CT-201 ou CTC-21 Matemática Discreta e Lógica Matemática (Lista de Exercícios 4)

Professor: Paulo Marcelo Tasinaffo.
Data de Divulgação: primeira semana de aula.
Data de Entrega: ver instruções abaixo.

Regulamento:

Graduação:

1. Não precisa entregar para o professor.

Pós-Graduação:

2. Pode ser resolvida em dupla;
3. Data de entrega, a ser combinada com o professor responsável.

1. Questão sobre o *algoritmo da resolução completa* em *Lógica Proposicional* e/ou em *Lógica de Primeira Ordem*. Demonstre as seguintes propriedades através do critério de encontrar cláusulas vazias (escolha somente quatro itens para resolver):

a) $\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \dashv\vdash (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$

b) $A \to C, B \to C \vdash A \vee B \to C$

c) $\forall x(Px \to Qx) \vdash \exists xPx \to \exists xQx$

2. Questão sobre *encadeamento para frente e para trás* em *Lógica de Primeira Ordem*. Para a seguinte base de conhecimento com cláusulas definidas:

Fatos:

Fazendeiro(João)

Inimigo(João, SemTerras)

$\exists$x Cerca(x) $\wedge$ Pertence(x, João)

Regras:

$\forall$x Inimigo(x, SemTerras) $\to$ Hostil(x)

$\forall$x Cerca(x) $\to$ Defesa(x)

$\forall xy$ *Fazendeiro(x)* $\wedge$ *Defesa(y)* $\wedge$ *Pertence(Escritura, x)* $\to$ *Fazenda(Legal)*

$\forall xy$ *Cerca(x)* $\wedge$ *Pertence(x, y)* $\to$ *Pertence(Escritura, y)*

Fazenda(Legal) $\wedge$ *Inimigo(João, SemTerras)* $\to$ *Situação(Guerra)*

Fazenda(Legal) $\wedge$ *Emprega(João, SemTerras)* $\to$ *Situação(Paz)*

$\forall$xy Situação(Guerra) $\wedge$ Inimigo(x, y) $\to$ MaiorForça(y, x)

$\forall xy$ *Situação(Paz)* $\wedge$ *Emprega(y, x)* $\to$ *MaiorForça(y, x)*

a) Determine quem possui a *maior força* através do algoritmo de *encadeamento para frente*;
b) Repita o mesmo exercício utilizando o *encadeamento para trás*.

3. Questão sobre o *algoritmo da resolução completa em LPO*. Resolva a questão anterior, mas agora utilizando o *algoritmo da resolução completa*.

4. Exercício envolvendo o método do tableau semântico proposicional. Utilizando Tableaux semânticos demonstre que as fórmulas a seguir são tautologias.

a) $\models (H \land (G \lor H)) \leftrightarrow ((H \land G) \lor (H \land H))$
b) $\models (H \lor G) \leftrightarrow (\neg H \to G)$

5. Exercício envolvendo o método do tableau semântico proposicional. Utilizando Tableaux semânticos demonstre que os seguintes sistemas dedutivos são legítimos.

a) $A \to B, \neg A \to C \vdash B \lor C$
b) $A \to C, B \to C \vdash A \lor B \to C$

6. Exercício envolvendo o método do tableau semântico em cálculo de predicados. Demonstre, utilizando tableaux semânticos, se os pares de fórmulas a seguir são equivalentes.

a) $(\forall x)(p(x) \land q(y))$ e $((\forall x)p(x) \land q(y))$

Sugestão: Dadas duas fórmulas H e G, H equivale a G se e somente se $(H \leftrightarrow G)$ é tautologia. Para demonstrar este fato utilizando tableau semântico, inicie o tableau com a fórmula $\neg(H \leftrightarrow G)$. Se for possível obter tableau fechado então H equivale a G.

7. Exercício envolvendo o método do tableau semântico em cálculo de predicados. Demonstre, utilizando tableaux semânticos, que:

a) Se $E_1 = (\forall x)(p(x) \land q(x))$ e $E_2 = (\forall x)p(x) \land (\forall x)q(x)$, então E_1 equivale a E_2

Sugestão: Dadas duas fórmulas E_1 e E_2, E_1 equivale a E_2 se e somente se $E_1 \leftrightarrow E_2$ é tautologia. Dadas duas fórmulas E_1 e E_2, E_1 implica E_2 se e somente se $E_1 \to E_2$ é tautologia. Para demonstrar tais fatos, utilizando tableaux semânticos, inicie o tableau com a fórmula $\neg E_1 \leftrightarrow E_2$ ou $\neg E_1 \to E_2$. Se for possível obter um tableau fechado então E_1 equivale a E_2 ou E_1 implica E_2, respectivamente. E_1 não implica E_2 quando não for possível obter tableau fechado.

8. Exercício envolvendo o método do tableau semântico em cálculo de predicados. Demonstre, utilizando tableaux semânticos, que:

a) $\vdash (\forall x)((p(x) \to q(x)) \to (\neg q(x) \to \neg p(x)))$

Sugestão: Inicie sempre o tableau com a negação da fórmula a ser provada.

9. Exercício envolvendo o método do tableau semântico em cálculo de predicados. Algumas das fórmulas a seguir são tautologias, outras não. Para cada fórmula demonstre, utilizando tableaux semânticos, se ela é uma tautologia.

a) $(\forall x)p(x) \rightarrow p(a)$
b) $(\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)p(x)$

Sugestão: Em cada item, inicie o tableau com a negação da fórmula. Se for possível obter um tableau fechado, então a fórmula é uma tautologia. Observe que nem sempre é possível obter um tableau fechado na primeira tentativa.

10. Exercício envolvendo o método do tableau semântico em cálculo de predicados. Prove que todos os tableaux associados a $H = (\forall x)(p(x) \rightarrow (\exists y)(q(y) \wedge r(x, y))) \rightarrow \neg(\exists y)(q(y) \wedge (\forall x)r(y, x))$ são abertos e conclua que H não é uma tautologia (Exercício Optativo).

Sugestão: Esta prova é feita por exaustão. Dê argumentos justificando que não é possível obter um tableau fechado a partir de $\neg H$.

Boa Sorte ☺!
Prof. Tasinaffo.