

Álgebra Booleana: Definimos um conjunto de B de elementos {a,b,c,d,....} e três operações (OR "ou", AND "e", complemento).

Para um conjunto *B* de dois elementos [0,1] ([F,V]), A álgebra é chamada de *álgebra de chaveamento* (Shannon)

Postulados:

a) Conjunto B Booleano, no qual existem 2 elementos.

$$X=0$$
 se $X\neq 1$ e $X=1$ se $X\neq 0$

b) Operação OR em B → Notação {+} {V}

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 1$$

Postulados:



c) Operação AND em B → Notação {.} {^}

$$0.0 = 0$$

$$0.1 = 0$$

$$1.0 = 0$$

$$1.1 = 1$$

d) Operação *complemento* em *B*

Teoremas de uma variável:

$$a1) X + 0 = X$$

→ Identidade

$$a2) X + 1 = 1$$

→ Elemento nulo

$$a3) X + X = X$$

→ Idempotência

$$a4)(X')' = X$$

→ Involução

$$a5) X + X' = 1$$

→ Complemento



Teoremas de uma variável: Continuação

$$a6) X . 1 = X$$

→ Identidade

$$a7) X . 0 = 0$$

→ Elemento nulo

a8)
$$X . X = X$$

→ Idempotência

$$a9) X . X' = 0$$

→ Complemento



Teoremas de duas variáveis:

$$b1)X+Y=Y+X$$

→ Comutativa

$$X.Y = Y.X$$

$$b2) X + X . Y = X$$

→ Absorção

$$X \cdot (X + Y) = X$$

$$b3)(X + Y').Y = X.Y$$

$$X \cdot Y' + Y = X + Y$$



Exemplo: prove o teorema b3

(Omitindo o operador {.})

1)
$$(X + Y') \cdot Y = X \cdot Y \rightarrow XY + YY' =$$

 $XY + 0 (a9) = XY (a1)$
2) $X \cdot Y' + Y = X + Y \rightarrow XY' + 1 \cdot Y (a6) =$
 $XY' + (1+X)(a2)Y =$
 $XY' + XY + Y = X(Y' + Y) (a5) + Y =$
 $XY \cdot Y = X + Y =$



Teoremas de 3 variáveis

c1)
$$(X + Y) + Z = X + (Y + Z) = X + Y + Z \rightarrow Associativa$$

 $(X,Y).Z = X.(Y,Z) = X.Y.Z$

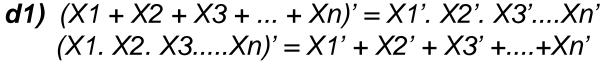
c2)
$$X.(Y + Z) = X.Y + X.Z \rightarrow Distributiva$$

 $X + Y.Z = (X + Y).(X + Z)$

Exemplo: prove o teorema c2

1)
$$X.Y + X.Z = \rightarrow X(Y+0) + X(Z+0)$$
 (a1)=
 $XY + X0 + XZ + X0 =$
 $X(Y+Z+0+0)$ (a1)=
 $=X(Y+Z)$
2) $(X+Y).(X+Z) = XX + XY + XZ + YZ =$
 $X(1+Y+Z) + YZ =$

Teoremas de N variáveis



Teorema De Morgan

d2)
$$Xi. f(X1, X2,Xi....Xn) = Xi. f(X1, X2,1....Xn) Xi+ f(X1, X2,Xi....Xn) = Xi + f(X1, X2,Xn)$$

Similarmente:

$$Xi'. f(X1, X2,Xi....Xn) = Xi'. f(X1, X2,0....Xn)$$

 $Xi' + f(X1, X2,Xi....Xn) = Xi' + f(X1, X2,1....Xn)$

Teorema de Shannon

Exemplo: Prove o teorema do Consenso

- 1) AB + A'C + BC = AB + A'C
- 2) (A+B). (A'+C). (B+C) = (A+B). (A'+C)

Prova 1:
$$AB + A'C + BC = AB + A'C + B(A + A')C = AB + A'C + ABC + A'BC = AB(1 + C) + A'C (1 + B) = AB + A'C$$

Prova 2:
$$(A + B).(A' + C).(B + C) = (AA' + AC + A'B + BC).(B+C) = (AC + A'B + BC).(B+C) = ABC + ACC + A'B + A'BC + BCC = ABC + AC + A'B + A'BC + BC = AC (1 + B) + BC (1 + A') + A'B (1 + C) = AC + BC + A'B = (A + B).(A' + C)$$

Exemplo: Prove o teorema abaixo usando o teorema De Morgan

$$A + A'B = A + B$$

Prova:
$$A + A'B = ((A + A'B)')' (a4) =$$

$$(De Morgan) (A' . (A'B)')' = (A'((A')' + B')' =$$

$$(A'(A + B')' =$$

$$(A'A + A'B')' = (A'B')' =$$

$$(A')' + (B')' = A + B$$

Exemplo: Prove o teorema abaixo usando indução perfeita (verificação)

$$A + A'B = A + B$$

Prova:

Exemplo: Na a função abaixo, aplique a expansão de Shannon em torno da variável a:

$$F(a,b,c,d)=a'b'cd'+a'bc'd+ac'd'+ab'c+abc$$

Teorema de Shannon: F(a,b,c,d)=a.F(1,b,c,d)+a'.F(0,b,c,d)

Solução:

$$F = a.(c'd' + b'c + bc) + a'.(b'cd' + bc'd)$$