ÁLGEBRA DE CHAVEAMENTO

Álgebra Booleana: Definimos um conjunto de ***B*** de elementos {a,b,c,d,....} e três operações (OR "ou", AND "e", complemento).

Para um conjunto ***B*** de dois elementos [0,1] ([F,V]) ,
A álgebra é chamada de ***álgebra de chaveamento*** (Shannon)

ÁLGEBRA DE CHAVEAMENTO

Postulados:

a) Conjunto ***B*** Booleano, no qual existem 2 elementos***.***

$$X=0 \text{ se } X\neq 1 \quad \text{e} \quad X=1 \text{ se } X\neq 0$$

b) Operação ***OR*** em ***B*** → Notação {+} {V}

0 + 0 = 0

0 + 1 = 1

1 + 0 = 1

1 + 1 = 1

ÁLGEBRA DE CHAVEAMENTO

Postulados:

c) Operação ***AND*** em ***B*** → Notação {.} {$\wedge$}

$0 . 0 = 0$

$0 . 1 = 0$

$1 . 0 = 0$

$1 . 1 = 1$

d) Operação ***complemento*** em ***B***

$0' = 1$ e $1' = 0$ Notação {–}

ÁLGEBRA DE CHAVEAMENTO

Teoremas de uma variável:

a1) X + 0 = X → *Identidade*

a2) X + 1 = 1 → *Elemento nulo*

a3) X + X = X → *Idempotência*

a4) (X')' = X → *Involução*

a5) X + X' = 1 → *Complemento*

ÁLGEBRA DE CHAVEAMENTO

Teoremas de uma variável: Continuação

a6) $X . 1 = X$ → *Identidade*

a7) $X . 0 = 0$ → *Elemento nulo*

a8) $X . X = X$ → *Idempotência*

a9) $X . X' = 0$ → *Complemento*

ÁLGEBRA DE CHAVEAMENTO

Teoremas de duas variáveis:

b1) $X + Y = Y + X$ → *Comutativa*

$X . Y = Y . X$

b2) $X + X . Y = X$ → *Absorção*

$X . (X + Y) = X$

b3) $(X + Y') . Y = X . Y$

$X . Y' + Y = X + Y$

ÁLGEBRA DE CHAVEAMENTO

Exemplo: prove o teorema b3

(Omitindo o operador {.})

1) (X + Y') . Y = X .Y → *XY + YY' =*

XY + 0 (a9) = XY (a1)

2) X . Y' + Y = X + Y → *XY' + 1.Y (a6) =*

XY' + (1+X)(a2)Y=

XY' + XY + Y = X(Y' + Y) (a5) + Y =

X 1 (a6) +Y = X + Y

ÁLGEBRA DE CHAVEAMENTO

Teoremas de 3 variáveis

c1) $(X + Y) + Z = X + (Y + Z) = X + Y + Z$ → ***Associativa***

$(X.Y).Z = X.(Y.Z) = X.Y.Z$

c2) $X.(Y + Z) = X.Y + X.Z$ → ***Distributiva***

$X + Y.Z = (X + Y).(X + Z)$

ÁLGEBRA DE CHAVEAMENTO

Exemplo: prove o teorema c2

1) $X.Y + X.Z = \rightarrow X(Y+0) + X(Z+0)\ (a1) =$

$XY + X0 + XZ + X0 =$

$X(Y + Z + 0 + 0)\ (a1) =$

$= X(Y + Z)$

2) $(X + Y).(X + Z) = XX + XY + XZ + YZ =$

$X(1 + Y + Z) + YZ =$

$X\,1(a2) + YZ = X(a6) + YZ =$

$= X + YZ$

ÁLGEBRA DE CHAVEAMENTO

Teoremas de N variáveis

d1) *(X1 + X2 + X3 + ... + Xn)’ = X1’. X2’. X3’....Xn’*

(X1. X2. X3.....Xn)’ = X1’ + X2’ + X3’ +....+Xn’

Teorema De Morgan

d2) *X*i. f(X1, X2, …..Xi…..Xn) = Xi . f(X1, X2, …..1…..Xn)

Xi+ f(X1, X2, …..Xi…..Xn) = Xi + f(X1, X2, …..0…..Xn)

Similarmente:

Xi’. f(X1, X2, …..Xi…..Xn) = Xi’. f(X1, X2, …..0…..Xn)

Xi’ + f(X1, X2, …..Xi…..Xn) = Xi’ + f(X1, X2, …..1…..Xn)

Teorema de Shannon

ÁLGEBRA DE CHAVEAMENTO

Exemplo: ***Prove o teorema do Consenso***

$1)\ AB + A'C + BC = AB + A'C$

$2)\ (A+B).(A'+C).(B+C) = (A+B).(A'+C)$

Prova 1: $AB + A'C + BC = AB + A'C + B(A + A')C =$

$AB + A'C + ABC + A'BC = AB(1 + C) + A'C(1 + B) = AB + A'C$

Prova 2: $(A + B).(A' + C).(B + C) = (AA' + AC + A'B + BC).(B+C) =$

$(AC + A'B + BC).(B+C) = ABC + ACC + A'B + A'BC + BCC =$

$ABC + AC + A'B + A'BC + BC =$

$AC(1 + B) + BC(1 + A') + A'B(1 + C) =$

$AC + BC + A'B = (A + B).(A' + C)$

ÁLGEBRA DE CHAVEAMENTO

***Exemplo:* Prove o teorema abaixo usando o teorema De Morgan**

$$A + A'B = A + B$$

Prova: $A + A'B = ((A + A'B)')'$ (a4) =

(De Morgan) $(A' \,.\, (A'B)')' = (A'((A')' + B')' =$

$(A'(A + B'))' =$

$(A'A + A'B')' = (A'B')' =$

$(A')' + (B')' = A + B$

ÁLGEBRA DE CHAVEAMENTO

Exemplo: ***Prove o teorema abaixo usando indução perfeita (verificação)***

$$A + A'B = A + B$$

Prova:

A	B	A'	$A'B$	$(A + A'B)$	$(A + B)$
0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1

Exemplo: ***Na a função abaixo, aplique a expansão de Shannon em torno da variável a:***

$$F(a,b,c,d)=a'b'cd' + a'bc'd + ac'd' + ab'c + abc$$

Teorema de Shannon: $F(a,b,c,d)=a.F(1,b,c,d) + a'.F(0,b,c,d)$

Solução:

$$F= a.(c'd' + b'c + bc) + a'.(b'cd' + bc'd)$$