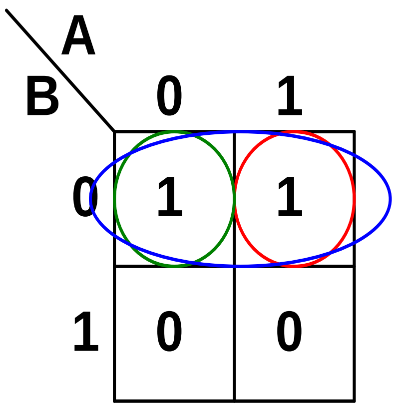
C \ AB	0 0	0 1	1 1	1 0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1

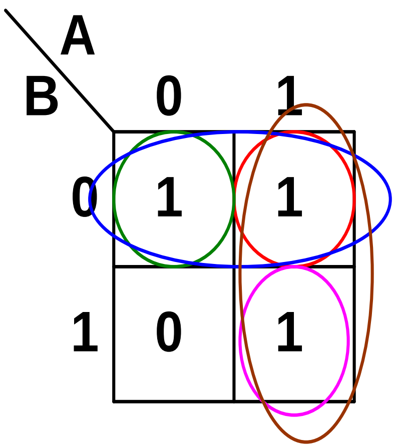
Há um implicante redundante

$$F_{min} = A'C' + AB' + AC$$

Mapa de Karnaugh

Exemplos: Map-K de 2 variáveis





$F(A,B) = \overline{A}\ \overline{B} + A\ \overline{B} = \overline{B}$

$F(A,B) = (0,2,3) = A + \overline{B}$

Mapa de Karnaugh

Exemplo-1: Mapa-K de 4 variáveis

cd \ ab	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1	1	0	0
0 1	1	1	1	1
1 1	0	1	0	0
1 0	1	0	1	1

Cinco implicantes primos
Não há implicante redundante

F_{min}= a’ b’ d’ + a’ c’ + a’ b d + c’ d + a c d’

Mapa de Karnaugh

Exemplo-1: Mapa-K de 5 variáveis

de \ bc	00	01	11	10
00	1	1	1	0
01	1	1	0	0
11	0	0	0	0
10	0	1	1	0

a=0

de \ bc	00	01	11	10
00	1	1	1	0
01	0	0	0	0
11	1	0	1	0
10	0	0	1	0

a=1

Não há implicante redundante

F_{min}=a’ b’ d’ + b’ d’ e’ + c d’ e’ + a’ c e’ + a b c d + a b’ c’ d e

Mapa de Karnaugh

Exemplo-1: Mapa-K de 6 variáveris

ef \ cd	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	0	0	0	0
11	0	0	1	0
10	0	0	0	0

ab=00

ef \ cd	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

ab=01

ef \ cd	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	0	0	0	0
11	0	1	0	0
10	0	1	0	0

ab=10

ef \ cd	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	0	1	1
11	0	1	0	0
10	0	1	0	0

ab=11

Quatro implicantes primos
Não há implicantes redundantes

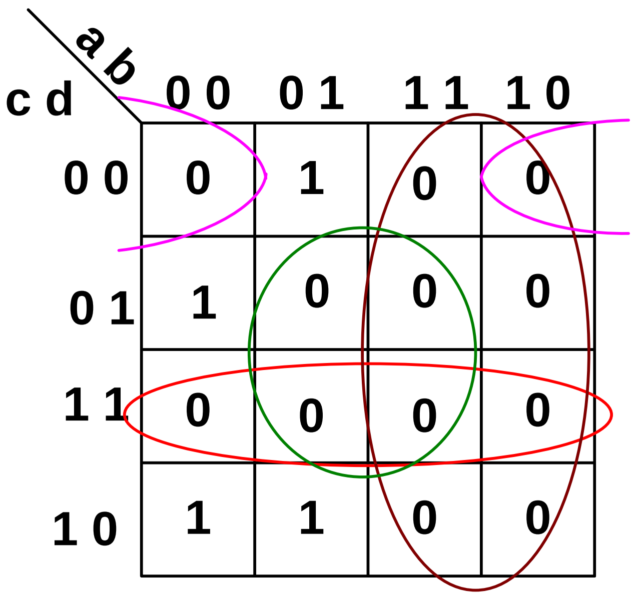
F_{min}=a'b'cdef + c'd'e'f' + b c e' + a c' d e

Mapa de Karnaugh

Minimização Produto da Soma:

Seja a função F(a,b,c,d)=∑ (1,2,4,6), ou

F(a,b,c,d)=Π(0,3,5,7,8....15)



Usar conceitos: maxtermo e implicado

$$F_{min}=a'(c'+d')(b'+d')(b+c+d)$$

Prof. Duarte Lopes de Oliveira
Divisão de Engenharia Eletrônica do ITA

Mapa de Karnaugh

Minimização de Circuitos Combinatórios de Multiplas Saídas:

Objetivo: ***encontrar o maior número possível de implicantes primos comuns***

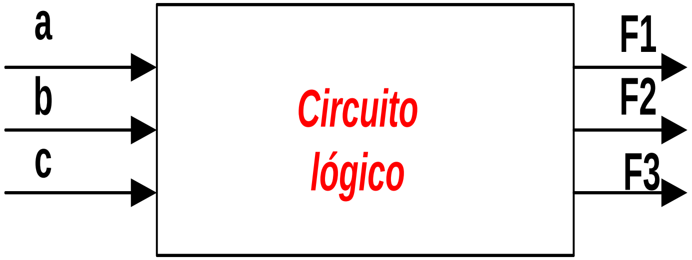
(maior prioridade)

Exemplo:

$F_1(a,b,c)=\sum(0,2,3,5,6)$

$F_2(a,b,c)=\sum(1,2,3,4,7)$

$F_3(a,b,c)=\sum(2,3,4,5,6)$



Mapa de Karnaugh

Minimização de Circuitos Combinatórios de Multiplas Saídas:

Exemplo: $F_1(a,b,c)=\sum(0,2,3,5,6)$

$F_2(a,b,c)=\sum(1,2,3,4,7)$

$F_3(a,b,c)=\sum(2,3,4,5,6)$

Procedimento: a) F_1F_2; b) F_1F_3; c) F_2F_3; d) $F_1F_2F_3$

c \ ab	0 0	0 1	11	1 0
0		1		
1		1		

F1F2

c \ ab	0 0	0 1	11	1 0
0		1	1	
1		1		1

F1F3

c \ ab	0 0	0 1	11	1 0
0		1		1
1		1		

F2F3

c \ ab	0 0	0 1	11	1 0
0		1		
1		1		

F1F2F3

Mapa de Karnaugh

Minimização de Circuitos Combinatórios de Multiplas Saídas:

Exemplo: $F_1(a,b,c)=\sum(0,2,3,5,6)$

$F_2(a,b,c)=\sum(1,2,3,4,7)$

$F_3(a,b,c)=\sum(2,3,4,5,6)$

c \ ab	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	0	1	0	1

F1

c \ ab	00	01	11	10
0	0	1	0	1
1	1	1	1	0

F2

c \ ab	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	0	1	0	1

F3

$F_{1min}=a'c' + a'b + ab'c + bc'$

$F_{2min}=a'b + a'c + bc + ab'c'$

$F_{3min}= a'b + bc' + ab'c' + ab'c$

Solução:

Número de literais=16

Número de termos=7

Mapa de Karnaugh

Minimização de Circuitos Combinatórios de Multiplas Saídas:

Solução de Múltiplas Saídas

c \ ab	0 0	0 1	11	1 0
0	1	1	1	0
1	0	1	0	1

F1

c \ ab	0 0	0 1	11	1 0
0	0	1	0	1
1	1	1	1	0

F2

c \ ab	0 0	0 1	11	1 0
0	0	1	1	1
1	0	1	0	1

F3

Solução de Simples Saída

c \ ab	0 0	0 1	11	1 0
0	1	1	1	0
1	0	1	0	1

F1

c \ ab	0 0	0 1	11	1 0
0	0	1	0	1
1	1	1	1	0

F2

c \ ab	0 0	0 1	11	1 0
0	0	1	1	1
1	0	1	0	1

F3

Comparação:

Solução: Multiplas Saídas:

Número de literais=16

Número de produtos=7

Número de literais=16

Número de termos=7

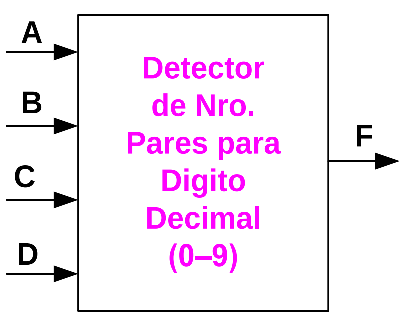
Solução: Simples Saída

Número de literais=18

Número de produtos=8

Mapa de Karnaugh

Minimização de funções especificadas incompletamente:



A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	x
1	0	1	1	x
1	1	0	0	x
1	1	0	1	x
1	1	1	0	x
1	1	1	1	x

Don't-care

CD \ AB	0 0	01	1 1	1 0
0 0	0	1	x	1
0 1	0	0	x	0
1 1	0	0	x	x
1 0	1	1	x	x

F_{min}=AD' + BD' + CD'