

# Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA

## Controle para Sistemas Computacionais – CMC-12

### Notas da Aula 2 – Modelagem de Sistemas Dinâmicos

**Professor:** Marcos Ricardo Omena de Albuquerque Maximo

11 de março de 2020

Em Controle, trabalha-se com os chamados **sistemas dinâmicos**, que são sistemas que evoluem no tempo. Para conseguir projetar um controlador que imponha um certo comportamento desejado a um sistema, é necessário conhecer um modelo matemático capaz de descrever como o sistema dinâmico se comporta. Esses modelos são tipicamente equações diferenciais ordinárias (EDOs) em que a variável independente é o tempo. Para sistemas físicos, pode-se usar princípios físicos já aprendidos durante os cursos de Física.

## 1 Sistema massa-mola-amortecedor forçado

Considere um sistema massa-mola-amortecedor forçado (por uma força constante) conforme mostrado na Figura 1. Considerando o sistema de coordenadas apresentado, a força resultante atuando sobre o bloco é

$$f_r(t) = f - bx(t) - kx(t), \quad (1)$$

em que  $f$  é uma força externa constante,  $b$  é a constante do amortecedor e  $k$  é a constante de força da mola. Pela segunda lei de Newton, tem-se

$$f_r = m\ddot{x}(t) \Rightarrow m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = f, \quad (2)$$

em que  $m$  é a massa do bloco. Dividindo-se por  $m$ , obtém-se

$$\ddot{x}(t) + \frac{b}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{f}{m}. \quad (3)$$

Desse modo, o **comportamento dinâmico** desse sistema é descrito pela equação diferencial ordinária (EDO) (3). Perceba que essa é uma EDO de 2<sup>a</sup> ordem, linear, homogênea e com coeficientes constantes. Fisicamente, tem-se que ter  $m > 0$ ,  $b > 0$  e  $k > 0$ . Assim, conforme já estudado nos cursos de Física, essa EDO admite as seguintes soluções possíveis:

$$x(t) = c_1e^{-\lambda_1 t} + c_2e^{-\lambda_2 t} + f/k, \quad \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad (4)$$

$$x(t) = c_1e^{-\lambda t} + c_2te^{-\lambda t} + f/k, \quad \lambda > 0, \quad (5)$$

$$x(t) = c_1e^{-\sigma t} \cos(\omega t) + c_2e^{-\sigma t} \sin(\omega t) + f/k, \quad \sigma > 0, \quad \omega > 0, \quad (6)$$

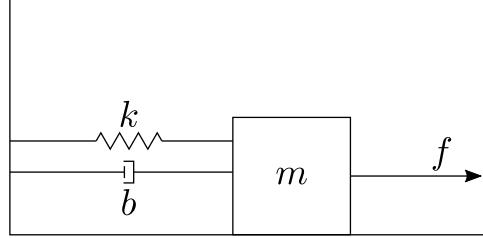


Figura 1: Sistema massa-mola-amortecedor forçado.

em que  $c_1$  e  $c_2$  são constantes dependentes das condições iniciais. Tem-se então os seguintes casos:

1. **Superamortecido:** dado por (4), em que  $-\lambda_1 < 0$  e  $-\lambda_2 < 0$  são dois autovalores reais distintos.
2. **Criticamente amortecido:** dado por (5), em que  $-\lambda < 0$  é um autovalor de multiplicidade 2.
3. **Subamortecido:** dado por (6), em que  $-\sigma \pm \omega i$  representam autovalores complexos conjugados e  $\sigma > 0$ .

A Figura 2 apresenta gráficos para os 3 casos. Analise a mudança qualitativa de comportamento entre os casos. Muitos sistemas físicos se comportam como EDOs de 2<sup>a</sup> ordem com coeficientes constantes, de modo que esse tipo de EDO é muito importante em Controle. Posteriormente, discutir-se-á mais sobre sistemas de segunda ordem.

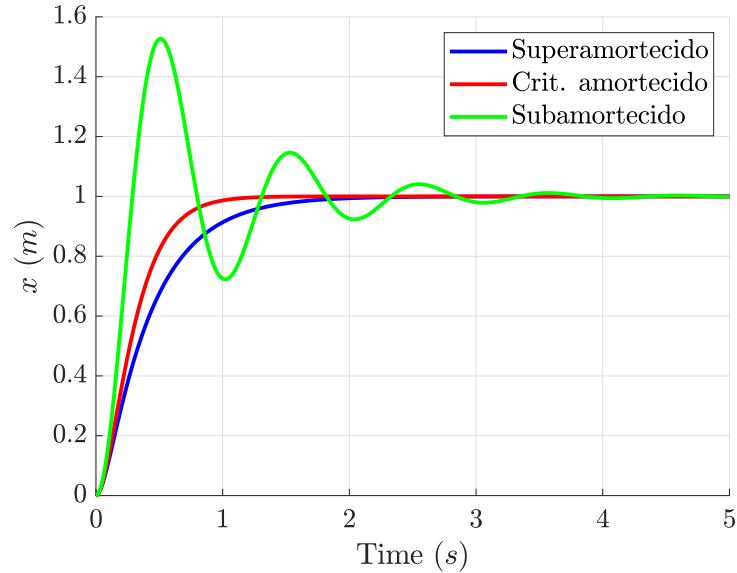


Figura 2: Comportamentos do sistema massa-mola-amortecedor forçado para nos casos superamortecido, criticamente amortecido e subamortecido.

## 2 Circuito RLC

Considere um circuito RLC em série conforme mostrado na Figura 3. A partir da figura, pode-se escrever

$$V = V_R + V_L + V_C, \quad (7)$$

em que  $V$ ,  $V_R$ ,  $V_L$  e  $V_C$  representam as tensões da fonte, no resistor, no indutor e no capacitor, respectivamente. Usando os conhecimento dos cursos de Física sobre elementos básicos de um circuito elétrico, tem-se

$$\begin{cases} V_R = Ri(t) = R\dot{q}(t), \\ V_L = L\dot{i}(t) = L\ddot{q}(t), \\ V_C = (1/C)q(t), \end{cases} \quad (8)$$

em que  $R$ ,  $L$  e  $C$  representam a resistência do resistor, a indutância do indutor e a capacidade do capacitor, respectivamente. Além disso,  $i(t)$  indica a corrente no circuito, enquanto  $q(t)$  significa a carga no capacitor. Substituindo-se (8) em (7), obtém-se

$$V = R\dot{q}(t) + L\ddot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) \Rightarrow L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = V. \quad (9)$$

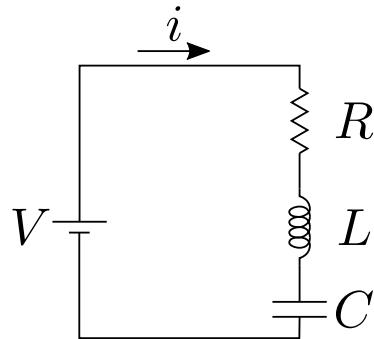


Figura 3: Circuito RLC.

Dividindo-se por  $L$ , chega-se a

$$\ddot{q}(t) + \frac{R}{L}\dot{q}(t) + \frac{1}{LC}q(t) = \frac{V}{L}. \quad (10)$$

Perceba que a EDO do circuito RLC apresentada em (10) coincide com se fizermos as seguintes substituições:

$$\begin{cases} L = m & (\text{inérgia}) \\ R = b & (\text{amortecimento}) \\ C = 1/k & (\text{acúmulo de energia}) \\ V = f & (\text{força}) \end{cases} \quad (11)$$

Perceba que são sistemas de domínios distintos da Física (Mecânica x Eletricidade) e mesmo assim o modelo matemático por trás desses sistemas é equivalente. Isso mostra porque EDOs se tornaram tão populares para modelar o mundo. Em Controle, tenta-se

desenvolver técnicas que lidam com os chamados sistemas dinâmicos, que são basicamente sistemas que atendem a uma determinada EDO (possivelmente, não-linear). Assim, essas técnicas são de certo modo independentes do domínio físico em que estão sendo aplicadas, de modo que teoricamente controleiros de aviões, foguetes, robôs, quadricopteros, plantas químicas etc. usam basicamente as mesmas técnicas. Além disso, controleiros formados em Engenharia Aeronáutica, Engenharia Mecânica, Engenharia Elétrica, Engenharia de Computação, Engenharia de Controle e Automação etc. tem formações em Controle muito parecidas. Claro que na prática é comum um controleiro se especializar num certo domínio, pois sistemas reais são muito complicados e tipicamente envolvem vários conhecimentos específicos.

### 3 Representação em espaço de estados

Em um curso de EDOs também se aprende como transformar uma EDO de ordem maior que 1 em um sistema de EDOs de 1<sup>a</sup> ordem. Vamos mostrar usando o exemplo do massa-mola-amortecedor forçado. Considere a EDO (3) e defina

$$\begin{cases} x_1 = x, \\ x_2 = \dot{x}. \end{cases} \quad (12)$$

Substituindo-se (12) em (3), obtém-se

$$\dot{x}_2 + \frac{b}{m}x_2 + \frac{k}{m}x_1 = \frac{f}{m} \Rightarrow \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}f. \quad (13)$$

Portanto, pode-se montar o seguinte sistema de EDOs:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m}f \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Em notação matricial:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m}f \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Também é usual representar o sistema de EDOs usando diretamente  $x$  e  $\dot{x}$ :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m}f \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Em Controle, as variáveis  $x$  e  $\dot{x}$  que são usadas para representar o mesmo sistema dinâmico são chamadas de **estados**. No caso,  $\mathbf{x} = [x \ \dot{x}]^T$  é o **vetor de estados** desse sistema. Também é comum considerar um subconjunto das variáveis do sistema que são consideradas de interesse, por exemplo considere que se está interessado apenas na posição  $x$  do bloco. Assim, essa variável pode ser obtida a partir dos estados da seguinte forma:

$$y = x = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + 0f, \quad (17)$$

em que  $y$  é a chamada **saída** do sistema. Com isso, a representação genérica de um sistema dinâmico linear em **espaços de estados** é da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \quad (18)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}, \quad (19)$$

em que:

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$  é o vetor de estados.
- $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$  é o vetor de entradas (comandos/controles).
- $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$  é o vetor de saídas.
- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  é a matriz de estado.
- $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$  é a matriz de entrada.
- $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$  é a matriz de saída.
- $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$  é a matriz de transmissão direta.

Perceba que diferentemente dos sistemas apresentados até o momento, essa formulação geral permite que um sistema tenha mais de uma entrada ou mais de uma saída. Com base nisso, existe uma distinção entre sistemas **SISO** (*single-input, single-output*) e **MIMO** (*multiple-input, multiple-output*). As técnicas de CMC-12 são capazes de lidar apenas com sistemas MIMO. Porém, na prática, isso não é uma limitação tão forte quanto parece, pois normalmente é possível aproximar um sistema MIMO por vários sistemas SISO.

## 4 Cruise Control

Considere o carro representado na Figura 4. Considere que é possível controlar por computador a força que o carro está desenvolvendo através do acelerador ou do freio. Perceba que da forma como um carro funciona, o acelerador consegue gerar apenas forças positivas e o freio apenas forças negativas. Nesse caso, no código que implementa o algoritmo de controle, bastaria verificar se deseja-se uma força positiva ou negativa e acionar o acelerador ou freio, respectivamente. Isso nos permite considerar um valor de força qualquer e deixar o mapeamento disso para os atuadores para um etapa posterior do algoritmo. Assim, a força resultante atuando no carro é dada por

$$f_r = f - bv \Rightarrow m\dot{v} = f - bv \Rightarrow m\dot{v} + bv = f, \quad (20)$$

em que  $m$  é a massa do carro,  $b$  é uma constante de amortecimento (da resistência do ar, por exemplo),  $f$  é a força desenvolvida pelo carro e  $v$  é a velocidade do carro. Dividindo-se por  $m$ , obtém-se a EDO

$$\dot{v}(t) + \frac{b}{m}v(t) = \frac{1}{m}f(t). \quad (21)$$

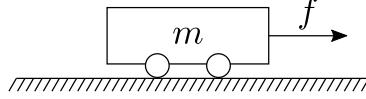


Figura 4: Carro sob ação da força gerada pelo motor/freio.

Para verificar uma forma simples de realizar controle nesse caso, vamos resolver a EDO (21) para uma força constante, i.e.  $f(t) = f$ . A homogênea associada a (21) é

$$\dot{v}(t) + \frac{b}{m}v(t) = 0, \quad (22)$$

que resulta na equação característica

$$\lambda + \frac{b}{m} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{b}{m}. \quad (23)$$

Portanto, a solução homogênea é dada por

$$v_h(t) = ce^{-\frac{b}{m}t}. \quad (24)$$

A solução particular é facilmente encontrada por inspeção:

$$v_p(t) = \frac{f}{b}. \quad (25)$$

Assim, a solução da EDO (21) é dada por

$$v(t) = v_h(t) + v_p(t) \Rightarrow v(t) = ce^{-\frac{b}{m}t} + \frac{f}{b}. \quad (26)$$

Considere o PVI associado a (21) em que  $v(0) = 0$ :

$$v(0) = 0 \Rightarrow c + \frac{f}{b} = 0 \Rightarrow c = -\frac{f}{b}. \quad (27)$$

Logo, a solução do PVI é

$$v(t) = \frac{f}{b} \left( 1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right). \quad (28)$$

Perceba ainda que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = v_\infty = \frac{f}{b}, \quad (29)$$

em que  $v_\infty$  é a velocidade de **regime permanente**. Isso indica um algoritmo muito simples para atingir uma velocidade de referência (desejada)  $v_r$ , basta escolher  $f$  como

$$f = bv_r. \quad (30)$$

Esse seria o que se chama de **controle em malha aberta**, pois ele **não** utiliza nenhuma informação de sensor. Mais para frente verificamos vários problemas com esse tipo de esquema de controle. Entretanto, saiba que, por conta de sua simplicidade, esse

tipo de controle é usado às vezes na prática (certamente não num sistema de *cruise control*). No caso de um sistema dinâmico de 1<sup>a</sup> ordem como esse, é comum definir a chamada constante de tempo

$$\tau = \frac{m}{b}. \quad (31)$$

Pode-se pensar na constante de tempo como uma medida de quão rápido é nosso sistema, mas precisamente ela define quanto tempo o sistema demora para chegar a aproximadamente 63% do valor final:

$$v(\tau) = \frac{f}{b} (1 - e^{-1}) \Rightarrow v(\tau) = \frac{f}{b} \left( \frac{e - 1}{e} \right) \Rightarrow v(\tau) \approx 0.63 \frac{f}{b}. \quad (32)$$

Perceba que nesse caso a constante de tempo depende apenas da Física e não é influenciada pelo valor de  $f$  escolhido pelo controlador. Caso deseje-se “manipular” a Física e impor uma velocidade de convergência mais rápida, será necessário um algoritmo de controle mais sofisticado. Você consegue pensar numa estratégia para deixar o sistema artificialmente mais rápido?

## 5 Robô uniciclo

Considere um robô como o apresentado na Figura 5 sob o qual tenhamos controle sobre suas velocidades linear e angular ( $v$  e  $\omega$ ). O sistema dinâmico associado a esse robô é dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \psi, \\ \dot{y} = v \sin \psi, \\ \dot{\psi} = \omega, \end{cases} \quad (33)$$

em que  $x$  e  $y$  são coordenadas cartesianas e  $\psi$  é a orientação. Na literatura, chama-se esse modelo de uniciclo. Esse sistema é não apenas não-linear (por conta de  $\cos \psi$  e  $\sin \psi$ ), mas ele também é um sistema do MIMO. Infelizmente, as técnicas que aprenderemos em CMC-12 são adequadas apenas para sistemas lineares e SISO. Todavia, na próxima seção, será mostrado que restringindo-se o robô a uma tarefa específica, obtém-se um sistema linear e SISO.

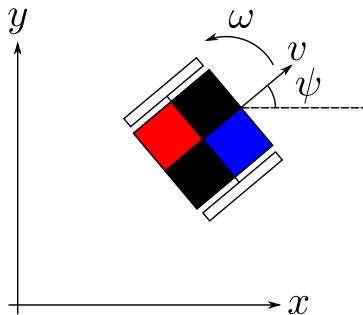


Figura 5: Robô uniciclo.

## 6 Robô seguidor de linha

Considere um robô seguidor de linha como mostrado na Figura 6. O objetivo aqui é manter o robô alinhado com a linha. Com base no diagrama esquemático, pode-se escrever

$$\begin{cases} \dot{h} = v \sin \psi, \\ \dot{\psi} = \omega, \end{cases} \quad (34)$$

em que  $h$  é o desvio em relação à linha,  $v$  é a velocidade linear do robô,  $\psi$  é o ângulo em relação à linha e  $\omega$  é a velocidade angular do robô (comando). Considere que a velocidade  $v$  é constante e se está interessado apenas em comandar  $\omega$  nesse caso. Perceba que devido à existência do  $\sin \psi$ , esse é um sistema não-linear. Porém, ainda é possível usá-las se o sistema for linearizado (i.e. aproximado por um modelo linear). Nesse caso, pode-se considerar uma aproximação clássica para ângulos pequenos:

$$\sin \psi \approx \psi. \quad (35)$$

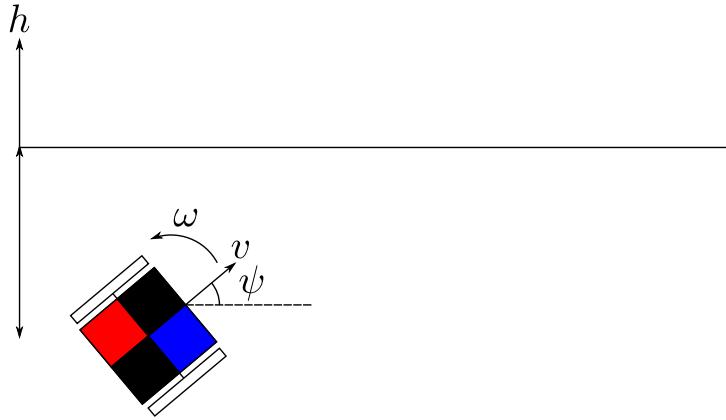


Figura 6: Robô seguidor de linha.

Substituindo (35) em (36), obtém-se

$$\begin{cases} \dot{h} = v\psi, \\ \dot{\psi} = \omega, \end{cases} \quad (36)$$

que é um sistema linear. Pode-se transformar esse sistema numa representação de espaço de estados:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} h \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega, \quad (37)$$

$$h = [1 \ 0] \begin{bmatrix} h \\ \psi \end{bmatrix} + 0\omega. \quad (38)$$

Perceba que essa representação considera que  $h$  é a única variável de interesse na saída (SISO). Utilizando a notação definida anteriormente para espaço de estados, fica-se com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \ 0], \quad \mathbf{D} = 0. \quad (39)$$

## 7 Motor Elétrico

Motores elétricos são usados em muitas aplicações práticas que requerem a realização de movimento. Para entender como motores elétricos funcionam, recomendo o seguinte link: <https://www.youtube.com/watch?v=LAtPHANEfQo>.

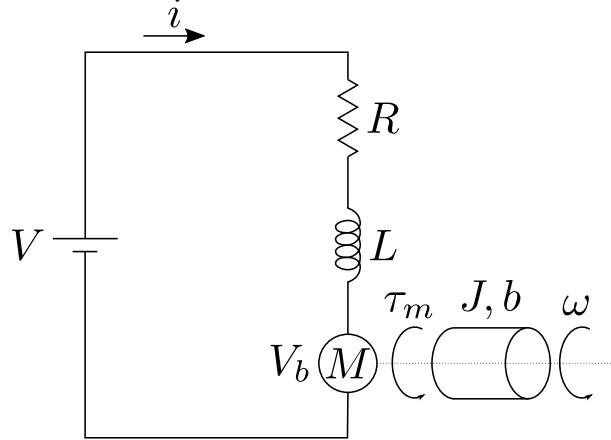


Figura 7: Diagrama esquemático de um motor elétrico.

Um motor elétrico é um sistema eletromecânico. A Figura 7 apresenta um esquemático do funcionamento de um motor elétrico. A parte elétrica do motor é dada por

$$V = Ri + L\dot{i} + V_b, \quad (40)$$

em que  $R$  é a resistência,  $L$  é a indutância,  $\dot{i}$  é a corrente,  $V$  é a tensão aplicada nos terminais do motor e  $V_b$  é a força contraeletromotriz induzida devido à rotação do motor. Já a parte mecânica é dada por

$$\tau_r = \tau_m - b\omega = J\dot{\omega}, \quad (41)$$

em que  $\tau_r$  é o torque resultante,  $\tau_m$  é o torque gerado pelo motor,  $b$  é a constante de atrito viscoso (amortecimento),  $J$  é a inércia do motor e  $\omega$  é a velocidade angular do motor. O acoplamento entre os domínios elétrico e mecânico acontece através de

$$\begin{cases} \tau_m = K_t i, \\ \omega = K_\omega V_b, \end{cases} \quad (42)$$

em que  $K_t$  e  $K_\omega$  são as chamadas constante de torque e constante de velocidade, respectivamente. Devido ao princípio da conservação da energia, há uma relação entre essas constantes. A potência elétrica fornecida pelo circuito é convertida em potência mecânica no motor, logo

$$P_{ele} = P_{mec} \Rightarrow V_b i = \tau_m \omega \Rightarrow \frac{\omega}{K_\omega} i = K_t i \omega \Rightarrow K_t = K_\omega^{-1}. \quad (43)$$

Usando (42) e (43) em (40) e (41), obtém-se

$$\begin{cases} \dot{\omega} = -\frac{b}{J}\omega + \frac{K_t}{J}i \\ \dot{i} = -\frac{K_t}{L}\omega - \frac{R}{L}i + \frac{1}{L}V \end{cases} \quad (44)$$

Transformando em espaço de estados:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \omega \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{J} & \frac{K_t}{J} \\ -\frac{K_t}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} V \quad (45)$$

$$\omega = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \omega \\ i \end{bmatrix} \quad (46)$$

Se a posição angular também for considerada, fica-se com um sistema de 3<sup>a</sup> ordem:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{J} & \frac{K_t}{J} \\ 0 & -\frac{K_t}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} V \quad (47)$$

$$\theta = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ i \end{bmatrix} \quad (48)$$

# Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA

## Controle para Sistemas Computacionais – CMC-12

### Notas da Aula 3 – Controle em Malha Aberta e Fechada

**Professor:** Marcos Ricardo Omena de Albuquerque Maximo

3 de maio de 2020

Há duas estratégias principais de controle: controle em malha aberta e controle em malha fechada. Diz-se que se está fazendo controle em malha aberta quando o algoritmo de controle não utiliza nenhum sensor, enquanto o controle em malha fechada pressupõe o uso de um sensor ou um conjunto de sensores para permitir correções de desvios em relação a valores desejados.

## 1 Controle em Malha Aberta

### 1.1 Controle em Situação Nominal

Considere novamente o exemplo de *cruise control* de um carro, conforme mostrado na Figura 1:

$$m\dot{v} + bv = u, \quad (1)$$

em que  $v$  é a velocidade,  $m$  é a massa,  $b$  é a constante de amortecimento,  $u$  é a o comando de força executado através do acionamento do acelerador ou do freio. Uma prática muito comum em Controle é representar as equações através de diagramas de blocos. A Figura 2 mostra um diagrama de blocos para representar a equação (1). Perceba que esse tipo de representação é muito intuitiva e ajuda a visualizar como os termos da equação se relacionam. Representação em diagramas de blocos são tão populares em Controle que motivaram a criação do Simulink, que é uma ferramenta do MATLAB que trabalha com esse tipo de representação.

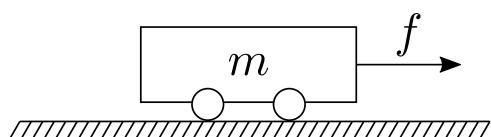


Figura 1: *Cruise control*.

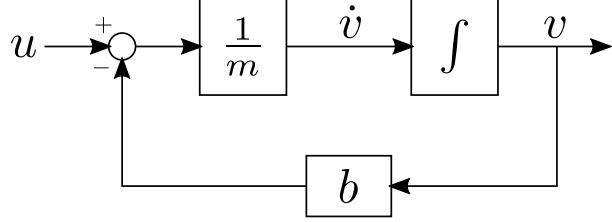


Figura 2: Diagrama do sistema de *cruise control* em malha aberta.

Considere  $u = f$  constante e um PVI tal que  $v(0) = 0$ . A EDO do sistema pode ser reescrita como

$$\dot{v} + \frac{b}{m}v = \frac{f}{m}, \quad (2)$$

que possui solução geral

$$v(t) = ce^{-\frac{b}{m}t} + \frac{f}{b}. \quad (3)$$

Utilizando a condição inicial:

$$v(0) = 0 \Rightarrow v(t) = \frac{f}{b} \left( 1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right). \quad (4)$$

Como comentado anteriormente, para sistemas de 1ª ordem, é comum definir a constante de tempo, que vale o simétrico do inverso do único autovalor. Nesse caso, tem-se

$$\tau = -\lambda^{-1} = \frac{m}{b} \Rightarrow v(t) = \frac{f}{b} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (5)$$

A velocidade em regime estacionário (ou permanente) desse sistema é dada por

$$v_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \frac{f}{b}, \quad (6)$$

logo para realizar controle em **malha aberta** com o objetivo de levar o sistema para uma velocidade de referência  $v_r$ , basta escolher

$$f = f_r = bv_r \Rightarrow v(t) = v_r \left( 1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right) \Rightarrow v_\infty = v_r. \quad (7)$$

Além disso, um ponto interessante é que o tempo que esse sistema demora para chegar até certo percentual de  $v_r$  independe do algoritmo de controle, i.e. depende apenas de parâmetros físicos. Para manipular a Física de modo a atingir uma convergência mais rápida, é necessário utilizar algoritmos de controle mais sofisticadas.

Outro ponto interessante é que o tempo que o sistema demora para chegar até certo percentual de  $v_r$  independe do valor de  $v_r$ . Isto é muito contra-intuitivo, pois significa que o sistema de controle demora para levar o carro de 0 até 1 km/h o mesmo tempo que de 0 até 300 km/h. Você consegue pensar num motivo para explicar essa aparente contradição em relação à realidade?

Uma estratégia de impor uma convergência mais rápida para a velocidade de referência é inicialmente aplicar uma força maior que  $f_r$  e então trocar para  $f_r$  assim que chegar na velocidade desejada. Seja  $|f'| > f_r$ , pode-se escolher

$$u(t) = \begin{cases} f', & t \leq t_s, \\ f_r, & t > t_s, \end{cases} \quad (8)$$

em que  $t_s$  é o momento em que deve acontecer a troca. Pode-se calcular  $t_s$  como

$$v(t_s) = v_r = \frac{f'}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t_s}\right) \Rightarrow e^{-\frac{b}{m}t_s} = 1 - \frac{bv_r}{f'} \Rightarrow t_s = \frac{m}{b} \ln \left( \frac{f'}{f' - bv_r} \right). \quad (9)$$

Observando (9), parece que quanto maior  $f'$ , melhor, de modo que a escolha de  $|f'| \rightarrow \infty$  faria  $t_s \rightarrow 0$ . Entretanto, isso não é razoável na prática. O motivo é óbvio: um carro tem a força de atuação (aceleração ou frenagem) limitada pelo motor ou pelo freio (e também pelo atrito):

$$f_{min} \leq u \leq f_{max}. \quad (10)$$

Saturação de atuador é algo sempre presente em qualquer sistema real, dado que sempre há um limite para uso de energia. Infelizmente, saturação é uma não-linearidade, então a teoria de controle linear (CMC-12) não é capaz de lidar diretamente com saturação de atuador. Por conta disso, nossos modelos de projeto sempre vão ignorar saturações (e outras não-linearidades), cujos efeitos serão adequadamente avaliados através de simulações (não-lineares). Há técnicas capazes de lidar com saturações diretamente, i.e. considerando a saturação no modelo, mas trata-se de um tópico avançado e fora do escopo de CMC-12.

Perceba que saturação de atuador também é a explicação para nossa aparente contradição encontrada anteriormente: acelerar até 300 km/h demora mais porque a força calculada através de  $bv_r$  excede o limite de força que o motor consegue fornecer, então a força o carro efetivamente vai desenvolver será menor o algoritmo de controle requisita ao pensar apenas no modelo linear.

Mesmo levando em conta a saturação de atuador, a estratégia para atingir a velocidade de referência em **tempo mínimo** ainda envolve usar o máximo de comando disponível. No caso, tem-se

$$u(t) = \begin{cases} f_{max}, & t \leq t_s, \\ f_r, & t > t_s. \end{cases}, \quad t_s = \frac{m}{b} \ln \left( \frac{f_{max}}{f_{max} - bv_r} \right). \quad (11)$$

Perceba em (11) que o tempo para atingir  $v_r$  depende de seu valor absoluto. Além disso, foi considerado um caso em que  $f_r > 0$ , mas o caso  $f_r < 0$  é análogo, bastando substituir  $f_{max}$  por  $f_{min}$ . Assim como mostrado nesse exemplo simples, estratégias de tempo mínimo costumam envolver soluções que trabalham no limite dos atuadores. Técnicas de controle de tempo mínimo são estudadas por uma área chamada **Controle Ótimo**, mas está fora do escopo de CMC-12.

Perceba que por outro lado uma estratégia desse tipo pode não ser interessante por outras questões ligadas à aplicação. Se o carro possui um passageiro, acelerações bruscas serão desconfortáveis. Mesmo para um robô autônomo sem passageiros, essa estratégia pode não ser interessante por resultar em um gasto de energia excessivo ou desgastar desnecessariamente o atuador. Essas escolhas dependem dos **requisitos** do sistema que se está desenvolvendo.

## 1.2 Erro de Modelo

Para controlar, precisa-se de um bom matemático da nossa planta (sistema). Entretanto, o mundo real é muito complexo, então por mais que haja esforço em modelar cada

fenômeno físico envolvido precisamente, um modelo sempre é imperfeito. Em Controle, chama-se esse “descasamento” entre o modelo e a realidade de **erro de modelo**. O erro pode vir de várias fontes:

- Há erros nas próprias equações utilizadas. Por exemplo, sabe-se que a mecânica newtoniana é apenas uma aproximação da realidade e uma modelagem mais correta deveria considerar efeitos relativísticos. Claro que para a maioria das plantas mecânicas que foram mostradas até agora, essa diferença é desprezível.
- Há erros por fenômenos físicos que deliberadamente decide-se desprezar para evitar um modelo mais complexo. Por exemplo, no caso de um circuito, os próprios fios de ligação possuem resistências e capacitâncias que normalmente são desprezadas. Num motor elétrico, sabe-se que a “constante” de torque não é exatamente uma constante, mas varia um pouco conforme a orientação do motor. Além disso, para a aplicação de técnicas lineares, é necessário desprezar não-linearidades do sistema.
- Mesmo que se tenha modelado todas as equações perfeitamente, ainda se tem a dificuldade em estimar os parâmetros físicos das equações perfeitamente. Essa costuma ser a principal fonte de erro em sistemas físicos.

Via de regra, quanto melhor o modelo, melhor será o sistema de controle. Um ponto importante é que geralmente o limitante para obtenção de modelos melhores não é o conhecimento humano, mas sim o trabalho necessário. Decide-se por aceitar um modelo pior não por preguiça, mas por questões econômicas: levantar modelos necessita de experimentos e de engenheiros especializados.

Uma boa notícia é que técnicas de controle costumam ser muito robustas a erro de modelo. O chamado **Controle Robusto** trata de técnicas que tentam ser robustas a erros de modelo. Além disso, o **Controle Adaptativo** lida com técnicas que adaptam o controlador durante a execução para mitigar o efeito de parâmetros inicialmente incertos.

Para analisar o efeito de erro de modelo, vamos voltar para nossa primeira estratégia de controle em malha aberta no *cruise control*:

$$u(t) = b_c v_r, \quad (12)$$

em que  $b_c$  é a estimativa de  $b$  usada no projeto do controlador. O que acontece se  $b_c \neq b$ ? Voltemos na EDO do *cruise control*:

$$m\dot{v} + bv = u = b_c v_r. \quad (13)$$

Resolvendo, fica-se com

$$v(t) = \frac{b_c v_r}{b} \left( 1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right). \quad (14)$$

Portanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \frac{b_c v_r}{b}, \quad (15)$$

ou seja, a velocidade do carro não vai estabilizar na referência! Perceba que como o controlador não percebe que está errando (já que não mede  $v$ ), não é possível fazer

nenhuma correção. Em Controle, dá-se o nome de **erro em regime** ao erro que o sistema mantém em regime, que no caso vale

$$e_\infty = v_r - v_\infty = \left( \frac{b - b_c}{b} \right) v_r. \quad (16)$$

E o que acontece caso  $m$  mude? Por exemplo, no caso de mudança no número de passageiros ou na quantidade de gasolina no tanque de combustível. Nesse caso, considere  $b_c = b$ , para  $m' \neq m$ , tem-se

$$v(t) = v_r \left( 1 - e^{-\frac{b}{m'} t} \right) \Rightarrow \tau' = \frac{m'}{b}, \quad (17)$$

o que mostra que essa alteração de massa não afeta a velocidade final, embora altere a constante de tempo do sistema. Perceba que isso é esperado, pois a **condição de equilíbrio** desse sistema acontece quando a força de amortecimento cancela a força desenvolvida pelo carro, de modo que a velocidade de equilíbrio depende apenas do amortecimento. Quanto à constante de tempo, uma massa maior torna o sistema mais lento, como esperado.

### 1.3 Perturbação

Além de erro de modelo, é comum sistemas de controle sofrerem **perturbações** (distúrbios). Por exemplo, considere que o nosso carro está sendo perturbado (empurrado) por uma força  $d$  constante. O diagrama associado a essa nova condição é mostrado na Figura 3, em que o distúrbio  $d$  foi adicionado. Assumindo  $u = f$ , a EDO do sistema fica

$$m\dot{v} + bv = u + d \Rightarrow v(t) = \frac{f + d}{b} \left( 1 - e^{-\frac{b}{m} t} \right). \quad (18)$$

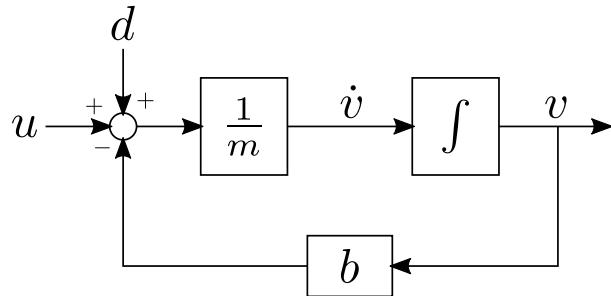


Figura 3: Diagrama do sistema de *cruise control* em malha aberta com perturbação.

Então, assumindo que o controlador escolhe  $f = bv_r$ , fica-se com

$$v(t) = \left( v_r + \frac{d}{b} \right) \left( 1 - e^{-\frac{b}{m} t} \right). \quad (19)$$

Em regime, a velocidade se torna

$$v_\infty = v_r + \frac{d}{b}. \quad (20)$$

Novamente, tem-se erro em regime, nesse caso dado por

$$e_\infty = v_r - v_\infty = -\frac{d}{b}. \quad (21)$$

## 2 Controle em Malha Fechada

### 2.1 Controlador Proporcional (P)

Considere agora que o carro é capaz de medir sua velocidade  $v$ . Com isso, pode-se usar um algoritmo de controle em **malha fechada**, em que  $v$  é utilizado para tomar a decisão de qual  $u$  escolher. Em controle em malha fechada, costuma-se trabalhar com conceito de erro:

$$e(t) = y_r - y(t) = v_r - v(t), \quad (22)$$

em que  $y(t)$  é a saída do sistema no tempo  $t$ , no caso  $y(t) = v(t)$ . Uma **lei de controle** muito simples envolve o uso do **controlador proporcional (P)**:

$$u(t) = K_p e(t), \quad (23)$$

em que  $K_p$  é um **ganho proporcional** a ser ajustado pelo projetista do sistema de controle. O controlador proporcional é baseado numa ideia muito simples: quanto mais longe o sistema estiver da referência, mais bruscamente ele deve responder. O diagrama do **sistema em malha fechada** é mostrado na Figura 4. Perceba que esse diagrama sugere o nome **malha fechada**. Vamos analisar o efeito desse controlador no comportamento do *cruise control*. A equação do **sistema em malha fechada** fica

$$m\dot{v} + bv = u \Rightarrow m\dot{v} + bv = K_p(v_r - v) \Rightarrow m\dot{v} + (b + K_p)v = K_p v_r. \quad (24)$$

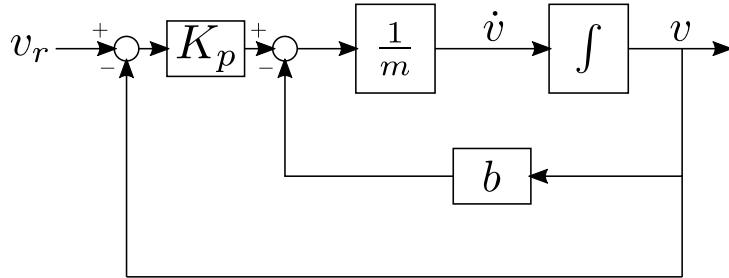


Figura 4: Diagrama do sistema de *cruise control* em malha fechada.

Note que (24) se refere ao conjunto controlador e planta, i.e. é a EDO que dita o comportamento da combinação dos dois. Perceba também que a entrada desse sistema é  $v_r$ , e não mais  $u$ , e que o ganho  $K_p$  atua como uma espécie de amortecimento artificial. Considere o autovalor de (24):

$$m\lambda + b + K_p = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{b + K_p}{m}. \quad (25)$$

Isso indica que a constante de tempo do sistema é

$$\tau = \frac{m}{b + K_p}, \quad (26)$$

o que mostra que um algoritmo de controle em malha fechada é capaz de tornar o sistema mais rápido. Ao resolver (24) com condição inicial  $v(0) = 0$ , obtém-se

$$v(t) = \frac{K_p}{b + K_p} v_r \left( 1 - e^{-\frac{b+K_p}{m} t} \right), \quad (27)$$

de modo que

$$v_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \frac{K_p}{b + K_p} v_r \Rightarrow e_\infty = \frac{b}{b + K_p} v_r. \quad (28)$$

Infelizmente, mesmo em situação nominal (i.e. sem erro de modelo ou perturbação), esse controlador apresenta erro em regime. Perceba que:

$$K_p \gg b \Rightarrow e_\infty \approx 0, \quad (29)$$

mas isso não isenta o fato de que é muito frustrante que um controlador de malha aberta consiga ter erro nulo em regime e um de malha fechada apresente essa falha. Para entender intuitivamente por que isso acontece, perceba que usando um controlador P, deve haver necessariamente um erro de velocidade para o carro esteja em equilíbrio, caso contrário a força gerada pelo controlador seria 0 e a força de amortecimento tiraria o carro do equilíbrio. O equilíbrio acontece quando:

$$u(t) = bv \Rightarrow K_p e = bv. \quad (30)$$

Algo que você deve ter pensado é: mas qual seria o problema de usar  $K_p \rightarrow \infty$ ? Embora (27) diga que só há vantagens em aumentar  $K_p$ , lembre-se sempre que nossos modelos são imperfeitos e nunca consideram todos os fenômenos físicos relevantes.

À medida que o curso for progredindo, você entenderá melhor porque usar ganhos absurdamente altos não costuma ser uma boa ideia na prática. Entretanto, usar ganhos altos não é uma má ideia no geral e controladores baseados em técnicas lineares costumam trabalhar com ganhos altos, o que gera outros problemas, como gasto excessivo de energia ou desgaste desnecessário dos atuadores, mas funciona.

## 2.2 Feedforward + P

O fato do controlador em malha aberta atingir erro nulo em regime nos faz pensar se não seria possível combinar as ideias de malha aberta e fechada. De fato, essa técnica é usada na prática. Chama-se o “termo” em malha aberta do controlador de ***feedforward***, em contraponto a ***feedback***, que é usado para o termo de retroalimentação (malha fechada). Intuitivamente, precisa-se considerar uma força adicional para cancelar a força de amortecimento existente no equilíbrio. Desse modo, a lei de controle é

$$u(t) = u_{ff}(t) + u_{fb}(t) = b_c v_r + K_p e(t), \quad (31)$$

em que  $u_{ff}(t)$  é o termo de *feedforward*,  $u_{fb}(t)$  é o termo de *feedback* e  $b_c$  representa a estimativa de  $b$  usada no projeto do controlador. O diagrama relativo ao sistema em malha fechada com *feedforward* está mostrado na Figura 5. Considerando essa lei na dinâmica do *cruise control*, obtém-se

$$m\dot{v} + bv = u \Rightarrow m\dot{v} + bv = b_c v_r + K_p (v_r - v) \Rightarrow m\dot{v} + (b + K_p) = (b_c + K_p) v_r, \quad (32)$$

de modo que a resposta do sistema é

$$v(t) = \left( \frac{b_c + K_p}{b + K_p} \right) v_r \left( 1 - e^{-\frac{b+K_p}{m} t} \right). \quad (33)$$

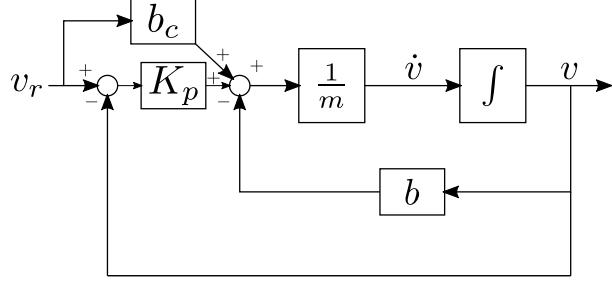


Figura 5: Diagrama do sistema de *cruise control* em malha fechada com *feedforward*.

Em regime:

$$v_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \left( \frac{b_c + K_p}{b + K_p} \right) v_r \Rightarrow e_\infty = \left( \frac{b - b_c}{b + K_p} \right) v_r. \quad (34)$$

Perceba que em (34), se  $b_c = b$ , então não há erro em regime. Ademais, se  $b_c \neq b$ , o erro em regime é mitigado pela presença de  $K_p$ . Considerando novamente a perturbação  $d$  constante, tem-se o diagrama mostrado na Figura 6. Nesse caso, tem-se

$$m\dot{v} + bv = u + d \Rightarrow m\dot{v} + bv = b_c v_r + K_p (v_r - v) + d \Rightarrow m\dot{v} + (b + K_p)v = (b_c + K_p)v_r + d, \quad (35)$$

de modo que

$$v(t) = \left[ \frac{v_r(b_c + K_p) + d}{b + K_p} \right] \left( 1 - e^{-\frac{b+K_p}{m}t} \right) \quad (36)$$

e

$$\tau = \frac{m}{b + K_p}, \quad v_\infty = \frac{v_r(b_c + K_p) + d}{b + K_p}, \quad e_\infty = \underbrace{\left( \frac{b - b_c}{b + K_p} \right) v_r}_{e_{\infty,m}} + \underbrace{\left( -\frac{d}{b + K_p} \right)}_{e_{\infty,d}}, \quad (37)$$

em que  $e_{\infty,m}$  e  $e_{\infty,d}$  representam parcelas de erro em regime devido a erro de modelo e perturbação, respectivamente. Perceba que o ganho proporcional  $K_p$  mitiga o erro em ambos os casos. Assim, pode-se dizer que controle em malha fechada tem as seguintes vantagens:

- Aumento da velocidade dinâmica do sistema.
- Mitigação de erro de modelo.
- Rejeição a perturbação.

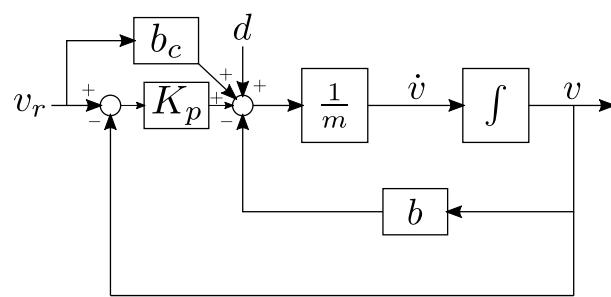


Figura 6: Diagrama do sistema de *cruise control* em malha fechada com *feedforward* e perturbação.

# Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA

## Controle para Sistemas Computacionais – CMC-12

### Notas da Aula 4 – Controlador Proporcional e Realimentação de Velocidade

**Professor:** Marcos Ricardo Omena de Albuquerque Maximo

16 de março de 2020

Na aula passada, foi visto como projetar controladores de malha aberta e malha fechada para o sistema de *cruise control*. Um algoritmo de controle proporcional (P) é suficiente quando o sistema é de 1<sup>a</sup> ordem. Porém, sistemas de ordem maior que 1<sup>a</sup> ordem requerem controladores mais sofisticados. Nesta aula, será apresentado o controlador P+V, que usa também informação de velocidade para realimentação.

## 1 Controlador de Posição de um Carro

Considere o sistema de *cruise control*, mas assuma que se está interessado em controlar a posição do carro ao invés da velocidade, como foi feito antes. Isso é muito razoável no caso de um carro autônomo, por exemplo, em que se deseja fazer o carro estacionar numa determinada posição. A equação do sistema é

$$m\dot{v} + bv = u \Rightarrow m\ddot{x} + b\dot{x} = u, \quad (1)$$

em que  $x$  e  $v$  são a posição e a velocidade do carro, respectivamente,  $m$  é a massa do carro e  $b$  é a constante de amortecimento (devido à resistência do ar). Perceba que esse sistema é equivalente a um massa-mola-amortecedor em que não há mola (i.e.  $k = 0$ ). Um ponto interessante é que esse sistema é naturalmente instável. Seja o PVI associado a (1) com condições iniciais nulas, i.e.  $x(0) = 0$  e  $\dot{x}(0) = 0$ . Considerando  $u = f$  constante, a solução do PVI é

$$x(t) = \frac{m}{b^2}f \left( e^{-\frac{b}{m}t} - 1 \right) + \frac{f}{b}t, \quad (2)$$

de modo que  $x(t)$  cresce indefinidamente sem nunca estabilizar. Perceba que isso está de acordo com a intuição: se o pedal do acelerador for mantido pressionado indefinidamente, o carro deve se mover para frente indefinidamente (na verdade, até o combustível acabar, mas nosso modelo não vê isso). Apesar do sistema ser naturalmente instável, um simples controlador P consegue estabilizá-lo. Nesse caso, a lei de controle fica

$$u(t) = K_p(x_r - x), \quad (3)$$

em que  $K_p$  é o ganho proporcional e  $x_r$  é a posição de referência. Substituindo (3) em (1), obtém-se

$$m\ddot{x} + b\dot{x} = K_p(x_r - x) \Rightarrow m\ddot{x} + b\dot{x} + K_p x = K_p x_r \Rightarrow \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{K_p}{m}x = \frac{K_p}{m}x_r, \quad (4)$$

que é um sistema de 2<sup>a</sup> ordem padrão. Como é conhecido dos cursos de Física, esse tipo de sistema é estável.

## 2 Sistema de Segunda Ordem Padrão

Um sistema de 2<sup>a</sup> ordem padrão é descrito por

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_n y + \omega_n^2 y = \omega_n^2 u, \quad (5)$$

em que  $u$  é a entrada do sistema,  $y$  é a saída do sistema,  $\omega_n$  é a **frequência natural** e  $\xi$  é o **coeficiente de amortecimento**. No caso de (5) representar um sistema em malha fechada, tem-se  $u = y_r$ , i.e. a entrada do sistema é o valor de referência da saída. Considera-se  $\omega_n > 0$  e  $\xi > 0$ . O polinômio característico associado à EDO (5) é

$$\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0, \quad (6)$$

de modo que os auto-valores são

$$\lambda = \frac{-2\xi\omega_n \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad (7)$$

em que

$$\Delta = 4\xi^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2 \Rightarrow \Delta = 4\omega_n^2(\xi^2 - 1). \quad (8)$$

Assim, de acordo com o valor de  $\Delta$ , divide-se a solução em 3 casos:

1. **Superamortecido:**  $\Delta > 0$  e (5) possui dois auto-valores reais negativos.
2. **Criticamente amortecido:**  $\Delta = 0$  e (5) possui um auto-valor real de multiplicidade dupla.
3. **Subamortecido:**  $\Delta < 0$  e (5) possui dois auto-valores complexos conjugados.

### 2.1 Caso Superamortecido

Nesse caso:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 4\omega_n^2(\xi^2 - 1) > 0 \Rightarrow \xi > 1. \quad (9)$$

Os auto-valores de (5) são

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\xi\omega_n \pm 2\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}{2} \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}. \quad (10)$$

Perceba que

$$\xi^2 - 1 < \xi^2 \Rightarrow \sqrt{\xi^2 - 1} < \xi \Rightarrow \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} < \omega_n\xi \Rightarrow -\omega_n\xi + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = \lambda_2 < 0, \quad (11)$$

de modo que  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ . Portanto, se  $u = f$  constante (perceba que  $f$  não é necessariamente uma força), a solução geral de (5) é

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + f, \quad (12)$$

em que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são dados por (10). Como ambos os auto-valores são negativos, o sistema é estável e  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ . Dado um PVI com condições iniciais nulas, pode-se determinar  $c_1$  e  $c_2$  de acordo com

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ \dot{y}(0) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + f = 0, \\ c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{f \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ c_2 = \frac{-f \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{cases} \quad (13)$$

Logo, a solução do PVI é

$$y(t) = f \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} + 1 \right). \quad (14)$$

## 2.2 Caso Criticamente Amortecido

Nesse caso:

$$\Delta = 0 \Rightarrow 4\omega_n^2 (\xi^2 - 1) = 0 \Rightarrow \xi = 1. \quad (15)$$

O único auto-valor de (5) é

$$\lambda = -\xi \omega_n < 0. \quad (16)$$

Portanto, se  $u = f$ , a solução geral de (5) é

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} + f. \quad (17)$$

Novamente, tem-se  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ . Considerando condições iniciais nulas:

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ \dot{y}(0) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + f = 0, \\ c_1 \lambda + c_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -f, \\ c_2 = f \lambda. \end{cases} \quad (18)$$

Desse modo, a solução do PVI é

$$y(t) = f (-e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t} + 1). \quad (19)$$

## 2.3 Caso Subamortecido

Nesse caso:

$$\Delta < 0 \Rightarrow 4\omega_n^2 (\xi - 1) < 0 \Rightarrow \xi < 1. \quad (20)$$

Os auto-valores de (5) são complexos conjugados de acordo com

$$\lambda_{1,2} = \xi \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \xi \omega_n \pm \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} i = -\sigma \pm \omega_d i. \quad (21)$$

Portanto, se  $u = f$ , a solução geral de (5) é

$$y(t) = c_1 e^{-\sigma t} \cos \omega_d t + c_2 e^{-\sigma t} \sin \omega_d t + f. \quad (22)$$

Novamente, tem-se  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ . Considerando condições iniciais nulas:

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ \dot{y}(0) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + f = 0, \\ -c_1 \sigma + c_2 \omega_d = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -f, \\ c_2 = \frac{\sigma}{\omega_d} f. \end{cases} \quad (23)$$

De modo que a solução do PVI é

$$y(t) = f \left[ 1 - e^{-\sigma t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \right]. \quad (24)$$

Perceba que

$$\begin{aligned} A \sin(\omega t + \phi) &= \underbrace{A \sin \phi}_{a_1} \cos \omega t + \underbrace{A \cos \phi}_{a_2} \sin \omega t \Rightarrow \\ \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 = A^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = A^2, \\ \frac{a_1}{a_2} = \tan \phi. \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \\ \phi = \arctan \frac{a_1}{a_2}. \end{cases} \end{aligned} \quad (25)$$

Em (24), considere

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_2 = \frac{\sigma}{\omega_d}, \end{cases} \quad (26)$$

Desse modo, pode-se usar a relação (25) em (24) para obter

$$y(t) = f \left[ 1 - \sqrt{\frac{\omega_d^2 + \sigma^2}{\omega_d^2}} e^{-\sigma t} \sin \left( \omega_d t + \arctan \frac{\omega_d}{\sigma} \right) \right]. \quad (27)$$

Finalmente, perceba que

$$\begin{aligned} -1 \leq \sin \left( \omega_d t + \arctan \frac{\omega_d}{\sigma} \right) \leq 1 \Rightarrow \\ f \left( 1 - \sqrt{\frac{\omega_d^2 + \sigma^2}{\omega_d^2}} e^{-\sigma t} \right) \leq y(t) \leq f \left( 1 + \sqrt{\frac{\omega_d^2 + \sigma^2}{\omega_d^2}} e^{-\sigma t} \right), \end{aligned} \quad (28)$$

de modo que  $y(t)$  permanece dentro do envelope definido por duas exponenciais, conforme mostra o exemplo mostrado na Figura 1, em que  $f = 1$ ,  $\omega_n = 2\pi$  rad/s e  $\xi = 0.2$ .

## 2.4 Estudo do Comportamento da Solução

Para analisar o comportamento da solução, mostra-se figuras da resposta de uma sistema de 2<sup>a</sup> ordem para  $u = f = 1$  (entrada constante e unitária) e condições iniciais nulas. Na Figura 2, fixou-se  $\xi = 0.6$  e traçou-se gráficos com  $\omega_n \in 2\pi (1 : 1 : 7)$  rad/s. Já na Figura 3, fixou-se  $\omega_n = 4\pi$  rad/s e traçou-se gráficos com  $\xi \in 0.2 : 0.2 : 1.4$ . Conforme pode ser visto nas figuras, pode-se dizer que  $\omega_n$  está relacionada à velocidade do sistema, enquanto  $\xi$  está ligado ao principalmente amortecimento do sistema (i.e. aumentar  $\xi$  reduz as oscilações na resposta). Pode-se perceber que aumentar  $\xi$  também deixa o sistema mais lento.

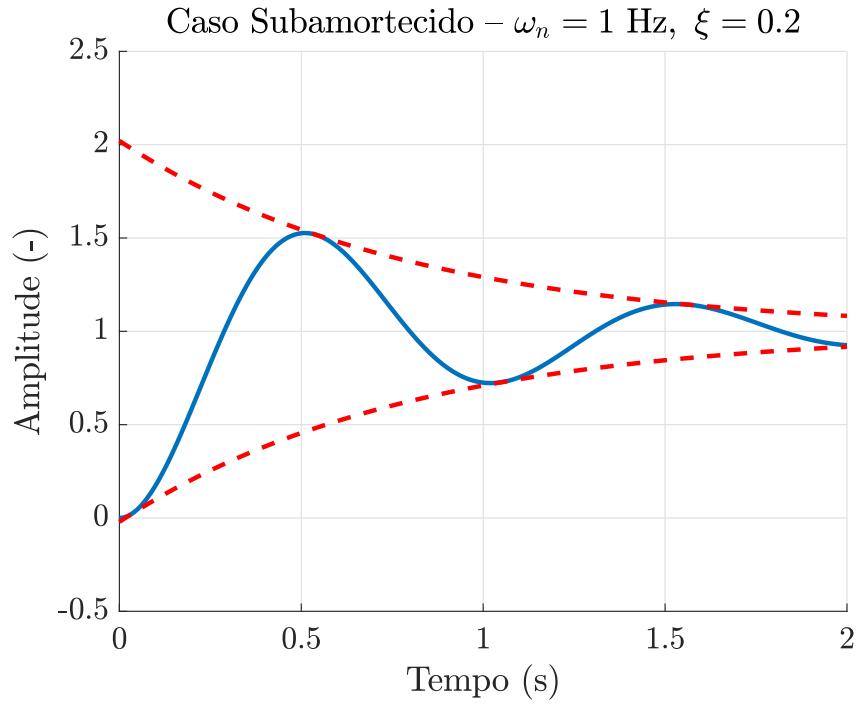


Figura 1: Exemplo de resposta para o caso subamortecido. Usou-se  $f = 1$ ,  $\omega_n = 2\pi$  rad/s e  $\xi = 0.2$ .

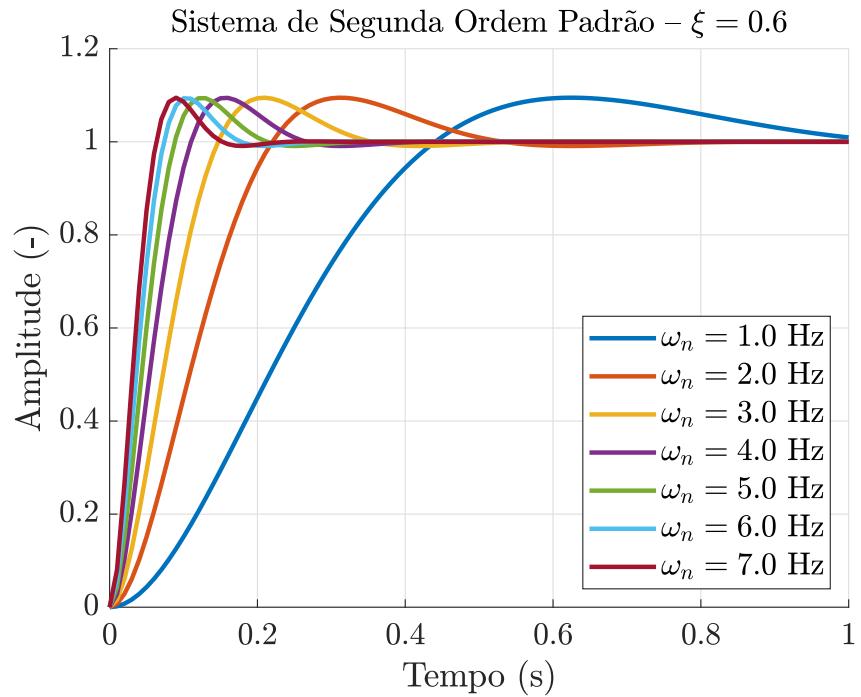


Figura 2: Respostas de um sistema de segunda ordem padrão com entrada constante e unitária e condições iniciais nulas. Fixou-se  $\xi = 0.6$  e variou-se  $\omega_n$  conforme mostrado na legenda.

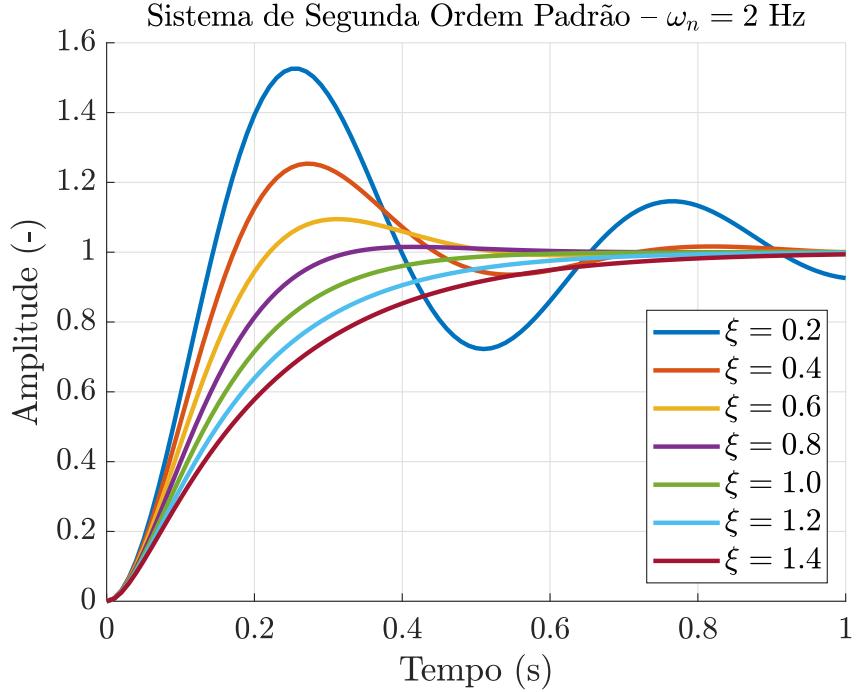


Figura 3: Respostas de um sistema de segunda ordem padrão com entrada constante e unitária e condições iniciais nulas. Fixou-se  $\omega_n = 4\pi$  rad/s e variou-se  $\xi$  conforme mostrado na legenda.

### 3 Projeto do Controlador de Posição de um Carro

Voltando ao projeto de controlador para a posição do carro, tinha-se

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{K_p}{m}x = \frac{K_p}{m}x_r. \quad (29)$$

Com isso, a frequência natural do sistema é dada por

$$\frac{K_p}{m} = \omega_n^2 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{K_p}{m}}, \quad (30)$$

enquanto o fator de amortecimento é dado por

$$\frac{b}{m} = 2\xi\omega_n \Rightarrow \xi = \frac{b}{2\sqrt{mK_p}}. \quad (31)$$

Desse modo, perceba que o aumento de  $K_p$  simultaneamente aumenta  $\omega_n$  e reduz  $\xi$ . Ou seja, com esse esquema de controle, não é possível aumentar a velocidade do sistema sem aumentar as oscilações. Caso o sistema seja naturalmente bem amortecido, isso pode não ser problema, mas na maioria dos casos o amortecimento natural é muito baixo.

É possível manipular  $\omega_n$  e  $\xi$  simultaneamente através da adição de **realimentação de velocidade**. Um esquema para implementar realimentação de velocidade envolve o uso de **malhas aninhadas**. Nesse esquema, uma malha mais externa de posição comanda uma referência de velocidade para uma malha mais interna de velocidade, conforme mostrado

na Figura 4. Alguns autores usam o termo **controlador P+V** (ou controlador PV) para se referir a este tipo de controlador. No caso do controlador de posição do carro, tem-se

$$\begin{cases} v_r = K_p(x_r - x), \\ u = K_v(v_r - v), \end{cases} \quad (32)$$

em que  $K_p$  é um ganho proporcional e  $K_v$  é um ganho de velocidade. Substituindo (32) em (1), obtém-se

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + b\dot{x} &= u = K_v(v_r - v) = K_v[K_p(x_r - x) - \dot{x}] \Rightarrow \\ \ddot{x} + \frac{b + K_v}{m}\dot{x} + \frac{K_p K_v}{m}x &= \frac{K_p K_v}{m}x_r. \end{aligned} \quad (33)$$

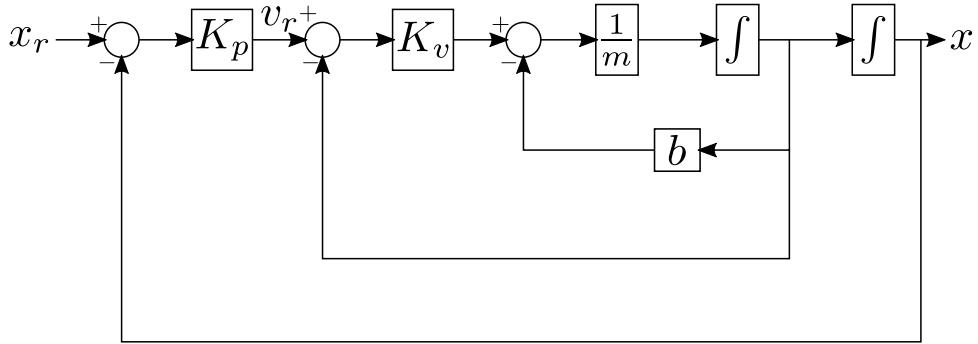


Figura 4: Diagrama de blocos com malhas aninhadas de posição e velocidade para controlar a posição de um carro autônomo.

Comparando-se (5) e (33), tem-se

$$\begin{cases} 2\xi\omega_n = \frac{b + K_v}{m}, \\ \omega_n^2 = \frac{K_p K_v}{m}. \end{cases} \quad (34)$$

Portanto, dado  $\omega_n$  e  $\xi$  desejados para o comportamento do sistema, basta escolher

$$\begin{cases} K_v = 2m\xi\omega_n - b, \\ K_p = \frac{m\omega_n^2}{K_v}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_v = 2m\xi\omega_n - b, \\ K_p = \frac{\omega_n^2}{2\xi\omega_n - b}. \end{cases} \quad (35)$$

Perceba que esquemas de malhas aninhadas são muito comuns. Sistemas de controle reais em geral são construídos a partir de várias malhas aninhadas, em que malhas mais internas são usadas para resolver problemas de mais baixo nível de modo a facilitar o trabalho das malhas mais externas. No caso mostrado, pode-se pensar que a malha de velocidade garante que o sistema cumpra a velocidade comandada pela malha de posição. Por fim, destaca-se que o termo **realimentação tacométrica** também é usado para se referir a realimentação de velocidade, pois tacômetro é um sensor usado para medir velocidade de rotação (de um motor, por exemplo).

## 4 Feedforward + PV

Considere um sistema massa-mola-amortecedor forçado, cuja dinâmica é ditada por

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = u, \quad (36)$$

em que  $x$  é a posição do bloco,  $m$  é a massa do bloco,  $b$  é a constante de amortecimento do amortecedor,  $k$  é a constante de força da mola e  $u$  é a força externa aplicada no bloco. Usando um controlador PV para esse sistema, tem-se

$$\begin{cases} v_r = K_p(x_r - x), \\ u = K_v(v_r - v), \end{cases} \quad (37)$$

em que  $x_r$  é a posição de referência,  $v_r$  é a velocidade de referência comandada pelo controlador de posição,  $v = \dot{x}$  é a velocidade do bloco,  $K_p$  é o ganho proporcional e  $K_v$  é o ganho de velocidade. Substituindo (37) em (36), obtém-se

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + b\dot{x} + kx &= u = K_v(v_r - v) = K_v[K_p(x_r - x) - \dot{x}] \Rightarrow \\ \ddot{x} + \frac{b + K_v}{m}\dot{x} + \frac{k + K_pK_v}{m}x &= \frac{K_pK_v}{m}x_r. \end{aligned} \quad (38)$$

No equilíbrio, tem-se  $\ddot{x} = \dot{x} = 0$ , de modo que

$$\frac{k + K_pK_v}{m}x_\infty = \frac{K_pK_v}{m}x_r \Rightarrow x_\infty = \frac{K_pK_v}{k + K_pK_v}x_r \Rightarrow e_\infty = x_r - x_\infty = \frac{k}{K_pK_v}x_r, \quad (39)$$

em que  $x_\infty$  e  $e_\infty$  são a posição e o erro em regime, respectivamente. Com isso, verifica-se que este sistema possui erro em regime. Intuitivamente, é necessário haver erro em regime de modo a se ter  $u \neq 0$  para compensar a força elástica da mola. Pode-se tentar adicionar um termo de *feedforward* à lei de controle de modo a tentar remover o erro em regime:

$$u = K_v[K_p(x_r - x) - \dot{x}] + K_{ff}x_r, \quad (40)$$

em que  $K_{ff}$  é um ganho de *feedforward*. Substituindo (40) em (36), chega-se a

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + b\dot{x} + kx &= u = K_v[K_p(x_r - x) - \dot{x}] + K_{ff}x_r \Rightarrow \\ m\ddot{x} + (b + K_v)\dot{x} + (k + K_pK_v)x &= (K_{ff} + K_pK_v)x_r. \end{aligned} \quad (41)$$

Portanto, para que não exista erro em regime, deve-se ter

$$k + K_pK_v = K_{ff} + K_pK_v \Rightarrow K_{ff} = k. \quad (42)$$

# **Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA**

## **Controle para Sistemas Computacionais – CMC-12**

### **Notas da Aula 5 – Transformada de Laplace**

**Professor:** Marcos Ricardo Omena de Albuquerque Maximo

23 de abril de 2020

Até o momento, no curso, tem-se determinado os parâmetros (chamados de ganhos na literatura de Controle) a partir das soluções das equações diferenciais ordinárias (EDOs) envolvidas. Para resolver as EDOs, tem-se aplicado técnicas de solução de EDOs lineares com coeficientes constantes. Adotou-se essa abordagem inicialmente nesse curso a fim de construir no aluno uma intuição do que consiste o projeto de um controlador. Entretanto, essa não é a abordagem comumente adotado em Controle.

No chamado controle clássico (escopo de CMC-12), a abordagem mais comum envolve o uso da **transformada de Laplace**, que você já estudou nos cursos de Cálculo (no caso do ITA, em MAT-32). Essa transformada é muito conveniente pois transforma EDOs em polinômios. Além disso, embora a transformada de Laplace seja também usada como método de resolução de EDOs, em Controle comumente não se está tão interessado na solução da EDO para uma determinada entrada. O motivo para isso é que um sistema de controle na prática será submetido a diferentes tipos de referências (entradas), além de que em geral não é possível prever quais entradas estarão presentes durante a operação do sistema. Em Controle, conforme já foi visto em CMC-12, busca-se que a saída do sistema (para diferentes entradas) tenha certas características, como algumas que já foram levantadas:

- Bom seguimento da referência.
- Alta “velocidade dinâmica” (descrita pela constante de tempo e pela frequência natural em sistemas de 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> ordens).
- Bom amortecimento.
- Robustez a erros de modelo.
- Boa rejeição a perturbações.
- Baixo erro em regime.

Com isso, além do uso de transformada de Laplace, costuma-se trabalhar com o conceito de **função de transferência**, que é uma forma de descrever um sistema dinâmico baseado em sua representação em Laplace e que é independente da entrada (referência para sistemas em malha fechada).

# 1 Transformada de Laplace

Conforme visto no curso de EDOs, a transformada de Laplace de uma função é obtida através da seguinte fórmula:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \quad s \in \mathbb{C}. \quad (1)$$

Perceba que há algumas maneiras alternativas de definir a transformada de Laplace, especialmente com respeito aos limites de integração. Em Controle, costuma-se usar a forma definida em (1), pois considera-se que o tempo começa em  $t = 0$ . Além disso, quando se trabalha com impulso (delta de Dirac) em  $t = 0$ , formalmente precisa-se usar a seguinte definição:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0^-}^\infty f(t)e^{-st}dt. \quad (2)$$

## 2 Exemplos de Transformadas de Laplace

Com base na definição apresentada em (1), pode-se calcular a transformada de Laplace para diferentes funções conhecidas.

### 2.1 Degrau Unitário

$$f(t) = u(t) = 1(t) = 1, \quad \forall t \geq 0. \quad (3)$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s}. \quad (4)$$

### 2.2 Rampa

$$f(t) = t, \quad t \geq 0. \quad (5)$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{t\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty te^{-st}dt. \quad (6)$$

Usando integração por partes, tem-se

$$\int u(t)\dot{v}(t)dt = u(t)v(t) - \int \dot{u}(t)v(t)dt, \quad (7)$$

em que

$$u(t) = t \Rightarrow \dot{u}(t) = 1, \quad (8)$$

$$\dot{v}(t) = e^{-st} \Rightarrow v(t) = -\frac{1}{s}e^{-st}, \quad (9)$$

de modo que

$$F(s) = \int_0^\infty te^{-st} = -\frac{t}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st}dt = -\frac{1}{s^2}e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s^2}. \quad (10)$$

## 2.3 Exponencial

$$f(t) = e^{-at}, \forall t \geq 0. \quad (11)$$

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-at}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-s(s+a)t}dt = \frac{1}{s+a}. \quad (12)$$

## 2.4 Exponencial Multiplicada por Rampa

$$f(t) = te^{-at}, \forall t \geq 0. \quad (13)$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{te^{-at}\} \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty te^{-(s+a)t}dt. \quad (14)$$

Para usar integração por partes, considere

$$u(t) = t \Rightarrow \dot{u}(t) = 1, \quad (15)$$

$$\dot{v}(t) = e^{-(s+a)t}dt \Rightarrow v(t) = -\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}, \quad (16)$$

de modo que

$$F(s) = -\frac{t}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_0^\infty + \frac{1}{s+a} \int_0^\infty e^{-(s+a)t}dt = \frac{1}{(s+a)^2}. \quad (17)$$

## 2.5 Senoide

$$f(t) = \sin(\omega t), \forall t \geq 0. \quad (18)$$

Note que

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}, \quad (19)$$

em que  $j = \sqrt{-1}$ , de modo que

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty \left( \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right) e^{-st}dt = \\ &= \frac{1}{2j} \left[ \int_0^\infty e^{-(s-j\omega)t}dt - \int_0^\infty e^{-(s+j\omega)t}dt \right] = \frac{1}{2j} \left[ \frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right] = \\ &= \frac{1}{2j} \left[ \frac{s+j\omega - (s-j\omega)}{s^2 + \omega^2} \right] = \frac{1}{2j} \frac{2j\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

## 2.6 Cossenoide

$$f(t) = \cos(\omega t), \forall t \geq 0. \quad (21)$$

Procede-se de forma análoga ao caso da senoide e obtém-se

$$F(s) = \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}. \quad (22)$$

## 2.7 Pulso Retangular de Área Unitária

$$\forall t \geq 0, f(t) = p_h(t) = \begin{cases} h, & 0 \leq t \leq (1/h), \\ 0, & t \geq (1/h), \end{cases} \quad (23)$$

em que  $h$  é a altura do retângulo.

$$F(s) = \mathcal{L}\{p_h(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^{1/h} he^{-st}dt = \frac{h}{s}e^{-st} \Big|_0^{1/h} = \frac{h}{s}(1 - e^{-s/h}). \quad (24)$$

## 2.8 Impulso Unitário (Delta de Dirac)

$$f(t) = \delta(t). \quad (25)$$

Para determinação da transformada de Laplace, pode-se considerar que o impulso unitário é um pulso retangular de área unitária com  $h \rightarrow \infty$ :

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{s}(1 - e^{-s/h}) = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-sw}}{sw} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{se^{-sw}}{s} = 1. \quad (26)$$

## 3 Inversa e Tabela de Transformadas de Laplace

Embora exista uma fórmula para obtenção da inversa da transformada de Laplace, i.e. obter  $f(t)$  a partir de  $F(s)$ , na prática é muito mais conveniente usar um esquema de “casamento de padrão” (*pattern matching*), em que se tenta identificar transformadas de Laplace conhecidas em partes de  $F(s)$ . Com isso, é interessante a criação de tabelas de transformadas de Laplace. A Tabela 1 mostra algumas transformadas de Laplace conhecidas.

## 4 Propriedades da Transformada de Laplace

### 4.1 Linearidade

**Teorema 1.**

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\} = aF(s) + bG(s). \quad (27)$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} &= \int_0^\infty [af(t) + bg(t)] e^{-st} dt = \\ a \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt + b \int_0^\infty g(t)e^{-st}dt &= a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\} = aF(s) + bG(s). \end{aligned} \quad (28)$$

□

Tabela 1: Tabela de transformadas de Laplace.

$F(s)$	$f(t), t \geq 0$
1	$\delta(t)$
$\frac{1}{s}$	$1(t)$
$\frac{1}{s^2}$	$t$
$\frac{2!}{s^3}$	$t^2$
$\frac{m!}{s^{m+1}}$	$t^m$
$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$te^{-at}$
$\frac{1}{(s+a)^m}$	$\frac{1}{(m-1)!}t^{m-1}e^{-at}$
$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega t)$
$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos(\omega t)$
$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \sin(\omega t)$
$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \cos(\omega t)$

## 4.2 Transformada da Derivada

Para derivada de primeira ordem:

**Teorema 2.**

$$\mathcal{L}\left\{\dot{f}(t)\right\} = sF(s) - f(0). \quad (29)$$

*Demonstração.*

$$\mathcal{L}\left\{\dot{f}(t)\right\} = \int_0^\infty \dot{f}(t)e^{-st}dt. \quad (30)$$

Integrando por partes:

$$u(t) = e^{-st} \Rightarrow \dot{u}(t) = -se^{-st}dt, \quad (31)$$

$$v(t) = \dot{f}(t) \Rightarrow v(t) = f(t), \quad (32)$$

$$\mathcal{L}\left\{\dot{f}(t)\right\} = e^{-st}f(t)|_0^\infty + s \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0). \quad (33)$$

□

Para derivada de segunda ordem:

**Teorema 3.**

$$\mathcal{L}\{\ddot{f}(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0). \quad (34)$$

*Demonstração.* Perceba que

$$\ddot{f}(t) = \frac{d}{dt}\dot{f}(t), \quad (35)$$

de modo que usando o resultado da transformada da primeira derivada, tem-se

$$\mathcal{L}\{\ddot{f}(t)\} = s\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} - \dot{f}(0) = s[sF(s) - f(0)] - \dot{f}(0) = s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0). \quad (36)$$

□

Pode-se generalizar para derivada de ordem  $n$  como

**Teorema 4.**

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\dot{f}(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \quad (37)$$

*Demonstração.* A demonstração segue pelo princípio da indução finita (PIF). Como já discutido, a expressão vale para  $n = 1$ :

$$\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = sF(s) - f(0). \quad (38)$$

Assim, seja a hipótese de indução:

$$\mathcal{L}\{f^{(n-1)}(t)\} = s^{n-1}F(s) - s^{n-2}f(0) - s^{n-3}\dot{f}(0) - \cdots - sf^{(n-3)}(0) - f^{(n-2)}(0), \quad (39)$$

a partir da qual demonstra-se a tese de indução:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f^{(n-1)}(t)\right\} = s\mathcal{L}\{f^{(n-1)}(t)\} - f^{(n-1)}(0) = \\ &= s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\dot{f}(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \end{aligned} \quad (40)$$

□

### 4.3 Transformada da Integral

**Teorema 5.**

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}. \quad (41)$$

*Demonstração.* Seja:

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau, \quad (42)$$

Pela propriedade da derivada, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{\dot{g}(t)\} = sG(s) - g(0) \Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} &= s\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} \Rightarrow \\ \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} &= \frac{F(s)}{s}. \end{aligned} \quad (43)$$

□

## 4.4 Teorema do Valor Final

**Teorema 6.** Se  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  existir, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s). \quad (44)$$

*Demonstração.* Pela propriedade da derivada, tem-se

$$\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = sF(s) - f(0) \Rightarrow sF(s) = f(0) + \int_0^\infty \dot{f}(t)e^{-st}dt, \quad (45)$$

logo

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = f(0) + \int_0^\infty \dot{f}(t)dt = f(0) + \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t). \quad (46)$$

□

## 4.5 Teorema do Valor Inicial

**Teorema 7.** Se  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$  existir, então

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s). \quad (47)$$

*Demonstração.* Pela propriedade da derivada, tem-se

$$\begin{aligned} sF(s) &= f(0) + \int_0^\infty \dot{f}(t)e^{-st}dt = f(0) + \int_0^{0^+} \dot{f}(t)e^{-st}dt + \int_{0^+}^\infty \dot{f}(t)e^{-st}dt = \\ &= f(0) + \int_0^{0^+} \dot{f}(t)dt + \int_{0^+}^\infty \dot{f}(t)e^{-st}dt, \end{aligned} \quad (48)$$

de modo que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0) + \int_0^{0^+} \dot{f}(t)dt + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0^+}^\infty \dot{f}(t)e^{-st}dt = f(0) + f(0^+) - f(0) = f(0^+). \quad (49)$$

□

## 4.6 Multiplicação por Exponencial

**Teorema 8.**

$$\mathcal{L}\{e^{-\sigma t}f(t)\} = F(s + \sigma). \quad (50)$$

*Demonstração.*

$$\mathcal{L}\{e^{-\sigma t}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-\sigma t}f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s+\sigma)t} = F(s + \sigma). \quad (51)$$

□

## 4.7 Atraso de Tempo

**Teorema 9.** Seja  $f(t) = 0, \forall t < 0$ . Dado um atraso no tempo de  $\tau > 0$ , tem-se

$$\mathcal{L}\{f(t - \tau)\} = e^{-s\tau}F(s). \quad (52)$$

*Demonstração.*

$$\mathcal{L}\{f(t - \tau)\} = \int_0^\infty f(t - \tau)e^{-st}dt. \quad (53)$$

Considere a seguinte troca de variável:

$$u = t - \tau \Rightarrow du = dt, \quad (54)$$

de modo que os limites de integração ficam

$$\begin{cases} t = 0 \Rightarrow u = -\tau, \\ t \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (55)$$

e pode-se escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t - \tau)\} &= \int_{-\tau}^\infty f(u)e^{-s(u+\tau)}du = \underbrace{\int_{-\tau}^0 f(u)e^{-s(u+\tau)}du}_{=0, \text{ pois } f(t)=0, \forall t<0} + e^{-s\tau} \int_0^\infty f(u)e^{-su}du = \\ &\quad e^{-s\tau}F(s). \end{aligned} \quad (56)$$

□

## 4.8 Convolução

A integral de convolução entre duas funções  $f(t)$  e  $g(t)$  é definida como

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^\infty f(t - \tau)g(\tau)d\tau. \quad (57)$$

Perceba que a convolução é comutativa, i.e.

$$(f * g)(t) = (g * f)(t). \quad (58)$$

Além disso, é interessante notar que no caso de Controle, em que as funções  $f(t)$  e  $g(t)$  se anulam para  $t < 0$ , basta avaliar a integral de convolução de 0 a  $t$ :

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau. \quad (59)$$

A propriedade da transformada de Laplace relativa à convolução é dada pelo teorema a seguir.

**Teorema 10.** Dadas duas funções  $f(t)$  e  $g(t)$  com valores nulos para  $t < 0$ , tem-se

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s). \quad (60)$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} &= \mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right] = \mathcal{L}\left[\int_0^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right] = \\ &\int_0^{\infty} [f(t-\tau)g(\tau)]e^{-st}dt = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} f(t-\tau)e^{-st}d\tau\right]g(\tau)d\tau.\end{aligned}\quad (61)$$

Usando a propriedade de atraso de tempo, chega-se a

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-s\tau}F(s)g(\tau)d\tau = F(s) \int_0^{\infty} g(\tau)e^{-s\tau}d\tau = F(s)G(s). \quad (62)$$

□

## 4.9 Tabela de Propriedades da Transforma de Laplace

A Tabela 2 resume as propriedades mostradas nesta seção.

Tabela 2: Tabela propriedades da transformada de Laplace.

Propriedade	Domínio do Tempo	Domínio $s$
Linearidade	$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
Primeira derivada	$\dot{f}(t)$	$sF(s) - f(0)$
Segunda derivada	$\ddot{f}(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$
Derivada de ordem $n$	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
Integral	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s}$
Teorema do valor final	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
Teorema do valor inicial	$f(0^+)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
Multiplicação por exponencial	$e^{-\sigma t}f(t)$	$F(s + \sigma)$
Atraso de tempo	$f(t - \tau)$	$e^{-s\tau}F(s)$
Convolução	$(f * g)(t)$	$F(s)G(s)$

## 5 Expansão em Frações Parciais

Se a transformada de Laplace  $F(s)$  for uma função racional, i.e. uma razão de polinômios, sua expressão pode ser decomposta usando um procedimento chamado expansão em frações parciais. Com este procedimento e a Tabela 1, pode-se obter inversa para basicamente qualquer  $F(s)$  função racional. Para entender o procedimento, considere o exemplo a seguir.

**Exemplo 1.** Seja

$$F(s) = \frac{6}{s(s+2)}. \quad (63)$$

Não há uma inversa para esta expressão na tabela de transformadas de Laplace. Porém, pode-se usar expansão em frações parciais para obter

$$\frac{6}{s(s+2)} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+2} = \frac{c_1(s+2) + c_2 s}{s(s+2)} = \frac{(c_1 + c_2)s + 2c_1}{s(s+2)}. \quad (64)$$

Fazendo identidade de polinômios com os numeradores, obtém-se

$$\begin{cases} c_1 = 3, \\ c_2 = -3. \end{cases} \quad (65)$$

Com isso, tem-se

$$F(s) = \frac{3}{s} - \frac{3}{s+2}. \quad (66)$$

Finalmente, através da tabela de transformadas de Laplace, obtém-se

$$f(t) = 3 - 3e^{-2t} = 3(1 - e^{-2t}). \quad (67)$$

Observando a expressão da expansão em frações parciais:

$$F(s) = \frac{6}{s(s+2)} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+2}, \quad (68)$$

pode-se perceber as constantes poderiam ter sido obtidas através das seguintes fórmulas:

$$c_1 = sF(s)|_{s=0} = \left. \frac{6}{s+2} \right|_{s=0} = 3, \quad (69)$$

$$c_2 = (s+2)F(s)|_{s=-2} = \left. \frac{6}{s} \right|_{s=-2} = -3. \quad (70)$$

Considerando  $F(s)$  uma função racional, i.e.  $F(s) = N(s)/D(s)$ , em que  $N(s)$  e  $D(s)$  são polinômios com coeficientes reais:

- As raízes do numerador  $N(s)$  são chamadas de **zeros** de  $F(s)$ .
- As raízes do denominador  $D(s)$  são chamadas de **polos** de  $F(s)$ .

Os zeros e polos são reais ou complexo-conjugados. Além disso, dá-se o nome de **resíduos** às constantes obtidas na expansão em frações parciais.

**Regra 1.** Se  $F(s)$  tem denominador  $D(s) = (s+p_1)(s+p_2) \cdots (s+p_n)$  com polos reais e de multiplicidade 1, a expansão em frações parciais tem termos da forma

$$\frac{c_1}{s+p_1} + \frac{c_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{c_n}{s+p_n}. \quad (71)$$

Os resíduos podem ser calculados através de identidade de polinômios ou a partir da fórmula:

$$c_i = (s+p_i)F(s)|_{s=-p_i}. \quad (72)$$

**Regra 2.** Se  $F(s)$  tem um polo em  $s = -a$  com multiplicidade  $m$ , a expansão em frações parciais tem termos da forma

$$\frac{c_1}{s+a} + \frac{c_2}{(s+a)^2} + \cdots + \frac{c_m}{(s+a)^m}, \quad (73)$$

em que os resíduos podem ser obtidos através da fórmula:

$$c_i = \frac{1}{(m-i)!} \frac{d^{m-i}}{ds^{m-i}} [(s+a)^m F(s)] \Big|_{s=-a}. \quad (74)$$

**Regra 3.** Se  $F(s)$  tiver um par de polos complexo-conjugados em  $s = -a \pm j\omega$ , a expansão em frações parciais tem termos da forma

$$\frac{c}{s+a-j\omega} + \frac{c^*}{s+a+j\omega}. \quad (75)$$

# Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA

## Controle para Sistemas Computacionais – CMC-12

### Tabelas de Transformada de Laplace

**Professor:** Marcos Ricardo Omena de Albuquerque Maximo

22 de abril de 2020

Tabela 1: Tabela de transformadas de Laplace.

$F(s)$	$f(t), t \geq 0$
1	$\delta(t)$
$\frac{1}{s}$	$1(t)$
$\frac{1}{s^2}$	$t$
$\frac{2!}{s^3}$	$t^2$
$\frac{m!}{s^{m+1}}$	$t^m$
$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$te^{-at}$
$\frac{1}{(s+a)^m}$	$\frac{1}{(m-1)!}t^{m-1}e^{-at}$
$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega t)$
$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos(\omega t)$
$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at}\sin(\omega t)$
$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at}\cos(\omega t)$

Tabela 2: Tabela propriedades da transformada de Laplace.

<b>Propriedade</b>	<b>Domínio do Tempo</b>	<b>Domínio <math>s</math></b>
Linearidade	$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
Primeira derivada	$\dot{f}(t)$	$sF(s) - f(0)$
Segunda derivada	$\ddot{f}(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$
Derivada de ordem $n$	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
Integral	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s}$
Teorema do valor final	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
Teorema do valor inicial	$f(0^+)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
Multiplicação por exponencial	$e^{-\sigma t}f(t)$	$F(s + \sigma)$
Atraso de tempo	$f(t - \tau)$	$e^{-s\tau}F(s)$
Convolução	$(f * g)(t)$	$F(s)G(s)$

# Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA

## Controle para Sistemas Computacionais – CMC-12

### Notas da Aula 6 – Sistemas Dinâmicos com Transformada de Laplace

**Professor:** Marcos Ricardo Omena de Albuquerque Maximo

12 de maio de 2020

Na aula anterior, foi feita uma rápida revisão de transformada de Laplace. O objetivo dessa aula é apresentar como usar transformada de Laplace para análise de sistemas dinâmicos.

## 1 Solução de PVI com Transformada de Laplace

Conforme conhecido dos cursos de cálculo, a transformada de Laplace pode ser utilizada para a solução de problemas de valor inicial (PVI). Para isso, usa-se o que foi visto na aula passada sobre transformada de Laplace: tabela de inversas, propriedades e expansão em frações parciais. Para ilustrar, considere o exemplo a seguir.

**Exemplo 1.** Resolver o PVI dado formado pela equação diferencial ordinária (EDO)

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 4u(t), \quad (1)$$

em que  $u(t) = 1(t)$  é uma entrada degrau unitário e as condições iniciais são  $y(0) = 2$  e  $\dot{y}(0) = -1$ .

Aplicando a transformada de Laplace à EDO e fazendo uso da propriedade da derivada, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t)\} &= \mathcal{L}\{4u(t)\} \Rightarrow \\ s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 3(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) &= 4U(s) \Rightarrow \\ Y(s) &= \frac{(s+3)y(0) + \dot{y}(0)}{s^2 + 3s + 2} + \left(\frac{4}{s^2 + 3s + 2}\right)U(s). \end{aligned} \quad (2)$$

Assim, substituindo a expressão da entrada e as condições iniciais, tem-se

$$Y(s) = \frac{2(s+3) - 1}{s^2 + 3s + 2} + \left(\frac{4}{s^2 + 3s + 2}\right)\frac{1}{s} = \frac{2s^2 + 5s + 4}{s(s+1)(s+2)}. \quad (3)$$

Expandindo em frações parciais, chega-se a

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 5s + 4}{s(s+1)(s+2)} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+1} + \frac{c_3}{s+2} = \frac{(c_1 + c_2 + c_3)s^2 + (3c_1 + 2c_2 + c_3) + 2c_1}{s(s+1)(s+2)}, \quad (4)$$

de modo que

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 2 \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 = 5 \\ 2c_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = -1 \\ c_3 = 1 \end{cases}. \quad (5)$$

Finalmente, usa-se a tabela de inversas para obter  $y(t)$  de acordo com

$$Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = 2 - e^{-t} + e^{-2t}. \quad (6)$$

## 2 Função de Transferência

Perceba que (2) pode ser interpretada da seguinte forma:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{(s+3)y(0) + \dot{y}(0)}{s^2 + 3s + 2}}_{\text{Resposta às condições iniciais}} + \underbrace{\left(\frac{1}{s^2 + 3s + 2}\right)U(s)}_{\text{Resposta forçada partindo do repouso}}. \quad (7)$$

Portanto, se as condições iniciais forem nulas (i.e. se o sistema estiver inicialmente em repouso), tem-se

$$Y(s) = \left(\frac{4}{s^2 + 3s + 2}\right)U(s). \quad (8)$$

Com isso, pode-se definir a **função de transferência** desse sistema dinâmico:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4}{s^2 + 3s + 2}. \quad (9)$$

O interessante do conceito de função de transferência é que esta é capaz de caracterizar o sistema dinâmico independente da entrada  $u(t)$ . Genericamente, tem-se que a **função de transferência** de um sistema é dada por

$$G(s) = \left. \frac{Y(s)}{U(s)} \right|_{\text{Condições iniciais nulas}} \quad (10)$$

Em controle clássico, função de transferência é o tipo de representação de sistema dinâmico mais popular. Ademais, em controle, quando as condições iniciais não são especificadas, é comum assumir que são nulas.

O procedimento para obter a função de transferência diretamente da EDO do sistema é simples, basta aplicar a transforma de Laplace nos dois lados da equação, considerar condições iniciais nulas e isolar  $G(s) = Y(s)/U(s)$ . Por exemplo, seja a EDO de um

sistema de 2<sup>a</sup> ordem padrão, a função de transferência associada é obtida da seguinte forma:

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^2 Y(s) + 2\xi\omega_n Y(s) + \omega_n^2 Y(s) = \omega_n^2 U(s) \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (11)$$

Finalmente, considere um sistema do tipo MIMO, com vetores de entrada e saída no domínio  $s$  dados por

$$\mathbf{U}(s) = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_{n_u}(s) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_{n_y}(s) \end{bmatrix} \quad (12)$$

No caso, tem-se uma **matriz de transferência**, em que cada elemento  $G_{ij}(s)$  é uma função de transferência relacionando a  $i$ -ésima entrada com a  $j$ -ésima saída:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1n_y}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2n_y}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n_u 1}(s) & G_{n_u 2}(s) & \cdots & G_{n_u n_y}(s) \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$G_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)}. \quad (14)$$

**Exemplo 2.** Seja um sistema com função de transferência

$$G(s) = \frac{4}{s^2 + 3s + 2}, \quad (15)$$

obtenha sua resposta à entrada degrau unitário, partindo de condições iniciais nulas.

Da definição de função de transferência, tem-se

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \Rightarrow Y(s) = \left( \frac{4}{s^2 + 3s + 2} \right) U(s). \quad (16)$$

Considerando entrada degrau unitário:

$$u(t) = 1(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s}, \quad (17)$$

logo

$$\begin{aligned} Y(s) &= \left( \frac{4}{s^2 + 3s + 2} \right) U(s) = \frac{4}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+1} + \frac{c_3}{s+2} \Rightarrow \\ \frac{4}{s(s^2 + 3s + 2)} &= \frac{(c_1 + c_2 + c_3)s^2 + (3c_1 + 2c_2 + c_3)s + 2c_1}{s^2 + 3s + 2} \Rightarrow \\ &\quad \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 = 0 \\ 2c_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = -4 \\ c_3 = 2 \end{cases}. \end{aligned} \quad (18)$$

Portanto, obtém-se

$$Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{4}{s+1} + \frac{2}{s+2} \Rightarrow y(t) = 2 - 4e^{-t} + 2e^{-2t}. \quad (19)$$

### 3 Resposta a Impulso

Lembre a definição de função de transferência:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \Rightarrow Y(s) = G(s)U(s). \quad (20)$$

Se a entrada é um impulso unitário (delta de Dirac), tem-se

$$u(t) = \delta(t) \Rightarrow U(s) = 1 \Rightarrow Y(s) = G(s). \quad (21)$$

Logo, a função de transferência do sistema  $G(s)$  coincide com a transformada de Laplace da resposta ao impulso unitário  $Y(s)$ , considerando condições iniciais nulas.

Assim, denote  $g(t)$  a resposta ao impulso unitário. Usando a propriedade de convolução de transformada de Laplace, tem-se

$$Y(s) = G(s)U(s) \Rightarrow y(t) = (g * u)(t), \quad (22)$$

ou seja, a saída forçada  $y(t)$  é a convolução entre a entrada  $u(t)$  e a resposta ao impulso unitário  $g(t)$ .

**Exemplo 3.** Considere o sistema de *cruise control*, que é regido por

$$m\dot{v} + bv = u, \quad (23)$$

em que  $v$  é a velocidade do carro,  $m$  é a massa do carro,  $b$  é a constante de amortecimento devido à resistência do ar e  $u$  é a força desenvolvida pelo carro. Determine a resposta ao impulso unitário para esse sistema.

Obtendo a função de transferência do sistema:

$$m\dot{v} + bv = u \xrightarrow{\mathcal{L}} msV(s) + bV(s) = U(s) \Rightarrow G(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{1}{m} \left( \frac{1}{s + b/m} \right). \quad (24)$$

Portanto, a resposta ao impulso é

$$g(t) = \frac{1}{m} e^{-\frac{b}{m}t}. \quad (25)$$

Perceba que, apesar das condições iniciais serem nulas,  $g(0^+) = 1/m > 0$ . Intuitivamente, esta aparente contradição surge porque o delta de Dirac produz uma força “infinita” (impulsiva) em  $t = 0$ . Finalmente, é possível obter  $g(0^+)$  também através do teorema do valor inicial:

$$g(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \left( \frac{1}{ms + b} \right) \Rightarrow g(0^+) = \frac{1}{m}. \quad (26)$$

## 4 Função de Transferência no MATLAB

O *Control Systems Toolbox* do MATLAB consegue trabalhar com representação em função de transferência. Para isso, tem-se as funções:

1. `sys = tf(num, den)` cria uma função de transferência (*transfer function* – `tf`) de tempo contínuo `sys` com numerador `num` e denominador `den`.
2. `sys = zpk(z, p, k)` cria um modelo zero-pólo-ganho (`zpk`) `sys` com zeros `z`, pólos `p`, e ganhos `k`.

Lembre-se que, dada uma expressão no domínio  $s$   $F(s) = N(s)/D(s)$ , zeros são as raízes do numerador  $N(s)$  e polos são as raízes do denominador  $D(s)$ . A listagem 1 e 2 mostram usos de `tf` e `zpk`, respectivamente. A Listagem 3 apresenta uma forma alternativa de se construir funções de transferência com `tf` em que a variável  $s$  da transformada de Laplace foi definida. Perceba ainda que é possível realizar operações (soma, multiplicação, divisão etc.) com funções de transferência no MATLAB.

Listagem 1: Exemplo de uso de `tf` no *Command Window* do MATLAB.

```
1 >> num = 4;
2 >> den = [1, 3, 2];
3 >> sys = tf(num, den)
4
5 sys =
6
7     4
8     -----
9     s^2 + 3 s + 2
10
11 Continuous-time transfer function.
```

Listagem 2: Exemplo de uso de `zpk` no *Command Window* do MATLAB.

```
1 >> z = [];
2 >> p = [0, -1, -2];
3 >> k = 4;
4 >> sys = zpk(z, p, k)
5
6 sys =
7
8     4
9     -----
10    s (s+1) (s+2)
11
12 Continuous-time zero/pole/gain model.
```

Listagem 3: Forma alternativa de usar `tf` no *Command Window* do MATLAB.

```
1 >> s = tf('s')
2
3 s =
4
5 s
```

```

6
7 Continuous-time transfer function.
8
9 >> sys = 4 / (s^2 + 3 * s + 2)
10
11 sys =
12
13     4
14 -----
15 s^2 + 3 s + 2
16
17 Continuous-time transfer function.
18
19 >> sys2 = (s / (s + 10)) * sys
20
21 sys2 =
22
23     4 s
24 -----
25 s^3 + 13 s^2 + 32 s + 20
26
27 Continuous-time transfer function.

```

Além disso, o MATLAB possui funções para simular sistemas dinâmicos descritos por funções de transferência:

1. `[y, t] = step(sys)` computa a resposta ao degrau  $y$  do sistema dinâmico `sys`.
2. `[y, t] = impulse(sys)` computa a resposta ao impulso  $y$  do sistema dinâmico `sys`.
3. `y = lsim(sys, u, t)` computa a resposta no tempo do sistema dinâmico `sys` para uma entrada descrita por `u` e `t`.

Destaca-se que caso alguma dessas funções seja chamada sem variáveis de saída, o MATLAB traça um gráfico com a resposta. As listagens 4, 5 e 6 apresentam exemplos de uso de `step`, `impulse` e `lsim`. A Figura 1 mostra os gráficos obtidos com os códigos das listagens 4 e 6. Finalmente, o gráfico obtido com o código da Listagem 5 é exibido na Figura 2.

Listagem 4: Exemplo de uso de `step`.

```

1 sys = tf(4, [1, 3, 2]);
2 [y, t] = step(sys); % y eh resposta, t eh tempo
3 figure;
4 plot(t, y, 'LineWidth', 2);
5 hold on;
6 plot(t, 2 - 4 * exp(-t) + 2 * exp(-2 * t), 'r--', 'LineWidth', 2);
7 % Ajuste do plot (melhorias esteticas)
8 grid on;
9 xlabel('Tempo ($s$)', 'FontSize', 14, 'Interpreter', 'Latex');
10 ylabel('Saida (-)', 'FontSize', 14, 'Interpreter', 'Latex');
11 title('\texttt{step}', 'Interpreter', 'Latex');
12 legend({'Simulacao', 'Analitico'}, 'FontSize', 14, 'Interpreter', 'Latex');
13 set(gca, 'FontSize', 14, 'TickLabelInterpreter', 'Latex');

```

Listagem 5: Exemplo de uso de `impulse`.

```

1 m = 1000;
2 b = 50;
3 sys = tf(1, [m, b]);
4 t = 0:0.01:100;
5 y = impulse(sys, t);
6 figure;
7 plot(t, y, 'LineWidth', 2);
8 hold on;
9 plot(t, (1 / m) * exp(-(b / m) * t), 'r--', 'LineWidth', 2);
% Ajuste do plot (melhorias estéticas)
10 grid on;
11 xlabel('Tempo ($s$)', 'FontSize', 14, 'Interpreter', 'Latex');
12 ylabel('Velocidade ($m/s$)', 'FontSize', 14, 'Interpreter', 'Latex');
13 legend({'Simulação', 'Analítico'}, 'FontSize', 14, 'Interpreter', 'Latex');
14 title('\texttt{impulse}', 'Interpreter', 'Latex');
15 set(gca, 'FontSize', 14, 'TickLabelInterpreter', 'Latex');
16 print -depsc2 exemplo_impulse.eps
17

```

Listagem 6: Exemplo de uso de `lsim`.

```

1 sys = tf(4, [1, 3, 2]);
2 t = 0:0.01:10;
3 u = ones(size(t));
4 y = lsim(sys, u, t);
5 figure;
6 plot(t, y, 'LineWidth', 2);
7 hold on;
8 plot(t, 2 - 4 * exp(-t) + 2 * exp(-2 * t), 'r--', 'LineWidth', 2);
% Ajuste do plot (melhorias estéticas)
10 grid on;
11 xlabel('Tempo ($s$)', 'FontSize', 14, 'Interpreter', 'Latex');
12 ylabel('Saida (-)', 'FontSize', 14, 'Interpreter', 'Latex');
13 legend({'Simulação', 'Analítico'}, 'FontSize', 14, 'Interpreter', 'Latex');
14 title('\texttt{lsim}', 'Interpreter', 'Latex');
15 set(gca, 'FontSize', 14, 'TickLabelInterpreter', 'Latex');
16

```

## 5 Zeros e Polos da Função de Transferência

De modo geral, uma função de transferência de ordem  $n$  é dada por

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad (27)$$

em que:

$$N(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0, \quad (28)$$

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0. \quad (29)$$

Conforme definido na aula passada, chama-se de **zeros** e **polos** as raízes de  $N(s)$  e  $D(s)$ , respectivamente. Desse modo, pode-se escrever

$$G(s) = \left( \frac{b_m}{a_n} \right) \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}, \quad (30)$$

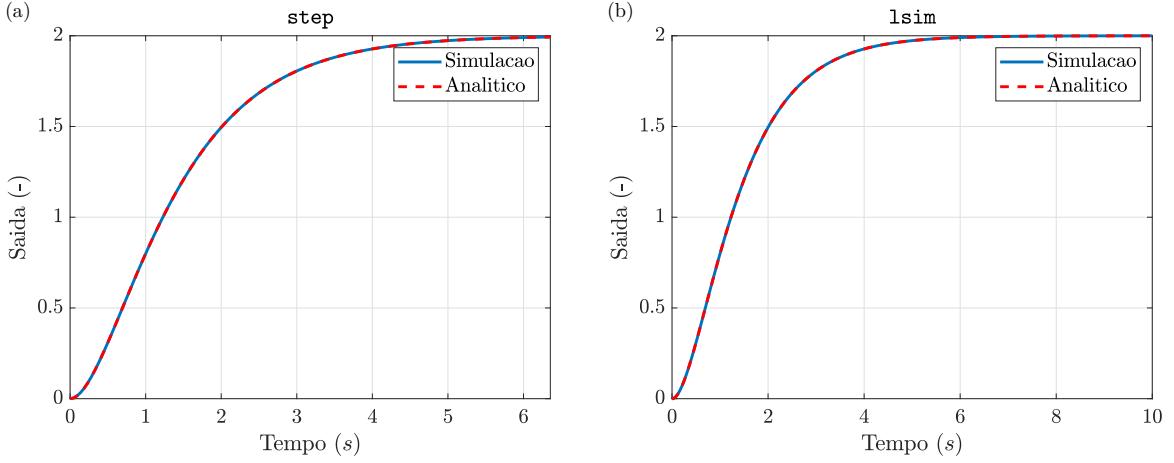


Figura 1: Gráficos de simulação de resposta ao degrau usando funções do MATLAB: (a) `step` e (b) `lsim`. Os gráficos foram modificados

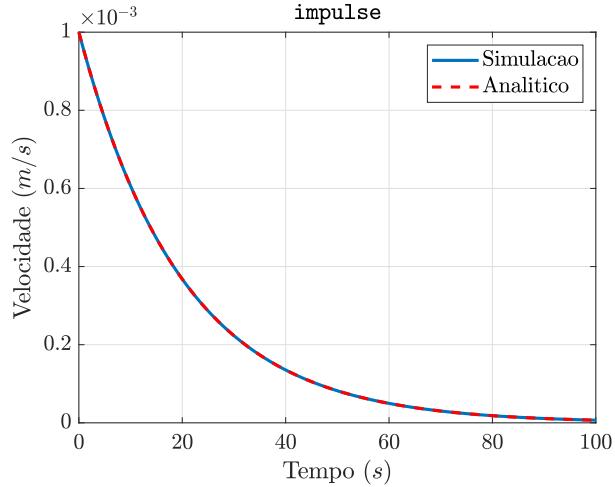


Figura 2: Gráfico de simulação de resposta ao impulso usando `impulse`.

em que  $z_1, z_2, \dots, z_m$  são os  $m$  zeros e  $p_1, p_2, \dots, p_n$  são os  $n$  polos de  $G(s)$ . A função de transferência é dita ser:

- Própria se  $m \leq n$ .
- Estritamente própria se  $m < n$ .
- Imprópria se  $m > n$ .

Perceba ainda que os zeros surgem devido a derivadas da entrada  $u(t)$  na EDO:

$$\begin{aligned}
 a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y &= b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \cdots + b_1 u' + b_0 u \xrightarrow{\mathcal{L}} \\
 (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) Y(s) &= (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0) U(s) \Rightarrow \\
 G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}.
 \end{aligned} \tag{31}$$

## 6 Modos da Dinâmica de um Sistema

Seja a função de transferência

$$G(s) = \left( \frac{b_m}{a_n} \right) \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}. \quad (32)$$

Supondo polos distintos, a expansão em frações parciais resulta em

$$G(s) = \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{c_n}{s - p_n}, \quad (33)$$

de modo que a resposta ao impulso  $g(t)$  fica

$$g(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \cdots + c_n e^{p_n t}. \quad (34)$$

Com isso, tem-se uma interpretação de como as posições dos polos influenciam a resposta do sistema.

### 6.1 Modos de 1<sup>a</sup> Ordem

Para um polo  $p$  real, a parcela  $e^{pt}$  corresponde a um **modo de 1<sup>a</sup> ordem** do sistema. Dependendo da posição do polo, tem-se 3 casos diferentes:

- (a) **Semi-plano esquerdo (SPE)**: exponencial negativa.
- (b) **Reta imaginária**: constante.
- (c) **Semi-plano direito (SPD)**: exponencial positiva.

A Figura 3 ilustra esses casos. Por conta disso, em geral se está interessado em posicionar os polos do sistema em malha fechada no SPE.

### 6.2 Modos de 2<sup>a</sup> Ordem

Caso a função de transferência tenha algum par de polos complexo conjugados na forma

$$p = -\sigma \pm j\omega, \quad (35)$$

então haverá um termo

$$\frac{1}{(s + \sigma)^2 + \omega^2}, \quad (36)$$

cuja inversa é

$$e^{-\sigma t} (a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)), \quad (37)$$

com  $a$  e  $b$  constantes, o que corresponde a um **modo de 2<sup>a</sup> ordem** do sistema. Novamente, há 3 casos possíveis dependendo da posição do par de polos:

- (a) **Semi-plano esquerdo (SPE)**: oscilação amortecida.
- (b) **Reta imaginária**: oscilação sustentada.
- (c) **Semi-plano direito (SPD)**: oscilação instável.

A Figura 4 apresenta esses casos. Novamente, destaca-se o interesse em posicionar os polos do sistema em malha fechada no SPE.

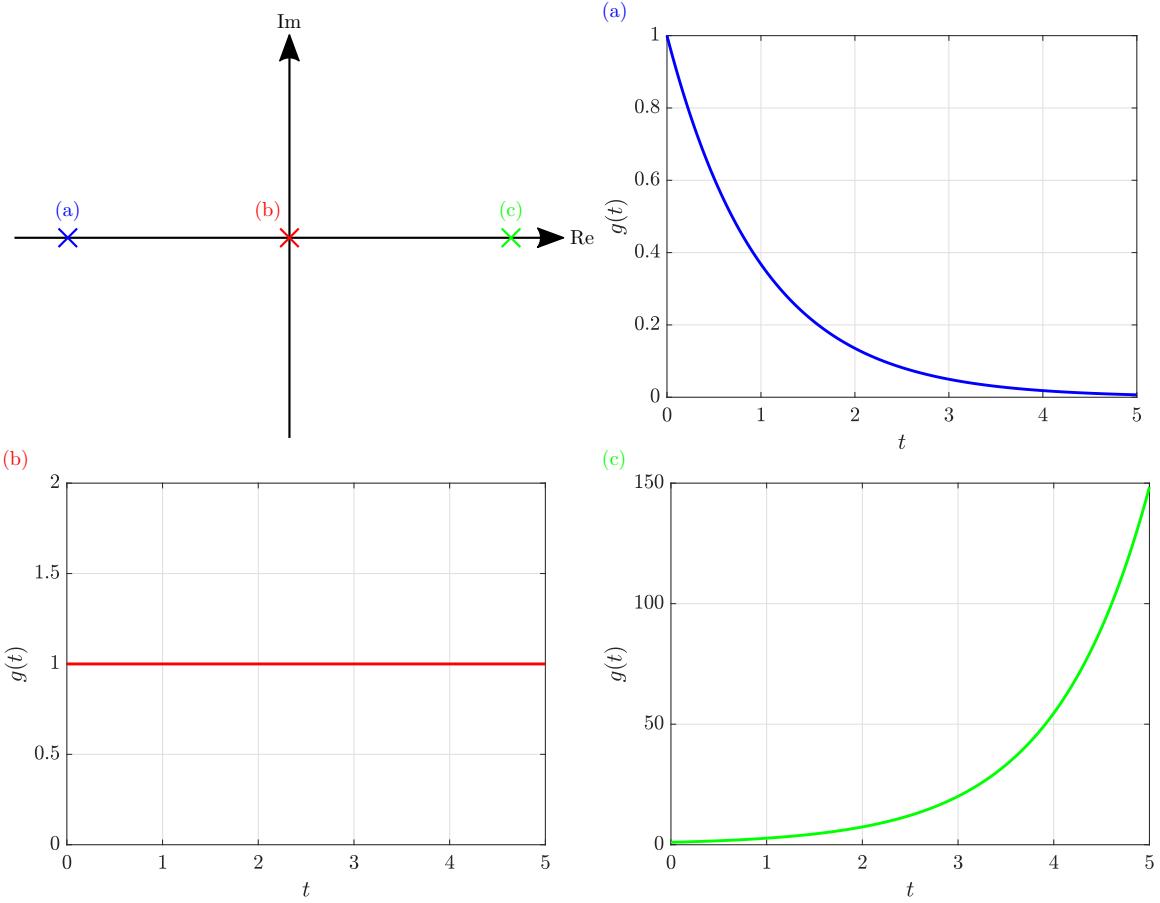


Figura 3: Modos de 1<sup>a</sup> ordem dependendo da posição do polo (representado com ‘x’).

### 6.3 Efeito dos Zeros

Nessa seção, viu-se que polos estão associados aos modos do sistema. Já os zeros influenciam os pesos que cada modo tem na resposta do sistema. Para verificar isso, volte para a expansão em frações parciais da transformada da resposta ao impulso assumindo polos reais, dada por (33):

$$G(s) = \left( \frac{b_m}{a_n} \right) \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{c_n}{s - p_n}. \quad (38)$$

As constantes  $c_1, c_2, \dots, c_n$  podem ser obtidas por

$$c_i = (s - p_i) G(s)|_{s=p_i} = \left( \frac{b_m}{a_n} \right) \frac{(p_i - z_1)(p_i - z_2) \cdots (p_i - z_m)}{(p_i - p_1) \cdots (p_i - p_{i-1})(p_i - p_{i+1}) \cdots (p_i - p_n)}. \quad (39)$$

Perceba ainda que  $c_i \approx 0$  se existe algum  $z_j$  tal que  $z_j \approx p_i$ . Por isso, quando  $z_j = p_i$ , diz-se que o zero  $z_j$  “cancela” o polo  $p_i$ .

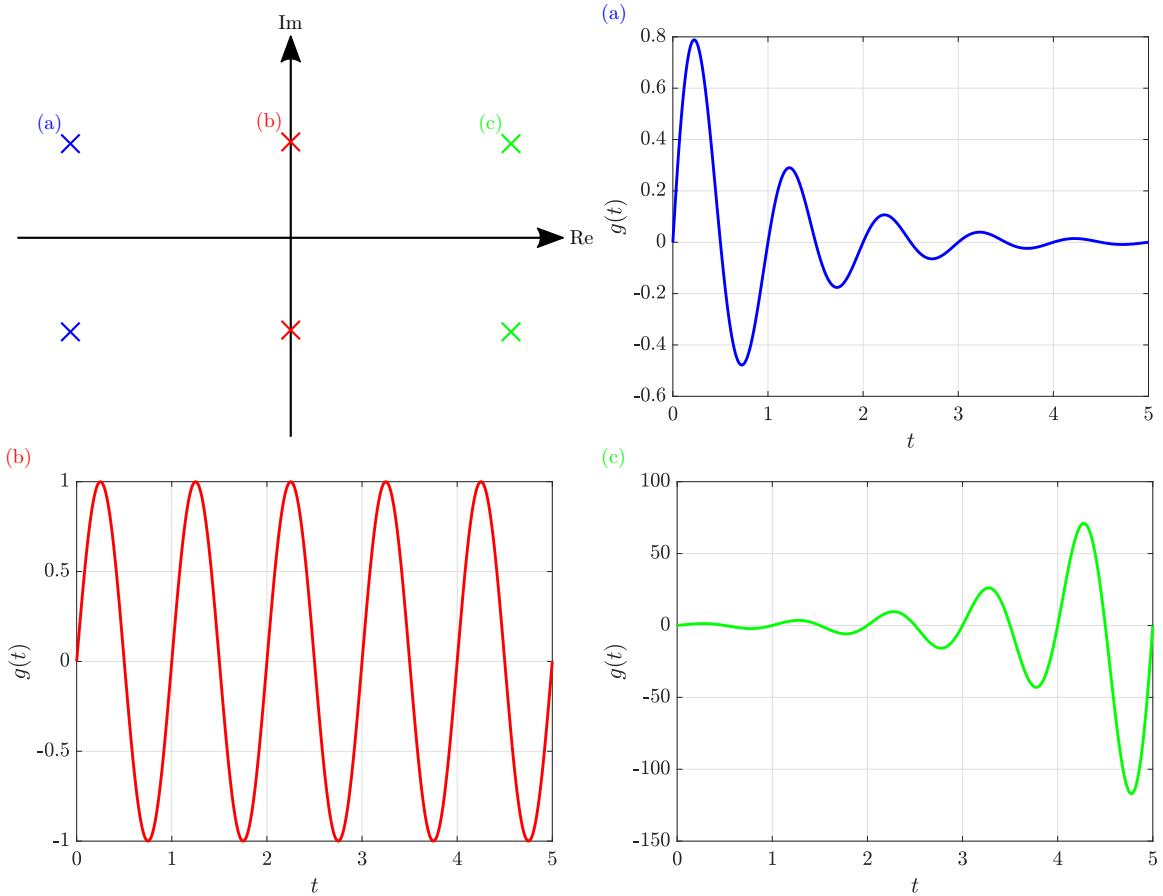


Figura 4: Modos de 2<sup>a</sup> ordem dependendo da posição do par de polos conjugados (representado com um par de 'x').

# Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA

## Controle para Sistemas Computacionais – CMC-12

### Notas da Aula 7 – Sistemas de 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> Ordens e Requisitos no Domínio do Tempo

**Professor:** Marcos Ricardo Omena de Albuquerque Maximo

20 de maio de 2020

Na aula anterior, apresentou-se como a transformada de Laplace pode ser usada para análise de sistemas dinâmicos. Esta aula continua na mesma linha. Na Seção 1, apresenta-se outras formas de obter a função de transferência. A Seção 2 analisa sistemas dinâmicos de acordo com a ordem do sistema. Finalmente, a Seção 3 apresenta como analisar estabilidade de um sistema dinâmico.

## 1 Obtenção da Função de Transferência do Sistema

Na aula passada, apresentou-se como obter a função de transferência a partir de uma representação como equação diferencial ordinária (EDO). Destaca-se que métodos baseados em função de transferência são para um tipo de sistema chamado sistema **linear invariante no tempo** (LIT) (em inglês, *linear time-invariant* – LTI). Esse é o tipo de sistema abordado pelas técnicas de CMC-12.

Em relação à EDO, um sistema LIT deve ter uma EDO linear com coeficientes constantes. Além disso, um sistema LIT deve ter uma função de transferência racional em que os polinômios do numerador e do denominador possuem constantes reais.

### 1.1 Obtenção pelo Diagrama de Blocos

Na aula passada, mostrou-se que a saída de um sistema dinâmico pode ser obtida através da convolução da resposta ao impulso unitário com a função da entrada, i.e.

$$y(t) = (g * u)(t), \quad (1)$$

em que  $y(t)$  é a saída do sistema,  $g(t)$  é sua resposta ao impulso unitário e  $u(t)$  é a entrada do sistema. Com isso, em Laplace, a saída é dada por

$$Y(s) = G(s)U(s). \quad (2)$$

Desse modo, as propriedades de convolução e linearidade da transformada de Laplace criam um procedimento muito conveniente para obter a função de transferência de um

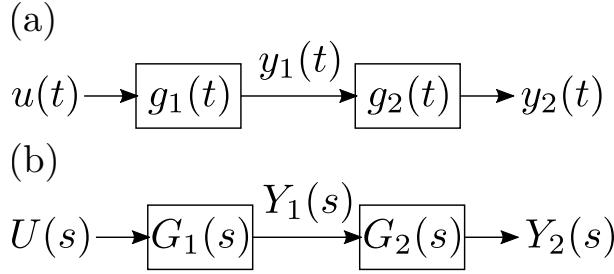


Figura 1: Ligação de blocos em série: (a) domínio do tempo e (b) domínio  $s$ .

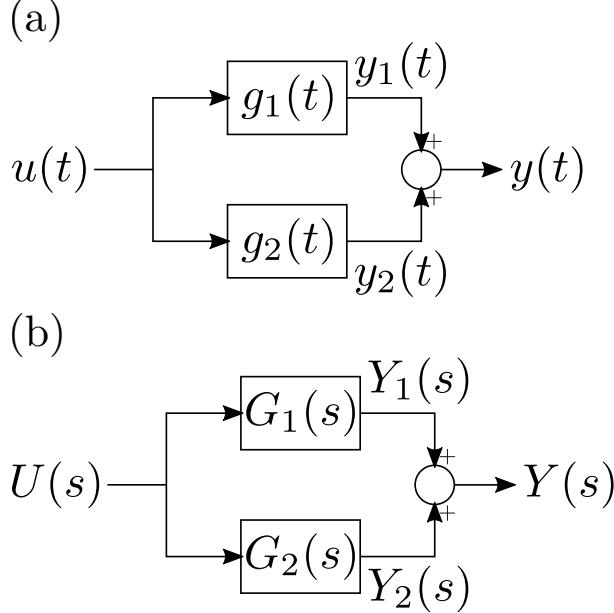


Figura 2: Ligação de blocos em paralelo: (a) domínio do tempo e (b) domínio  $s$ .

diagrama de blocos em que os blocos possuem representação em função de transferência. Para entender melhor, perceba que há basicamente dois tipos básicos de associações de blocos em um diagrama de blocos: em série e em paralelo, as quais são mostradas nas figuras 1 e 2, respectivamente.

De acordo com a Figura 1, para a ligação em série, tem-se

$$\begin{aligned} y_2(t) &= (g_2 * y_1)(t) = (g_2 * (g_1 * u))(t) \Rightarrow Y_2(s) = G_2(s)G_1(s)U(s) \Rightarrow \\ G(s) &= \frac{Y_2(s)}{U(s)} = G_1(s)G_2(s), \end{aligned} \quad (3)$$

de modo que a associação em série pode ser substituída por um único bloco com função de transferência  $G(s) = G_1(s)G_2(s)$ . Já para a associação apresentada na Figura 2, obtém-se

$$\begin{aligned} y(t) &= (g_1 * u)(t) + (g_2 * u)(t) \Rightarrow Y(s) = G_1(s)U(s) + G_2(s)U(s) \Rightarrow \\ G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) + G_2(s), \end{aligned} \quad (4)$$

logo a associação em paralelo é equivalente a um único bloco com função de transferência  $G(s) = G_1(s) + G_2(s)$ . A partir dessas duas regras, pode-se obter a função de transferência

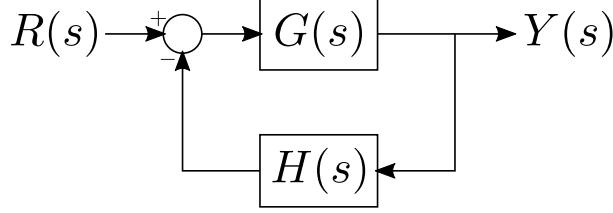


Figura 3: Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada genérico, em que  $G(s)$  e  $H(s)$  representam as funções de transferência da planta e da realimentação, respectivamente.

entre uma entrada e uma saída do diagrama de bloco apenas fazendo operações de soma e multiplicação das funções de transferência e sinais envolvidos no diagrama de blocos.

Por exemplo, considere o diagrama de blocos da Figura 3, que representa uma malha fechada clássica com realimentação negativa, em que  $G(s)$  e  $H(s)$  são as funções de transferência da planta e da realimentação, respectivamente. No caso,  $H(s)$  geralmente representa uma função de transferência associada a um sensor. No curso, tem-se considerado  $H(s) = 1$  por simplicidade, mas isso não é verdade em geral, e só é uma boa aproximação se o sensor tiver uma dinâmica muito mais rápida que a planta. Do diagrama, pode-se escrever

$$G(s)[R(s) - H(s)Y(s)] = Y(s) \Rightarrow Y(s)[1 + G(s)H(s)] = G(s)R(s) \Rightarrow \\ G_f(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}, \quad (5)$$

em que  $G_f(s)$  é a função de transferência do sistema em malha fechada. No MATLAB, a operação em (5) pode ser feita através de `Gf = feedback(G, H)`.

## 1.2 Obtenção pela Representação em Espaço de Estados

Embora seja possível converter de espaço de estados para função de transferência primeiro convertendo o espaço de estados em EDO e depois em função de transferência, é conveniente ter um procedimento para conversão direta. Dada uma representação de um sistema SISO em espaço de estados

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \\ y = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}, \quad (6)$$

em que  $\mathbf{x}$  é o vetor de estados,  $u$  é a entrada,  $y$  é a saída, e  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  são matrizes que descrevem o sistema. Para obter a matriz de transferência do sistema, observe que

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t) \Rightarrow s\mathbf{X}(s) = \mathbf{AX}(s) + \mathbf{BU}(s) \Rightarrow (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{BU}(s) \Rightarrow \\ \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}(s). \quad (7)$$

Substituindo (7) na equação de saída, pode-se obter a função de transferência do sistema:

$$y(t) = \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{Du}(t) \Rightarrow Y(s) = \mathbf{CX}(s) + \mathbf{DU}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}(s) + \mathbf{DU}(s) \Rightarrow \\ G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}. \quad (8)$$

No caso de um sistema MIMO, pode-se fazer realizar esse procedimento para cada par entrada-saída e obter a matriz de transferência.

No MATLAB, a conversão entre espaço de estados (em inglês, *state space*) e função de transferência pode ser realizada através de `[num, den] = ss2tf(A, B, C, D)`, em que `num` e `den` representam o numerador e o denominador da função de transferência, respectivamente. No caso de um sistema com múltiplas saídas, a função retorna várias linhas em `num`, cada linha representando o numerador à respectiva saída. Caso o sistema tenha múltiplas entradas, deve-se utilizar `[num, den] = ss2tf(A, B, C, D, iu)`, em que `iu` indica a entrada escolhida.

## 2 Ordem do Sistema Dinâmico

Dependendo da representação usada para o sistema dinâmico, a ordem do sistema pode ser obtida por:

- Número de estados na representação em espaço de estados.
- Máxima ordem de derivada de  $y(t)$  na representação como EDO.
- Máxima potência de  $s$  no denominador da função de transferência.
- Número de integradores presentes no diagrama de blocos.

Embora sistemas de controle complexos tenham ordens muito elevadas, o que dificulta o projeto de um sistema de controle por meio de ferramentas analíticas, é muito útil estudar analiticamente sistemas de ordens baixas, especialmente de 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> ordens. Conforme será visto mais adiante, estudar sistemas de 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> ordens nos ajuda a construir intuições que são transportadas em algum grau para sistemas de ordens superiores. Além disso, é muito comum adotar aproximações em sistemas de ordens superiores para que possam ser analisados como sistemas de 1<sup>a</sup> ou 2<sup>a</sup> ordem.

### 2.1 Sistema de Primeira Ordem

A função de transferência de um sistema de 1<sup>a</sup> ordem padrão é

$$G(s) = \frac{a}{s + a}, \quad a > 0, \quad (9)$$

em que  $s = -a$  é o polo do sistema e  $a = \omega_c$  é a **frequência de corte**. A motivação por trás do nome frequência de corte ficará mais claro quando se estudar análise no domínio da frequência. Quando se trabalhou com EDO de 1<sup>a</sup> ordem, definiu-se o conceito de constante de tempo  $\tau$ . Com base nesse conceito, pode-se escrever (9) como

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}, \quad (10)$$

de modo que  $\tau = 1/a$ . Para verificar que  $\tau$  é realmente a constante de tempo em (10), pode-se obter a resposta ao degrau unitário do sistema como

$$Y(s) = G(s)U(s) = \left( \frac{1}{\tau s + 1} \right) \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{\tau}{\tau s + 1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = 1 - e^{-t/\tau}, \quad (11)$$

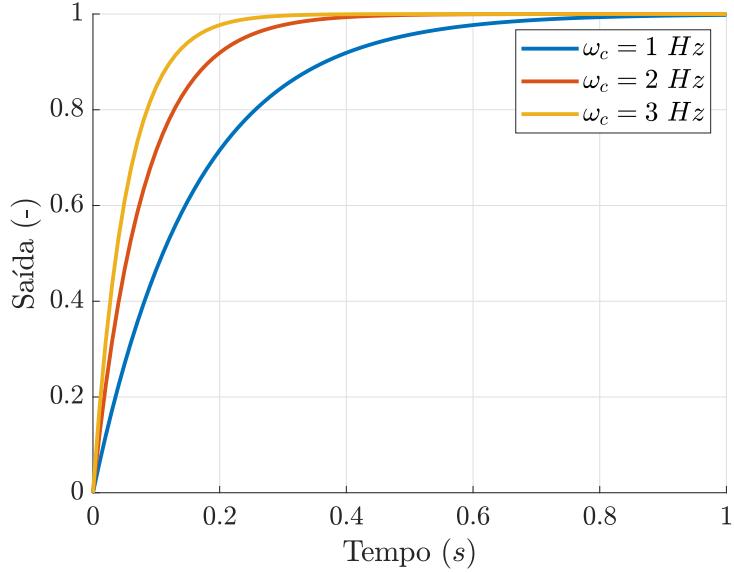


Figura 4: Respostas ao degrau unitário para sistemas de 1<sup>a</sup> ordem com diferentes valores de  $\omega_c$ .

portanto

$$y(\tau) = 1 - e^{-1}, \quad (12)$$

e  $\tau$  coincide com a definição conhecida de constante de tempo. Respostas ao degrau unitário de sistemas de 1<sup>a</sup> ordem com diferentes valores da frequência de corte  $\omega_c$  são apresentadas na Figura 4. Como pode-se perceber, quanto maior a frequência de corte (ou, equivalentemente, quanto mais distante da origem o polo estiver), mais rápido é o sistema. Note que os valores das frequências estão em *Hz*. Lembre-se que, para uma dada frequência,  $\omega = 2\pi f$ , quando  $\omega$  está em *rad/s* e  $f$  em *Hz*. Por conveniência, é muito comum o uso de *Hz* para definir valores de frequência em controle, mas perceba que as equações sempre trabalham com S.I. (*rad/s*).

## 2.2 Sistema de Segunda Ordem

Como já visto, a função de transferência de um sistema de segunda ordem padrão é

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad \omega_n > 0, \quad \xi > 0, \quad (13)$$

em que  $\omega_n$  é a frequência natural e  $\xi$  é o fator de amortecimento. O sistema de 2<sup>a</sup> ordem padrão foi estudado numa aula anterior através da EDO associada. As conclusões obtidas anteriormente continuam válidas, apenas será feita uma tradução para a linguagem de função de transferência. Lembre-se que os autovalores da EDO são os polos da função de transferência. Logo, os polos são

$$s = \frac{-2\xi\omega_n \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad (14)$$

em que

$$\Delta = 4\xi^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2 \Rightarrow \Delta = 4\omega_n^2 (\xi^2 - 1). \quad (15)$$

Assim, de acordo com o valor de  $\Delta$ , há 3 casos:

1. **Superamortecido:**  $\Delta > 0$  e polos reais negativos distintos.
2. **Criticamente amortecido:**  $\Delta = 0$  e polo real negativo com multiplicidade dupla.
3. **Subamortecido:**  $\Delta < 0$  e polos complexos conjugados.

A seguir, apresenta-se cada caso. Como sistema de 2<sup>a</sup> ordem padrão já foi analisado com EDOs, serão apresentados apenas os resultados, sem as deduções. Sugere-se ao aluno que tente reproduzir os resultados com uso da transformada de Laplace como exercício.

### 2.2.1 Caso Superamortecido

Nesse caso:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 4\omega_n^2 (\xi^2 - 1) > 0 \Rightarrow \xi > 1. \quad (16)$$

Os polos são

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}. \quad (17)$$

A resposta ao degrau unitário é

$$y(t) = 1 + \frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} - \frac{p_1}{p_1 - p_2} e^{p_2 t}. \quad (18)$$

### 2.2.2 Caso Criticamente Amortecido

Nesse caso:

$$\Delta = 0 \Rightarrow \xi = 1. \quad (19)$$

O polo com multiplicidade dupla é

$$p = -\omega_n. \quad (20)$$

A resposta ao degrau unitário é

$$y(t) = 1 - e^{pt} + pte^{pt}. \quad (21)$$

### 2.2.3 Caso Subamortecido

Nesse caso:

$$\Delta < 0 \Rightarrow 4\omega_n^2 (\xi - 1) < 0 \Rightarrow \xi < 1. \quad (22)$$

Os polos são

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}j = -\sigma \pm \omega_d j \Rightarrow \begin{cases} p_1 = -\sigma + j\omega_d, \\ p_2 = -\sigma - j\omega_d. \end{cases} \quad (23)$$

em que

$$\sigma = \xi\omega_n, \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}. \quad (24)$$

Graficamente, pode-se representar o polo  $p_1$  no plano  $s$  de acordo com a Figura 5. A partir dessa figura, pode-se verificar ainda que

$$\beta = \arctan \frac{\omega_d}{\sigma} = \arccos \frac{\sigma}{\omega_n} = \frac{\xi\omega_n}{\omega_n} \Rightarrow \beta = \arccos \xi. \quad (25)$$

A resposta ao degrau unitário é

$$y(t) = 1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t + \beta). \quad (26)$$

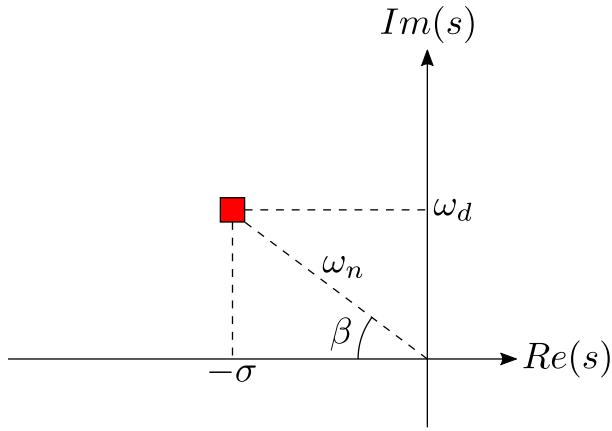


Figura 5: Representação gráfica do polo complexo  $p_1$  no plano  $s$ .

### 2.3 Ordens Superiores

Em geral, não se definem parâmetros como frequência natural e fator de amortecimento para sistemas de 3<sup>a</sup> ordem em diante. No caso, o projeto do controlador para um sistema de 3<sup>a</sup> ordem ou superior com o tipo de técnica analítica que se tem utilizado é muito difícil. Uma técnica comum para contornar essa dificuldade envolve fazer aproximações no modelo até obter um sistema de 1<sup>a</sup> ou 2<sup>a</sup> ordem.

Por exemplo, como já foi visto, se for usado um controlador P+V, um servomotor de posição é um sistema de 3<sup>a</sup> ordem, porém é comum considerar que o efeito do indutor é praticamente desprezível, de modo que o sistema se torna de 2<sup>a</sup> ordem. Na linguagem de Laplace, diz-se que o polo da dinâmica da corrente (elétrica) é muito mais rápido (está muito mais afastado da origem do plano  $s$ ) do que os polos relacionados à mecânica. Por outro lado, nesses casos, deve-se lembrar que a realimentação torna o sistema mais rápido, i.e. desloca os polos, de modo que a aproximação pode se tornar inadequada se os ganhos forem muito altos.

Existem métodos gráficos pertencentes à abordagem de “domínio da frequência” que permitem o projeto de bons controladores para sistemas de ordem superior, sem necessidade de uso de métodos numéricos. Porém, uma abordagem mais moderna, que aproveita as ferramentas computacionais disponíveis com o avanço da Computação, envolve o uso de métodos numéricos de otimização para obter os ganhos. Esses métodos mais poderosos serão vistos ao longo do curso de CMC-12.

## 3 Requisitos no Domínio do Tempo

Uma boa prática em Engenharia é projetar com base em requisitos. Os requisitos de um sistema ou produto descrevem quais funcionalidades este deve atender e com qual desempenho. Com isso, os requisitos guiam o desenvolvimento, de forma que destacam para a equipe de engenharia onde focar o esforço de desenvolvimento.

No caso de um sistema complexo multidisciplinar, como um avião, um míssil, um foguete, um carro autônomo ou um robô, o levantamento de requisitos fica a cargo de uma área chamada Engenharia de Sistemas. Os requisitos começam a partir de desejos do cliente, mas devem ser formalizados em uma especificação técnica formal. Além disso, os

requisitos de mais alto nível (de sistema) devem ser desmembrados em requisitos de mais baixo nível para que sejam úteis para os engenheiros que implementarão os componentes do sistema. Finalmente, destaca-se que valores de requisitos não devem ser determinados a partir da intuição, mas sim a partir de análises de engenharia, preferencialmente baseadas em simulação e modelos matemáticos.

Não é escopo do engenheiro de controle, como projetista do sistema de controle, determinar quais requisitos esse sistema deve atender. O trabalho do engenheiro de controle é projetar o controlador para atender aos requisitos definidos pela Engenharia de Sistemas. Por conta disso, em CMC-12 sempre assume-se que os requisitos são dados.

Entretanto, o forte embasamento teórico em sistemas dinâmicos que os engenheiros de controle tem faz com que muitos engenheiros de controle acabem compondo a equipe de Engenharia de Sistemas quando eles se tornam engenheiros experientes. Note que as análises envolvidas em processos de levantamento de requisitos são tipicamente muito complexas e exigem muita maturidade técnica, por isso são geralmente executadas apenas por engenheiros muito experientes.

Para ficar mais claro, exemplos de requisitos com base no que já foi visto no curso seriam qual a constante de tempo  $\tau$  desejada para um sistema de 1<sup>a</sup> ordem ou quais os valores de  $\omega_n$  e  $\xi$  desejados para um sistema de 2<sup>a</sup> ordem. Entretanto, esses requisitos não são tão interessantes na prática, pois dependem da ordem do sistema. Nesta seção, serão mostrados requisitos no domínio do tempo, i.e. requisitos definidos sobre o comportamento da resposta transitória do sistema no tempo  $y(t)$ .

### 3.1 Índices de Desempenho

Aqui, destaca-se os principais índices de desempenho usados como requisitos no domínio do tempo. Todos os requisitos apresentados assumem condições iniciais nulas, entrada de grau unitário e que o sistema é linear. Os índices de desempenho são:

- (a) **Sobressinal** (em inglês, *overshoot*)  $M_p$ : o quanto relativamente o pico da resposta passa do valor de regime.
- (b) **Tempo de pico**  $t_p$ : tempo para atingir o pico da resposta.
- (c) **Tempo de subida** (em inglês, *rising time*) de 0 a 100%  $t_r|_0^{100\%}$ : tempo para o sistema sair do repouso e chegar ao valor de regime.
- (d) **Tempo de subida** de 10% a 90%  $t_r|_{0.1}^{0.9}$ : tempo para o sistema sair de 10% e chegar a 90% do valor de regime. O motivo de às vezes se usar 10% a 90% ao invés de 0 a 100% é que a resposta de alguns sistemas não passam pelo valor de regime em tempo finito, como por exemplo quando se tem um sistema superamortecido.
- (e) **Tempo de acomodação** (em inglês, *settling time*) de 5%  $t_s|_{5\%}$ : tempo para a resposta ficar dentro de uma faixa de 5% em torno do valor de regime.

Perceba que esses índices de desempenho não dependem da ordem do sistema dinâmico. A Figura 6 mostra os índices de desempenho graficamente.

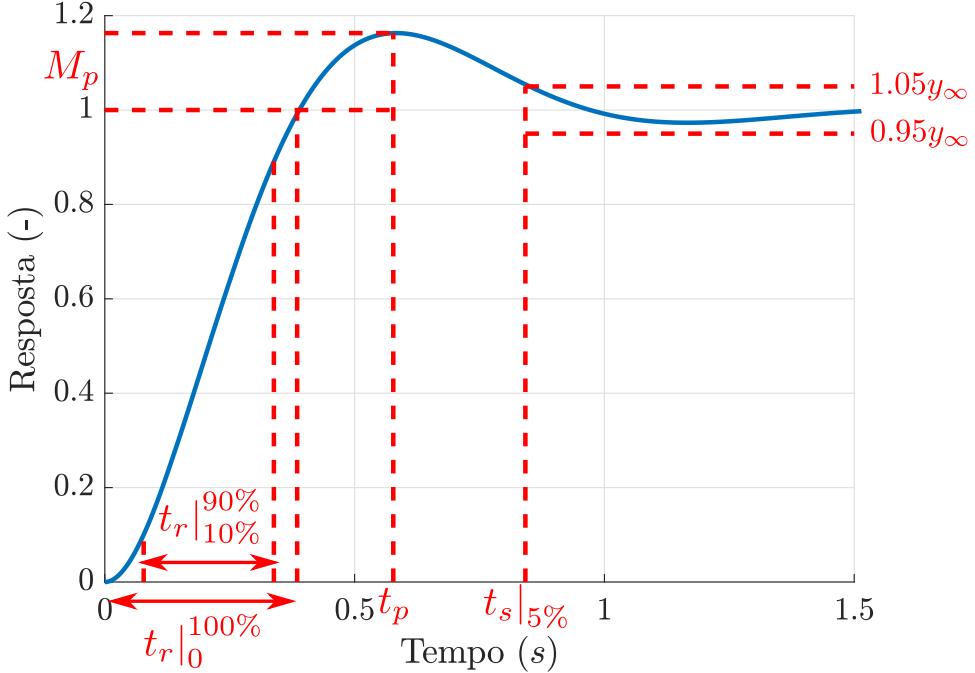


Figura 6: Requisitos no domínio do tempo.

### 3.2 Fórmulas para Sistema de Segunda Ordem

Nesta seção, serão deduzidas fórmulas para calcular os índices de desempenho no caso de um sistema de 2<sup>a</sup> ordem.

#### 3.2.1 Tempo de Pico

A resposta ao degrau unitário de um sistema de 2<sup>a</sup> ordem é

$$y(t) = 1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t + \beta). \quad (27)$$

Para encontrar o pico, usa-se a técnica de derivar e igualar a zero:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -\frac{\omega_n}{\omega_d} [-\sigma e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t + \beta) + e^{-\sigma t} \omega_d \cos(\omega_d t + \beta)] = \\ &- \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\sigma t} [-\sigma \sin(\omega_d t + \beta) + \omega_d \cos(\omega_d t + \beta)] = 0 \Rightarrow \\ -\sigma \sin(\omega_d t + \beta) + \omega_d \cos(\omega_d t + \beta) &= 0 \Rightarrow \tan(\omega_d t + \beta) = \frac{\omega_d}{\sigma} = \tan \beta \Rightarrow \\ \omega_d t + \beta &= \beta + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow t = k \frac{\pi}{\omega_d}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (28)$$

O tempo de pico  $t_p$  corresponde à primeira vez que a derivada se anula, i.e.  $t_p$  ocorre para  $k = 1$ :

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}. \quad (29)$$

### 3.2.2 Sobressinal

O valor máximo da resposta vale

$$y_{max} = y(t_p) = 1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\sigma t_p} \sin(\omega_d t_p + \beta) = 1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} \exp\left(-\frac{\pi\sigma}{\omega_d}\right) \sin\left(\omega_d \frac{\pi}{\omega_d} + \beta\right) = \\ 1 + \frac{\omega_n}{\omega_d} \exp\left(-\frac{\pi\sigma}{\omega_d}\right) \frac{\omega_d}{\omega_n} = 1 + \exp\left(-\frac{\pi\xi\omega_n}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\right) \Rightarrow y_{max} = 1 + \exp\left(-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right). \quad (30)$$

O sobressinal é um valor relativo, logo

$$M_p = \frac{y_{max} - y_\infty}{y_\infty} = \frac{y_{max} - 1}{1} \Rightarrow M_p = \exp\left(-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right). \quad (31)$$

### 3.2.3 Tempo de Subida

Primeiramente, calcula-se  $t_r|_0^{100\%}$ . Para isso, deve-se determinar quando  $y(t) = 1$ :

$$y(t) = 1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t + \beta) = 1 \Rightarrow \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t + \beta) = 0 \Rightarrow \\ \sin(\omega_d t + \beta) = 0 \Rightarrow \omega_d t + \beta = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow t = \frac{k\pi - \beta}{\omega_d}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (32)$$

O tempo de subida  $t_r|_0^{100\%}$  corresponde ao primeiro instante em que  $y(t) = 1$ , portanto deve-se usar  $k = 1$ , de modo que

$$t_r|_0^{100\%} = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \Rightarrow t_r|_0^{100\%} = \frac{\pi - \arccos\xi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}. \quad (33)$$

Perceba ainda que a relação  $t_r|_0^{100\%}$  depende apenas de  $\xi$ :

$$\omega_n t_r|_0^{100\%} = \frac{\pi - \arccos\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}. \quad (34)$$

Não há uma expressão simples para  $t_r|_{10\%}^{90\%}$ , porém uma aproximação usada é

$$t_r|_{10\%}^{90\%} \approx \frac{2,16\xi + 0,60}{\omega_n} \Rightarrow \omega_n t_r|_{10\%}^{90\%} \approx 2,16\xi + 0,60. \quad (35)$$

Para avaliar a qualidade da aproximação, pode-se calcular numericamente  $\omega_n t_r|_{10\%}^{90\%}$ . A Figura 7 mostra uma comparação entre métodos de cálculo de  $\omega_n t_r|_{10\%}^{90\%}$ : numericamente e usando (35).

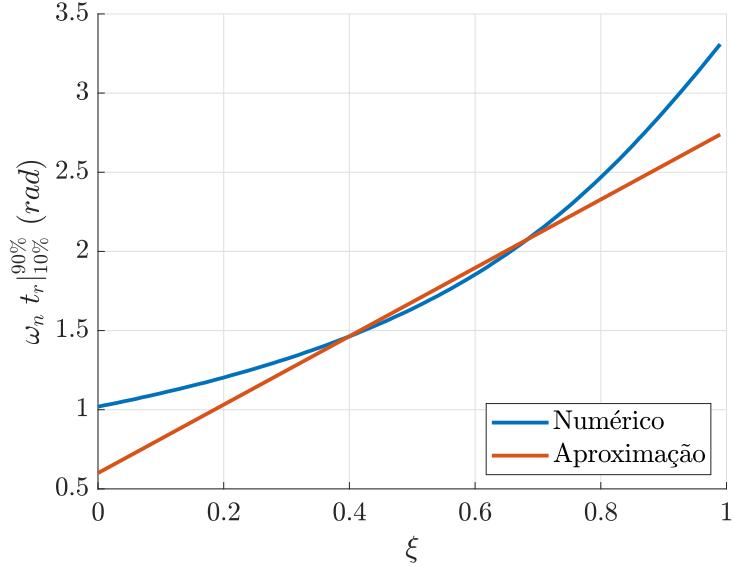


Figura 7: Comparaçāo entre mētodos de cálculo de  $\omega_n t_r|_{10\%}^{90\%}$ : numericamente e usando (35).

### 3.2.4 Tempo de Acomodaāo

Como a resposta ao degrau unitário é

$$y(t) = 1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t + \beta), \quad (36)$$

Conforme visto antes, essa equaāo está limitada por um envelope definido por exponenciais de acordo com

$$-1 \leq \sin(\omega_d t + \beta) \leq 1 \Rightarrow 1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\sigma t} \leq y(t) \leq 1 + \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\sigma t}. \quad (37)$$

Usando o envelope exponencial como aproximaāo para o cálculo do tempo de acomodaāo, tem-se

$$\exp(-\sigma t_s|_{5\%}) \approx 0,05 \Rightarrow -\sigma t_s|_{5\%} \approx \ln 0,05 \approx -3 \Rightarrow t_s|_{5\%} = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{\xi \omega_n}. \quad (38)$$

Perceba ainda que

$$\omega_n t_s|_{5\%} = \frac{3}{\xi}. \quad (39)$$

Pode-se calcular  $\omega_n t_s|_{5\%}$  sem aproximações através de mētodos numéricos. A Figura 8 exibe uma comparaçāo entre mētodos de cálculo de  $\omega_n t_s|_{5\%}$ : numericamente e usando (39).

Analogamente, uma aproximaāo para o tempo de acomodaāo de 2%  $t_s|_{2\%}$  é

$$t_s|_{2\%} = \frac{3,9}{\xi \omega_n}. \quad (40)$$

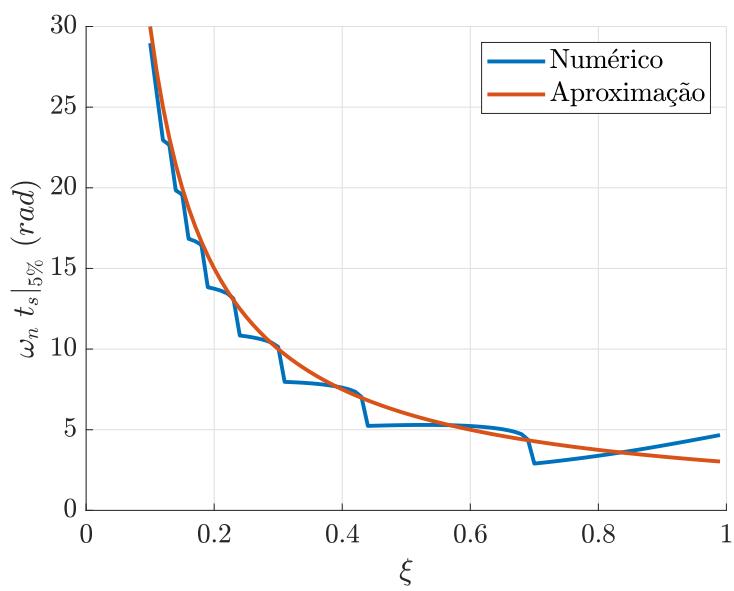


Figura 8: Comparaçāo entre mētodos de cálculo de  $\omega_n t_s|_{5\%}$ : numericamente e usando (39).

# Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA

## Controle para Sistemas Computacionais – CMC-12

### Notas da Aula 8 – Controlador PID

**Professor:** Marcos Ricardo Omena de Albuquerque Maximo

10 de maio de 2020

Nas últimas aulas, apresentou-se o ferramental matemático da transformada de Laplace e como usá-lo para análise de sistemas dinâmicos. Nessa aula, apresenta-se o chamado controlador proporcional-integrativo-derivativo (PID), que é o controlador mais conhecido e utilizado no mundo. O controlador PID é baseados em três termos: proporcional, integrativo e derivativo.

## 1 Perturbação e Ruído de Medida

Antes de formalizar os efeitos dos termos do controlador PID, é interessante formalizar melhor dois conceitos que frequentemente estão presentes e atrapalham o sistema de controle:

- Perturbação ou distúrbio (*disturbance*, em inglês): sinal indesejado na entrada da planta.
- Ruído de medida (*measurement noise*, em inglês): erros presentes nas medidas realizadas pelo sensor.

Veja o diagrama de blocos da Figura 1. Além da referência  $R(s)$ , tem-se entradas  $D(s)$  e  $N(s)$ , as quais representam perturbação e ruído de medida, respectivamente. Ademais,  $C(s)$ ,  $G(s)$  e  $H(s)$  são as funções de transferência do controlador, da planta e do sensor, respectivamente.

Pelo diagrama de blocos, pode-se deduzir funções de transferência tomando como entrada a referência, a perturbação ou o ruído:

$$G_R(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)}, \quad (1)$$

$$G_D(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)}, \quad (2)$$

$$G_N(s) = \frac{Y(s)}{N(s)} = -\frac{C(s)G(s)H(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)}, \quad (3)$$

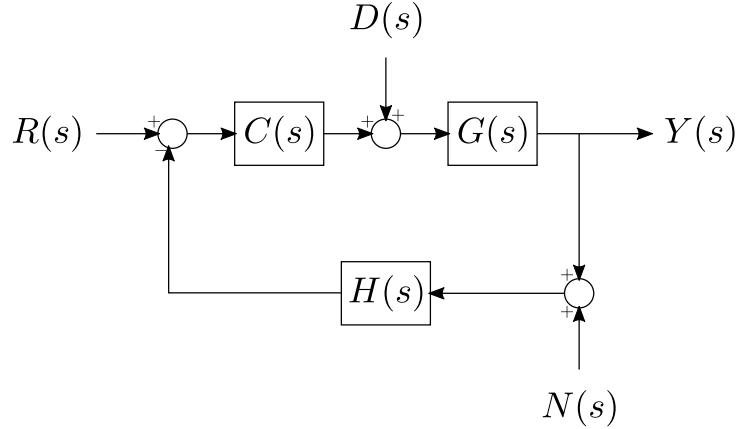


Figura 1: Sistema de controle em malha fechada afetado por perturbação (distúrbio) e ruído de medida.

Para determinar a saída  $Y(s)$ , pode-se usar mão do chamado **princípio da superposição** para sistemas lineares, que diz que a saída é composta pela soma dos efeitos de cada entrada, de acordo com

$$Y(s) = G_R(s)R(s) + G_D(s)D(s) + G_N(s)N(s). \quad (4)$$

Como projetista de um sistema de controle, idealmente, deseja-se

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = 1, \quad \frac{Y(s)}{D(s)} = 0, \quad \frac{Y(s)}{N(s)} = 0, \quad (5)$$

ou seja, rastreio perfeito da referência, total rejeição a perturbação e que o sistema não seja afetado por ruído. Entretanto, atingir esses objetivos simultaneamente em geral não é possível, de modo que na prática é necessário buscar uma solução de compromisso. Bom rastreio de referência e boa rejeição a perturbação em geral envolvem altos ganhos, o que tende a tornar o sistema muito suscetível a ruído.

Para a perturbação, é comum usar modelos semelhantes aos usados para a entrada: impulso, degrau, rampa etc. Para o ruído de medida, costuma-se usar alguma distribuição de probabilidade, como a distribuição gaussiana. Esses conceitos serão melhor explorados ao longo do curso.

## 2 Termos do Controlador PID

A lei de controle do controlador proporcional-integrativo-derivativo (PID) é

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \dot{e}(t), \quad (6)$$

em que  $e(t)$  é o erro em relação à referência,  $u(t)$  é o esforço (comando) de controle, e  $K_p$  é o ganho proporcional,  $K_i$  é o ganho integrativo e  $K_d$  é o ganho derivativo. Assim, em Laplace, tem-se

$$U(s) = \left( K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \right) E(s) \Rightarrow C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s, \quad (7)$$

A seguir, analisa-se o efeito de cada termo dessa lei de controle. Como o controlador proporcional já foi estudado no curso, discute-se os termos integrativo e derivativo.

## 2.1 Termo Derivativo

Para facilitar o entendimento do termo derivativo, considere a dinâmica do controle da posição de um carro, que é dada por

$$m\ddot{x} + b\dot{x} = u \Rightarrow G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs}, \quad (8)$$

em que  $x$  é a posição do carro,  $m$  é a massa do carro,  $b$  é a constante de amortecimento devido à resistência do ar e  $u$  é a força desenvolvida pelo carro. Já foi mostrado anteriormente que uma lei de controle proporcional não é capaz de manipular o fator de amortecimento desse sistema. Com uma lei P+V (alternativa), tem-se

$$u = K'_p(r - x) - K'_v\dot{x}. \quad (9)$$

em que  $r$  é a referência (de posição),  $K'_p$  é o ganho proporcional e  $K'_v$  é o ganho de velocidade. Substituindo (9) em (8), a dinâmica de malha fechada obtida é

$$m\ddot{x} + (b + K'_v)\dot{x} + K'_p x = K'_p r \Rightarrow G_{f,P+V}(s) = \frac{X(s)}{R(s)} = \frac{K'_p/m}{s^2 + [(b + K'_v)/m]s + K'_p/m}. \quad (10)$$

Considere então uma lei PD, dada por

$$u = K_p e + K_d \dot{e} = K_p(r - x) + K_v(\dot{r} - \dot{x}) \Rightarrow C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + K_d s, \quad (11)$$

em que  $e$  é o erro e  $r$  é a referência. Desse modo, a função de transferência em malha fechada é

$$G_{f,PD}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{K_p/m + (K_d/m)s}{s^2 + [(b + K_d)/m]s + K_p/m}. \quad (12)$$

Com isso, de forma semelhante ao ganho de velocidade do controlador P+V, o derivativo influencia o fator de amortecimento do sistema. Entretanto, percebe-se que a dinâmica em malha fechada com uso do PD tem um zero a mais, que surge por conta da derivada da referência presente na lei de controle. Esse zero tende a deixar o sistema mais responsável a mudanças na referência. Para entender intuitivamente, pense que o PD se antecipa a mudanças na referência, por levar em conta sua derivada no cálculo de  $u$ . Desse modo, pode-se separar a lei de controle do PD de acordo com

$$u_{PD} = \underbrace{K_p(r - x) - K_d\dot{x}}_{u_{P+V}} + \underbrace{K_d\dot{r}}_{u_{ff}}, \quad (13)$$

em que  $u_{PD}$  é a lei de controle do PD,  $u_{P+V}$  é a lei de controle do P+V e  $u_{ff}$  é um termo de *feedforward* que usa a derivada da referência. Note que quando a referência varia bruscamente, a presença de sua derivada na lei de controle pode ser problemática. Para melhor compreender o efeito desse zero, a Figura 2 compara respostas ao degrau

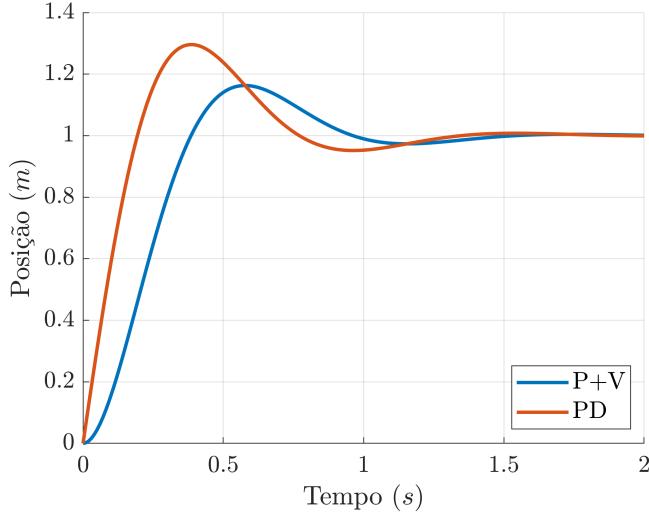


Figura 2: Comparação de respostas ao degrau entre sistemas de controle que usam P+V e PD. Os sistemas utilizam os mesmos parâmetros, com a única diferença entre eles sendo a existência do zero adicionado pela derivação da entrada no PD.

obtidas com sistemas de controle que usam P+V e PD. Para as simulações, usou-se os sistemas em malha fechada apresentados em (10) e (12), com  $m = 1000 \text{ kg}$ ,  $b = 50 \text{ Ns/m}$  e os ganhos projetados para se ter os polos complexo conjugados com  $\omega_n = 2\pi \text{ rad/s}$  e  $\xi = 0,5$ . Percebe-se que o PD é mais rápido, mas possui maior sobressinal.

Uma desvantagem do termo derivativo é que ele tende a amplificar ruído de medida. Isso será discutido com maior profundidade posteriormente no curso. Para um entendimento intuitivo, veja a Figura 3. No caso, simulou-se medidas de um sinal nulo, corrompido por ruído gaussiano com média zero e desvio padrão 0,1, i.e. a distribuição de probabilidade do ruído é  $\mathcal{N}(0, 0,01)$ . Os pontos foram amostrados com intervalo de 0,2 s entre si. Apesar da variação do sinal devido ao ruído não ser tão pronunciada (Figura 3(a)), há grande variação na inclinação da curva, o que resulta em uma derivada muito ruidosa (Figura 3(b)).

Por conta desse problema, não se usa derivativo “puro” na prática. Um termo derivativo sempre é acompanhado de um filtro, que busca atenuar o ruído amplificado pela derivada. Esse filtro pode ser implementado com uso de um sistema de 1<sup>a</sup> ordem em série com o derivativo, de modo que o termo derivativo fica

$$C_D(s) = K_d s \frac{1}{\tau s + 1} = K_d s \frac{\omega_c}{s + \omega_c}, \quad (14)$$

em que  $\tau$  é a constante de tempo do filtro, ou equivalentemente,  $\omega_c$  é sua frequência de corte. Como já foi visto, a resposta de um sistema de 1<sup>a</sup> ordem é uma versão suavizada de sua entrada (e.g. se a entrada é um degrau, a saída é um degrau suavizado). Uma solução melhor ainda é evitar derivar o sinal de saída e usar um outro sensor para medir a derivada da saída. Quanto à referência, se está for uma função conhecida, é interessante usar a expressão analítica de  $\dot{r}(t)$ . Caso o sinal da referência seja corrompido por ruído, pode ser mais interessante usar o P+V ao invés de PD.

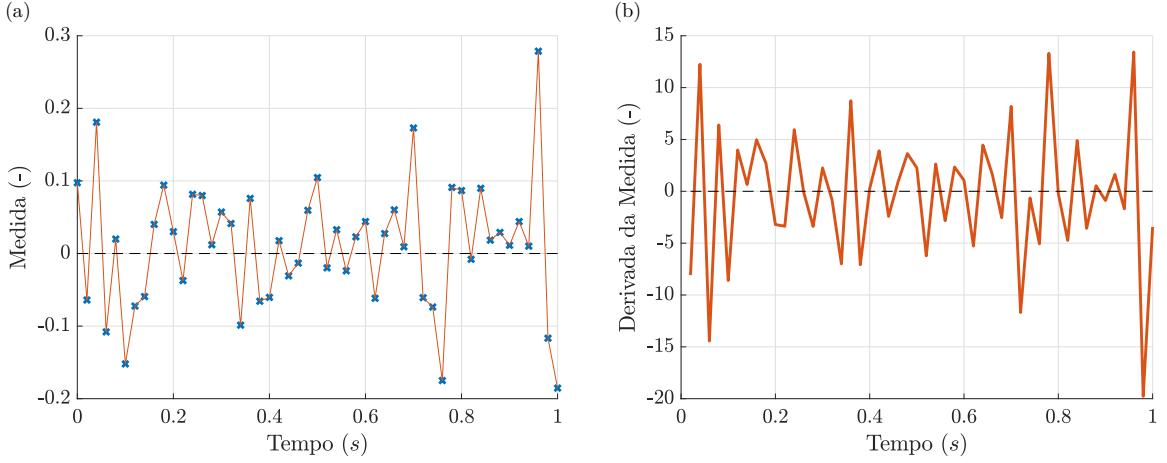


Figura 3: Amplificação de ruído quando deriva-se sinal ruidoso: (a) medida de sinal ruidoso com ruído modelado por gaussiana de média nula e desvio padrão 0,1 e (b) derivada do sinal ruidoso.

## 2.2 Termo Integrativo

Para entender o termo integrativo, considere o sistema de *cruise control*, que é dado por

$$m\dot{v} + bv = u \Rightarrow \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{1/m}{s + b/m}, \quad (15)$$

em que  $v$  é a velocidade do carro,  $m$  é a massa do carro,  $b$  é a constante de amortecimento devido à resistência do ar e  $u$  é a força desenvolvida pelo carro. Conforme visto anteriormente, esse sistema tem erro em regime para entrada degrau se não for usado um termo de *feedforward*. Para verificar isso, seja a dinâmica em malha fechada com controlador P:

$$G_{f,P}(s) = \frac{V(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{K'_p/m}{s + (K'_p + b)/m}, \quad (16)$$

de modo que o erro em Laplace é dado por

$$E(s) = R(s) - V(s) \Rightarrow E(s) = \frac{s + b/m}{s + (K'_p + b)/m} R(s). \quad (17)$$

Pode-se determinar o erro em regime para entrada degrau através do teorema do valor final:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s + b/m}{s + (K'_p + b)/m} \frac{1}{s} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{b}{K'_p + b}. \quad (18)$$

Já o controlador PI é dado por

$$u = K_p e + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau \Rightarrow \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s}, \quad (19)$$

de modo que a função de transferência em malha fechada fica

$$G_{f,PI}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \Rightarrow G_f(s) = \frac{V(s)}{R(s)} = \frac{(K_p/m)s + K_i/m}{s^2 + [(b + K_p)/m]s + K_i/m}. \quad (20)$$

O erro em Laplace nesse caso é

$$E(s) = R(s) - V(s) = \frac{s^2 + (b/m)s}{s^2 + [(b + K_p)/m]s + K_i/m}. \quad (21)$$

Pelo teorema do valor final:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^2 + (b/m)s}{s^2 + [(b + K_p)/m]s + K_i/m} \frac{1}{s} = 0, \quad (22)$$

de modo que não há erro em regime para entrada degrau nesse caso. Além disso, não há erro em regime mesmo na presença de erro de modelo (embora o *feedforward* eliminasse resolvesse o problema no caso nominal, surgia erro em regime quando havia erro de modelo) e o erro é sempre nulo independente do valor de  $K_i$ .

Além disso, de acordo com (2), o efeito introduzido por uma perturbação é

$$V_D(s) = \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)} D(s). \quad (23)$$

Se apenas o controlador é P, uma perturbação degrau unitário introduz erro em regime, pois

$$V_D(s) = \frac{1/m}{s + (b + K_p)/m} D(s) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e_d(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sV_D(s) = \frac{1}{b + K_p}. \quad (24)$$

Por outro lado, a adição de integrativo elimina o erro de regime introduzido pela perturbação:

$$V_D(s) = \frac{s/m}{s^2 + [(b + K_p)/m]s + K_i/m} D(s) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e_d(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sV_D(s) = 0. \quad (25)$$

Note ainda que o erro nulo em regime é garantido, independente da magnitude da perturbação ou do valor de  $K_i$ . Para entender intuitivamente porque isso acontece, perceba que, em ambos os casos, há sempre uma força externa atuando sobre o carro, seja ela proveniente da resistência do ar ou da perturbação. Se apenas um termo proporcional é utilizado, em regime, deve haver sempre algum erro para que se ter  $u \neq 0$  e então cancelar essa força externa. Já quando há um termo integrativo, o integrador é capaz de determinar automaticamente qual é o comando  $u \neq 0$  necessário para cancelar a força externa.

Nos dois casos, o erro nulo em regime foi garantido independente do valor de  $K_i$ . No caso, o valor de  $K_i$  determina o quão rápido o integrativo cancela a força externa. Perceba que quando se fala em “regime”, fala-se de algo que acontece após tempo infinito, de modo que garantias em regime podem ser inúteis na prática por ocorrerem apenas após um tempo excessivamente longo.

Infelizmente, o integrativo também traz suas desvantagens. Enquanto o derivativo aumenta o amortecimento do sistema, reduzindo oscilações e tornando mais estável, o integrativo amplifica oscilações, introduzindo instabilidade. O PI aumenta a ordem do sistema através de um polo adicional, o que em geral é inconveniente. Perceba que no caso do *cruise control*, o PI transforma um sistema de 1<sup>a</sup> ordem, que não possui oscilações, em um sistema de 2<sup>a</sup> ordem. Assim, a escolha do valor de  $K_i$  tipicamente envolve um compromisso entre rápida rejeição a perturbações e estabilidade.

## 2.3 Escolha do Compensador

Uma dúvida muito comum é quais termos do PID incluir no seu compensador (lei de controle). A princípio, mais termos implicam mais graus de liberdade, de modo que há mais possibilidades para obter um controle de desempenho superior. Entretanto, evita-se a adição de termos não necessários para evitar os efeitos indesejados que eles introduzem. Pela discussão dos termos feita nesta seção, pode-se definir as seguintes regras práticas:

- Em geral, o termo proporcional é sempre usado.
- Introduzir o termo integrativo apenas se houver problemas relacionados a erro em regime. A instabilidade introduzida pelo integrador costuma degradar muito a malha.
- Introduzir o termo derivativo apenas se houver necessidade de aumentar o amortecimento. Ao invés de derivar o sinal de erro, é preferível usar um sensor para medir a derivada da saída. No caso da medida da derivada não estar disponível, cuidar para que seja usado um filtro adequado, especialmente na presença de forte ruído de medida.

Entenda essas regras práticas como um guia, e não como algo definitivo. De modo geral, é difícil definir fórmulas para escolha do tipo de compensador: em geral, isso envolve mais intuição e criatividade do que seguir procedimentos. Engenheiros de controle muito experientes em geral tem maior habilidade em sugerir compensadores promissores para uma dada planta. Entretanto, esse processo costuma ser iterativo, envolvendo teste de diferentes tipos de compensadores tanto em simulação quanto no sistema real.

## 3 Projeto de Controlador PID

As técnicas de projeto vistas até o momento no curso basicamente consistem em projetar os ganhos do controlador para alocar os polos do sistema em malha fechada em posições desejadas. Em geral, tem-se projetado sistemas de 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> ordens, pois esses são bens descritos a partir de poucos parâmetros como constante de tempo, frequência natural e fator de amortecimento. Na aula passada, no caso de 2<sup>a</sup> ordem, viu-se ainda como determinar os valores da frequência natural e do fator de amortecimento a partir de requisitos no domínio do tempo. Entretanto, a modelagem usada assume o chamado sistema de 2<sup>a</sup> ordem **padrão**, que é dado por

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (26)$$

em que  $\omega_n$  é a frequência natural e  $\xi$  é o fator de amortecimento. Conforme visto, a função de transferência em malha fechada de um sistema que usa um controlador PD ou PI possui um zero adicional no numerador. Assim, mesmo que os polos do sistema sejam alocados em

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\xi^2}j, \quad (27)$$

o comportamento do sistema difere do esperado de acordo com um sistema de 2<sup>a</sup> ordem padrão. Destaca-se que, no geral, a presença do zero não é exatamente um problema

para o sistema de controle. A dificuldade surge por conta de uma limitação no método de projeto que vem sendo utilizado. Por exemplo, se há um requisito de sobressinal e os polos são alocados com base nas fórmulas vistas na aula passada para requisitos no domínio do tempo, pela Figura 2, pode-se perceber que a presença do zero faria o sistema projetado não atender ao requisito de sobressinal.

### 3.1 Ajuste Empírico de Ganhos

Uma prática muito comum envolve o ajuste empírico de ganhos de um controlador PID. Isso é principalmente realizado por quem não tem formação teórica em controle. Certamente, a facilidade de ajuste empírico do PID é o que torna esse controlador tão popular. Geralmente, o ajuste é realizado através de regras empíricas com base em intuição (heurísticas), por exemplo:

- Se o sistema estiver muito lento, aumentar  $K_p$  ou  $K_i$ .
- Se o sistema estiver muito oscilatório, aumentar  $K_d$  ou diminuir  $K_p$  ou  $K_i$ .
- Se o sistema estiver instável, tentar diminuir os ganhos.

No caso de haver um bom modelo de simulação da planta, pode-se fazer esse ajuste através de métodos numéricos. Há também procedimentos práticos para ajuste dos ganhos, como o conhecido método de Ziegler-Nichols:

1. Começar com  $K_p = K_i = K_d = 0$ .
2. Aumentar  $K_p$  até obter oscilações sustentadas (limiar de estabilidade).
3. Anotar o valor de  $K_p$  como  $K_u$  (ganho final ou *ultimate gain*).
4. Anotar o período das oscilações como  $T_u$ .

Com isso, determinar os parâmetros do controlador com base na Tabela 1. No caso, Ziegler-Nichols assume que expressão do PID é dada por

$$u(t) = K_p \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \dot{e}(t) \right), \quad (28)$$

de modo que

$$K_i = \frac{K_p}{T_i}, \quad K_d = K_p T_d. \quad (29)$$

Recomenda-se ainda um ajuste fino manual após obtenção dos ganhos através de Ziegler-Nichols. Embora esses métodos permitam obter uma resposta adequada rapidamente e não exijam formação teórica em controle, controladores obtidos dessa forma possuem desempenho muito aquém daqueles obtidos através de métodos matemáticos, como é esperado.

Tabela 1: Regras para ajuste de parâmetros de acordo com o método de Ziegler-Nichols.

Tipo do Controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0,5K_u$	—	—
PI	$0,45K_u$	$T_u/1,2$	—
PD	$0,8K_u$	—	$T_u/8$
PID	$0,6K_u$	$T_u/2$	$T_u/8$

### 3.2 Uso de Pré-filtro

É possível eliminar a influência do zero de um controlador PD ou PI através da inclusão de um pré-filtro antes do sistema em malha, conforme mostra a Figura 4, em que usa-se um controlador PI para controlar uma planta com função de transferência

$$G(s) = \frac{K}{s + a}. \quad (30)$$

Note que o sistema de *cruise control* apresentado na Subseção 2.2 se encaixa nesse modelo de planta, pois

$$G(s) = \frac{1}{ms + b} \Rightarrow G(s) = \frac{1/m}{s + b/m} \Rightarrow \begin{cases} K = 1/m, \\ a = b/m. \end{cases} \quad (31)$$

Perceba na Figura 4 que o pré-filtro tem função de transferência

$$F(s) = \frac{K_i}{K_p s + K_i}. \quad (32)$$

Assim, pelo diagrama de blocos da Figura 4, pode-se obter a função de transferência em malha fechada como

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{R(s)} &= F(s) \left( \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \right) = \frac{K_i}{K_p s + K_i} \frac{K_p K s + K_i K}{s^2 + (K_p K + a)s + K_i K} \Rightarrow \\ \frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{K_i K}{s^2 + (K_p K + a)s + K_i K}. \end{aligned} \quad (33)$$

Perceba que esse é um sistema de 2<sup>a</sup> ordem padrão, pois adotando

$$\begin{cases} K_i K = \omega_n^2, \\ K_p K + a = 2\xi\omega_n, \end{cases} \quad (34)$$

chega-se a

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (35)$$

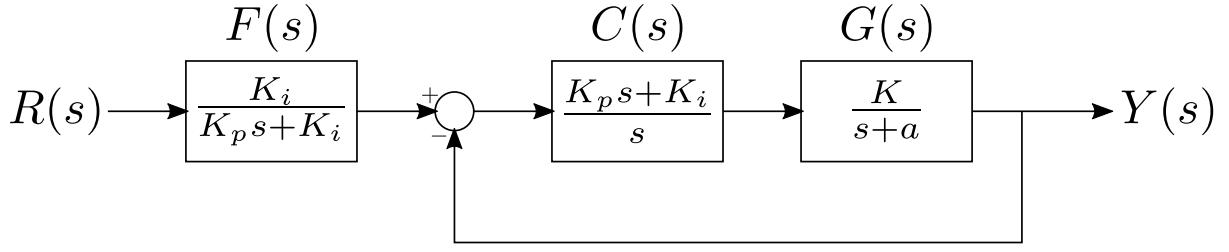


Figura 4: Diagrama de blocos com uso de pré-filtro para eliminação do zero introduzido pelo controlador PI.

## 4 Implementação do PID em Computador

Até o momento, tem-se usado expressões de tempo contínuo para as leis de controle. Entretanto, não é possível implementar uma lei de controle de tempo contínuo em um computador. Um computador digital é incapaz de realizar operações em tempo contínuo, pois isso exigiria tempo de processamento infinitesimal para as operações.

Note que também é possível implementar malhas de controle com uso de circuitos analógicos. Embora essa fosse uma abordagem popular no passado, ela caiu em desuso com o aumento do poder computacional dos computadores digitais. Atualmente, praticamente todas as malhas de controle são implementadas com uso de computador.

A Figura 5 apresenta o que acontece quando se faz controle com uso de computador. O computador consegue usar novas medidas e atualizar a saída apenas em tempos discretos, espaçados entre si do chamado tempo de amostragem  $T$ , conforme mostra a Figura 5(a) (no exemplo, assume-se  $T = 0,1\text{ s}$ ). Em geral, em controle, trabalha-se com  $T$  constante, pois isso facilita as análises matemáticas. Nesse contexto, é comum passar a se referir aos equivalentes discretos das variáveis do sistema de controle com a seguinte notação:

$$y[k] = y(t = kT), \quad u[k] = u(t = kT). \quad (36)$$

em que  $k$  é o índice do instante de amostragem em questão. Enquanto não há novas medidas, o computador geralmente “segura” o mesmo comando através de um segurador de ordem zero (em inglês, *zero order holder* ou ZOH) (vide Figura 5(b)), ou seja, o comando contínuo que chega na planta durante um período de amostragem é

$$u(t) = u[k], \quad t \in [kT, (k+1)T]. \quad (37)$$

Como o computador é capaz de atualizar o comando de controle apenas em tempos discretos, a implementação digital de uma lei de controle é apenas uma aproximação de sua versão de tempo contínuo. Na prática, a discretização no tempo introduz atraso na malha, reduzindo o amortecimento e podendo levar a instabilidades.

Mais para frente no curso, o tópico de Controle Digital será estudado de uma maneira formal. Por enquanto, mostrar-se-á fórmulas para discretizar o controlador PID. Os esquemas de aproximação de integral e derivada utilizados são os mesmos já vistos no curso de Cálculo Numérico (no ITA, Matemática Computacional). Perceba ainda que a discretização de uma lei proporcional é trivial (e exatamente por isso não se sentiu a necessidade de explorar esse tópico até o momento):

$$u(t = kT) = u[k] = K_p e(t = kT) = K_p e[k]. \quad (38)$$

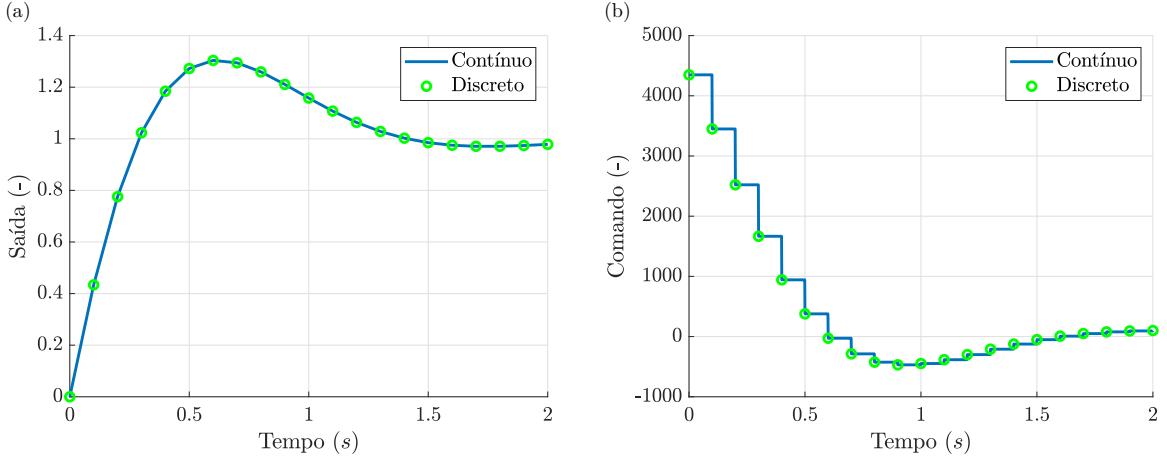


Figura 5: Sistema de controle implementado por computador: (a) saída da planta e medidas tomadas em amostras discretas e (b) comando produzido pelo computador. Em (a), embora a planta varia sua saída em tempo contínuo (curva azul), o computador é capaz de incorporar medidas apenas em instantes discretos espaçados entre si pelo tempo de amostragem (círculos verdes). Em (b), perceba que o computador “segura” o comando durante o período de amostragem.

## 4.1 Implementação do Termo Integrativo

Para implementação em computador do integrativo, é necessário aproximar numericamente a integral. A forma simples envolve aproximar a integral por uma soma de retângulos de acordo com

$$\int_0^t e(\tau) d\tau \approx \sum_{i=1}^k e[i] T. \quad (39)$$

Uma aproximação melhor envolve aproximar por uma soma de trapézios, ou seja

$$\int_0^t e(\tau) d\tau \approx \sum_{i=1}^k \left( \frac{e[i-1] + e[i]}{2} \right) T. \quad (40)$$

## 4.2 Implementação do Termo Derivativo

Para implementação em computador do derivativo, é necessário aproximar numericamente a derivada. Sabe-se do curso de Cálculo Numérico que usar uma esquema de derivada centrada produz resultados mais precisos. Com isso, pode-se ficar tentado a usar

$$\dot{e}(t = kT) \approx \frac{e[k+1] - e[k-1]}{2T}. \quad (41)$$

Entretanto, esse cálculo é impossível, pois seria necessário informação do futuro para obter  $e[k+1] = e(t+T)$ . Assim, usa-se

$$\dot{e}(t = kT) \approx \frac{e[k] - e[k-1]}{T}. \quad (42)$$

# Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA

## Controle para Sistemas Computacionais – CMC-12

### Notas da Aula 9 – Estabilidade e Erro em Regime

**Professor:** Marcos Ricardo Omena de Albuquerque Maximo

14 de maio de 2020

Em aulas anteriores, comentou-se sobre como as posições dos polos do sistema afetam sua estabilidade. Nesta aula, o conceito de estabilidade de sistemas dinâmicos será apresentado de uma maneira mais formal. O conceito de estabilidade é fundamental em teoria de controle.

Perceba que é irrelevante discutir desempenho de um sistema de controle se este for instável, pois ele será incapaz de conduzir a saída para a referência desejada de qualquer forma. Com isso, muitas técnicas para analisar e garantir estabilidade de sistemas de controle serão estudadas ao longo curso. A aula de hoje é uma introdução ao tema. Além disso, a aula também traz uma apresentação mais formal sobre erro em regime.

## 1 Estabilidade BIBO

Um sistema é dito ter **estabilidade BIBO** (*bounded input-bounded output*) se para toda entrada limitada resultar uma saída também limitada. Considerando essa definição de estabilidade, perceba que um integrador, i.e.

$$G(s) = \frac{1}{s} \quad (1)$$

não é um sistema BIBO-estável, pois esse sistema tem resposta

$$y(t) = t \quad (2)$$

para entrada degrau unitária. Com isso, tem-se uma entrada limitada gerando uma resposta ilimitada. Além disso, na aula 2, mostrou-se que a dinâmica de posição de um carro não é estável em malha aberta, pois a resposta ao degrau crescia indefinidamente. Intuitivamente, argumentou-se que pressionar o acelerador indefinidamente faria o carro também se mover indefinidamente. A noção intuitiva de estabilidade usada naquele momento pode se referir à estabilidade BIBO.

## 2 Estabilidade de Sistemas LIT

Para sistemas lineares e variantes no tempo, o estudo de estabilidade é difícil. Porém, para sistemas LIT, basta considerar as posições dos polos . Considerando diferentes

formas de representação um sistema LIT vistas durante o curso, lembre-se que há a equivalência entre:

- (a) Autovalores da equação diferencial ordinária.
- (b) Autovalores da matriz de estado  $\mathbf{A}$  da representação em espaço de estados.
- (c) Polos da função de transferência.

Para verificar a equivalência entre (a) e (c), lembre-se que a conversão entre EDO e função de transferência é feita de acordo com

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y &= b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \cdots + b_1 u' + b_0 u \Leftrightarrow \\ (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) Y(s) &= (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0) U(s) \Leftrightarrow \quad (3) \\ G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \end{aligned}$$

Em (3), o polinômio característico da EDO é o denominador da função de transferência  $G(s)$ , logo os autovalores da EDO são os polos de  $G(s)$ .

Para verificar a equivalência entre (b) e (c), lembre-se que, para um sistema SISO, é possível converter de espaço de estados para função de transferência com

$$G(s) = \mathbf{C} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + D. \quad (4)$$

Lembre que para uma matriz  $\mathbf{M}$ , pode-se calcular sua inversa através de

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{M})} \text{adj}(\mathbf{M}), \quad (5)$$

em que  $\text{adj}(\mathbf{M})$  representa a matriz adjunta de  $\mathbf{M}$ . Assim, tem-se

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}), \quad (6)$$

Portanto, tem-se que o denominador de (4) é  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$  e os autovalores de  $\mathbf{A}$  são os polos de  $G(s)$ . Com base nisso, foca-se apenas em como os polos de  $G(s)$  influenciam a estabilidade do sistema. A equação entre (a) e (b) já é conhecida do curso de EDOs, mas também pode ser estabelecida das equivalências mostradas acima.

Para certificar que todos os efeitos estão sendo levados em conta na análise de estabilidade, as condições iniciais também serão consideradas. Considere a representação em espaço de estados de um sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \quad (7)$$

$$y = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}. \quad (8)$$

Aplicando Laplace em (7) (sem desprezar as condições iniciais), obtém-se

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{AX}(s) + \mathbf{BU}(s) \Rightarrow \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{BU}(s), \quad (9)$$

Assim, aplicando Laplace em (8) e usando (9), tem-se

$$y = \mathbf{Cx} + Du \Rightarrow Y(s) = \mathbf{CX}(s) + DU(s) \Rightarrow \\ Y(s) = \underbrace{\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)}_{\text{Resposta às condições iniciais}} + \underbrace{[\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D]U(s)}_{\text{Resposta forçada partindo do repouso}}. \quad (10)$$

Defina então:

$$Y_0(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0), \quad Y_r(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D]U(s) = G(s)U(s), \quad (11)$$

em que  $Y_0(s)$  representa a resposta às condições iniciais e  $Y_f$  representa a resposta forçada partindo do repouso. Pode-se verificar que

$$Y_0(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) = \mathbf{C} \frac{1}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}(0). \quad (12)$$

Seja  $p_1, p_2, \dots, p_n$  os  $n$  polos do sistema. Para simplificar, assuma que não há polos repetidos. Com uso de expansão em frações parciais, pode-se escrever

$$Y_0(s) = \sum_{i=1}^n \frac{c'_i}{s - p_i}, \quad (13)$$

em que  $c'_i$  são constantes obtidas através de expansão em frações parciais. Com uso da inversa da transformada de Laplace, chega-se a

$$y_0(t) = \sum_{i=1}^n c'_i e^{p_i t}. \quad (14)$$

Analogamente,  $Y_f(s)$  possui os mesmos polos devido à presença de  $G(s)$ , com a adição de polos provenientes da entrada  $U(s)$ , de modo que

$$Y_r(s) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - p_i} + Y_u(s), \quad (15)$$

em que  $c_i$  são outras constantes determinadas por expansão em frações parciais e  $Y_u(s)$  é a porção da resposta forçada proveniente dos polos de  $U(s)$ . Por exemplo:

$$U(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y_u(s) = \frac{c_u}{s}. \quad (16)$$

em que  $c_u$  é mais uma constante obtida na expansão em frações parciais. Passando (15) para o domínio do tempo, tem-se

$$y_r(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{p_i t} + y_u(t), \quad (17)$$

de modo que

$$y(t) = y_0(t) + y_r(t) = \sum_{i=1}^n c''_i e^{p_i t} + y_u(t). \quad (18)$$

Como  $Y_u(s)$  tem os mesmos polos que  $U(s)$ , a estabilidade do sistema é ditada pelos polos  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . O interesse é que todas as exponenciais em (18) tendam para 0 quando  $t \rightarrow \infty$ . Para que isso aconteça, uma condição necessária e suficiente é que todos os polos do sistema estejam estritamente no semi-plano esquerdo (SPE) do plano  $s$ , i.e.

$$\operatorname{Re}\{p_i\} < 0, \forall p_i. \quad (19)$$

Nesse caso, diz-se que o sistema é **estável**. Note que se houver polos com multiplicidade maior que 1, deve-se adicionar termos  $t, t^2$  etc. às exponenciais presentes em (18), porém a condição para estabilidade imposta por (19) se mantém. Se o sistema tiver pelo menos um polo no semi-plano direito (SPD) do plano  $s$ , então o sistema é **instável**.

No caso de polos no eixo imaginário  $j\omega$ , a análise é mais complicada. Por exemplo, um sistema com um único polo na origem tem saída não limitada para entrada degrau, como já discutido. Além disso, se inicializado com condição inicial não-nula, a saída não converge para 0. Já um sistema com apenas um par de polos complexos conjugados possui oscilações sustentadas para entrada degrau. Se há polos complexo conjugados repetidos, então o sistema é instável devido a termos  $t \cos(\omega t)$  e  $t \sin(\omega t)$ . Com isso, normalmente diz-se que o eixo  $j\omega$  está no limiar de estabilidade. De qualquer forma, o desejável para um sistema de controle é que as exponenciais tendam para 0 quando  $t \rightarrow \infty$ , de modo que polos no eixo  $j\omega$  são indesejáveis.

### 3 Critério de Routh-Hurwitz

O **critério de Routh-Hurwitz** permite determinar a estabilidade de um sistema dinâmico sem necessidade de determinar os valores dos polos. Esse método foi desenvolvido numa época em que não existiam computadores, de modo que era especialmente útil, dada a dificuldade em se determinar analiticamente raízes de um polinômio de alta ordem.

Entretanto, atualmente há métodos numéricos para encontrar todas as raízes de um polinômio (provavelmente você viu alguns desses métodos no curso de cálculo numérico), de modo que o critério de Routh-Hurwitz perdeu parte da sua importância. Por exemplo, pode-se usar `roots` ou `pole` no MATLAB para determinar todas as raízes de um determinado polinômio (no caso, do denominador da função de transferência) ou todos os polos de uma função de transferência, respectivamente. A partir disso, basta verificar se todos os polos tem parte real negativa para avaliar a estabilidade do sistema. De qualquer forma, esse critério ainda é interessante para avaliar a faixa de valores que determinado parâmetro pode variar sem comprometer a estabilidade do sistema.

Considere o polinômio associado ao denominador de uma função de transferência de  $G(s)$  (sem perda de generalidade, assume-se  $a_n = 1$ ):

$$D(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} \cdots + a_1s + a_0. \quad (20)$$

Perceba que para todas as raízes do polinômio tenham parte real negativa, é necessário que todos os coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  sejam positivos. Se qualquer um dos coeficientes for nulo ou negativo, estão há polos fora do SPE. Para verificar isso, perceba que se todos os polos tiverem parte real negativa, então  $D(s)$  é formado pelo produto de termos da forma

$$s + a, \quad (21)$$

com  $a > 0$ , ou

$$(s + \sigma + j\omega_d)(s + \sigma - j\omega_d) = (s + \sigma)^2 + \omega_d^2. \quad (22)$$

com  $\sigma > 0$ . Todavia, essa condição não é suficiente. Uma condição **necessária e suficiente** para que todas as raízes de  $D(s)$  estejam no SPE é dado pelo critério de Routh-Hurwitz, que se baseia na chamada **tabela de Routh**. Para facilitar a escrita da tabela de Routh, considere a notação:

$$\begin{aligned} D(s) &= s^n + a'_1 s^{n-1} + a'_2 s^{n-2} + \cdots + a'_{n-1} s + a'_n \\ &= s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0, \end{aligned} \quad (23)$$

em que apenas houve uma reordenação de índices de modo que  $a_{n-i} = a'_i$ . As duas primeiras linhas da tabela são construídas com os coeficientes do polinômio:

$$\begin{array}{ccccccc} s^n : & 1 & a'_2 & a'_4 & \cdots & a'_{n-3} & a'_{n-1} \\ s^{n-1} : & a'_1 & a'_3 & a'_5 & \cdots & a'_{n-2} & a'_n \end{array}$$

Mais precisamente, os elementos das últimas colunas na tabela foram dispostos como se  $n$  fosse ímpar. Se  $n$  for par, a segunda linha, relacionada à  $s^{n-1}$ , não possui o último elemento, que é considerado como 0 para fins de cálculo. Então prossegue-se com a construção da tabela da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccccc} s^n : & 1 & a'_2 & a'_4 & \cdots & a'_{n-3} & a'_{n-1} \\ s^{n-1} : & a'_1 & a'_3 & a'_5 & \cdots & a'_{n-2} & a'_n \\ s^{n-2} : & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{[n/2]} & \\ s^{n-3} : & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ s^2 : & d_1 & d_2 & & & & \\ s^1 : & e_1 & & & & & \\ s^0 : & f_1 & & & & & \end{array}$$

em que elementos da terceira linha são calculados de acordo com

$$b_1 = -\frac{\det \begin{bmatrix} 1 & a'_2 \\ a'_1 & a'_3 \end{bmatrix}}{a'_1} = \frac{a'_1 a'_2 - a'_3}{a'_1}, \quad (24)$$

$$b_2 = -\frac{\det \begin{bmatrix} 1 & a'_4 \\ a'_1 & a'_5 \end{bmatrix}}{a'_1} = \frac{a'_1 a'_4 - a'_5}{a'_1}, \quad (25)$$

$$b_3 = -\frac{\det \begin{bmatrix} 1 & a'_6 \\ a'_1 & a'_7 \end{bmatrix}}{a'_1} = \frac{a'_1 a'_6 - a'_7}{a'_1}, \quad (26)$$

e assim sucessivamente. Para a quarta linha, o procedimento é similar:

$$c_1 = -\frac{\det \begin{bmatrix} a'_1 & a'_3 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a'_3 - a'_1 b_2}{b_1}, \quad (27)$$

$$c_2 = -\frac{\det \begin{bmatrix} a'_1 & a'_5 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a'_5 - a'_1 b_3}{b_1}, \quad (28)$$

$$c_3 = -\frac{\det \begin{bmatrix} a'_1 & a'_7 \\ b_1 & b_4 \end{bmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a'_7 - a'_1 b_4}{b_1}, \quad (29)$$

e assim sucessivamente. Para as demais linhas da tabela, procede-se de forma similar, até finalmente obter

$$f_1 = -\frac{\det \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ e_1 & 0 \end{bmatrix}}{e_1} = \frac{e_1 d_2}{e_1}. \quad (30)$$

Por conta da regra de construção usada, à medida que se prossegue, surgem cada vez mais elementos nulos nas últimas colunas, os quais não são indicados na tabela. Perceba que, de modo geral, o cálculo do elemento  $r_{i,j}$  da tabela de Routh corresponde a

$$r_{ij} = -\frac{-\det \begin{bmatrix} r_{i-2,1} & r_{i-2,j+1} \\ r_{i-1,1} & r_{i-1,j+1} \end{bmatrix}}{r_{i-1,1}} = \frac{r_{i-1,1} r_{i-2,j+1} - r_{i-2,1} r_{i-1,j+1}}{r_{i-1,1}}. \quad (31)$$

Essa regra é mais fácil de memorizar visualmente:

$$\begin{array}{ccccccccc} \vdots & \ddots \\ \text{Linha } i-2 & s^{n-i-1} : & r_{i-2,1} & \cdots & r_{i-2,j} & r_{i-2,j+1} & \cdots & \\ \text{Linha } i-1 & s^{n-i} : & r_{i-1,1} & \cdots & r_{i-1,j} & r_{i-1,j+1} & \cdots & \\ \text{Linha } i & s^{n-i+1} : & r_{i,1} & \cdots & r_{i,j} & r_{i,j+1} & \cdots & \\ \vdots & \ddots \end{array} \quad (32)$$

Terminada a construção, tem-se normalmente  $n + 1$  elementos na primeira coluna da tabela de Routh. O critério de Routh estabelece que todas as raízes do polinômio possuem parte real negativa se e somente se todos os elementos na primeira coluna da tabela de Routh forem positivos. Para um sistema LIT, o critério de Routh permite determinar se o sistema é estável pois impõe condição necessária e suficiente para que todos os polos estejam no SPE. Ademais, se existirem elementos negativos na primeira coluna, o número de trocas de sinal determina a quantidade de raízes com parte real positiva.

**Exemplo 1.** Seja uma função de transferência com denominador

$$D(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + 10. \quad (33)$$

Usando o critério de Routh-Hurwitz, determinar se o sistema é estável.

Montando a tabela de Routh-Hurwitz, tem-se

$$\begin{array}{lcc} s^3 : & 1 & 2 \\ s^2 : & 3 & 10 \\ s^1 : & -4/3 & 0 \\ s^0 : & 10 & \end{array} \quad (34)$$

Como há troca de sinais na primeira coluna, conclui-se que o sistema é instável. Para verificar o resultado, pode-se solicitar as raízes do polinômio no MATLAB:

```

1 >> roots([1 3 2 10])
2
3 ans =
4
5 -3.3089 + 0.0000i
6 0.1545 + 1.7316i
7 0.1545 - 1.7316i

```

Com efeito, o sistema possui dois polos no SPD, o que é indicado pelas duas trocas de sinais na primeira coluna da tabela de Routh.

**Exemplo 2.** Considere um sistema com denominador da função de transferência dado por

$$D(s) = s^4 + 8s^3 + 23s^2 + 28s + 12. \quad (35)$$

Determinar se o sistema é estável com uso do critério de Routh-Hurwitz.

Construindo a tabela de Routh-Hurwitz:

$$\begin{array}{rccccc} s^4 : & 1 & 23 & 12 \\ s^3 : & 8 & 28 & \\ s^2 : & 39/2 & 12 & \\ s^1 : & 300/13 & & \\ s^0 : & 12 & & \end{array} \quad (36)$$

Como todos os elementos na primeira coluna são positivos, o sistema é estável. Essa conclusão pode ser verificado a partir do cálculo dos polos no MATLAB:

```

1 >> roots([1 8 23 28 12])
2
3 ans =
4
5 -3.0000
6 -2.0000
7 -2.0000
8 -1.0000

```

De fato, todos os polos estão no SPE, de modo que o sistema é estável.

Como pode-se ver, o uso do critério de Routh-Hurwitz para determinar estabilidade de um dado sistema dinâmico não possui muita utilidade prática nos dias, dada a existência de ferramentas numéricas como o MATLAB. Entretanto, o critério de Routh-Hurwitz ainda é útil para analisar faixas de valores que parâmetros podem assumir sem comprometer a estabilidade do sistema, conforme mostra o exemplo a seguir.

**Exemplo 3.** Seja um sistema dinâmico dado por

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s-1)(s+6)}. \quad (37)$$

Deseja-se estabilizar esse sistema com uso de um controlador proporcional  $C(s) = K$ . Determine a faixa de valores de  $K$  em que o sistema em malha fechada é estável.

A função de transferência em malha fechada é

$$G_{mf}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}, \quad (38)$$

de modo que o denominador da função de transferência em malha fechada vale

$$D_{mf}(s) = s^3 + 5s^2 + (K - 6)s + K. \quad (39)$$

Construindo a tabela de Routh-Hurwitz:

$s^3 :$	1	$K - 6$	(40)
$s^2 :$	5	$K$	
$s^1 :$	$(4K - 30)/5$		
$s^0 :$	$K$		

Assim, para que o sistema seja estável, deve-se ter

$$\begin{cases} \frac{4K - 30}{5} > 0 \\ K > 0 \end{cases} \Rightarrow K > 7,5. \quad (41)$$

De fato, com uso do MATLAB, pode-se verificar que para  $K = 7,5$ , o sistema possui polos em  $j\omega$ , de modo que está no limiar de estabilidade. Veja:

```

1 >> K = 7.5;
2 >> roots([1, 5, K - 6, K])
3
4 ans =
5
6 -5.0000 + 0.0000i
7 0.0000 + 1.2247i
8 0.0000 - 1.2247i

```

## 4 Erro em Regime

Quando se mostrou o controlador PID, verificou-se que a inclusão do termo integrativo remove erro em regime para entrada degrau. Além disso, tem-se verificado que alguns sistemas apresentam erro em regime e outros não. Nesta seção, far-se-á uma análise mais geral de como os polos em malha aberta do controlador e da planta influenciam o erro em regime para diferentes entradas. Para isso, considere um sistema de controle genérico como o mostrado na Figura 1. Defina a função de transferência de malha aberta (combinando controlador e planta) como  $G_a(s) = C(s)G(s)$ . Assim, a função de transferência de malha fechada do sistema mostrado na Figura 1 é

$$G_f(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_a(s)}{1 + G_a(s)}, \quad (42)$$

de modo que o erro é dado por

$$E(s) = R(s) - Y(s) \Rightarrow E(s) = \frac{1}{1 + G_a(s)}R(s). \quad (43)$$

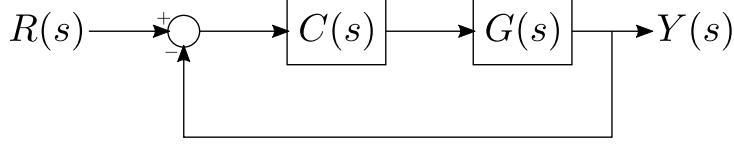


Figura 1: Sistema de controle em malha fechada genérico.

Pelo teorema do valor final, pode-se calcular o erro em regime para uma dada entrada como

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{1}{1 + G_a(s)} \right) R(s). \quad (44)$$

Considere entrada degrau unitário  $R(s) = 1/s$  e que não há nenhum polo na origem ( $s = 0$ ) em  $G(s)$ , então perceba que

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{1}{1 + G_a(s)} \right) \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + G_a(0)}. \quad (45)$$

Note que a ausência de polos na origem garante que  $\lim_{s \rightarrow 0} G_a(s)$  existe e vale  $G_a(0)$ . Portanto, conclui-se que, se a função de transferência em malha aberta do sistema (controlador e planta) não tiver polos na origem, o sistema apresenta erro em regime para entrada degrau dado por (45).

Por outro lado, se  $G_a(s)$  possui um polo na origem, pode-se escrever  $G_a(s) = G'_a(s)/s$ , em que  $G'_a(s)$  não possui polos na origem. Desse modo, o erro em regime para entrada degrau fica

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{1}{1 + G_a(s)} \right) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s + G'_a(s)} = 0. \quad (46)$$

A eventual falta de polos na origem da planta pode ser suprida pelo controlador, por isso a introdução de integrativo elimina o erro em regime para entrada degrau. Para perceber isso, lembre que a função de transferência do controlador PI é

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = K_p \left( \frac{s + K_i/K_p}{s} \right), \quad (47)$$

a qual possui um polo na origem.

Além de entrada degrau, há outras entradas de interesse em sistemas de controle. Por exemplo, no caso da dinâmica de posição de um carro autônomo, pode-se desejar que o carro se move para frente com velocidade constante, o que resulta numa referência de posição do tipo rampa, i.e.  $r(t) = t$ . Se o sistema não possui polo na origem, o erro em regime para entrada rampa é

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{1}{1 + G_a(s)} \right) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{1}{1 + G_a(s)} \right) \frac{1}{s} \rightarrow \infty, \quad (48)$$

ou seja, o erro em regime aumenta indefinidamente. Se há um polo na origem, o erro em regime para entrada rampa fica

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{1}{1 + G_a(s)} \right) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{1}{1 + G'_a(s)/s} \right) \frac{1}{s} = \frac{1}{G'_a(0)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sG_a(s)}, \quad (49)$$

de modo que ainda há erro em regime. Um ponto interessante é que aumentar os ganhos do controlador também reduz o erro em regime nesse caso, mesmo embora não seja capaz de eliminá-lo. Considere  $G'_a(s) = KG''_a(s)$ , em que  $K$  é o ganho do controlador. De (49), tem-se

$$e_\infty = \frac{1}{G'_a(0)} = \frac{1}{K} \frac{1}{G''_a(0)} \quad (50)$$

de modo que aumentar  $K$  reduz  $e_\infty$ , analogamente ao que acontece quando há erro em regime para entrada degrau. Todavia, independente do valor de  $K$  em (50), não é possível eliminar completamente o erro em regime. Para isso, é necessário que  $G_a(s)$  possua dois polos na origem. Com efeito, se há dois polos na origem em  $G_a(s)$ , pode-se escrever  $G_a(s) = G'_a(s)/s^2$  e

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{1}{1 + G_a(s)} \right) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{1}{1 + G'_a(s)/s^2} \right) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s^2 + G'_a(s)} = 0. \quad (51)$$

Generalizando essa discussão, verifica-se que o erro em regime para entradas polinomiais ( $1(t)$ ,  $t$ ,  $t^2$  etc.) está ligado ao número de polos de malha aberta na origem, i.e. polos de  $G_a(s)$ . Com isso, surge o conceito de **tipo** de um sistema dinâmico. Diz-se que um sistema dinâmico é do tipo  $k$  se possui  $k$  polos de malha aberta na origem. A Tabela 1 relaciona expressões de erro em regime para diferentes tipos de sistemas e entradas. No caso, a tabela usa as seguintes definições:

- Constante de erro estático de posição:  $K_{po} = \lim_{s \rightarrow 0} G_a(s)$ .
- Constante de erro estático de velocidade:  $K_{vo} = \lim_{s \rightarrow 0} sG_a(s)$ .
- Constante de erro estático de aceleração:  $K_{ao} = \lim_{s \rightarrow 0} s^2G_a(s)$ .

Tabela 1: Expressões de erro em regime para diferentes tipos de sistemas e entradas.

	$1(t)$ (Degrau)	$t$ (Rampa)	$t^2$ (Parábola)
Tipo 0	$\frac{1}{1 + K_{po}}$	$\infty$	$\infty$
Tipo 1	0	$\frac{1}{K_{vo}}$	$\infty$
Tipo 2	0	0	$\frac{1}{K_{ao}}$

# Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA

## Controle para Sistemas Computacionais – CMC-12

### Notas da Aula 10 – Linearização e Projeto com Requisitos no Domínio do Tempo

**Professor:** Marcos Ricardo Omena de Albuquerque Maximo

19 de maio de 2020

Nesta aula, apresenta-se um procedimento geral de linearização para obter modelos lineares aproximados a partir de sistemas não-lineares. Além disso, mostra-se algumas técnicas de projeto de controlador.

## 1 Linearização

Conforme já foi dito anteriormente, técnicas de controle clássico lidam com sistemas lineares. Porém, a maioria dos fenômenos na Natureza são não lineares. Até o momento, tem-se feito aproximações lineares para sistemas específicos. Nesta seção, apresentar-se-á um método geral para obtenção de modelos lineares denominado **linearização por análise de pequenos sinais**.

### 1.1 Linearização de um Pêndulo Invertido

Primeiramente, usar-se-á um exemplo para motivar esse método. Considere um pêndulo invertido formado por uma massa suspensa por uma haste rígida, vide Figura 1. Assuma ainda que há atrito viscoso na junta de rotação do pêndulo e que há um atuador capaz de aplicar torque a essa junta. O modelo dinâmico associado é

$$ml^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgl \sin \theta = \tau, \quad (1)$$

em que  $m$  é a massa,  $b$  é o coeficiente de atrito viscoso,  $l$  é o comprimento da haste do pêndulo,  $g$  é a aceleração da gravidade e  $\tau$  é o torque aplicado. Pode-se transformar a representação em formato de equação diferencial ordinária (EDO) em espaço de estados (não-linear). Defina

$$\begin{cases} x_1 = \theta, \\ x_2 = \dot{\theta}, \\ u = \tau. \end{cases} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), obtém-se

$$ml^2\dot{x}_2 + bx_2 + mgl \sin x_1 = u \Rightarrow \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{ml^2}u - \frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{b}{ml^2}x_2. \quad (3)$$

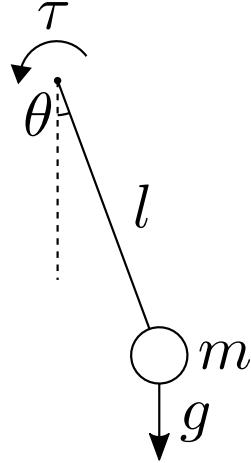


Figura 1: Pêndulo invertido formado por uma massa suspensa por uma haste rígida.

Então, pode-se escrever a representação em espaço de estados (não-linear) como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{ml^2}u - \frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{b}{ml^2}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, u) \\ f_2(x_1, x_2, u) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Como  $f_1(x_1, x_2, u)$  já é linear, para obter um modelo linear, basta linearizar  $f_2(x_1, x_2, u)$ . Para isso, faça uma expansão em série de Taylor de 1ª ordem em torno de um ponto  $(x_{10}, x_{20}, u_0)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_2 &= f_2(x_1, x_2, u) \approx f_2(x_{10}, x_{20}, u_0) + \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{x_{10}, x_{20}, u_0} (x_1 - x_{10}) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{x_{10}, x_{20}, u_0} (x_2 - x_{20}) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial u} \right|_{x_{10}, x_{20}, u_0} (u - u_0), \end{aligned} \quad (5)$$

em que

$$\left. \frac{\partial f_2}{\partial \bullet} \right|_{x_{10}, x_{20}, u_0} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial \bullet} \right|_{x_1=x_{10}, x_2=x_{20}, u=u_0}. \quad (6)$$

Logo

$$\frac{d}{dt}x_2 = f_2(x_{10}, x_{20}, u_0) + -\frac{g}{l}\cos x_{10}(x_1 - x_{10}) - \frac{b}{ml^2}(x_2 - x_{20}) + \frac{1}{ml^2}(u - u_0). \quad (7)$$

Defina

$$\begin{cases} \delta x_1 = x_1 - x_{10}, \\ \delta x_2 = x_2 - x_{20}, \\ \delta u = u - u_0. \end{cases} \quad (8)$$

Perceba ainda que

$$\frac{d}{dt}\delta x_1 = \frac{d}{dt}(x_1 - x_{10}) = \frac{dx_1}{dt}, \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt}\delta x_2 = \frac{d}{dt}(x_2 - x_{20}) = \frac{dx_2}{dt}. \quad (10)$$

Por fim, para que (5) resulte num modelo linear, ainda é necessário que

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_{10}, x_{20}, u_0) = 0. \quad (11)$$

Desse modo, pode-se reescrever (7) como

$$\frac{d}{dt} \delta x_2 = -\frac{g}{l} \cos x_{10} \delta x_1 - \frac{b}{ml^2} \delta x_2 + \frac{1}{ml^2} \delta u. \quad (12)$$

A representação em espaço de estados (linear) fica

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_{10} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} \delta u \quad (13)$$

Perceba ainda que escrever (13) requer também que

$$\frac{d}{dt} \delta x_1 = \frac{d}{dt} x_1 = x_2 = \delta x_2 \Rightarrow x_{20} = f_1(x_{10}, x_{20}, u_0) = 0. \quad (14)$$

Seja então  $\delta \mathbf{x} = [\delta x_1, \delta x_2]^T$  e  $\delta \mathbf{u} = \delta u$  os vetores de estado e de entrada, respectivamente. Pode-se escrever ainda

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{x} = \mathbf{A} \delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \delta \mathbf{u}, \quad (15)$$

em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_{10} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Finalmente, destaca-se novamente que só é possível escrever o sistema linearizado como em (13) se as condições (14) e (11) forem satisfeitas, o que impõe restrições sobre o ponto  $(x_{10}, x_{20}, u_0) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$  de acordo com

$$\begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \\ f_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} x_{20} = 0, \\ u_0 = mgl \sin x_{10}. \end{cases} \quad (17)$$

Dada a condição de que as derivadas dos estados devem ser nulas, diz-se que o ponto  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$  é um **ponto de equilíbrio** do sistema. O nome “pequenos sinais” vem do fato do método considerar pequenas variações de estado  $\delta \mathbf{x}$  e de entrada  $\delta \mathbf{u}$  em torno do ponto de equilíbrio  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ .

## 1.2 Método Geral de Linearização

Para generalizar o método, considere um sistema não-linear qualquer dado por

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (18)$$

em que  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$  e  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n_x+n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$  é um campo vetorial. Fazendo uma expansão por Taylor de 1ª ordem em torno de  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ , obtém-se

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0, \mathbf{u}=\mathbf{u}_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0, \mathbf{u}=\mathbf{u}_0} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0). \quad (19)$$

Novamente, para obter um modelo linear, é necessário considerar que  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$  é um ponto de equilíbrio, i.e.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0, \mathbf{u}=\mathbf{u}_0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \mathbf{0}. \quad (20)$$

Defina

$$\delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \quad \delta\mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \quad \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0, \mathbf{u}=\mathbf{u}_0} = \mathbf{A}, \quad \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{u}}\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0, \mathbf{u}=\mathbf{u}_0} = \mathbf{B}. \quad (21)$$

Substituindo (20) e (21) em (19), encontra-se

$$\frac{d}{dt}\delta\mathbf{x} = \mathbf{A}\delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\delta\mathbf{u}, \quad (22)$$

que está no formato conhecido de uma equação de estado de uma representação em espaço de estados linear. No caso da equação de saída também ser não-linear na forma

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (23)$$

em que  $\mathbf{h} : \mathbb{R}^{n_x+n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$  é um campo vetorial. Pode-se fazer expansão em Taylor de 1ª ordem, de modo a obter

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \approx \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0, \mathbf{u}=\mathbf{u}_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\mathbf{u}}\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0, \mathbf{u}=\mathbf{u}_0} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0). \quad (24)$$

Defina

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0), \quad \delta\mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{C} = \frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0, \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}, \quad \mathbf{D} = \frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\mathbf{u}}\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0, \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}. \quad (25)$$

Considerando (25) em (24), chega-se a

$$\delta\mathbf{y} = \mathbf{C}\delta\mathbf{x} + \mathbf{D}\delta\mathbf{u}, \quad (26)$$

que está no formato conhecido de uma equação de saída de uma representação em espaços de estados.

### 1.3 Considerações sobre Estabilidade

Conforme visto na aula anterior, a estabilidade de um sistema linear é ditada apenas pelos polos do sistema, de modo que é independente das condições iniciais. Já em sistemas não-lineares, é possível que o sistema seja estável em certas partes do espaço de estados e instável em outras. Por exemplo, para o pêndulo invertido, tem-se

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_{10} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Primeiramente, considere como ponto de equilíbrio

$$\begin{cases} x_{10} = 0, \\ x_{20} = 0, \\ u_0 = 0. \end{cases} \quad (28)$$

Para verificar que se trata de um ponto de equilíbrio, perceba que

$$\begin{cases} f_1(0, 0, 0) = 0, \\ f_2(0, 0, 0) = 0. \end{cases} \quad (29)$$

A matriz de estado  $\mathbf{A}$  fica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}, \quad (30)$$

que possui como equação característica

$$\lambda^2 + \frac{b}{ml^2}\lambda + \frac{g}{l} = 0 \quad (31)$$

Pode-se verificar estabilidade com Routh-Hurwitz:

$$\begin{aligned} \lambda^2 : \quad 1 & \quad \frac{g}{l} \\ \lambda^1 : \quad \frac{b}{ml^2} & \\ \lambda^0 : \quad \frac{g}{l} & \end{aligned} \quad (32)$$

Assim, para o sistema ser estável, basta que o coeficiente de amortecimento não seja nulo, i.e.  $b > 0$ , pois  $m > 0$ ,  $l > 0$  e  $g > 0$ . Por outro lado, outro ponto de equilíbrio é

$$\begin{cases} x_{10} = \pi, \\ x_{20} = 0, \\ u_0 = 0, \end{cases} \quad (33)$$

pois

$$\begin{cases} f_1(\pi, 0, 0) = 0, \\ f_2(\pi, 0, 0) = 0. \end{cases} \quad (34)$$

Nesse caso, a matriz de estado é

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}, \quad (35)$$

que tem como equação característica

$$\lambda^2 + \frac{b}{ml^2}\lambda - \frac{g}{l} = 0. \quad (36)$$

Portanto, o sistema é instável independente do valor de  $b$ , como atesta a tabela de Routh:

$$\begin{aligned} \lambda^2 : \quad 1 & \quad -\frac{g}{l} \\ \lambda^1 : \quad \frac{b}{ml^2} & \\ \lambda^0 : \quad -\frac{g}{l} & \end{aligned} \quad (37)$$

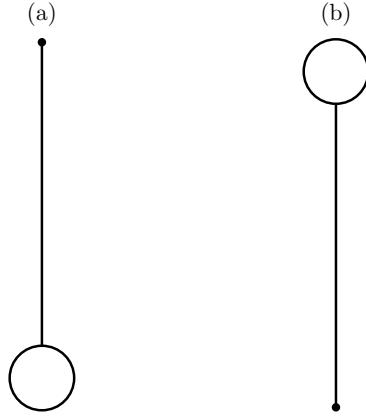


Figura 2: Pontos de equilíbrio considerados para linearização do pêndulo invertido: (a)  $\theta = 0$  e (b)  $\theta = \pi$ .

Com isso, pode-se verificar que a estabilidade do sistema linearizado depende do ponto de equilíbrio escolhido. Para entender intuitivamente porque isso acontece nesse exemplo, veja a Figura 2, que ilustra os dois casos. De fato, na Figura 2(b), uma pequena alteração na posição do pêndulo faz com a que a gravidade leve o pêndulo para cada vez mais longe da posição de equilíbrio, de modo que o equilíbrio é instável. Destaca-se que apesar da instabilidade natural da planta, é possível estabilizar o sistema com uso de uma malha de controle.

## 2 Polos Dominantes

Em aulas anteriores, usou-se o argumento de que as dinâmicas mais rápidas do sistema podem ser negligenciadas. No exemplo do motor elétrico, esse argumento é utilizado para desprezar a dinâmica da corrente. Para entender essa questão de uma maneira mais precisa, considere uma função de transferência em malha fechada de 3<sup>a</sup> ordem na forma

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(\tau s + 1)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = \left( \frac{a}{s+a} \right) \left( \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \right), \quad (38)$$

em que  $a = 1/\tau$ . Deseja-se mostrar que, se o polo  $s = -a$  decai muito mais rapidamente que os polos complexo conjugados, então a dinâmica de 1<sup>a</sup> ordem associada a  $s = -a$  pode ser ignorada. Para verificar isso, considera-se diferentes posições do polo  $s = -a$ , conforme a Figura 3. Adotando  $\omega_n = 2\pi \text{ rad/s}$  e  $\xi = 0,7$ , a Figura 4 apresenta respostas do sistema para essas diferentes posições do polo, além da resposta do sistema de 2<sup>a</sup> ordem.

Pode-se perceber que se  $a \geq 5\xi\omega_n$ , então a influência do polo adicional na dinâmica de 2<sup>a</sup> ordem é muito pequena, de modo que

$$G(s) \approx \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (39)$$

No caso, diz-se que foi realizada uma **aproximação por polos dominantes**, em que os **polos dominantes** são os mais próximos da origem e que permanecem após a

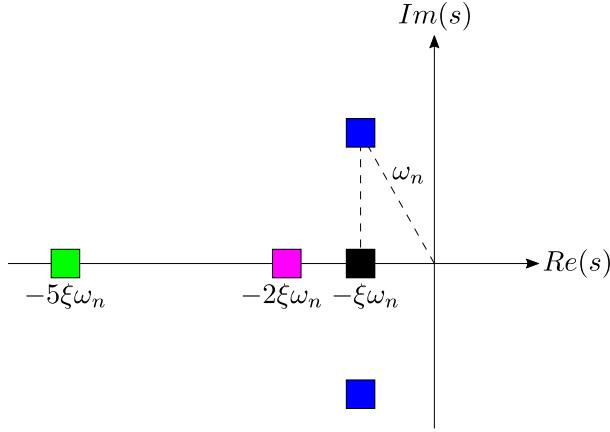


Figura 3: Diferentes posições do polo adicional  $a$  em relação aos polos complexo conjugados (polos azuis).

aproximação. Em controle, é comum adotar como regra de bolso que é possível ignorar a presença de um polo adicional se sua distância até a origem do plano  $s$  (parte real) é pelo menos **5x** a distância do segundo polo mais afastado da origem. Deve-se destacar também que a aproximação por polos dominantes deve ser feita considerando as posições dos polos de malha fechada, pois a realimentação altera as posições dos polos. Finalmente, perceba que a aproximação pode ser generalizada para uma situação em que há mais de um polo adicional se todos os polos que serão ignorados estiverem muito mais distantes da origem que os polos dominantes.

A aproximação por polos dominantes justifica uma estratégia muito utilizada no projeto de malhas de controle de sistemas reais, que envolve o uso de malhas aninhadas (num sentido mais geral do que foi visto até então no curso). Acontece que sistemas reais costumam envolver uma planta complexa, em que há uma quantidade grande de fenômenos envolvidos. Pense por exemplo no autopiloto de um avião. O comando final do autopiloto poderia ser a tensão aplicada nos terminais do motor elétrico que controla a superfície de controle, porém a planta seria muito complicada nesse caso, envolvendo um sistema de ordem elevada, por incorporar fenômenos da aerodinâmica, da dinâmica de corpo rígido do avião e eletromecânicos do motor elétrico. Assim, uma abordagem comum nesse caso envolve criar uma malha interna, que é responsável pelo controle do atuador em si. Com isso, a malha do autopiloto pode considerar que envia comandos de mais alto nível (em geral, posição desejada da superfície de controle) para o atuador. Se a malha interna for suficientemente rápida, a malha externa pode considerar sua dinâmica instantânea para fins de projeto (aproximação por polos dominantes). Para permitir isso, é comum os polos da malha interna serem escolhidos de modo a serem muito mais rápidos que os da malha externa.

Essa mesma ideia é usada no robô diferencial do laboratório 2 (seguidor de linha). Embora fisicamente não seja possível atuar na “velocidade” do robô, projetou-se a malha de controle do seguidor de linha como se isso fosse possível. Acontece que há outra malha de controle interna para o atuador, que recebe comandos de velocidade da malha externa (seguidor de linha) e controla o motor. Inclusive, essas malhas de controle são executadas em processadores diferentes: a malha do seguidor de linha roda num computador e a malha de velocidade das rodinhas roda no microcontrolador embarcado do robô.

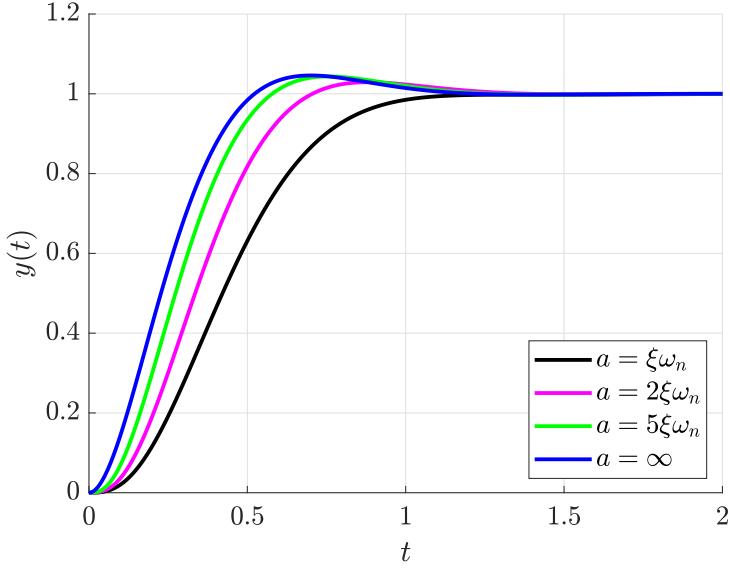


Figura 4: Respostas ao degrau unitário considerando diferentes posições para o polo adicional  $a$ .

**Exemplo 1.** Obtenha uma aproximação por polos dominantes da função de transferência

$$G(s) = \frac{200}{s^4 + 15s^3 + 71s^2 + 145s + 200}. \quad (40)$$

Primeiramente, perceba que os polos da função de transferência são

$$\begin{cases} p_1 = -5, \\ p_2 = -8, \\ p_3 = -1 + 2j, \\ p_4 = -1 - 2j. \end{cases} \quad (41)$$

Os polos complexo conjugados em  $s = -1 \pm 2j$  são dominantes, pois

$$\begin{cases} 5 = -\operatorname{Re}\{p_1\} \geq 5 \times -\operatorname{Re}\{p_{3,4}\} = 5, \\ 8 = -\operatorname{Re}\{p_2\} \geq 5 \times -\operatorname{Re}\{p_{3,4}\} = 5. \end{cases} \quad (42)$$

Portanto

$$G(s) = \frac{200}{(s+5)(s+8)(s^2+2s+5)} = \left(\frac{1}{s/5+1}\right) \left(\frac{1}{s/8+1}\right) \left(\frac{5}{s^2+2s+5}\right) \Rightarrow \quad (43)$$

$$G(s) \approx \frac{5}{s^2+2s+5}.$$

Para facilitar o cálculo, perceba que a mesma resposta poderia ter sido obtida fazendo  $s = 0$  nos termos  $(s+5)$  e  $(s+8)$ .

### 3 Projeto com Requisitos no Domínio do Tempo

Nesta seção, mostra-se, através de exemplos, como projetar sistemas de controle a partir de requisitos no domínio do tempo. Para isso, serão usados muitos dos conceitos vistos até então no curso.

**Exemplo 2.** Considerando a dinâmica do *cruise control*

$$G(s) = \frac{1}{ms + b}, \quad (44)$$

projete um sistema de controle que tenha erro em regime nulo para entrada degrau, tempo de subida  $t_r|_0^{100\%} = 1 s$  e sobressinal (*overshoot*)  $M_p = 0,1$ . Assuma  $m = 1000 kg$  e  $b = 50 Nm/s$ .

Para que o sistema tenha erro nulo em regime, é necessário que seja do tipo 1. Por conta disso, é interessante o uso de um controlador PI:

$$C(s) = \frac{K_p s + K_i}{s}. \quad (45)$$

Com isso, a função de transferência em malha fechada fica

$$G'_f(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{K_p s + K_i}{ms^2 + (b + K_p)s + K_i}. \quad (46)$$

Pode-se ainda usar um pré-filtro para obter um sistema de segunda ordem padrão:

$$\begin{aligned} G_f(s) &= F(s)G'_f(s) = \left( \frac{K_i}{K_p s + K_i} \right) \left( \frac{K_p s + K_i}{ms^2 + (b + K_p)s + K_i} \right) \Rightarrow \\ G_f(s) &= \frac{K_i/m}{s^2 + [(b + K_p)/m]s + K_i/m}. \end{aligned} \quad (47)$$

Assim, basta selecionar  $K_p$  e  $K_i$  de modo a atingir o tempo de subida e sobressinal desejados. Pela fórmula do sobressinal para um sistema de segunda ordem padrão, determina-se  $\xi$ :

$$M_p = \exp \left( -\frac{\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right) \Rightarrow \xi = -\frac{\ln M_p}{\sqrt{\pi^2 + (\ln M_p)^2}} \Rightarrow \xi = 0,5912. \quad (48)$$

Então, pode-se usar a fórmula de  $t_r|_0^{100\%}$  para obter  $\omega_n$  de acordo com

$$t_r|_0^{100\%} = \frac{\pi - \arccos \xi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \Rightarrow \omega_n = \frac{\pi - \arccos \xi}{t_r|_0^{100\%} \sqrt{1 - \xi^2}} \Rightarrow \omega_n = 2,7317 rad/s. \quad (49)$$

Comparando (47) com um sistema de segunda ordem padrão, tem-se

$$\begin{cases} 2\xi\omega_n = \frac{b + K_p}{m} \\ \omega_n^2 = \frac{K_i}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_p = 2m\xi\omega_n - b \\ K_i = m\omega_n^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_p = 3179,7 Ns/m \\ K_i = 7462,3 Ns^2/m \end{cases}. \quad (50)$$

Logo, o sistema de controle é composto por um pré-filtro e um controlador PI, conforme mostra a Figura 6, com ganhos dados por (50). Após o projeto, sempre é interessante verificar se o sistema de controle projetado de fato atende aos requisitos. A Figura mostra a resposta ao degrau unitário do sistema, obtida com uso de `step` do MATLAB, em que pontos de interesse estão destacados. Perceba que o sistema de fato atende aos requisitos: erro nulo em regime para entrada degrau,  $t_r|_0^{100\%} = 1 s$  e  $M_p = 0,1$ .

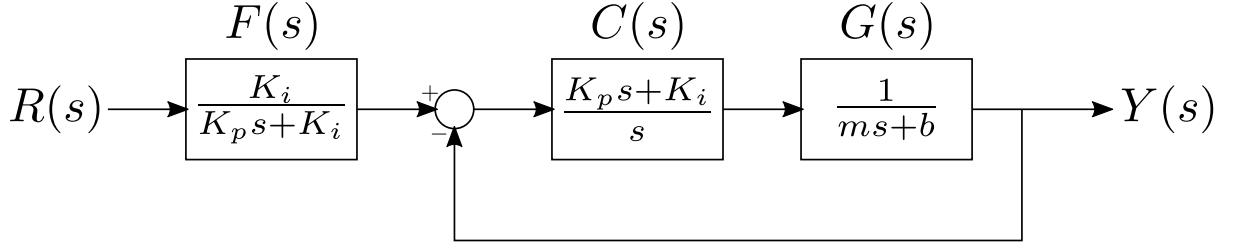


Figura 5: Diagrama de blocos de sistema de *cruise control* com controlador PI e pré-filtro.

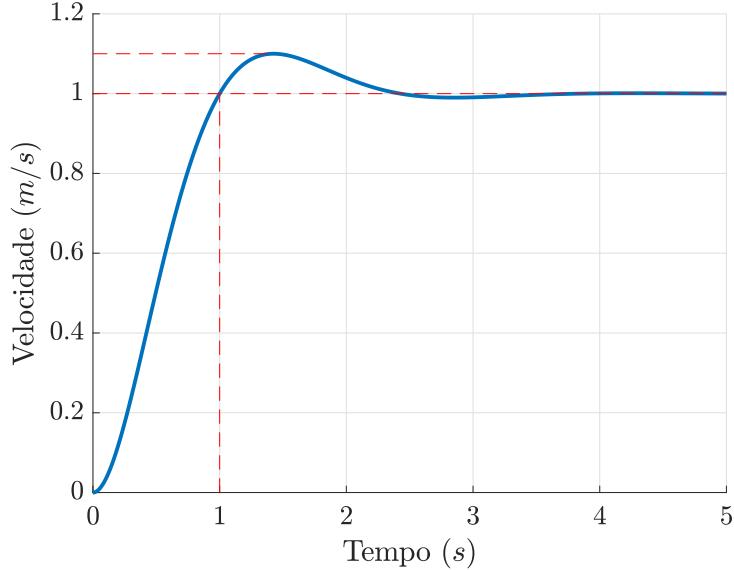


Figura 6: Resposta ao degrau do sistema de *cruise control* com atendimento aos requisitos destacado.

**Exemplo 3.** Considere a dinâmica linearizada do pêndulo invertido em torno do ponto de equilíbrio:

$$\begin{cases} \theta_0 = \pi, \\ \dot{\theta}_0 = 0, \\ \tau_0 = 0, \end{cases} \quad (51)$$

que é dada por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta\theta \\ \delta\dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\theta \\ \delta\dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} \delta\tau. \quad (52)$$

Seja então uma lei de controle do tipo P+V com malhas aninhadas

$$\begin{cases} \delta\dot{\theta}_r = K_p(\delta\theta_r - \delta\theta) \\ \delta\tau = K_v(\delta\dot{\theta}_r - \delta\dot{\theta}) \end{cases} \Rightarrow \delta\tau = K_p K_v (\delta\theta_r - \delta\theta) - K_v \delta\dot{\theta}. \quad (53)$$

em que  $\delta\theta_r$  é uma referência de  $\delta\theta_r$ . Adotando  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $l = 1 \text{ m}$ ,  $b = 0,1 \text{ s}^{-1}$  e  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ , projete os ganhos  $K_p$  e  $K_v$  de modo que o sistema tenha tempo de pico  $t_p = 0,1 \text{ s}$  e tempo de acomodação de 5%  $t_s|_{5\%} = 0,2 \text{ s}$ . Considere que a saída do sistema é  $y = \delta\theta$ .

A partir de (52), pode-se obter a EDO que descreve o sistema em malha aberta como

$$\delta\ddot{\theta} + \frac{b}{ml^2}\delta\dot{\theta} - \frac{g}{l}\delta\theta = \frac{1}{ml^2}\tau, \quad (54)$$

Usando a lei de controle proposta em (53), obtém-se

$$\delta\ddot{\theta} + \left(\frac{K_v + b}{ml^2}\right)\delta\dot{\theta} + \left(\frac{K_p K_v - mgl}{ml^2}\right)\delta\theta = \frac{K_p K_v}{ml^2}\delta\theta_r. \quad (55)$$

Seja

$$\begin{cases} r = \delta\theta_r, \\ r = \delta\theta, \end{cases} \quad (56)$$

a função de transferência em malha fechada fica

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \left(\frac{K_v + b}{ml^2}\right)\dot{y} + \left(\frac{K_p K_v - mgl}{ml^2}\right)y &= \frac{K_p K_v}{ml^2}r \Rightarrow \\ G_f(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{\frac{K_p K_v}{ml^2}}{s^2 + \left(\frac{K_v + b}{ml^2}\right)s + \frac{K_p K_v - mgl}{ml^2}} \Rightarrow \\ G_f(s) &= \frac{K_p K_v}{K_p K_v - mgl} \cdot \frac{\frac{K_p K_v - mgl}{ml^2}}{s^2 + \left(\frac{K_v + b}{ml^2}\right)s + \frac{K_p K_v - mgl}{ml^2}}. \end{aligned} \quad (57)$$

A função de transferência encontrada consiste do produto de um ganho por um sistema de segunda ordem padrão. O ganho altera o valor em regime do sistema, mas não modifica  $t_p$  nem  $t_s|_{5\%}$ . Com isso, pode-se usar as fórmulas já vistas para cálculo desses tempos no caso de um sistema de segunda ordem padrão:

$$\begin{cases} t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = 0,1 \text{ s} \\ t_s|_{5\%} = \frac{3}{\omega_n \xi} = 0,2 \text{ s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = 34,8 \text{ rad/s} \\ \xi = 0,43 \end{cases}, \quad (58)$$

de modo que os ganhos para que o sistema tenha o comportamento desejado são

$$\begin{cases} 2\xi\omega_n = \frac{K_v + b}{ml^2} \\ \omega_n^2 = \frac{K_p K_v - mgl}{ml^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_v = 2ml^2\xi\omega_n - b \\ K_p = \frac{ml^2\omega_n^2 + mgl}{2ml^2\xi\omega_n - b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_p = 40,93 \text{ s}^{-1} \\ K_v = 29,83 \text{ Nms/rad} \end{cases}. \quad (59)$$

Para validar o projeto, a Figura 7 mostra uma resposta ao degrau unitário do sistema linear em malha fechada. Além disso, a Figura 8 mostra uma comparação entre o sistema linear e o não-linear. Apesar do uso de um degrau de 1 rad, a diferença entre os modelos linear e não-linear é pequena.

Finalmente, destaca-se que o sistema possui erro em regime devido à gravidade, que puxa o pêndulo para longe do ponto de equilíbrio. Poderia-se utilizar alguma estratégia conhecida para mitigação de erro em regime, como a adição de um termo de *feedforward*. Porém, como não há requisito sobre erro em regime, optou-se por não tentar resolver o problema. Ademais, no exemplo considerado, os altos ganhos tornam o erro em regime quase imperceptível na Figura 7.

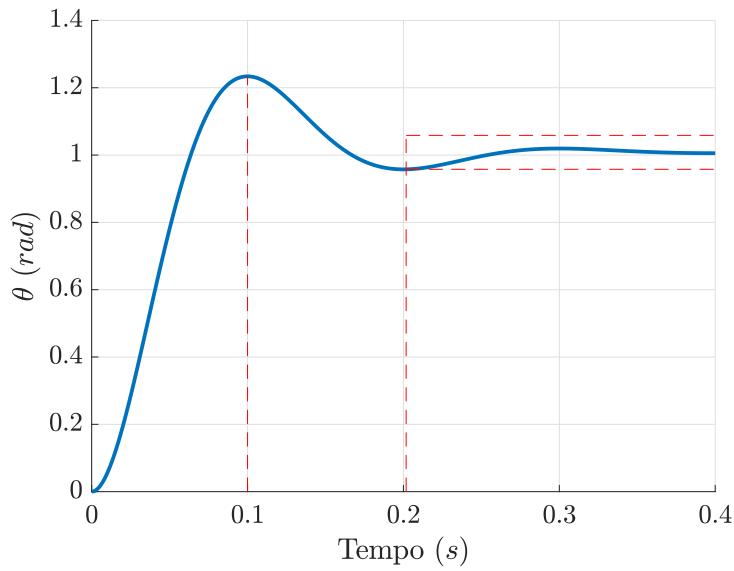


Figura 7: Resposta ao degrau unitário do modelo linear do pêndulo invertido com indicações de atendimento aos requisitos.

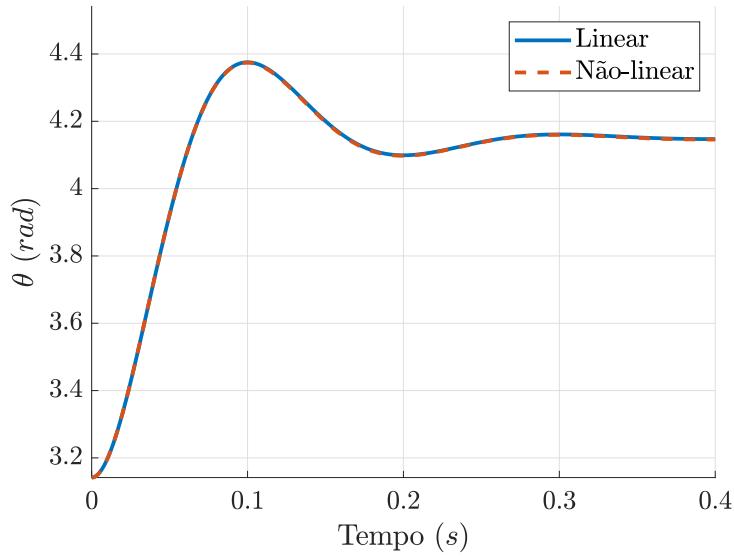


Figura 8: Comparação entre modelos linear e não-linear do pêndulo invertido.

# Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA

## Controle para Sistemas Computacionais – CMC-12

### Notas da Aula 11 – Lugar Geométrico das Raízes

**Professor:** Marcos Ricardo Omena de Albuquerque Maximo

1 de junho de 2020

Nas aulas anteriores, tem-se trabalhado basicamente com sistemas de primeira e segunda ordens e projetado sistemas de controle a partir dos comportamentos conhecidos para esses tipos de sistemas. Nesta aula, apresenta-se um método gráfico mais geral, que permite lidar com sistemas de ordem superior, chamado lugar geométrico das raízes (LGR), introduzido por W. R. Evans em 1950. Em inglês, o método é chamado de *root-locus*. O LGR fornece regras que permitem verificar graficamente como um determinado parâmetro altera as posições dos polos de malha fechada do sistema.

Métodos gráficos como o LGR foram desenvolvidos numa época em que não existia computador e eram especialmente úteis por permitir ajustar projetar de uma forma intuitiva. Com o avanço dos computadores, a forma de usar o LGR mudou. O MATLAB traça o LGR de forma interativa, de modo que se pode verificar em tempo real como mudanças no sistema influenciam os polos de malha fechada. Apesar disso, ainda é interessante aprender regras básicas de traçado do LGR, pois cria no projetista uma intuição de quais alterações devem ser feitas no sistema para obter a resposta desejada. Na aula de hoje, o foco é o entendimento do método e na próxima mostra-se como usá-lo para projetar controladores.

## 1 Motivação do LGR

Para motivar o método do lugar geométrico das raízes (LGR), considera-se primeiro um exemplo. Seja um sistema em malha aberta com função de transferência

$$G(s) = \frac{20}{s^3 + 32s^2 + 140s}. \quad (1)$$

Assuma uma lei proporcional para controlar esse sistema, de modo que a função de transferência em malha fechada fica

$$G_f(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{20K}{s^3 + 32s^2 + 140s + 20K}. \quad (2)$$

Pode-se usar o critério de Routh-Hurwitz para determinar a estabilidade em malha

fechada. Com isso, a tabela de Routh é dada por

$$\begin{array}{lll} s^3 : & 1 & 140 \\ s^2 : & 32 & 20K \\ s^1 : & (140 \cdot 32 - 20K)/32 & \\ s^0 : & 20K & \end{array} \quad (3)$$

Desse modo, tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{140 \cdot 32 - 20K}{32} > 0 \\ 20K > 0 \end{array} \right. \Rightarrow 0 < K < 224. \quad (4)$$

Assim, sabe-se que o sistema está no limiar de estabilidade quando  $K = 224$ , o que indica que há polos de malha fechada no eixo imaginário. Para  $K < 224$ , os polos estão todos no SPE e para  $K > 224$ , há polos no SPD. Perceba ainda que se  $K = 0$ , tem-se que o denominador em (2) é igual ao denominador em (1), de modo que os polos de malha fechada e malha aberta coincidem.

Portanto, verifica-se que o valor de  $K$  interfere nas posições dos polos de malha fechada. Quando  $K = 0$ , os polos de malha fechada coincidem com os polos de malha aberta e à medida que  $K$  aumenta, os polos de malha fechada se deslocam no plano  $s$ , ainda no SPE enquanto  $K < 224$ , até cruzarem o eixo imaginário quando  $K = 224$  e passarem para o SPD quando  $K > 224$ .

Pode-se verificar isso graficamente traçando-se posições dos polos de malha fechada para diferentes valores de  $K$ , conforme mostra a Figura 1. A esse gráfico, dá-se o nome de lugar geométrico das raízes (LGR), dado que representa o lugar geométrico que as raízes do denominador da função de transferência em malha fechada descrevem. Um gráfico semelhante ao da Figura 1 pode ser obtida com o código de MATLAB apresentado na Listagem 1.

Entretanto, uma forma ainda mais conveniente é usar a função `rlocus`, que recebe a função de transferência em malha aberta como argumento. A Figura mostra um gráfico gerado com o comando `rlocus(tf(20, [1, 32, 140, 0]))`, i.e. com uso de `rlocus` para a função de transferência apresentada em (1). No MATLAB, é possível ainda interagir com o gráfico gerado e descobrir qual o ganho  $K$  para cada posição do LGR. Além disso, existe a função `rltool`, que não apenas traça o LGR, mas também permite interagir em tempo real com o gráfico, incluindo adição de novos polos e zeros à função de transferência em malha aberta.

Listagem 1: Traçado de lugar geométrico das raízes com MATLAB.

```

1 figure;
2 hold on;
3
4 Ga = tf(20, [1, 32, 140, 0]);
5 polosMA = pole(Ga);
6 plot(real(polosMA), imag(polosMA), 'xb', 'LineWidth', 2);
7
8 Ks = logspace(log10(0.5), log10(500), 100);
9 for i=1:length(Ks)
10    K = Ks(i);
11    Gf = tf(20 * K, [1, 32, 140, 20 * K]);

```

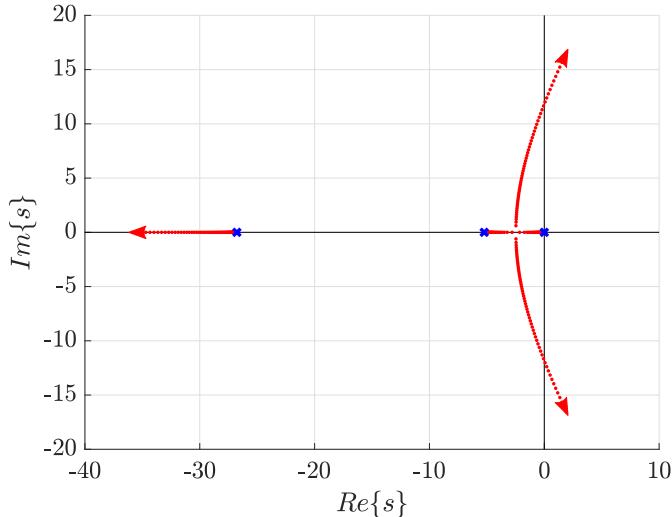


Figura 1: Em vermelho, o lugar geométrico que os polos de malha fechada descrevem com a variação do parâmetro  $K$ . Em azul, os polos de malha aberta.

```

12     polosMF = pole(Gf);
13     plot(real(polosMF), imag(polosMF), '.r', 'LineWidth', 2);
14 end
15
16 grid on;
17 xlabel('Re\{s\}', 'FontSize', 14);
18 ylabel('Im\{s\}', 'FontSize', 14);
19 set(gca, 'FontSize', 14);

```

## 2 Definição do LGR

De modo geral, o LGR refere-se a um sistema como mostrado na Figura 3, de modo que

$$G_f(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}, \quad (5)$$

Um ponto  $s$  pertence ao LGR se existir um ganho  $K$  tal que

$$1 + KG(s) = 0 \Rightarrow G(s) = -\frac{1}{K}. \quad (6)$$

No LGR, considera-se  $K \in [0, \infty)$ . Logo, o ponto  $s$  pertence ao LGR se  $G(s)$  for um número real negativo, i.e.

$$\angle G(s) = -180^\circ + 360^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (7)$$

Pode-se escrever

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = A \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}. \quad (8)$$

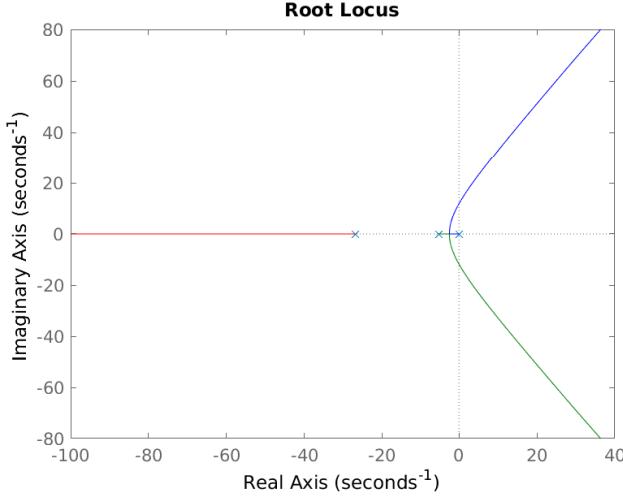


Figura 2: Gráfico gerado com comando `rlocus(tf(20, [1, 32, 140, 0]))`.

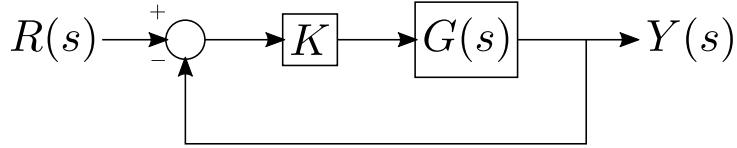


Figura 3: Sistema de controle genérico considerado no traçado do LGR.

Se  $G(s)$  for próprio, i.e.  $n > m$ , e  $A > 0$ , como em geral acontece em um sistema físico, tem-se

$$\angle G(s) = \sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s - p_j) = \sum_{i=1}^m \psi_i - \sum_{j=1}^n \phi_j = -180^\circ + 360^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (9)$$

o que é chamado de **condição angular do LGR**. No traçado do LGR, representa-se polos e zeros de malha aberta como  $\times$  e  $\circ$ , respectivamente. Ademais, é comum denotar polos de malha fechada com  $\blacksquare$ .

A Figura 4 mostra um exemplo gráfico da condição angular do LGR. Para essa figura, tem-se

$$\begin{aligned} \angle(s - z_1) - \angle(s - p_1) - \angle(s - p_2) - \angle(s - p_3) &= -180^\circ + 360^\circ k \Rightarrow \\ \psi_1 - \phi_1 - \phi_2 - \phi_3 &= -180^\circ. \end{aligned} \quad (10)$$

Perceba que a partir da condição angular do LGR, é muito fácil testar se um determinado ponto  $s$  pertence ou não ao LGR. Entretanto, não é um método prático para traçar o LGR, pois envolveria testar uma infinidade de pontos existentes no plano  $s$ . Para traçar o LGR, Evans desenvolveu um conjunto de regras, que serão explicadas a seguir.

Além da condição de ângulo, há também a chamada **condição de magnitude**, que geralmente é usada para cálculo de  $K$  associado a um ponto  $s$  do LGR. De (6), tem-se

$$G(s) = -\frac{1}{K} \Rightarrow K = \left| \frac{1}{G(s)} \right| = \frac{1}{A} \frac{|s - p_1| |s - p_2| \cdots |s - p_n|}{|s - z_1| |s - z_2| \cdots |s - z_m|}. \quad (11)$$

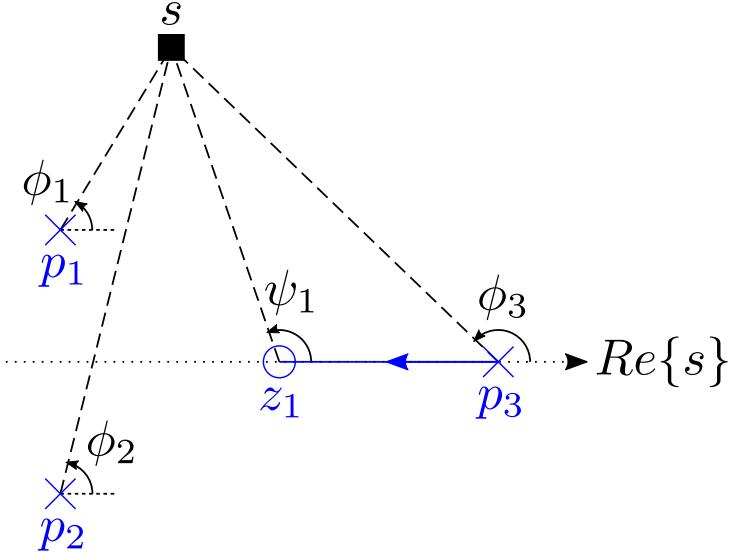


Figura 4: Exemplo de aplicação da condição angular do LGR.

### 3 Regras de Traçado do LGR

Apesar da existência do comando `rlocus`, que traça o LGR numericamente, ainda considera-se importante o conhecimento das regras de traçado, que eram usadas para traçar o LGR manualmente. O motivo para isso é que elas fornecem uma intuição para o projetista de como o LGR pode ser manipulado para que que o sistema em malha fechada tenha a resposta desejada.

**Regra 1.** Os  $n$  ramos do LGR partem dos polos de malha aberta.

De (5), tem-se

$$G_f(s) = \frac{N_f(s)}{D_f(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{KN(s)}{D(s) + KN(s)}. \quad (12)$$

Portanto, os polos de malha fechada são as raízes de

$$D_f(s) = D(s) + KN(s). \quad (13)$$

Para  $K = 0$ , tem-se  $D_f(s) = D(s)$  e os polos de malha fechada coincidem com os de malha aberta.

**Regra 2.** No **eixo real**, o LGR está sempre à **esquerda** de um número **ímpar** de polos mais zeros.

Com efeito, seja  $s$  um ponto no eixo real. Os ângulos  $\phi_1$  e  $\phi_2$  de um par de polos complexos conjugados se cancelam se o par estiver à esquerda de  $s$ , e somam  $360^\circ$  se o par estiver à esquerda de  $s$ , de modo que não alteram o resultado. O mesmo acontece com um par de zeros complexo conjugados. Também, se  $s$  estiver à direita de um zero ou polo real, o ângulo referente a esse zero ou polo é  $0^\circ$ . Por outro lado, se  $s$  estiver à esquerda de um zero ou polo, tem-se adição ou subtração de  $180^\circ$  de ângulo, respectivamente, de modo que é necessário que  $s$  esteja à esquerda de um número ímpar de zeros ou polos para satisfazer a condição angular de  $-180^\circ + 360^\circ k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

A Figura 5 mostra uma aplicação da regra 2.

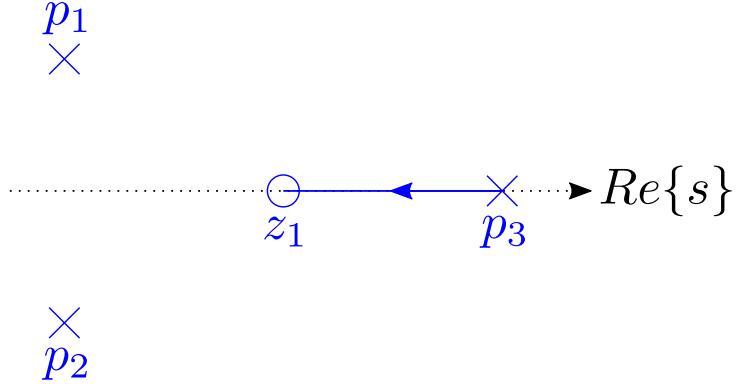


Figura 5: Exemplo de aplicação da regra 2. A seta indica caminho do polo de malha fechada com aumento de  $K$ .

**Regra 3.** Quando  $K \rightarrow \infty$ ,  $m$  ramos do LGR terminam nos zeros de malha aberta, enquanto os demais  $n - m$  vão para o infinito ao longo de assíntotas com ângulos  $\phi_l$  e que partem do ponto  $s = \alpha$  no eixo real dados por

$$\phi_l = \frac{180^\circ + 360^\circ l}{n - m}, \quad l = 0, 1, \dots, n - m - 1, \quad (14)$$

$$\alpha = \frac{1}{n - m} \left( \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j \right). \quad (15)$$

Para verificar essa regra, lembre que um ponto  $s$  pertence ao LGR se e somente se

$$G(s) = -\frac{1}{K}, \quad (16)$$

para algum  $K > 0$ . Logo, para  $K \rightarrow \infty$ , deve-se ter

$$G(s) = A \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \rightarrow 0. \quad (17)$$

Isso pode acontecer quando

$$s \rightarrow z_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (18)$$

ou, como  $n > m$ ,

$$|s| \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Com isso,  $m$  ramos terminam nos zeros de malha aberta, enquanto os demais  $n - m$  vão para o infinito. Falta determinar as direções desses demais ramos. Pode-se escrever

$$G(s) = A \frac{(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)} = A \left( \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0} \right), \quad (20)$$

que com uso de uma divisão longa de polinômios, torna-se

$$G(s) = \frac{A}{s^{n-m} + (a_{n-1} - b_{m-1})s^{n-m-1} + \cdots}, \quad (21)$$

de modo que se  $|s| \rightarrow \infty$ , pode-se dizer que

$$G(s) \approx \frac{A}{s^{n-m} + (a_{n-1} - b_{m-1})s^{n-m-1}}. \quad (22)$$

Ademais, pode-se escrever

$$s^{n-m} + (a_{n-1} - b_{m-1})s^{n-m-1} \approx \left( s + \frac{a_{n-1} - b_{m-1}}{n-m} \right)^{n-m} \quad (23)$$

Substituindo (23) em (22), obtém-se

$$G(s) \xrightarrow{|s| \rightarrow \infty} \frac{A}{(s - \alpha)^{n-m}} = G_\infty(s), \quad \alpha = \frac{b_{m-1} - a_{n-1}}{n-m}. \quad (24)$$

Da condição angular do LGR:

$$\begin{aligned} G_\infty(s) &= \frac{A}{(s - \alpha)^{n-m}} \Rightarrow \\ \angle G_\infty(s) &= -(n-m)\angle(s - \alpha) = -180^\circ - 360^\circ l \Rightarrow \\ \phi_l &= \frac{180^\circ + 360^\circ l}{n-m}. \end{aligned} \quad (25)$$

Em (25),  $l = 0, 1, \dots, n-m-1$  definem  $n-m$  semirretas distintas partindo do ponto  $s = \alpha$  (para diferentes valores de  $l$ , as semirretas se repetem). Finalmente, de (20), perceba que

$$a_{n-1} = -\sum_{j=1}^n p_j, \quad b_{m-1} = -\sum_{i=1}^m z_i, \quad (26)$$

de modo que

$$\alpha = \frac{1}{n-m} \left( \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j \right). \quad (27)$$

**Exemplo 1.** Esboce o LGR para

$$G(s) = \frac{10(s+2)}{(s+1)(s^2+6s+10)}. \quad (28)$$

Tem-se um zero em  $-2$  e três polos em  $-1$  e  $-3 \pm j$ . Pelas regras 1 e 2, pode-se concluir uma situação semelhante à da Figura 5. Com a regra 3, pode-se determinar as assíntotas para as quais os demais 2 ramos convergem. Assim:

$$\alpha = \frac{1}{n-m} \left( \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j \right) = -2,5 \quad (29)$$

e

$$\phi_l = \frac{180^\circ + 360^\circ l}{n-m} \Rightarrow \phi_l = \frac{180^\circ + 360^\circ l}{2}, \quad l = 0, 1 \Rightarrow \begin{cases} \phi_0 = 90^\circ, \\ \phi_1 = 270^\circ. \end{cases} \quad (30)$$

Com isso, pode-se fazer um esboço do LGR como mostrado na Figura 6. De fato, muitas vezes, apenas com as regras 1 a 3 já é possível fazer um esboço rápido do LGR. As próximas regras permitem um esboço mais preciso.

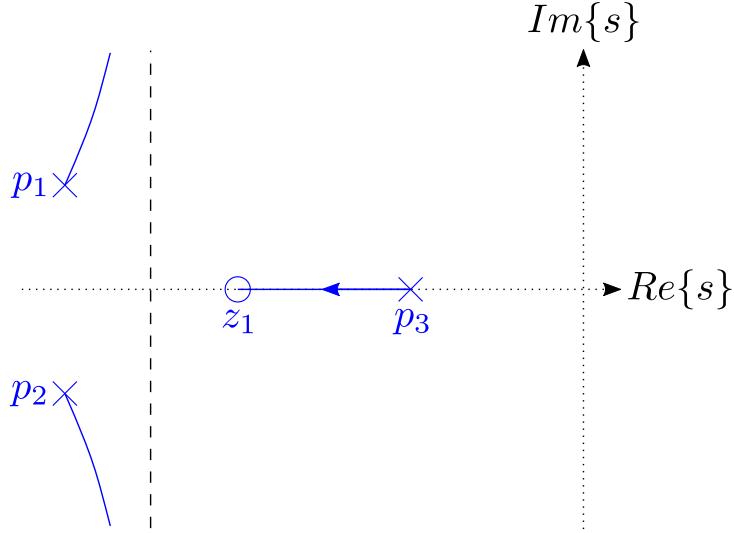


Figura 6: Esboço do LGR do Exemplo 1.

**Regra 4.** O ângulo de partida a partir de um polo ou chegada a um zero fora do eixo real pode ser determinado através da condição angular.

Mostra-se a aplicação dessa regra com um exemplo. Considere um ponto  $s$  do LGR próximo a um polo de malha aberta fora do eixo real, conforme mostra a Figura 7. Pode-se escrever

$$\begin{cases} \psi_1 - \phi_1 - \phi_2 - \phi_3 = -180^\circ \\ \phi_2 \approx 90^\circ \\ \psi_1 \approx \angle(p_1 - z_1) \\ \phi_3 \approx \angle(p_1 - p_3) \end{cases} \Rightarrow \phi_1 \approx 90^\circ + \angle(p_1 - z_1) - \angle(p_1 - p_3). \quad (31)$$

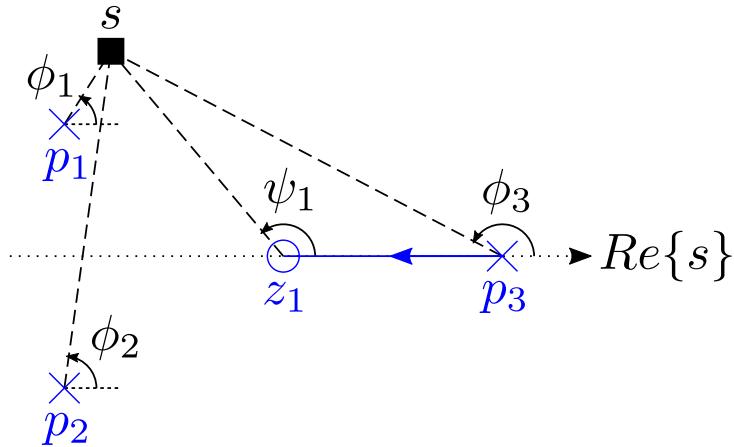


Figura 7: Exemplo de aplicação da regra 4. O ponto  $s$  está muito próximo do polo  $p_1$ .

**Regra 5.** Pontos  $s^*$  de partida do ou de retorno ao eixo real são obtidos resolvendo-se a equação

$$\frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{G(s)} \right] \Big|_{s=s^*} = 0. \quad (32)$$

Em certos casos, quando há polos ou zeros em sequência no eixo real, o LGR necessita partir do ou retornar ao eixo real (pois os ramos devem terminar em zeros ou no infinito), conforme mostra a Figura 8. Seja  $K^*$  o ganho associado a um ponto  $s^*$  do LGR, tem-se

$$D_f(s^*) = D(s^*) + K^*N(s^*) = 0 \Rightarrow K^* = -\frac{D(s^*)}{N(s^*)}. \quad (33)$$

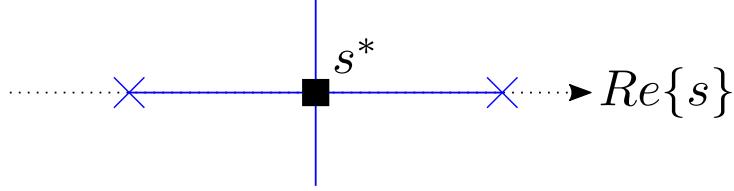


Figura 8: Exemplo de caso em que a regra 5 torna-se relevante.

No ponto de partida do (ou retorno ao) eixo real,  $s^*$  é raiz com multiplicidade dupla, logo deve-se ter ainda

$$D'_f(s^*) = 0 \Rightarrow D'(s^*) + K^*N'(s^*) = 0. \quad (34)$$

Substituindo (33) em (34), chega-se a

$$D'(s^*) - \frac{D(s^*)}{N(s^*)}N'(s^*) = 0 \Rightarrow \frac{D'(s^*)N(s^*) - D(s^*)N'(s^*)}{N(s^*)} = 0. \quad (35)$$

Por conta da regra do quociente da derivada, pode-se escrever essa condição de forma mais conveniente como

$$\frac{d}{ds} \left[ \frac{D(s)}{N(s)} \right] \Big|_{s=s^*} = \frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{G(s)} \right] \Big|_{s=s^*} = 0. \quad (36)$$

**Exemplo 2.** Seja

$$G(s) = \frac{A}{(s-p_1)(s-p_2)}. \quad (37)$$

Determine o ponto de partida do eixo real do LGR de  $G(s)$ .

Usando a regra 5, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{G(s)} \right] \Big|_{s=s^*} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d}{ds} \left[ \frac{s^2 - (p_1 + p_2)s + p_1 p_2}{A} \right] \Big|_{s=s^*} &= 2s^* - (p_1 + p_2) = 0 \Rightarrow s^* = \frac{p_1 + p_2}{2}. \end{aligned} \quad (38)$$

**Regra 6.** Suponha que os polos de malha fechada  $s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*$  tenham sido determinados para um certo  $K^*$ . Então, a continuação do LGR (LGR incremental) pode ser traçada adotando-se  $s_1^*, \dots, s_n^*$  como novos “polos de malha aberta”. Nesse caso, o parâmetro do LGR incremental é  $\delta_K$  tal que  $K = (1 + \delta_K)K^*$ .

A função de transferência em malha fechada para o ganho  $K = K^*$  é

$$G_f^*(s) = \frac{K^*G(s)}{1 + K^*G(s)}. \quad (39)$$

Seja  $K = (1 + \delta_K)K^*$ , tem-se

$$G_f(s) = \frac{(1 + \delta_K)K^*G(s)}{1 + (1 + \delta_K)K^*G(s)}. \quad (40)$$

Perceba que

$$G_f^*(s) = \frac{K^*G(s)}{1 + K^*G(s)} \Rightarrow 1 + K^*G(s) = \frac{K^*G(s)}{G_f^*(s)}. \quad (41)$$

Substituindo (41) em (40), obtém-se

$$G_f(s) = \frac{(1 + \delta_K)K^*G(s)}{\frac{K^*G(s)}{G_f^*(s)} + \delta_K K^*G(s)} \Rightarrow G_f(s) = \left( \frac{1 + \delta_K}{\delta_K} \right) \frac{\delta_K G_f^*(s)}{1 + \delta_K G_f^*(s)}, \quad (42)$$

de modo que os polos de  $G_f(s)$  seguem o LGR de  $G_f^*(s)$  com ganho  $\delta_K$ . Esse truque do LGR incremental é especialmente útil para determinar ângulo de partida do ou chegada no eixo real, conforme mostra o Exemplo 3.

**Exemplo 3.** Considere novamente o LGR do Exemplo 2. Pode-se determinar o ângulo de saída do eixo real com a ideia de LGR incremental. lembrando que há um polo com multiplicidade dupla em  $G_f^*(s)$  nesse caso, a partir da Figura 9, pode-se escrever

$$-2\phi = -180^\circ \Rightarrow \phi = 90^\circ. \quad (43)$$

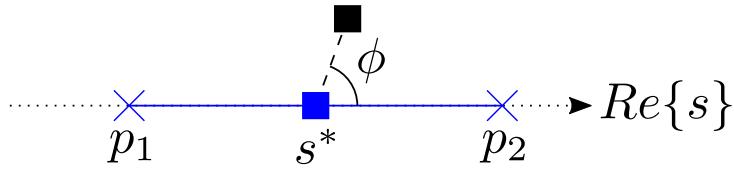


Figura 9: Situação do Exemplo 3.

**Regra 7.** Para determinar quando o LGR cruza o eixo imaginário  $s = j\omega$ , pode-se usar o critério de Routh-Hurwitz ou achar as raízes do denominador de  $G_f(j\omega)$ .

**Exemplo 4.** Seja

$$G(s) = \frac{20K}{s^3 + 32s^2 + 140s}. \quad (44)$$

Determine o cruzamento do LGR de  $G(s)$  com o eixo imaginário.

Na Seção 1, isso já foi feito com uso de Routh-Hurwitz. Assim, apresenta-se agora o método alternativo. Lembre que

$$G_f(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)} = \frac{20K}{s^3 + 32s^2 + 140s + 20K} = \frac{N_f(s)}{D_f(s)}. \quad (45)$$

Para determinar o cruzamento com o eixo imaginário, pode-se encontrar as raízes de

$$D_f(j\omega) = (j\omega)^3 + 32(j\omega)^2 + 140j\omega + 20K = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -\omega^3 + 140\omega = 0 \\ -32\omega^2 + 20K = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = 11,83 \text{ rad/s} \\ K = 224 \end{cases}. \quad (46)$$

Perceba que o valor de  $K$  é o mesmo já encontrado anteriormente na Seção 1.

# Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA

## Controle para Sistemas Computacionais – CMC-12

### Notas da Aula 12 – Projeto de Controlador com LGR

**Professor:** Marcos Ricardo Omena de Albuquerque Maximo

13 de junho de 2020

Na aula anterior, apresentou-se o método do Lugar Geométrico das Raízes (LGR). Nesta aula, mostra-se como utilizar o LGR para projeto de controladores. Destaca-se que no curso de CMC-12 não é dada uma ênfase grande ao projeto de controladores com uso de LGR. O aluno interessado pode estudar mais sobre o uso de LGR para projeto de controladores através das referências recomendadas.

Para fins didáticos, mostra-se alguns exemplos de como projetar controladores de forma analítica usando o LGR. Entretanto, destaca-se que o LGR antigamente era usado com ferramentas de traçado manual. Ademais, atualmente o LGR geralmente é usado através de ferramentas do MATLAB como `rlocus` ou `rltool`.

## 1 LGR para Ajuste de Ganho Proporcional

Projetos com LGR se baseiam em posicionar os polos de malha fechada em posições desejadas no plano  $s$ . Assim, é interessante relembrar como os parâmetros de um sistema de segunda ordem padrão influenciam nas posições de seus dois polos no plano  $s$ . A função de transferência de um sistema de segunda ordem padrão é

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad \omega_n > 0, \quad \xi > 0, \quad (1)$$

em que  $\omega_n$  e  $\xi$  são a frequência natural e o fator de amortecimento, respectivamente. Desse modo, os polos são

$$s_{1,2} = \frac{-2\xi\omega_n \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad (2)$$

em que

$$\Delta = 4\omega_n^2 (\xi^2 - 1). \quad (3)$$

Como já visto,  $\xi$  influencia o sinal de  $\Delta$ , de modo que há três casos gerais possíveis:

1. **Subamortecido:**  $0 \leq \xi < 1$ , quando os polos são complexos conjugados dados por

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}j = -\sigma \pm \omega_d j, \quad (4)$$

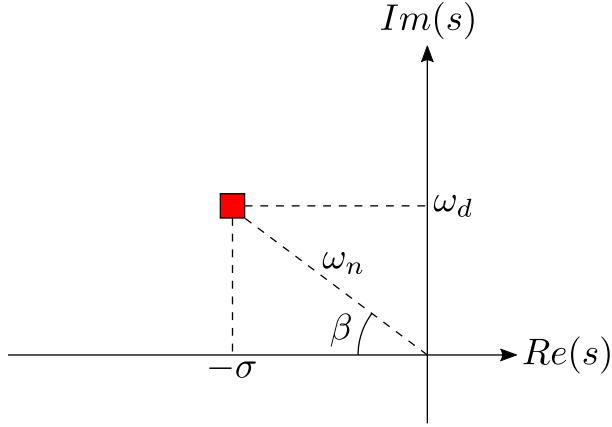


Figura 1: Representação gráfica do polo complexo  $p_1$  no plano  $s$ .

em que

$$\sigma = \xi \omega_n, \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}. \quad (5)$$

Representa-se esses polos no plano  $s$  conforme a Figura 1, em que tem-se

$$\beta = \arccos \xi. \quad (6)$$

2. **Criticamente amortecido:**  $\xi = 1$ , quando tem-se um único polo com multiplicidade dupla dado por

$$p = -\omega_n. \quad (7)$$

3. **Superamortecido:**  $\xi > 1$ , quando os polos são reais negativos distintos dados por

$$p_{1,2} = -\xi \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}. \quad (8)$$

Com isso, pode-se verificar como os polos se deslocam no plano  $s$  conforme altera-se  $\omega_n$  e  $\xi$ . Perceba o seguinte:

- Nos casos subamortecido e criticamente amortecimento,  $\omega_n$  dita a distância dos polos até a origem. Logo, fixado  $\xi$ , variar  $\omega_n$  descreve uma semi-reta no SPE partindo da origem. O ângulo dessa semi-reta vale  $\beta = \arccos \xi$ .
- Para o caso subamortecido,  $\xi$  dita o ângulo  $\beta$ . Perceba que  $\xi = 0$  coloca os polos em cima do eixo imaginário ( $\beta = \pi/2$ ) e  $\xi = 1$  deixa os polos em cima do eixo real ( $\beta = 0$ ). Para  $0 < \xi < 1$ , tem-se ângulos entre 0 e  $\pi/2$ . Portanto, no caso subamortecido, fixado  $\omega_n$ , variar  $\xi$  descreve um arco de circunferência no plano  $s$ .
- Para o caso superamortecido,  $\xi$  dita a separação entre os dois polos reais. Quando quando  $\xi = 1$  (caso criticamente amortecido), os dois polos coincidem e à medida que se aumenta  $\xi$ , os polos vão se separando. Quando  $\xi \rightarrow \infty$ , um dos polos se aproxima da origem.

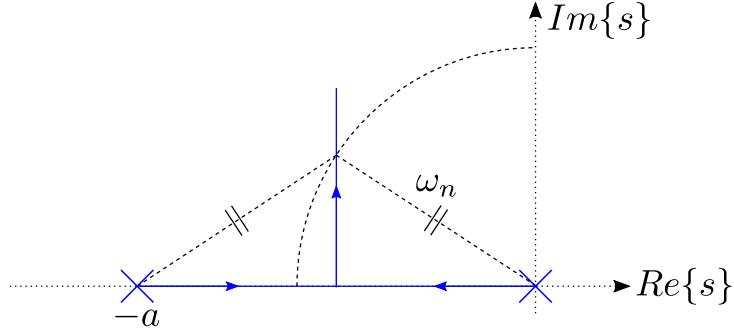


Figura 2: LGR do Exemplo 1.

Assim, uma abordagem comum no projeto de controladores com LGR consiste em determinar a interseção entre o LGR e o lugar geométrico que os polos de segunda ordem descrevem no plano  $s$  quando se fixa um dos parâmetros  $\omega_n$  ou  $\xi$ . Mostra-se o uso dessa técnica para ajuste de ganho nos exemplos a seguir.

**Exemplo 1.** Seja

$$G(s) = \frac{A}{s(s+a)}, \quad A > 0, \quad a > 0, \quad (9)$$

Considere um controlador em malha fechada com lei proporcional. Usando o LGR, determine o ganho proporcional  $K$  para que o sistema tenha frequência natural  $\omega_n$ .

Pela regra 5 do LGR, sabe-se que o LGR parte do eixo real no ponto médio entre os dois polos, i.e. de  $s = -a/2$ . Além disso, pela regra 6 (LGR incremental), pode-se determinar que o ângulo de partida é  $90^\circ$ . Com isso, o LGR é o esboçado na Figura 2, que contém também o lugar geométrico definido pelos polos com frequência natural  $\omega_n$ . Pela geometria da figura, a distância do polo de malha fechada desejado até cada um dos polos de malha aberta é  $\omega_n$ . Finalmente, pode-se determinar  $K$  pela condição de magnitude do LGR:

$$K = \frac{|s||s+a|}{A} \Rightarrow K = \frac{\omega_n^2}{A}. \quad (10)$$

**Exemplo 2.** Seja

$$G(s) = 0,2 \frac{s+5}{s(s+2)}. \quad (11)$$

Usando o LGR, determine o ganho  $K$  de modo que os polos de malha fechada sejam complexo-conjugados com distância  $\sigma = 3 \text{ s}^{-1}$  do eixo imaginário.

Para projetar o sistema de controle, basta determinar a interseção do LGR de  $G(s)$  com a reta vertical  $s = -\sigma = -3 \text{ s}^{-1}$ . Considere uma função de transferência na forma

$$G(s) = A \frac{s-z}{(s-p_1)(s-p_2)} = A \frac{s-z}{s^2 - (p_1+p_2)s + p_1p_2}, \quad (12)$$

com  $z < p_1 < p_2 < 0$ . Perceba que (11) está na forma de (12). Demonstra-se que o LGR de (12) tem a forma mostrada na Figura 3, em que os polos de malha fechada traçam uma circunferência fora do eixo real.

A partir da regra 2, pode-se determinar quais partes do eixo real pertencem ao LGR. Como há um zero, um dos ramos do LGR deve terminar nesse zero, enquanto o outro

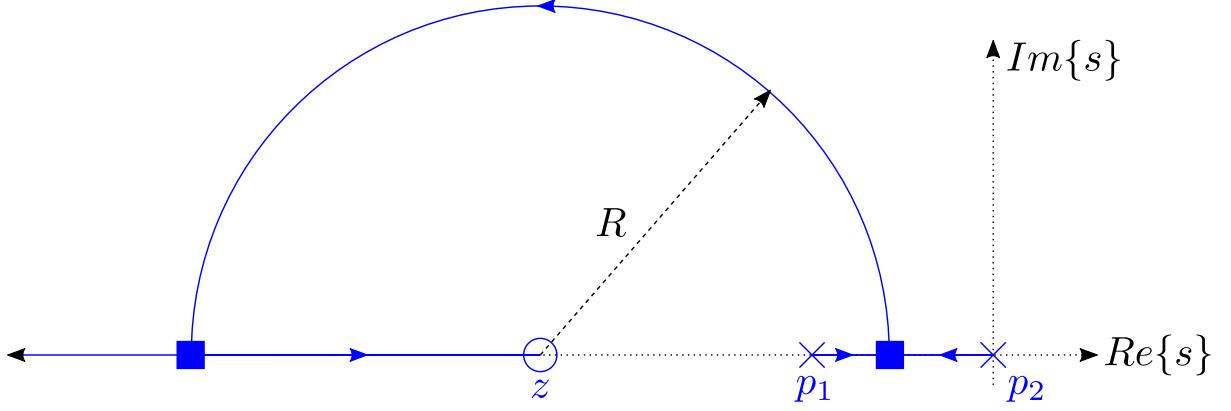


Figura 3: LGR da função de transferência apresentada em (12).

ramo deve terminar no infinito. Portanto, os ramos devem começar nos polos, sair do eixo real e então voltar ao eixo real, conforme pode-se ver na Figura 3. Com a regra 5, pode-se calcular os pontos de partida do e retorno ao eixo real:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{G(s)} \right] = 0 &\Rightarrow \frac{d}{ds} \left[ \frac{s^2 - (p_1 + p_2)s + p_1 p_2}{s - z} \right] = 0 \Rightarrow \\ [2s - (p_1 + p_2)](s - z) - [s^2 - (p_1 + p_2)s + p_1 p_2] &= 0 \Rightarrow \\ s^2 - 2zs + (p_1 + p_2)z - p_1 p_2 &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

O discriminante de (13) é

$$\begin{aligned} \Delta = 4z^2 - 4[(p_1 + p_2)z - p_1 p_2] &= 4[z^2 - (p_1 + p_2)z + p_1 p_2] = \\ 4[z(z - p_1) - p_2(z - p_1)] &= 4(z - p_1)(z - p_2). \end{aligned} \quad (14)$$

Logo, a solução de (13) é

$$s = \frac{2z \pm \sqrt{4(z - p_1)(z - p_2)}}{2} \Rightarrow s = z \pm \sqrt{(z - p_1)(z - p_2)}. \quad (15)$$

Para mostrar que o LGR fora do eixo real forma uma circunferência, considere a Figura 4, em que se considera a construção de um LGR incremental a partir de um  $G_f^*(s)$ , que possui o zero  $z$  e os polos  $s_1^*$  e  $s_2^*$ . Pela condição angular do LGR, deve-se ter

$$\psi_1 - \phi_1 - \phi_2 = -180^\circ. \quad (16)$$

Como  $s_1$  está muito próximo de  $s_1^*$  na Figura 4, pode-se dizer que

$$\begin{cases} \psi_1 \approx \psi_1^*, \\ \phi_2 \approx 90^\circ. \end{cases} \quad (17)$$

Usando (17) em (16), obtém-se

$$\psi_1 - \phi_1 - \phi_2 = -180^\circ \Rightarrow \phi_1 \approx \psi_1 + 90^\circ. \quad (18)$$

Como  $s_1^*$  foi escolhido de forma genérica, (18) deve valer para qualquer ponto do LGR fora do eixo real, de modo que o LGR de fato traça uma circunferência fora do eixo real com centro em  $z$ . Ademais, o raio dessa circunferência é  $R = \sqrt{(z - p_1)(z - p_2)}$ .

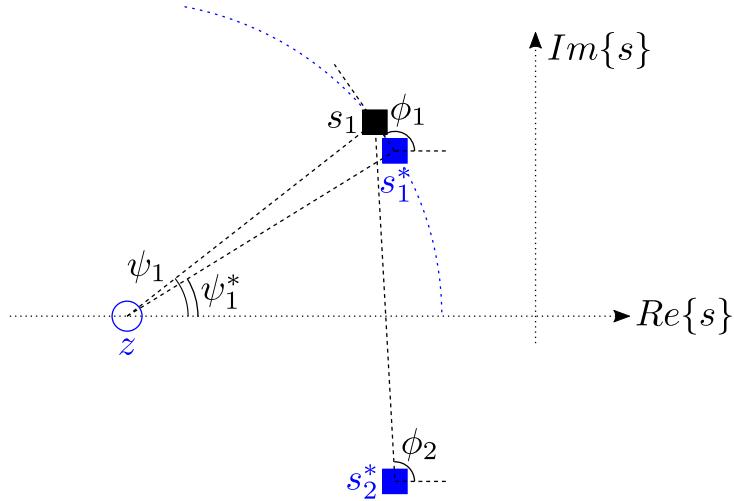


Figura 4: Condição angular aplicada ao LGR incremental.

Volte então para o exemplo numérico de (11). Comparando (11) e (12), tem-se

$$\begin{cases} A = 0,2, \\ z = -5, \\ p_1 = -2, \\ p_2 = 0, \end{cases} \quad (19)$$

de modo que, de (15), os pontos de partida do eixo real são

$$s = z \pm \sqrt{(z - p_1)(z - p_2)} = -5 \pm \sqrt{3 \cdot 5} \Rightarrow s = -5 \pm 3,87 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -1,13, \\ s_2 = -8,87. \end{cases} \quad (20)$$

Além disso, o raio da circunferência é  $R = \sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{15} \approx 3,87$ . Com isso, para calcular a interseção entre o LGR e a reta vertical  $s = -\sigma = -3 \text{ } s^{-1}$ , tem-se a geometria mostrada na Figura 5. Por Pitágoras:

$$h = \sqrt{15 - 2^2} = \sqrt{11}. \quad (21)$$

$$\ell_1 = \sqrt{h^2 + 1^2} = \sqrt{12}. \quad (22)$$

$$\ell_2 = \sqrt{h^2 + 3^2} = \sqrt{20}. \quad (23)$$

Finalmente, pela condição de magnitude do LGR, pode-se calcular  $K$  como

$$K = \left| \frac{1}{G(s)} \right| = \frac{|s||s+2|}{0,2|s+5|} = \frac{\ell_1 \ell_2}{0,2R} \Rightarrow K = 20. \quad (24)$$

Pode-se verificar a solução encontrada no MATLAB com `rlocus`, cujo resultado é mostrado na Figura 6. A grade (*grid*) mostrada nessa figura apresenta curvas de nível de  $\omega_n$  e  $\xi$  e foi criada com `sgrid`. Perceba que um projeto através de `rlocus` nesse caso envolve apenas mover o *datatip* em cima da curva até encontrar o ponto do LGR que atende ao requisito  $\sigma = 3 \text{ } s^{-1}$ .

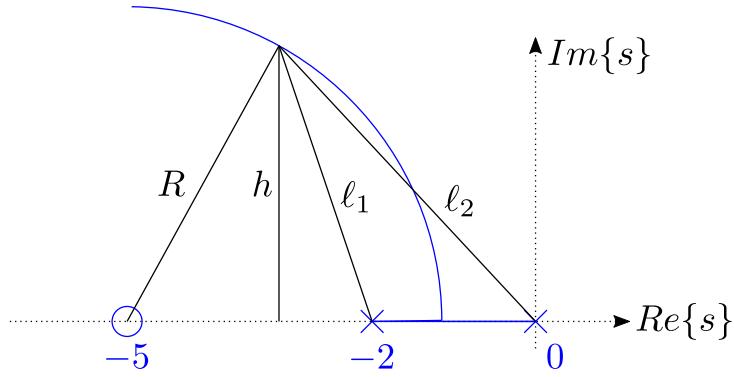


Figura 5: Determinação da interseção entre o LGR e a reta  $s = -3 \text{ s}^{-1}$ .

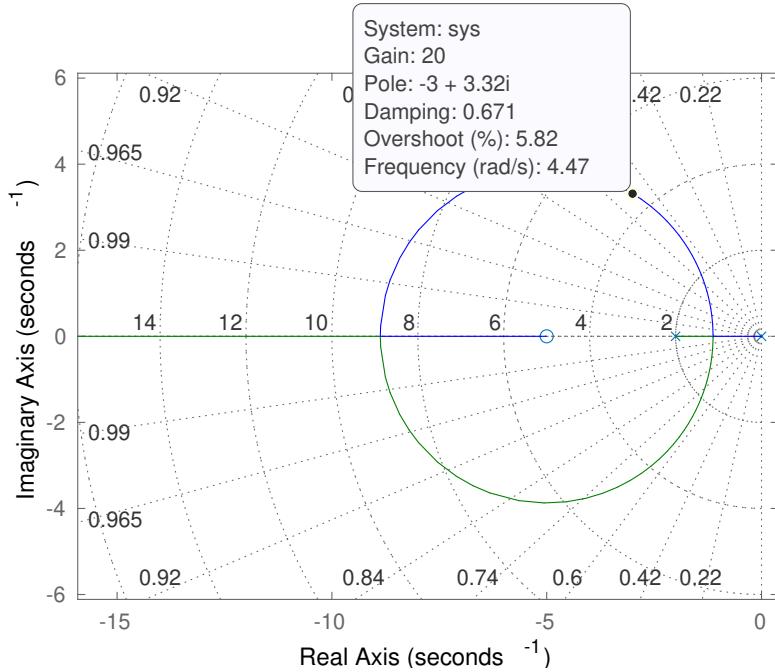


Figura 6: Traçado do LGR do Exemplo 2 através da função `rlocus`.

**Exemplo 3.** Seja

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+2)}. \quad (25)$$

Determine  $K$  de modo que o sobressinal seja aproximadamente  $M_p = 0,163$ .

Considere que o comportamento do sistema é ditado por polos complexo conjugados dominantes. Da fórmula de sobressinal para um sistema de segunda ordem, tem-se

$$M_p = \exp\left(-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) = 0,163 \Rightarrow \xi = \frac{-\ln M_p}{\sqrt{\pi^2 + (\ln M_p)^2}} \Rightarrow \xi = 0,5, \quad (26)$$

de modo que

$$\beta = \arccos \xi \Rightarrow \beta = 60^\circ. \quad (27)$$

Assim, tem-se a situação mostrada na Figura 7. No caso, não há necessidade de um esboço preciso do LGR para solução do exemplo. Entretanto, caso se deseje, é possível

obter o ponto de partida do eixo real e o ponto de cruzamento com o eixo imaginário a partir das regras de traçado do LGR.

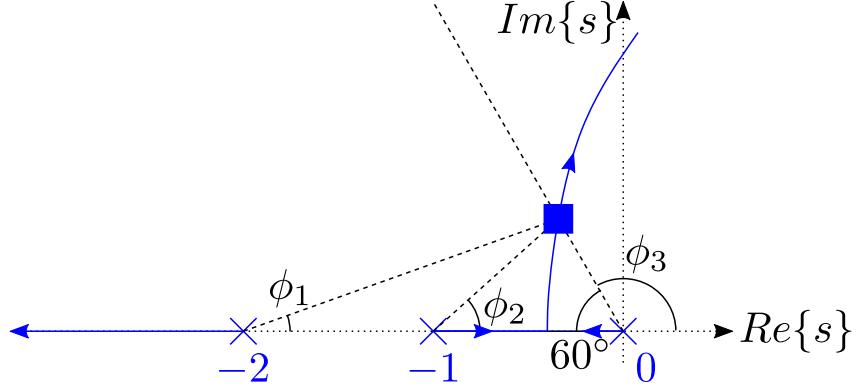


Figura 7: Esboço do LGR do Exemplo 3.

Aplicando a condição angular à situação da Figura 7, obtém-se

$$\begin{cases} -\phi_1 - \phi_2 - \phi_3 = -180^\circ \\ \phi_3 = 120^\circ \end{cases} \Rightarrow \phi_2 = 60^\circ - \phi_1. \quad (28)$$

Considere os triângulos destacados na Figura 8. Aplicando a lei dos senos no triângulo maior, pode-se escrever

$$\frac{\ell}{\sin \phi_1} = \frac{2}{\sin (120^\circ - \phi_1)} \Rightarrow \ell = \frac{2 \sin \phi_1}{\sin (120^\circ - \phi_1)}. \quad (29)$$

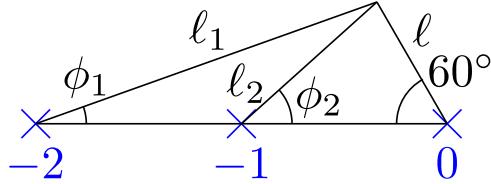


Figura 8: Triângulos existentes no Exemplo 3.

Então, aplicando a lei dos senos no triângulo menor, tem-se

$$\frac{\ell}{\sin \phi_2} = \frac{1}{\sin (120^\circ - \phi_2)} \Rightarrow \ell = \frac{\sin \phi_2}{\sin (120^\circ - \phi_2)} \quad (30)$$

Igualando (29) e (30) e usando (28), chega-se a

$$\begin{aligned}
\frac{2 \sin \phi_1}{\sin(120^\circ - \phi_1)} &= \frac{\sin(60^\circ - \phi_1)}{\sin(60^\circ + \phi_1)} \Rightarrow \\
\frac{2 \sin \phi_1}{\sin 120^\circ \cos \phi_1 - \sin \phi_1 \cos 120^\circ} &= \frac{\sin 60^\circ \cos \phi_1 - \sin \phi_1 \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ \cos \phi_1 + \sin \phi_1 \cos 60^\circ} \Rightarrow \\
\frac{2 \sin \phi_1}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \phi_1 + \frac{1}{2} \sin \phi_1} &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \phi_1 - \frac{1}{2} \sin \phi_1}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \phi_1 + \frac{1}{2} \sin \phi_1} \Rightarrow \\
4\sqrt{3} \sin \phi_1 \cos \phi_1 + 4 \sin^2 \phi_1 &= 3 \cos^2 \phi_1 - \sin^2 \phi_1 \Rightarrow \\
4\sqrt{3} \sin \phi_1 \cos \phi_1 &= 3 - 8 \sin^2 \phi_1.
\end{aligned} \tag{31}$$

Faça  $\sin \phi_1 = x$  e  $\cos \phi_1 = \sqrt{1 - x^2}$ , então

$$\begin{aligned}
4\sqrt{3}x\sqrt{1 - x^2} &= 3 - 8x^2 \Rightarrow 48x^2(1 - x^2) = 9 - 48x^2 + 64x^4 \Rightarrow \\
112x^4 - 96x^2 + 9 &= 0 \Rightarrow x^2 = \frac{96 \pm 72}{224}.
\end{aligned} \tag{32}$$

Da Figura 4,  $\phi_1 > 0$ , logo deve-se ter  $x = \sin \phi_1 > 0$ , de modo que

$$x = \sin \phi_1 = \sqrt{\frac{96 \pm 72}{224}} \Rightarrow \begin{cases} \phi_1 = 60^\circ, \\ \phi_1 = 19,1^\circ. \end{cases} \tag{33}$$

Se  $\phi_1 = 60^\circ$ , então, de (28),  $\phi_2 = 0$ , de modo que essa solução não convém. Assim,  $\phi_1 = 19,1^\circ$ . Voltando à Figura 8, pode-se determinar as distâncias dos polos ao ponto  $s$  a partir da lei dos senos:

$$\frac{\ell}{\sin \phi_1} = \frac{2}{\sin(120^\circ - \phi_1)} \Rightarrow \ell = 0,6665. \tag{34}$$

$$\frac{\ell_1}{\sin 60^\circ} = \frac{\ell}{\sin \phi_1} \Rightarrow \ell_1 = 1,7640. \tag{35}$$

$$\frac{\ell_2}{\sin 60^\circ} = \frac{\ell}{\sin \phi_2} \Rightarrow \ell_2 = 0,8816. \tag{36}$$

Finalmente, a partir da condição de magnitude do LGR, pode-se determinar  $K$ :

$$K = \left| \frac{1}{G(s)} \right| \Rightarrow K = \frac{|s||s+1||s+2|}{10} \Rightarrow K = 0,1037. \tag{37}$$

Pode-se ainda verificar se a condição de polos dominantes é satisfeita. A função de transferência de malha fechada é

$$G_f(s) = \frac{10K}{s^3 + 3s^2 + 2s + 10K} \Rightarrow G_f(s) = \frac{1,037}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1,037}, \tag{38}$$

cujos polos são

$$\begin{cases} p_1 = -2,3333, \\ p_2 = -0,3333 + 0,5773j, \\ p_3 = -0,3333 - 0,5773j. \end{cases} \tag{39}$$

Como  $2,3333 \geq 5 \times 0,3333 = 1,6666$ , a condição de polos dominantes é satisfeita. A Figura 9 apresenta o LGR traçado com uso do **rlocus** com o ponto de projeto destacado.

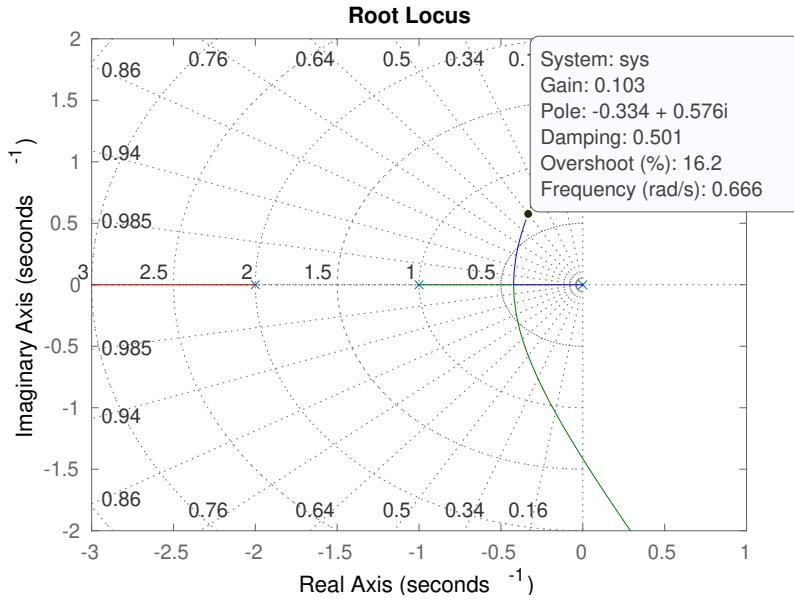


Figura 9: Traçado do LGR do Exemplo 3 através da função `rlocus`.

## 2 LGR para Projeto de Compensador com Zeros e Polos Adicionais

Até o momento, usou-se o LGR para projetar apenas controladores do tipo P. Entretanto, pode acontecer do LGR não passar pela região do plano  $s$  definida pelos requisitos. Nesse caso, é necessário adicionar zeros e polos ao compensador para forçar o LGR a passar pelas posições desejadas. Perceba que para o LGR não faz diferença se os polos vêm do compensador  $C(s)$  ou da planta  $G(s)$ . Com efeito, considere que o compensador é dado por

$$C(s) = KC'(s), \quad (40)$$

em que  $C'(s)$  contém zeros e polos convenientemente escolhidos:

$$C'(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_{m_c})}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_{n_c})}, \quad n_c \geq m_c. \quad (41)$$

Pode-se então traçar o LGR da função de transferência de malha aberta  $G'(s) = C'(s)G(s)$  e ajustar o ganho  $K$ , de modo que se cai em casos semelhantes aos discutidos na Seção 1. A escolha dos zeros e polos de  $C'(s)$  geralmente é feita intuitiva a partir do conhecimento de como o LGR será afetado. No MATLAB, a função `rltool` é muito conveniente para um projeto desse tipo, pois permite adição e remoção de zeros e polos com verificação em tempo real de como essas modificações afetam o LGR.

A seguir, apresenta-se um exemplo de como usar o LGR para projeto de compensador com zeros e polos adicionais.

**Exemplo 4.** Seja

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4}{s + 10}. \quad (42)$$

Projetar um controlador em malha fechada de modo a atender às seguintes especificações para resposta ao degrau:

- Erro em regime nulo.
- Sobressinal  $M_p = 20\%$ .
- Tempo de pico  $t_p = 0,1 \text{ s}$ .

Da fórmula do sobressinal para um sistema de segunda ordem padrão, obtém-se

$$M_p = \exp\left(\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \Rightarrow \xi = \frac{-\ln M_p}{\sqrt{\pi^2 + (\ln M_p)^2}} \Rightarrow \xi = 0,456. \quad (43)$$

E pelo tempo de pico, chega-se a

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \Rightarrow \omega_n = \frac{\pi}{t_p \sqrt{1 - \xi^2}} \Rightarrow \omega_n = 35,3 \text{ rad/s}. \quad (44)$$

Além disso, tem-se

$$\begin{cases} \xi = 0,456 \\ \omega_n = 35,3 \text{ rad/s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \arccos \xi = 62,9^\circ \\ \sigma = \xi \omega_n = 16,1 \text{ s}^{-1} \end{cases} \quad (45)$$

Como  $G(s)$  é do tipo 0, não é possível atender ao requisito de erro nulo em regime com um controlador proporcional. Considere então a adição de um polo na origem no compensador, de modo que

$$C(s) = \frac{K}{s} = K \underbrace{\frac{1}{s}}_{C'(s)}. \quad (46)$$

Logo

$$G'(s) = C'(s)G(s) = \frac{4}{s(s+10)}. \quad (47)$$

Porém, perceba que o LGR definido por (47) não passa pelo ponto desejado para projeto, conforme mostra a Figura 10. Para forçar o LGR a passar pelo ponto desejado, pode-se adicionar um zero mais afastado da origem de modo a puxar o LGR para a esquerda, o que leva à situação mostrada genericamente na Figura 3. Assim, o compensador fica

$$C(s) = \frac{K(s-z)}{s} = K \underbrace{\frac{s-z}{s}}_{C'(s)}. \quad (48)$$

Com isso, deve-se considerar o LGR de

$$G'(s) = 4 \frac{s-z}{s(s+10)} = A \frac{s-z}{(s-p_1)(s-p_2)}, \quad (49)$$

em que

$$\begin{cases} A = 4, \\ p_1 = 0, \\ p_2 = -10, \end{cases} \quad (50)$$

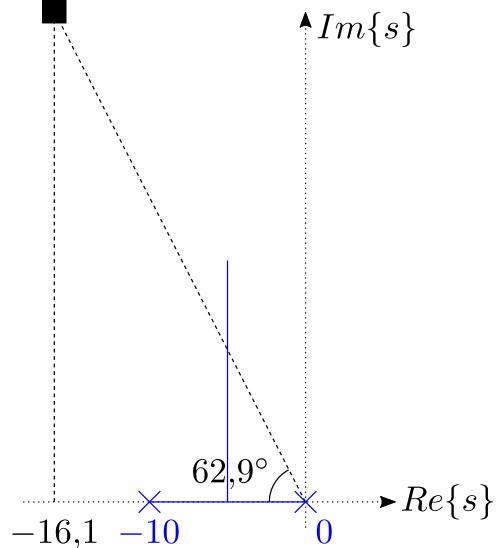


Figura 10: Traçado do LGR do Exemplo 4 com compensador dado por (46).

e  $z$  deve ser determinado para atendimento aos requisitos. Conforme visto no Exemplo 2, o LGR de uma função de transferência na forma mostrada em (49) descreve uma circunferência fora do eixo real centrada no zero e com raio  $R = \sqrt{(z - p_1)(z - p_2)}$ . Assim, tem-se a situação mostrada na Figura 11. Da geometria, tem-se

$$h = \sqrt{\omega_n^2 - \sigma^2} = \sqrt{35,3^2 - 16,1^2} = 31,4. \quad (51)$$

$$\begin{aligned} R^2 &= (z - p_1)(z - p_2) = h^2 + (-\sigma - z)^2 \Rightarrow \\ z^2 + 10z &= (31,4)^2 + (-16,1 - z)^2 \Rightarrow z = -56,1. \end{aligned} \quad (52)$$

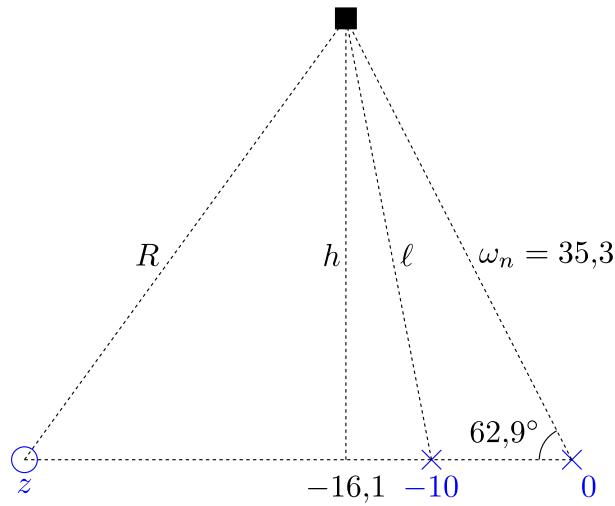


Figura 11: Situação do Exemplo 4.

Então, por Pitágoras, calcula-se

$$R = \sqrt{(-\sigma - z)^2 + h^2} \Rightarrow R = 50,9. \quad (53)$$

$$\ell = \sqrt{(p_1 - (-\sigma))^2 + h^2} \Rightarrow \ell = 32. \quad (54)$$

Pela condição de magnitude do LGR, determina-se  $K$ :

$$K = \left| \frac{1}{G'(s)} \right| = \frac{|s||s+10|}{4|s-z|} = \frac{\ell\omega_n}{4R} \Rightarrow K = 5,55. \quad (55)$$

Finalmente, perceba que o compensador usado em (49) é equivalente a um PI. Com isso, pode-se determinar ganhos  $K_p$  e  $K_i$  de acordo com

$$C(s) = K \frac{s-z}{s} = \frac{Ks - Kz}{s} = \frac{K_p s + K_i}{s} \Rightarrow \begin{cases} K_p = K \\ K_i = -Kz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_p = 5,55 \\ K_i = 311 \end{cases}. \quad (56)$$

Como já visto antes, a presença do zero em  $s = z$  faz com que o sistema não tenha comportamento de segunda ordem padrão. Entretanto, como o compensador é PI, a solução para resolver isso é simples e já foi apresentada antes. Basta usar um pré-filtro  $F(s)$  dado por

$$F(s) = \frac{K_i}{K_p s + K_i}. \quad (57)$$

Para verificação, mostra-se na Figura 12 uma resposta ao degrau do sistema em malha fechada com pré-filtro. Com efeito, pode-se verificar atendimento aos requisitos.

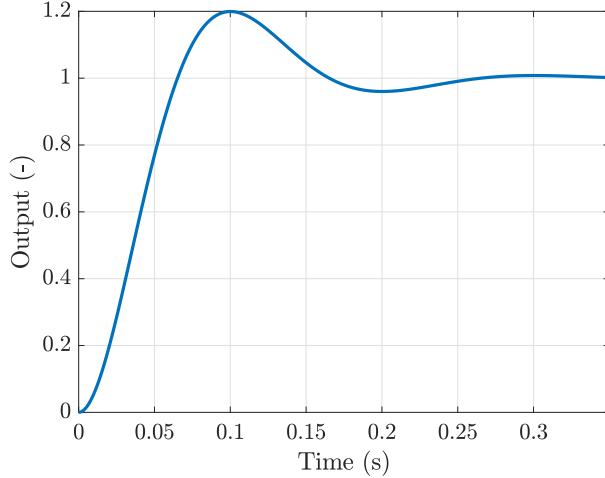


Figura 12: Resposta ao degrau do sistema de controle projetado no Exemplo 4.

### 3 LGR de um Parâmetro Diferente do Ganh

Também é possível usar o LGR para analisar como um parâmetro diferente do ganho  $K$  influencia as posições dos polos de malha fechada. Considere que a função de transferência em malha aberta é dada por

$$G(s) = \frac{1}{s+a} G'(s), \quad (58)$$

No caso, deseja-se analisar como o polo de malha aberta  $s = -a$  influencia os polos de malha fechada. Note que esse polo pode pertencer ao compensador ou à planta. A função de transferência em malha fechada nesse caso é

$$G_f(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{G'(s)}{s + a + G'(s)}, \quad (59)$$

de modo que os polos de malha fechada podem ser determinados por

$$D_f(s) = s + a + G'(s) = 0 \Rightarrow s + G'(s) = -a \Rightarrow Q(s) = -\frac{1}{a}, \quad (60)$$

em que

$$Q(s) = \frac{1}{s + G'(s)}. \quad (61)$$

Portanto, pode-se analisar como  $a$  influencia os polos de malha fechada através do LGR de  $Q(s)$ . De maneira análoga, pode-se usar o LGR para determinar a influência de qualquer parâmetro  $c$  sobre os polos de malha fechada. Basta encontrar:

$$Q(s) = -\frac{1}{c}. \quad (62)$$

# **Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA**

## **Controle para Sistemas Computacionais – CMC-12**

### **Notas da Aula 13 – Introdução ao Domínio da Frequência e ao Diagrama de Bode**

**Professor:** Marcos Ricardo Omena de Albuquerque Maximo

7 de junho de 2020

Nesta aula, introduz-se os chamados métodos no domínio da frequência. Na indústria, métodos de projeto no domínio do tempo são os mais populares, por uma série de motivos. De começo, em geral, os requisitos na indústria são definidos no domínio do tempo, pois:

- Evita-se particularizar as especificações para alguma entrada específica, como degrau ou rampa.
- Evita-se particularizar as especificações para alguma estrutura particular de sistema, como por exemplo para um sistema de alguma ordem específica.
- É fácil especificar requisitos sobre robustez a erro de modelo.
- É mais fácil caracterizar suscetibilidade a ruídos.
- No levantamento de requisitos, costuma-se usar modelos matemáticos mais simplificados do que os de projeto. É mais fácil deixar os requisitos levantados com os modelos simplificados mais genéricos se o domínio da frequência for utilizado.

Com isso, pode-se projetar para atender diretamente aos requisitos do sistema, enquanto se métodos no domínio do tempo forem utilizados, haverá a necessidade de transformar os requisitos para parâmetros no domínio do tempo. Perceba que isso não impede que também sejam considerados requisitos no domínio da frequência. Por exemplo, na prática é comum requerer erro em regime nulo para entrada degrau, mesmo que maioria dos demais requisitos estejam no domínio da frequência.

Nos cursos de Cálculo, você já estudou a chamada transformada de Fourier e neste contexto deve ter visto o termo “domínio da frequência”. No fundo, fala-se da mesma coisa aqui, porém a apresentação será um pouco diferente. Há uma forte relação entre os métodos que serão discutidos e a transformada de Fourier.

Num primeiro contato, métodos de projeto no domínio da frequência podem parecer pouco intuitivos. Porém, com a prática, o domínio da frequência torna-se muito intuitivo para o projetista. Ademais, nesta aula, apresenta-se o diagrama de Bode, com certeza uma das técnicas de análise mais populares para projeto de sistemas de controle. O diagrama de Bode foi desenvolvido por H. W. Bode na Bell Laboratories entre 1932 e

1942. Assim como o LGR, sua popularidade inicial se deveu a regras de traçado manuais intuitivas. Atualmente, costuma-se traçar o diagrama de Bode através do MATLAB.

## 1 Introdução ao Domínio da Frequência

Seja um sistema linear, invariante no tempo e estável, com função de transferência

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}. \quad (1)$$

Considere então uma entrada senoidal de frequência  $\omega$

$$u(t) = \sin(\omega t), \quad (2)$$

ou em Laplace

$$U(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (3)$$

Com condições iniciais nulas, a resposta do sistema fica

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (4)$$

Através de expansão em frações parciais, obtém-se

$$Y(s) = \underbrace{\frac{c_0}{s - j\omega} + \frac{c_0^*}{s + j\omega}}_{Y_0(s)} + \frac{c_1}{s - p_1} + \cdots + \frac{c_n}{s - p_n}. \quad (5)$$

em que  $p_1, p_2, \dots, p_n$  são os  $n$  polos distintos de  $G(s)$ . Assim como já feito anteriormente, assume-se inicialmente que os polos são distintos e depois será usado um argumento para generalizar para o caso em que há polos repetidos. O resíduo  $c_0$  pode ser calculado por

$$\begin{aligned} c_0 &= (s - j\omega)Y(s)|_{s=j\omega} = (s - j\omega)G(s)\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\Big|_{s=j\omega} = \\ &(s - j\omega)G(s)\frac{\omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)}\Big|_{s=j\omega} = \frac{G(j\omega)}{2j} \Rightarrow c_0 = -\frac{jG(j\omega)}{2}, \end{aligned} \quad (6)$$

de modo que

$$\begin{aligned} Y_0(s) &= \frac{c_0}{s - j\omega} + \frac{c_0^*}{s + j\omega} = \frac{c_0(s + j\omega) + c_0^*(s - j\omega)}{(s + j\omega)(s - j\omega)} \Rightarrow \\ Y_0(s) &= \frac{(c_0 + c_0^*)s + (c_0 - c_0^*)j\omega}{s^2 + \omega^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Perceba que

$$\begin{cases} c_0 + c_0^* = 2\operatorname{Re}(c_0), \\ c_0 - c_0^* = 2\operatorname{Im}\{c_0\}j. \end{cases} \quad (8)$$

Portanto

$$\begin{aligned} Y_0(s) &= 2\operatorname{Re}\{c_0\} \frac{s}{s^2 + \omega^2} - 2\operatorname{Im}\{c_0\} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \Rightarrow \\ Y_0(s) &= 2 \left( \operatorname{Re}\{c_0\} \frac{s}{s^2 + \omega^2} - \operatorname{Im}\{c_0\} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

logo

$$\begin{aligned} y_0(t) &= 2(\operatorname{Re}\{c_0\} \cos(\omega t) - \operatorname{Im}\{c_0\} \sin(\omega t)) \Rightarrow \\ y_0(t) &= 2\sqrt{(\operatorname{Re}\{c_0\})^2 + (\operatorname{Im}\{c_0\})^2} \sin\left(\omega t + \arctan\left(-\frac{\operatorname{Re}\{c_0\}}{\operatorname{Im}\{c_0\}}\right)\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Note que

$$c_0 = -\frac{jG(j\omega)}{2} = \frac{\operatorname{Im}\{G(j\omega)\}}{2} - j\frac{\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}\{c_0\} = \frac{\operatorname{Im}\{G(j\omega)\}}{2}, \\ \operatorname{Im}\{c_0\} = -\frac{\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}}{2}. \end{cases} \quad (11)$$

Substituindo (11) em (10), obtém-se

$$\begin{aligned} y_0(t) &= \sqrt{(\operatorname{Im}\{G(j\omega)\})^2 + (\operatorname{Re}\{G(j\omega)\})^2} \sin\left(\omega t + \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\{G(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}}\right)\right) \Rightarrow \\ y_0 &= |G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega)). \end{aligned} \quad (12)$$

Assim, a transformada inversa de (5) resulta em

$$y(t) = y_0(t) + c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \cdots + c_n e^{p_n t} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_0(t), \quad (13)$$

dado que o sistema é estável (i.e.  $\operatorname{Re}\{p_i\} < 0, \forall i$ ). Se algum polo  $p_i$  com multiplicidade  $m$ , haverá também um termo  $t^m e^{p_i t}$  em (13), que também tende para zero quando  $t \rightarrow \infty$ . Em resumo, a resposta em regime permanente de um sistema LIT para uma entrada senoidal

$$u(t) = \sin(\omega t) \quad (14)$$

é dada por

$$y(t) = |G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega)), \quad (15)$$

também chamada de resposta em **regime permanente senoidal**. Mais genericamente, se a entrada é

$$u(t) = A_u \sin(\omega t + \phi_u), \quad (16)$$

ou seja, uma senoide com amplitude  $A_u$  e fase  $\phi_u$ . A saída em regime permanente senoidal é dada por

$$y(t) = A_y \sin(\omega t + \phi_y) \quad (17)$$

tal que

$$|G(j\omega)| = \frac{A_y}{A_u}, \quad \angle G(j\omega) = \phi_y - \phi_u, \quad (18)$$

isto é, um sistema LIT modifica uma senoide na entrada de acordo com (18). Ademais, se a entrada for uma combinação de  $p$  senoides na forma

$$u(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) + \cdots + A_p \sin(\omega_p t + \phi_p), \quad (19)$$

então a resposta em regime permanente senoidal é

$$\begin{aligned} y(t) &= |G(j\omega_1)| A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1 + \angle G(j\omega_1)) \\ &\quad + |G(j\omega_2)| A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2 + \angle G(j\omega_2)) \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + |G(j\omega_p)| A_p \sin(\omega_p t + \phi_p + \angle G(j\omega_p)). \end{aligned} \quad (20)$$

Chama-se  $G(j\omega)$ , expressa como função da frequência  $\omega$ , de **resposta em frequência** (ou no domínio da frequência), do sistema. A princípio, pode-se pensar que o tratamento mostrado aqui se restringe a senoides ou combinações de senoides, mas lembre-se que qualquer sinal periódico pode ser descomposto em senoides de acordo com a série de Fourier. Ademais, um sinal aperiódico pode ser transformado para o domínio da frequência (decomposto em senoides de todas as frequências) através da transformada de Fourier.

**Exemplo 1.** Considere a função de transferência de um sistema de primeira ordem padrão multiplicado por um ganho:

$$G(s) = K \frac{a}{s+a}, \quad K > 0, \quad a > 0. \quad (21)$$

Como já foi visto, pode-se considerar esse sistema como representativo de sistemas reais como o *cruise control* ou o servomotor de velocidade. A resposta em frequência do sistema é

$$G(j\omega) = K \frac{a}{j\omega + a}, \quad (22)$$

ou em termos de magnitude e fase

$$|G(j\omega)| = K \frac{a}{\sqrt{\omega^2 + a^2}}, \quad \angle G(j\omega) = -\angle(a + j\omega). \quad (23)$$

Perceba que

$$\left\{ \begin{array}{l} |G(0)| = K, \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = 0, \\ \angle G(0) = 0, \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle G(j\omega) = -90^\circ. \end{array} \right. \quad (24)$$

A Figura 1 mostra gráficos da magnitude e da fase da resposta em frequência de um sistema de primeira ordem com  $K = 1$  e  $a = 2\pi \text{ rad/s}$ . De fato, as conclusões de (24) podem ser verificadas na Figura 1.

Respostas em frequência de sistemas físicos geralmente seguem o comportamento geral mostrado na Figura 1. A magnitude começa num certo valor  $K$  e decai até 0, enquanto a fase começa em  $0^\circ$  e decai até algum múltiplo de  $-90^\circ$  (dependente do número de zeros e polos do sistema). O valor de  $G(0)$  (também chamado **ganho DC**) equivale à resposta em regime a um degrau unitário, pois

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \frac{1}{s} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = G(0). \quad (25)$$

Intuitivamente, pode-se dizer que um sistema real perde a capacidade de seguir senoides na entrada à medida que  $\omega$  aumenta. Para um sistema em malha fechada é interessante que haja baixo erro em regime para entrada degrau, logo costuma-se ter  $K \approx 1$ . Com isso, para sistemas em malha fechada,  $|G(0)| \approx 1$  e  $|G(j\omega)| \rightarrow 0$  quando  $\omega \rightarrow \infty$ , o que corrobora a ideia de que o sistema tem bom rastreio para senoides de baixas frequências, enquanto tem dificuldade para rastrear senoides de altas frequências. Em termos de fase, também verifica-se degradação com  $\omega$ , pois a saída vai ficando cada vez mais atrasada em relação à entrada à medida que  $\omega$  aumenta.

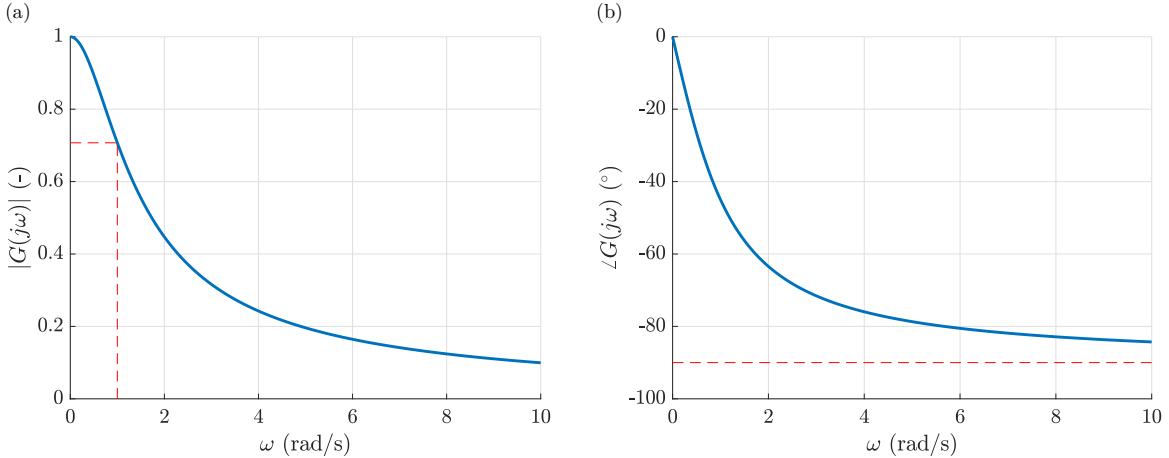


Figura 1: Resposta em frequência de um sistema de primeira ordem padrão com  $a = 1 \text{ rad/s}$ : (a) magnitude e (b) fase.

Um outro ponto interessante na Figura 1(a) é que o ponto  $G(ja)$  tem magnitude  $\sqrt{2}/2$ . Anteriormente, deu-se o nome de frequência de corte para a frequência tal que  $\omega_c = a$ . Diz-se que o sistema deixa “passar” frequências  $\omega < a$  e “corta” (elimina) frequências  $\omega > a$ , assim  $\omega = a$  é a frequência de corte. Isso é uma visão aproximada do comportamento de  $|G(j\omega)|$ , pois a Figura 1(a) mostra claramente que a perda de desempenho é gradual. Diz-se também que um sistema de primeira ordem é um filtro passa-baixas. Se o sistema tem um ganho  $K \neq 1$ , então a frequência de corte é medida em relação ao valor  $G(0)$ , i.e. considera-se  $\omega_c$  quando  $G(j\omega_c) = K\sqrt{2}/2$ .

Você deve ainda estar se perguntando porque o valor de  $\sqrt{2}/2$  foi escolhido como convenção. A motivação para isso vem do fato de que uma voltagem  $V$  aplicada a um resistor de  $1 \Omega$  dissipava uma potência de  $V^2$ . Assim, o valor de voltagem que corresponde à metade da potência é

$$V^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow V = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow V = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (26)$$

ou seja, o valor de corte foi convencionado como o ponto em que a potência é metade do valor máximo. Mais genericamente, para um sistema de ordem qualquer, chama-se a frequência em que a magnitude da resposta em frequência é  $\sqrt{2}/2$  do ganho DC de **banda passante** (em inglês, *bandwidth*), pois define a “banda” de frequências que o sistema deixa “passar”. Finalmente, calcula-se os valores de magnitude e fase de (21) na

frequência de corte:

$$G(j\omega_c) = G(ja) = K \frac{a}{ja + a} \Rightarrow \begin{cases} |G(ja)| = K \frac{a}{\sqrt{a^2 + a^2}} \Rightarrow \\ \angle G(ja) = -\angle(ja + a) \\ \begin{cases} |G(j\omega_c)| = K \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \angle G(j\omega_c) = -45^\circ \end{cases} . \end{cases} \quad (27)$$

## 2 Diagrama de Bode

Em geral, não se traça a resposta em frequência com as escalas unitárias usadas na Figura 1. Os gráficos ficam muito mais convenientes de visualizar se for usada escala logarítmica (na base 10) para a frequência  $\omega$ . Além disso, o módulo  $|G(j\omega)|$  é expresso em decibels (ou decibéis) ( $dB$ ), de acordo com

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10}|G(j\omega)|. \quad (28)$$

Note que foi usado um fator de 20 na transformação para decibels. Talvez você já tenha visto o uso de 10 como fator para a mesma transformação. O motivo para o fator de 20 é que em controle geralmente se trabalha com amplitudes, enquanto decibels foi originalmente definido para potência. Assim, o fator de 2 é explicado pelo fato de que a potência é proporcional à amplitude ao quadrado (o quadrado se transformada em um fator multiplicativo de 2 quando se aplica o logaritmo).

A Figura 2 mostra um diagrama de Bode do sistema do Exemplo 1 (i.e. primeira ordem padrão com  $a = 1 \text{ rad/s}$ ). O MATLAB produz diagramas de Bode através da função `bode`, que recebe como argumento a função de transferência do sistema e opcionalmente um vetor de frequências para traçado do diagrama. É possível também usar a versão `[mag, fase, w] = bode(sys)` para obter vetores de magnitude, fase e frequências consideradas, sem que um gráfico seja gerado. No caso de uso da versão com retornos, é necessário pós-processar os dados, conforme a Listagem 1 mostra.

Listagem 1: Pós-processamento dos retornos de `bode`.

```

1 a = 1;
2 sys = tf(a, [1, a]);
3 [mag, fase, w] = bode(sys);
4
5 mag = mag(:);
6 fase = fase(:);
7
8 figure;
9 semilogx(w, 20 * log10(mag), 'LineWidth', 2);
10 xlabel('omega (rad/s)', 'FontSize', 14);
11 ylabel('|G(j omega)| (dB)', 'FontSize', 14);
12 set(gca, 'FontSize', 14);
13 grid on;
14
15 figure;
16 semilogx(w, fase, 'LineWidth', 2);

```

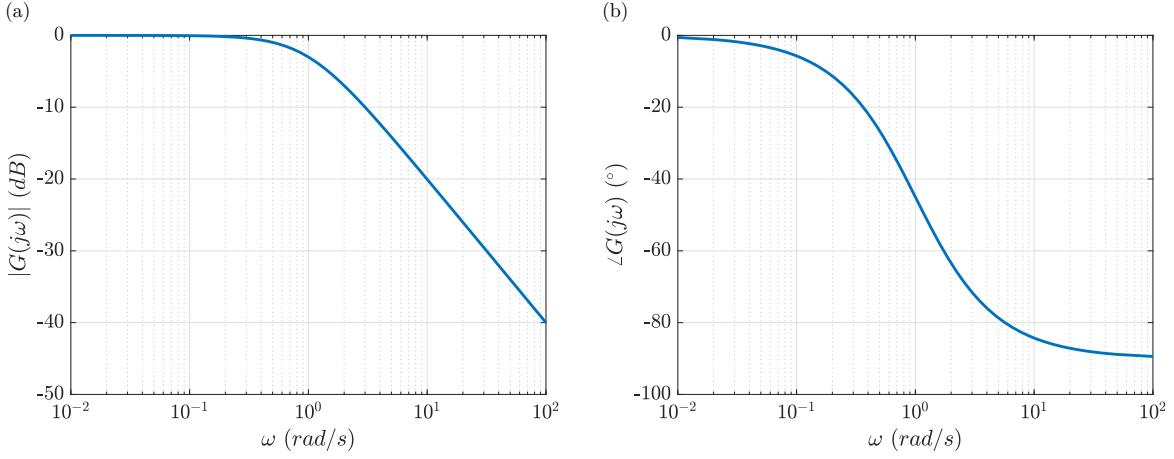


Figura 2: Diagrama de Bode de um sistema de primeira ordem padrão com  $a = 1 \text{ rad/s}$ : (a) magnitude e (b) fase.

```

17 xlabel('omega (rad/s)', 'FontSize', 14);
18 ylabel('angle G(j omega) (graus)', 'FontSize', 14);
19 set(gca, 'FontSize', 14);
20 grid on;

```

Além de prover uma escala mais adequada para traçado dos gráficos, o diagrama de Bode permitir compor respostas em frequência de sistemas em série simplesmente somando-se os ganhos (em  $\text{dB}$ ) e as fases. Com efeito, perceba que

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) \Rightarrow G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega), \quad (29)$$

logo

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \log_{10}|G(j\omega)| = 20 \log_{10}|G_1(j\omega)G_2(j\omega)| \Rightarrow \\ |G(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \log_{10}|G_1(j\omega)| + 20 \log_{10}|G_2(j\omega)| \Rightarrow \\ |G(j\omega)|_{\text{dB}} &= |G_1(j\omega)|_{\text{dB}} + |G_2(j\omega)|_{\text{dB}}. \end{aligned} \quad (30)$$

$$\angle G(j\omega) = \angle G_1(j\omega)G_2(j\omega) \Rightarrow \angle G(j\omega) = \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega). \quad (31)$$

Na época que o diagrama de Bode foi inventado, não existiam computadores, de modo que as observações contidas em (30) e (31) eram muito convenientes para traçado manual. Com efeito, diagramas de Bode de sistemas de ordem superior podem ser determinados a partir de somas de diagramas de primeira e segunda ordem, operação consideravelmente fácil de ser realizada manualmente.

É claro, assim como no caso do LGR, não se faz traçado manual do diagrama de Bode na prática, dado que o MATLAB traça o diagrama numericamente. Porém, o aprendizado de regras de traçado manual ainda ajudam a criar intuição no projetista de como o diagrama de Bode pode ser manipulado para que o sistema atenda aos requisitos. Ademais, em alguns casos, o MATLAB produz resultados incorretos devido a erros numéricos, e o conhecimento do comportamento esperado para o diagrama de Bode ajuda na identificação e correção desses casos.

## 2.1 Diagrama de Bode de um Sistema de Primeira Ordem

Considere novamente a resposta em frequência de um sistema de primeira ordem padrão multiplicado por um ganho (Exemplo 1):

$$G(s) = K \frac{a}{s+a} \Rightarrow G(j\omega) = K \frac{a}{j\omega+a}. \quad (32)$$

Lembre-se das relações apresentadas em (24). Mais genericamente, pode-se dividir a resposta em frequência em duas regiões:

- Região de baixas frequências: quando  $\omega \ll a$ . Nesse caso, pode-se fazer a seguinte aproximação:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= K \frac{a}{j\omega+a} = K \frac{1}{j(\omega/a)+1} \approx K \Rightarrow \\ &\left\{ \begin{array}{l} |G(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log_{10} K \\ \angle G(j\omega) \approx 0 \end{array}, \omega \ll a. \right. \end{aligned} \quad (33)$$

- Região de altas frequências: quando  $\omega \gg a$ . Assim, pode-se dizer que

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= K \frac{a}{j\omega+a} = K \frac{1}{j(\omega/a)+1} \approx -j \frac{Ka}{\omega} \Rightarrow \\ &\left\{ \begin{array}{l} |G(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log_{10} \left| \frac{Ka}{\omega} \right| = \underbrace{20 \log_{10} K}_{\text{Ganho DC}} - 20 \log_{10} \left( \frac{\omega}{a} \right) \\ \angle G(j\omega) \approx -90^\circ \end{array}, \omega \gg a, \right. \end{aligned} \quad (34)$$

de modo que o ganho cai 20 dB por década.

Além disso, a magnitude em dB na frequência de corte é dada por

$$\begin{aligned} |G(ja)| &= K \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow |G(ja)|_{dB} = 20 \log_{10} K \frac{\sqrt{2}}{2} = 20 \log_{10} K - 20 \log_{10} \sqrt{2} \Rightarrow \\ &|G(ja)|_{dB} = \underbrace{20 \log_{10} K}_{\text{Ganho DC}} - 3 \text{ dB}. \end{aligned} \quad (35)$$

Por conta disso, é comum definir **banda passante** como a frequência em que o ganho cai 3 dB em relação ao ganho DC. Com isso, o diagrama de Bode pode ser aproximado conforme mostra a Figura 3, o que é conveniente para traçado manual. Ademais, como a aproximação para  $\angle G(j\omega)$  apresentada na Figura 3(b) é um tanto grosseira, também é comum usar as aproximações mostradas na figuras 4(a) e 4(b). Para uma análise mais precisa dos erros cometidos com as aproximações, as figuras 5(a) e 5(b) apresentam como o erro de aproximação varia com  $\omega$  quando as aproximações das figuras 4(a) e 4(b) são usadas, respectivamente. Para cada  $\omega$ , o erro de aproximação da fase é definido como

$$e_{\angle, \text{approx}}(\omega) = \angle G(j\omega) - \angle G(j\omega)_{\text{approx}}, \quad (36)$$

em que  $\angle G(j\omega)_{\text{approx}}$  é a estimativa de  $G(j\omega)$  calculada com uso da respectiva aproximação.

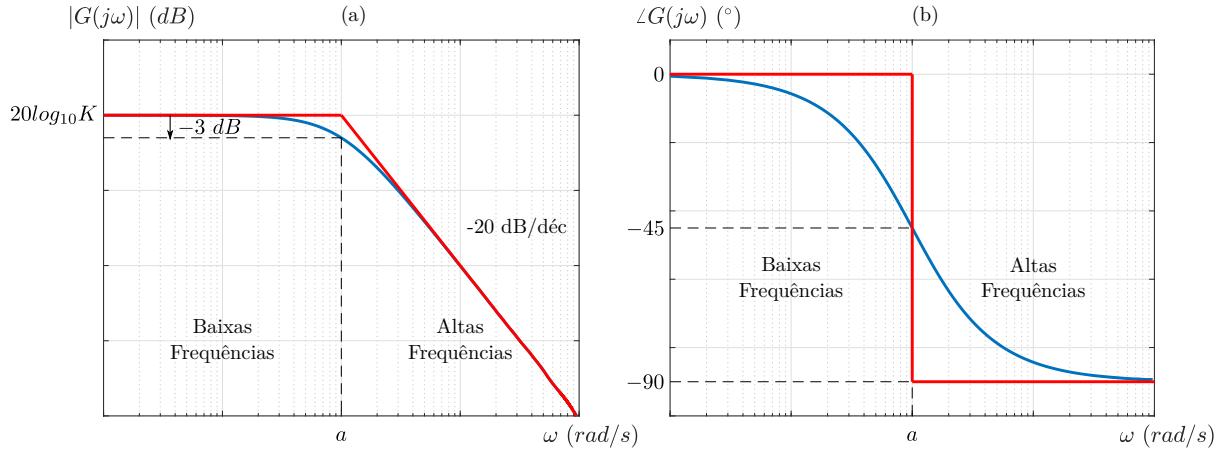


Figura 3: Aproximação para traçado manual do diagrama de Bode de um sistema de primeira ordem.

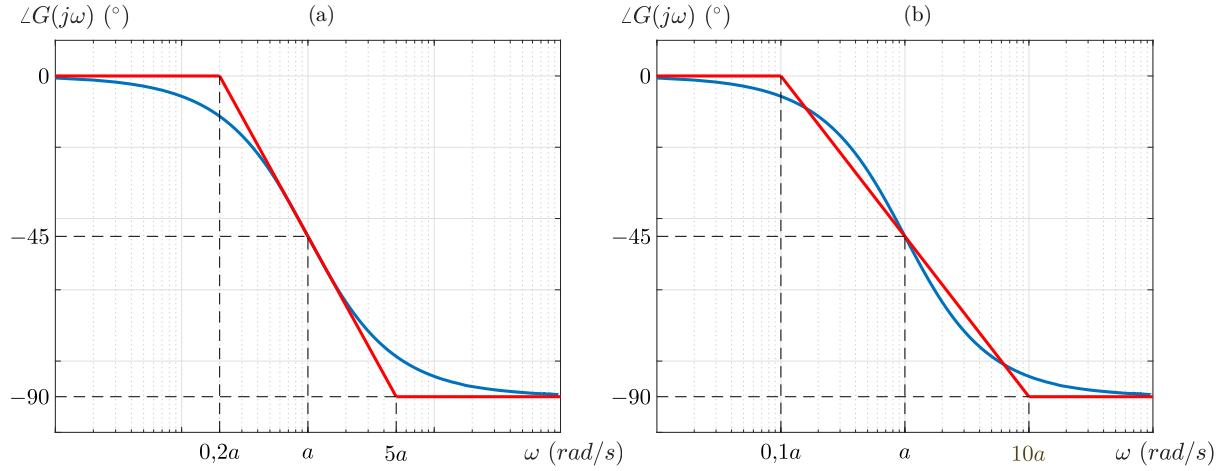


Figura 4: Aproximações melhores para traçado manual da fase do diagrama de Bode de um sistema de primeira ordem.

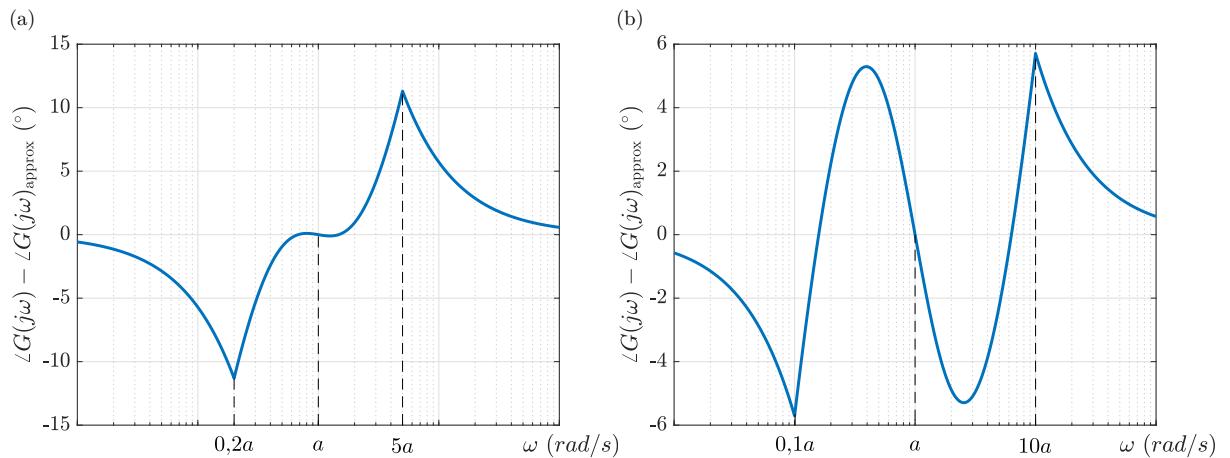


Figura 5: Análise de erro das aproximações mostradas na Figura 4.

# Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA

## Controle para Sistemas Computacionais – CMC-12

### Notas da Aula 14 – Diagrama de Bode

**Professor:** Marcos Ricardo Omena de Albuquerque Maximo

13 de junho de 2020

Na aula passada, fez-se uma introdução sobre diagrama de Bode e mostrou-se como traçá-lo para um sistema de primeira ordem. Nesta aula, continua-se a explicação sobre diagrama de Bode, considerando casos mais complicados.

## 1 Contribuição de um Zero no Diagrama de Bode

Conforme comentado anteriormente, uma vantagem do diagrama de Bode vem do fato de que

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} = |G_1(j\omega)|_{dB} + |G_2(j\omega)|_{dB}, \\ \angle G(j\omega) = \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega), \end{cases} \quad (1)$$

ou seja, pode-se obter o diagrama de Bode de  $G(s)$  a partir da soma das contribuições de  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$ . Considere

$$G(s) = A \left( \frac{s+b}{s+a} \right) = \left( \frac{Ab}{a} \right) \left( \frac{a}{s+a} \right) \left( \frac{s+b}{b} \right), \quad (2)$$

com  $A > 0$ ,  $a > 0$  e  $b > 0$ . Para obter a resposta em frequência, faz-se  $s = j\omega$ , de modo que

$$G(j\omega) = \left( \frac{Ab}{a} \right) \left( \frac{a}{j\omega+a} \right) \left( \frac{j\omega+b}{b} \right), \quad (3)$$

logo a magnitude em  $dB$  é dada por

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{dB} &= 20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} \left| \left( \frac{Ab}{a} \right) \left( \frac{a}{j\omega+a} \right) \left( \frac{j\omega+b}{b} \right) \right| = \\ &= \underbrace{+20 \log_{10} \left( \frac{Ab}{a} \right)}_{(\text{Ganho DC})_{dB}} + \underbrace{20 \log_{10} \left| \frac{a}{j\omega+a} \right|}_{\text{Contribuição do polo}} - \underbrace{20 \log_{10} \left| \frac{b}{j\omega+b} \right|}_{\text{Contribuição do zero}}, \end{aligned} \quad (4)$$

enquanto a fase é expressa de acordo com

$$\angle G(j\omega) = \angle \left( \frac{a}{j\omega+a} \right) - \angle \left( \frac{b}{j\omega+b} \right) = \angle(j\omega+b) - \angle(j\omega+a). \quad (5)$$

Com isso, pode-se traçar o diagrama de Bode de magnitude a partir de (4) de acordo com o procedimento ilustrado na Figura 1, a qual considera  $a < b$ . Para a fase, adota-se procedimento semelhante, baseado em (5), conforme mostra a Figura 2. Finalmente, a Figura 3 compara o diagrama de Bode traçado com MATLAB e a aproximação para traçado manual de um sistema na forma (2) com  $A = 1$ ,  $b = 1 \text{ rad/s}$  e  $b = 20 \text{ rad/s}$ .

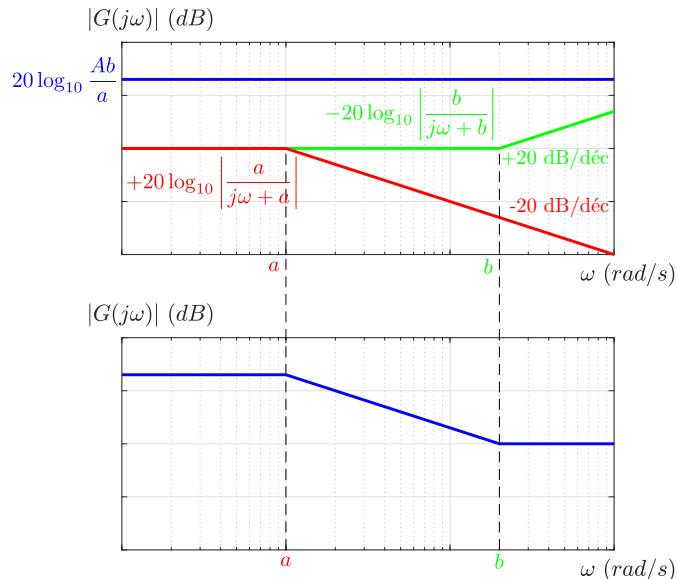


Figura 1: Procedimento para construção do diagrama de Bode de magnitude conforme (4) através da soma das contribuições de suas partes.

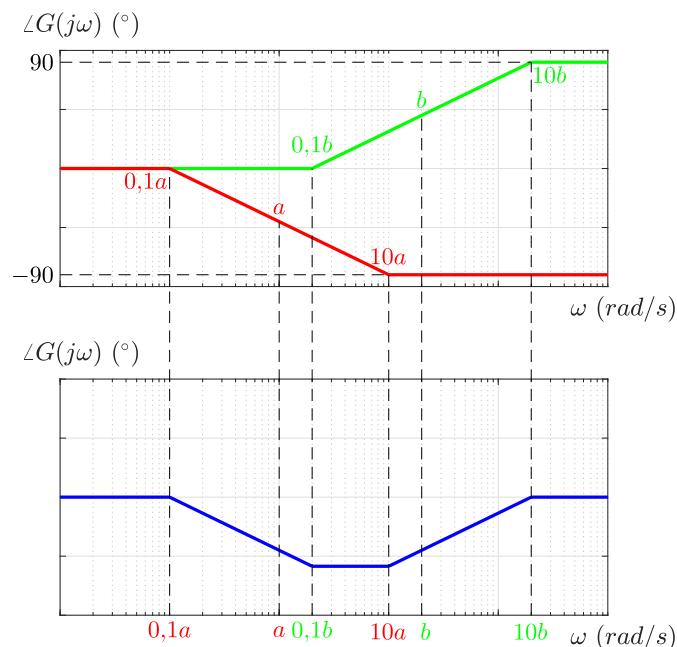


Figura 2: Procedimento para construção do diagrama de Bode de fase conforme (5) através da soma das contribuições de suas partes.

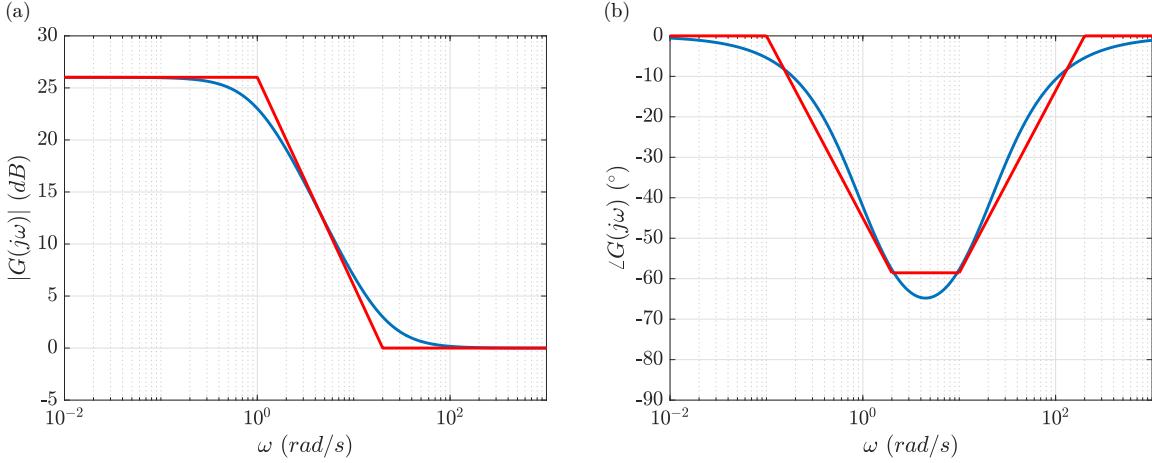


Figura 3: Avaliação da aproximação realizada para traçado manual do diagrama de Bode de um sistema na forma (2) com  $A = 1$ ,  $a = 1 \text{ rad/s}$  e  $b = 20 \text{ rad/s}$ .

## 2 Múltiplos Polos e Zeros Reais

Seja um sistema com  $m$  zeros e  $n$  polos reais de acordo com

$$G(s) = A \frac{(s + b_1) \cdots (s + b_m)}{(s + a_1) \cdots (s + a_n)}. \quad (6)$$

Pode-se separar esse sistema em partes como

$$G(s) = \underbrace{\left( \frac{Ab_1 \cdots b_m}{a_1 \cdots a_n} \right)}_{\text{Ganho DC}} \underbrace{\left( \frac{a_1}{s + a_1} \right) \cdots \left( \frac{a_n}{s + a_n} \right)}_{\text{Contribuição dos polos}} \underbrace{\left( \frac{s + b_1}{b_1} \right) \cdots \left( \frac{s + b_m}{b_m} \right)}_{\text{Contribuição dos zeros}}, \quad (7)$$

de modo que

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \left( \frac{Ab_1 \cdots b_m}{a_1 \cdots a_n} \right) + \sum_{i=1}^n 20 \log_{10} \left| \frac{a_i}{j\omega + a_i} \right| - \sum_{k=1}^m 20 \log_{10} \left| \frac{b_k}{j\omega + b_k} \right|, \quad (8)$$

$$\angle G(j\omega) = \sum_{k=1}^m \angle(j\omega + b_k) - \sum_{i=1}^n \angle(j\omega + a_i). \quad (9)$$

Embora seja possível realizar o procedimento feito na Seção 1, em que primeiramente traçou-se os diagramas de cada contribuição para então consolidá-los no diagrama de Bode combinado, esse procedimento seria muito trabalhoso no caso da existência de muitos polos e zeros. Portanto, a seguir apresenta-se um procedimento mais geral.

### Traçado Aproximado do Diagrama de Bode de Magnitude:

1. Marcar os polos e zeros no eixo da frequência, que são os pontos de quebra.
2. Traçar uma reta horizontal correspondente ao ganho DC em dB até o primeiro ponto de quebra.

- Continuar o traçado mudando a inclinação por -20 dB/década ao passar por um polo e +20 dB/década ao passar por um zero.

### Traçado Aproximado do Diagrama de Bode de Fase:

- Marcar os pontos de quebra no eixo da frequência. Cada polo ou zero define dois pontos de quebra: um deles uma década abaixo e outro uma década acima.
- Traçar uma reta horizontal a partir de  $0^\circ$  até o primeiro ponto de quebra.
- Continuar o traçado mudando a inclinação da seguinte forma:
  - 45°/década ao passar pelo primeiro ponto de quebra associado a um polo.
  - +45°/década ao passar pelo segundo ponto de quebra associado a um polo.
  - +45°/década ao passar pelo primeiro ponto de quebra associado a um zero.
  - 45°/década ao passar pelo segundo ponto de quebra associado a um zero.

**Exemplo 1.** Faça o traçado aproximado do diagrama de Bode de

$$G(s) = \frac{0,6(s+5)}{(s+1)(s+30)}. \quad (10)$$

A Figura 4 apresenta um traçado aproximado que seria obtido com os procedimento apresentados nesta seção. Note que polos e zeros estão marcados como  $\times$  e  $\circ$ , respectivamente, enquanto os pontos de quebra estão destacados como  $+$ .

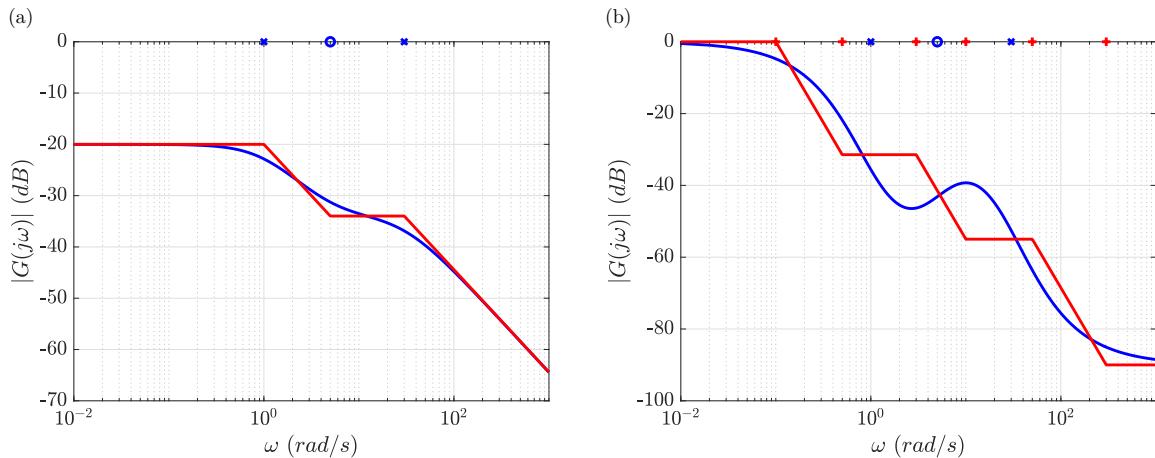


Figura 4: Traçado aproximado do diagrama de Bode do Exemplo 1 (em vermelho). O diagrama de Bode (sem aproximação) é também traçado em azul para avaliação da aproximação.

### 3 Polos na Origem

Seja um sistema com um polo na origem na forma

$$G(s) = A \frac{(s + b_1) \cdots (s + b_m)}{s(s + a_1) \cdots (s + a_n)}. \quad (11)$$

Nesse caso, em “baixas frequências”, i.e. quando

$$\omega \ll a_i, \forall i \in \{1, \dots, a_n\} \wedge \omega \ll b_j, \forall j \in \{1, \dots, b_m\}, \quad (12)$$

tem-se

$$G(j\omega) \approx G_{bf}(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \left( \frac{Ab_1 \cdots b_m}{a_1 \cdots a_n} \right). \quad (13)$$

de modo que

$$\begin{cases} |G_{bf}(j\omega)| = \frac{1}{\omega} \left( \frac{Ab_1 \cdots b_m}{a_1 \cdots a_n} \right), \\ \angle G_{bf}(j\omega) = -90^\circ. \end{cases} \quad (14)$$

Perceba que o termo

$$\left( \frac{Ab_1 \cdots b_m}{a_1 \cdots a_n} \right) \quad (15)$$

não é o ganho DC de  $G(s)$ , pois  $|G(j\omega)| \rightarrow \infty$  quando  $\omega \rightarrow 0$ . Para o traçado, é conveniente notar que

$$|G_{bf}(j \cdot 1)| = \left( \frac{Ab_1 \cdots b_m}{a_1 \cdots a_n} \right). \quad (16)$$

Com isso, pode-se dividir  $G(s)$  em

$$G(s) = \underbrace{\frac{1}{s} \left( \frac{Ab_1 \cdots b_m}{a_1 \cdots a_n} \right)}_{G_{bf}(j\omega)} \underbrace{\left( \frac{a_1}{s + a_1} \right) \cdots \left( \frac{a_n}{s + a_n} \right)}_{\text{Contribuição dos demais polos}} \underbrace{\left( \frac{s + b_1}{b_1} \right) \cdots \left( \frac{s + b_m}{b_m} \right)}_{\text{Contribuição dos zeros}}, \quad (17)$$

Um raciocínio análogo pode ser usado para o caso em que há  $p$  polos na origem, ou seja

$$\begin{aligned} G(s) &= A \frac{(s + b_1) \cdots (s + b_m)}{s^p (s + a_1) \cdots (s + a_n)} = \\ G(s) &= \underbrace{\frac{1}{s^p} \left( \frac{Ab_1 \cdots b_m}{a_1 \cdots a_n} \right)}_{G_{bf}(j\omega)} \underbrace{\left( \frac{a_1}{s + a_1} \right) \cdots \left( \frac{a_n}{s + a_n} \right)}_{\text{Contribuição dos demais polos}} \underbrace{\left( \frac{s + b_1}{b_1} \right) \cdots \left( \frac{s + b_m}{b_m} \right)}_{\text{Contribuição dos zeros}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Portanto, para levar em conta a presença de  $p$  polos na origem, basta modificar o primeiro passo das regras de traçado da seguinte forma:

- **Ganho:** o traçado começa uma reta de inclinação  $-20p$  dB/década que passa por

$$20 \log_{10} \left( \frac{Ab_1 \cdots b_m}{a_1 \cdots a_n} \right) \quad (19)$$

em  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ .

- **Fase:** o traçado começa com uma reta horizontal em  $-90^\circ p$ .

No caso de zeros na origem, basta considerar  $p < 0$ .

## 4 Polos Complexo-conjugados

Seja um sistema de segunda ordem padrão

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (20)$$

com  $\omega_n > 0$  e  $0 < \xi < 1$ . Para obter a resposta em frequência, faz-se  $s = j\omega$ , de modo que

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(\omega_n^2 - \omega^2) + 2\xi\omega_n\omega j}, \quad (21)$$

Assim, a resposta em frequência em ganho e fase é dada por

$$|G(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2}}, \quad (22)$$

$$\angle G(j\omega) = -\angle (\omega_n^2 - \omega^2 + 2\xi\omega_n\omega j). \quad (23)$$

As figuras 5 e 6 mostram como os parâmetros de um sistema de segunda ordem padrão afetam o diagrama de Bode de ganho e de fase, respectivamente. Na Figura 5(a) varia-se  $\omega_n$  mantendo  $\xi = \sqrt{2}/2 \approx 0,707$ , enquanto na Figura 5(b) altera-se  $\xi$  com  $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$  fixo. A Figura 6 apresenta uma análise semelhante para a fase.

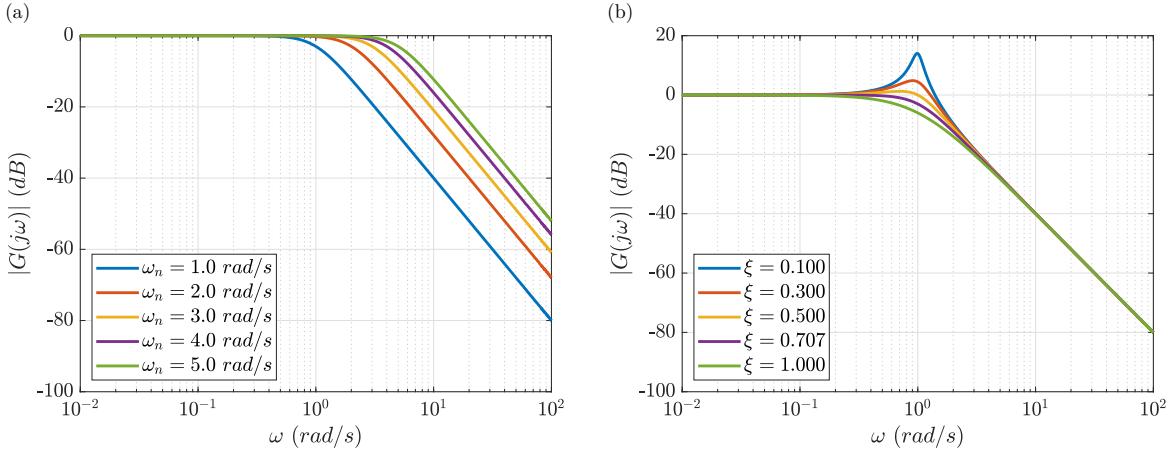


Figura 5: Diagramas de Bode de ganho para um sistema de segunda ordem padrão: (a) variando  $\omega_n$  mantendo  $\xi = \sqrt{2}/2 \approx 0,707$  e (b) variando  $\xi$  mantendo  $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$ .

Para traçado manual, adota-se aproximações de baixas e altas frequências. Em baixas frequências, quando  $\omega \ll \omega_n$ , tem-se

$$G(j\omega) \approx \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2} = 1, \quad (24)$$

logo

$$\begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} = 0 \text{ dB}, \\ \angle G(j\omega) \approx 0. \end{cases} \quad (25)$$

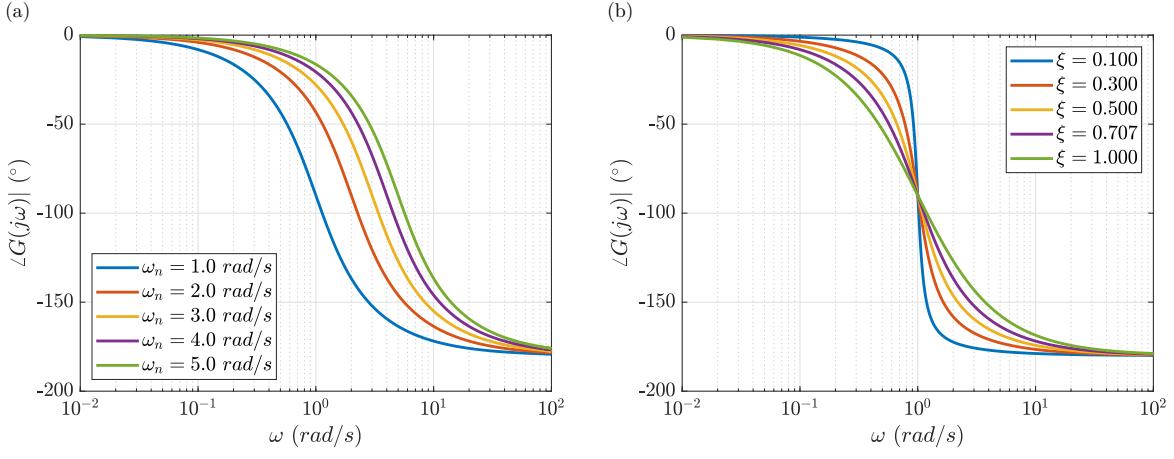


Figura 6: Diagramas de Bode de fase para um sistema de segunda ordem padrão: (a) variando  $\omega_n$  mantendo  $\xi = \sqrt{2}/2 \approx 0,707$  e (b) variando  $\xi$  mantendo  $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$ .

Em altas frequências, i.e. para  $\omega \gg \omega_n$ , fica-se com

$$G(j\omega) \approx -\frac{\omega_n^2}{\omega^2}, \quad (26)$$

de modo que

$$\begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log_{10} \frac{\omega_n^2}{\omega^2} = -40 \log_{10} \frac{\omega}{\omega_n}, \\ \angle G(j\omega) \approx -180^\circ. \end{cases} \quad (27)$$

A Figura 7 apresenta uma comparação entre a aproximação e diagramas traçados com o MATLAB para diferentes valores de  $\xi$ . Para facilitar, usa-se uma escala de  $\omega$  normalizada por  $\omega_n$ . A aproximação é mostrada com linha preta.

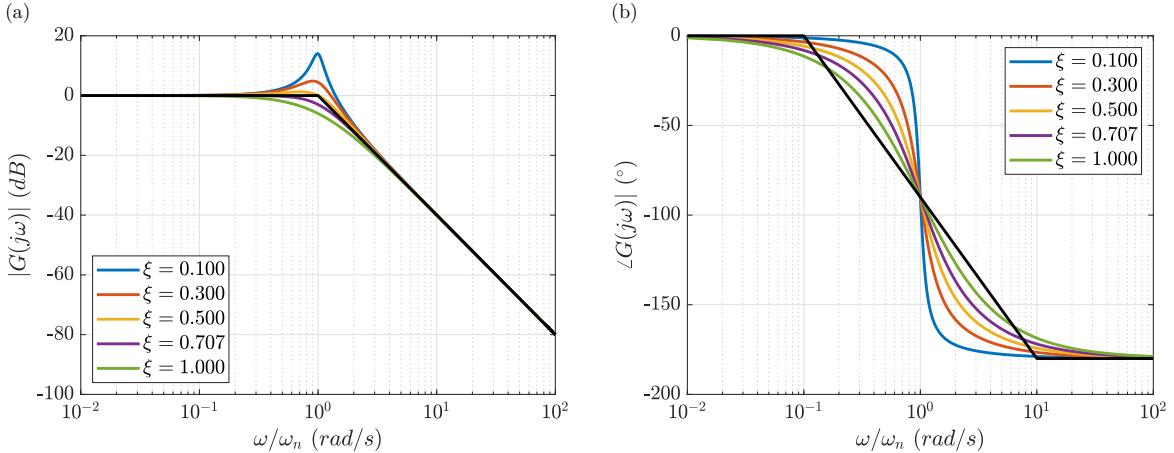


Figura 7: Comparação entre a aproximação e diagramas traçados com o MATLAB para diferentes valores de  $\xi$ : (a) ganho e (b) fase. A aproximação é mostrada com linha preta.

Além disso, há pontos importantes do diagrama de Bode de um sistema de segunda ordem padrão, que são destacados a seguir.

## 4.1 Gанho na Frequênciа Natural

O ganho na frequênciа natural, i.e. quando  $\omega = \omega_n$ , é

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{\omega_n^2}{(\omega_n^2 - \omega^2) + 2\xi\omega\omega_n j} \Rightarrow |G(j\omega_n)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2}} \Rightarrow \\ |G(j\omega_n)| &= \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_n^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega_n^2}} \Rightarrow |G(j\omega_n)| = \frac{1}{2\xi}. \end{aligned} \quad (28)$$

## 4.2 Pico de Ressonânciа

O pico observado na Figura 5(b) é chamado de pico de ressonânciа e acontece no máximo de (22), ou equivalentemente, no mínimo da expressão dentro da raiz no denominador. Para determinar essa frequênciа, pode-se obter o ponto em que a derivada em relaçao a  $\omega$  se anula:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} [(\omega_n^2 - \omega^2) + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2] &= 0 \Rightarrow 2(\omega_n^2 - \omega^2)(-2\omega) + 8\xi^2\omega_n^2\omega = 0 \Rightarrow \\ \omega(-\omega_n^2 + \omega^2 + 2\xi^2\omega_n^2) &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Uma solução é  $\omega = 0$ , que corresponde ao ganho DC. Assim, o pico de ressonânciа deve estar dentre as demais possíveis soluções:

$$-\omega_n^2 + \omega^2 + 2\xi^2\omega_n^2 = 0 \Rightarrow \omega = \omega_n\sqrt{1 - 2\xi^2}, \quad (30)$$

que é válida para  $1 - 2\xi^2 \geq 0$ , ou seja,  $\xi \leq \sqrt{2}/2 \approx 0,707$ , logo para  $\xi > \sqrt{2}/2$  não há pico de ressonânciа, conforme pode-se perceber na Figura 5(b).

Na frequênciа  $\omega = \omega_n\sqrt{1 - 2\xi^2}$ , o valor do pico é

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= \frac{\omega_n^2}{\sqrt{[\omega_n^2 - \omega_n^2(1 - 2\xi^2)]^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega_n^2(1 - \xi^2)}} = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{4\xi^2\omega_n^4 - 4\xi^4\omega_n^4}} \Rightarrow \\ |G(j\omega)| &= \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}. \end{aligned} \quad (31)$$

Em resumo, o pico de ressonânciа e a respectiva frequênciа de ressonânciа são

$$M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}, \quad \omega_r = \omega_n\sqrt{1 - 2\xi^2}, \quad 0 \leq \xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (32)$$

## 4.3 Banda Passante

Como comentado anteriormente, um parâmetro muito popular para especificar o desempenho de um sistema dinâmico é o de banda passante, que é a frequênciа em que o ganho do sistema é  $\sqrt{2}/2$  do ganho DC. Assim, determina-se a expressão para a banda

passante de um sistema de segunda ordem padrão como

$$\begin{aligned}
|G(j\omega)| &= \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \\
\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2} &= \sqrt{2}\omega_n^2 \Rightarrow \omega^4 + 2(2\xi^2 - 1)\omega_n^2\omega^2 - \omega_n^4 = 0 \Rightarrow \\
\omega^2 &= - (2\xi^2 - 1)\omega_n^2 \pm \sqrt{(2\xi^2 - 1)^2\omega_n^4 + \omega_n^4} \Rightarrow \\
\omega^2 &= \omega_n^2 \left( 1 - 2\xi^2 + \sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{4\xi^4 - 4\xi^2 + 2}} \right).
\end{aligned} \tag{33}$$

Portanto, a banda passante é

$$\omega_b = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{4\xi^4 - 4\xi^2 + 2}} \tag{34}$$

Perceba ainda que para  $\xi = \sqrt{2}/2 \approx 0,707$ , tem-se

$$\omega_b = \omega_n \sqrt{1 - 1 + \sqrt{1 - 2 + 2}} \Rightarrow \omega_b = \omega_n. \tag{35}$$

## 5 Zero no Semiplano Direito

Seja

$$G_1(s) = \frac{A(s+b)}{s+a}, \tag{36}$$

$$G_2(s) = \frac{A(s-b)}{s+a}, \tag{37}$$

com  $A > 0$ ,  $a > 0$  e  $b > 0$ . Os sistemas  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$  diferem apenas pelas posições de seus zeros: o zero em  $s = -a$  de  $G_1(s)$  está no semiplano esquerdo (SPE), enquanto o zero em  $s = a$  de  $G_2(s)$  está no semiplano direito (SPD). Note que

$$|G_1(j\omega)| = |G_2(j\omega)| = A \sqrt{\frac{\omega^2 + b^2}{\omega^2 + a^2}}, \tag{38}$$

porém

$$\angle G_1(j\omega) = \angle(j\omega + b) - \angle(j\omega + a), \quad \angle G_2(j\omega) = \angle(j\omega - b) - \angle(j\omega + a). \tag{39}$$

Com isso, os diagramas de Bode de magnitude de  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$  são iguais, porém os de fase são diferentes. A Figura 8 apresenta uma comparação entre os diagramas de Bode desses dois sistemas, considerando  $A = 50$ ,  $a = 1$  e  $b = 10$ . Perceba que o sistema  $G_2(s)$ , com um zero no SPD, tem uma mudança de fase líquida, quando  $\omega$  vai de zero a infinito, maior que o sistema  $G_1(s)$ , com um zero no SPE. Por conta disso, chama-se um sistema com pelo menos um zero no SPD de um **sistema de fase não-mínima**. Em contraponto, para uma dada curva de magnitude, o sistema que atende a essa curva e ao mesmo tempo tem a menor mudança líquida de fase (chamado sistema de fase mínima) é um sistema com todos os zeros no SPE.

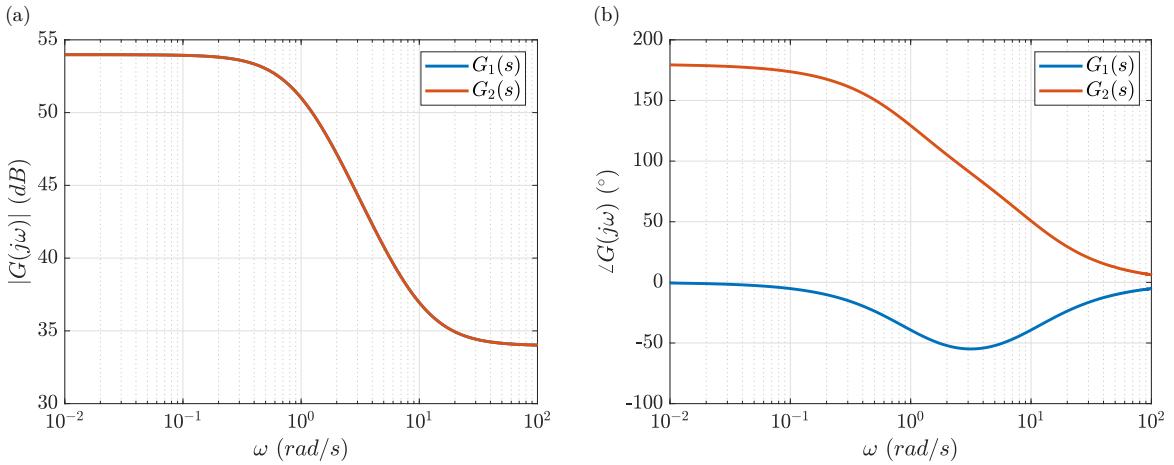


Figura 8: Comparação entre os diagramas de Bode de  $G_1(s)$  (zero no SPE) e  $G_2(s)$  (zero no SPD): (a) ganho e (b) fase.

Um fenômeno interessante que acontece em sistemas de fase não-mínima é a presença de um *undershoot* no começo da resposta ao degrau. Para exemplificar isso, considere o sistema de segunda ordem padrão com adição de um zero no SPD dado por

$$G(s) = \frac{-s + 1}{s^2 + 1,4s + 1}. \quad (40)$$

A resposta ao degrau unitário de  $G(s)$  é mostrada na Figura 9. Perceba que há um *undershoot* no começo da resposta. Esse tipo de dinâmica é encontrada em sistemas reais, como em aviões e mísseis.

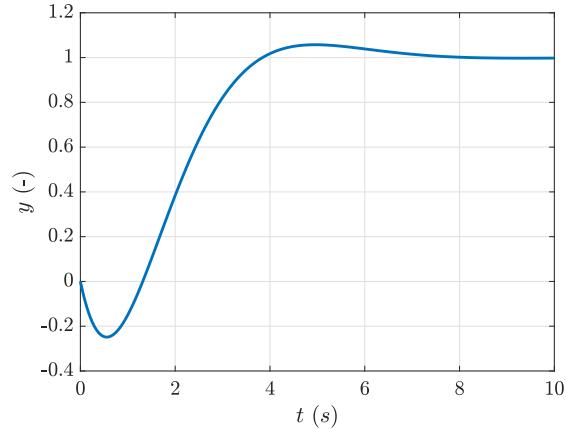


Figura 9: Resposta ao degrau de sistema de segunda ordem padrão com adição de zero no SPD. Verifica-se um *undershoot* no começo da resposta.

## 6 Polo no Semiplano Direito

Uma análise análoga à feita na Seção 5 pode ser feita para polos no SPD. Seja

$$G_1(s) = \frac{s+5}{s+1}, \quad G_2(s) = \frac{s+5}{-s+1}. \quad (41)$$

A Figura 10 apresenta uma comparação entre os diagramas de Bode de  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$ .

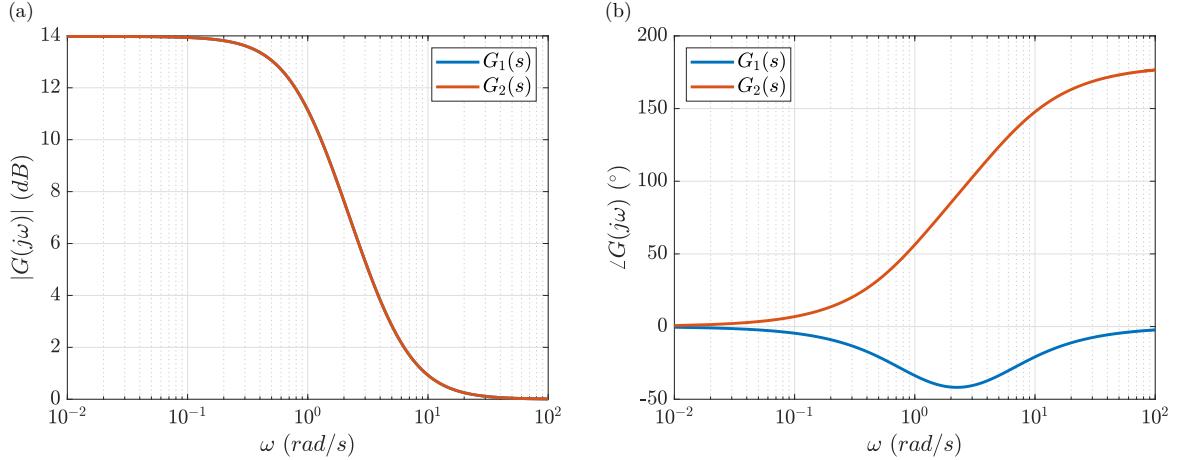


Figura 10: Comparaçāo entre os diagramas de Bode de  $G_1(s)$  (polo no SPE) e  $G_2(s)$  (polo no SPD): (a) ganho e (b) fase.

# Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA

## Controle para Sistemas Computacionais – CMC-12

### Notas da Aula 15 – Introdução ao Critério de Nyquist

**Professor:** Marcos Ricardo Omena de Albuquerque Maximo

4 de julho de 2020

Nas últimas aulas, apresentou-se o domínio da frequência juntamente com o diagrama de Bode. Conforme já comentado, o diagrama de Bode é a técnica para análise e projeto de sistemas de controle mais popular na indústria. Entretanto, o diagrama de Bode não é adequado para análise de estabilidade de alguns sistemas mais complexos, o que motivou o surgimento do **critério de estabilidade de Nyquist**, que faz uso do **diagrama de Nyquist**. Por outro lado, o critério de estabilidade de Nyquist é um tanto complexo, de modo que para sistemas mais simples, é mais comum a análise pelo diagrama de Bode.

## 1 Análise de Estabilidade pelo Diagrama de Bode

Diz-se que um sistema tem estabilidade neutra se ele está no limiar de estabilidade, i.e. tem polos de malha fechada no eixo imaginário  $s = j\omega$ . Dito isso, verifica nesta seção que o diagrama de Bode traz informação sobre a estabilidade de um sistema dinâmico. Considere o sistema

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}. \quad (1)$$

O lugar geométrico das raízes (LGR) desse sistema é apresentado na Figura 1. O cruzamento de  $s = j\omega$  acontece para  $K = 2$ . Pelas condições de magnitude e de fase do LGR, para os pontos no LGR, tem-se

$$|KG(s)| = 1 \text{ e } \angle G(s) = -180^\circ. \quad (2)$$

No ponto de estabilidade neutra (i.e. quando os pontos de malha fechada cruzam  $s = j\omega$ ), em particular, tem-se

$$|KG(j\omega)| = 1 \text{ e } \angle G(j\omega) = -180^\circ. \quad (3)$$

Portanto, tem-se uma ligação entre o LGR e a resposta em frequência, de modo que pode-se dizer que um sistema está no limiar de estabilidade se sua resposta em frequência passar por uma frequência tal que (3) seja atendida. No diagrama de Bode, isso é equivalente a

$$|KG(j\omega)|_{dB} = 0 \text{ dB e } \angle G(j\omega) = -180^\circ. \quad (4)$$

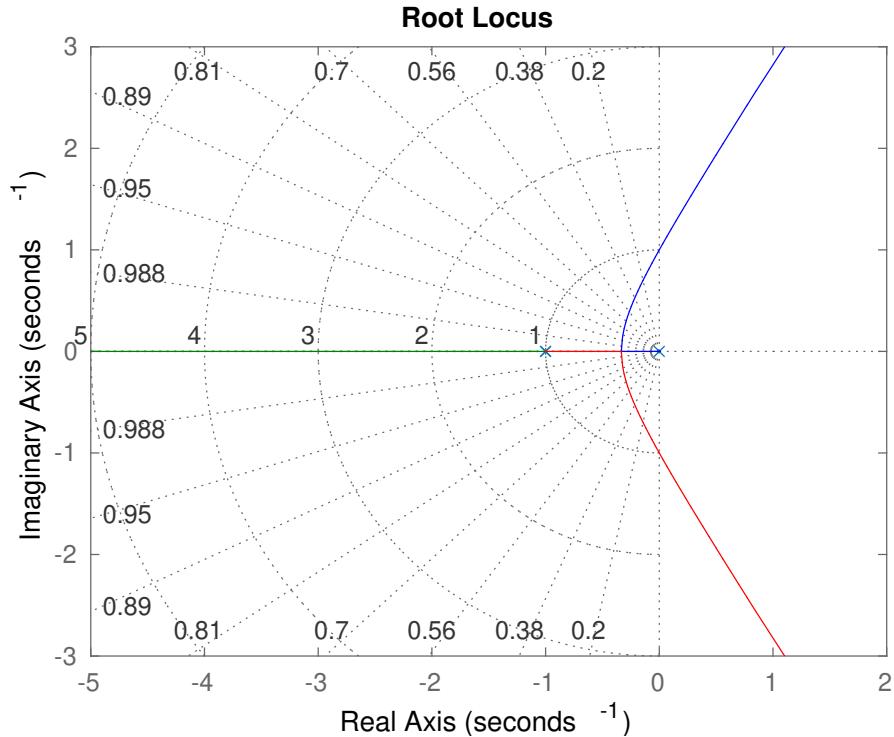


Figura 1: Lugar geométrico das raízes (LGR) da função de transferência definida em (1).

Para verificar isso, a Figura 2 apresenta o diagrama de Bode considerando diferentes valores de  $K$ . De fato, para  $K = 2$ , a condição (4) é satisfeita: em  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ , tem-se  $|G(j\omega)|_{dB} = 0 \text{ dB}$  e  $\angle G(j\omega) = 180^\circ$ . Com isso, define-se uma regra para avaliar através do diagrama de Bode (da malha aberta) se um sistema está no limiar de estabilidade. Resta agora saber se aumentar  $K$  torna o sistema mais ou menos estável.

O LGR da Figura 1 indica que o aumento de  $K$  torna o sistema instável, pois o sistema é estável para  $K < 2$  e instável para  $K > 2$ . Desse modo, para esse sistema, a regra para estabilidade do sistema em malha fechada com base no diagrama de Bode de malha aberta é

$$|KG(j\omega)|_{dB} < 0 \text{ dB} \text{ quando } \angle G(j\omega) = -180^\circ. \quad (5)$$

Conforme tem-se visto até então no curso, aumentar  $K$  tender a instabilizar o sistema é o tipo de comportamento mais comum em sistemas reais. Entretanto, isso não é regra, pois alguns sistemas passam de instáveis para estáveis com o aumento de  $K$ . Há ainda sistemas em que  $|KG(j\omega)|_{dB}$  cruza 0 dB mais de uma vez. Uma maneira de analisar a estabilidade através do diagrama de Bode de malha aberta nesses casos mais complexos é remover a ambiguidade através do LGR. Outra maneira é usar o critério de estabilidade de Nyquist.

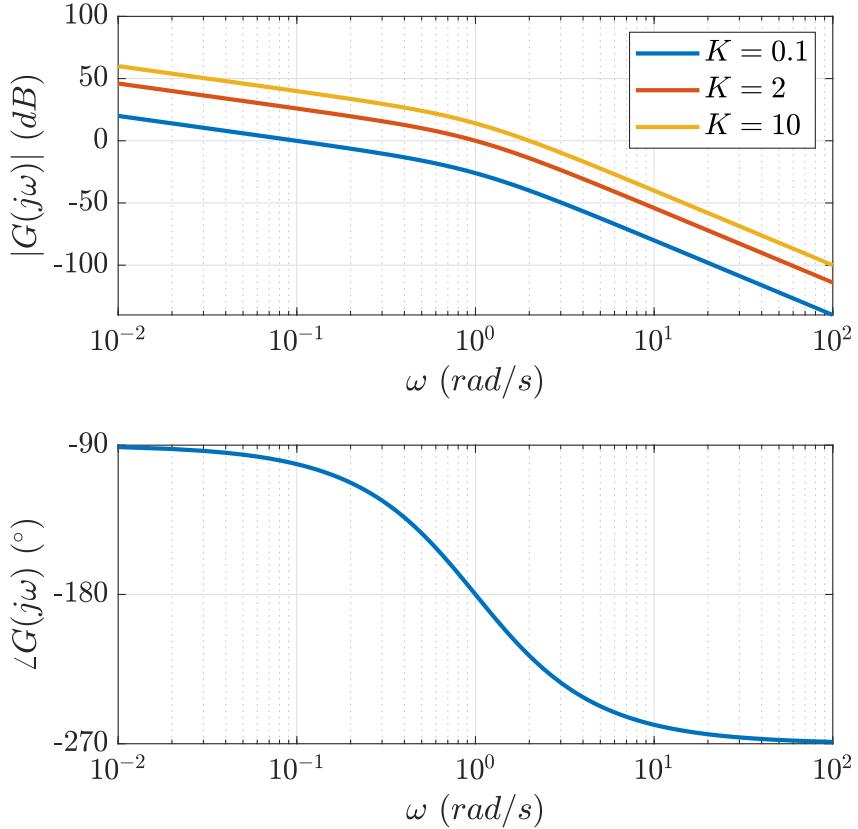


Figura 2: Diagrama de Bode da função de transferência definida em (1) multiplicada por  $K$  com diferentes valores de  $K$ .

## 2 Critério de Estabilidade de Nyquist

O critério de estabilidade de Nyquist relaciona a resposta em frequência de malha aberta com o número de polos do sistema em malha fechada no semi-plano direito (SPD). Com isso, o critério de Nyquist permite determinar estabilidade através da resposta em frequência de um sistema complexo, em que  $|G(j\omega)|$  cruza 0 dB diversas vezes ou  $\angle G(j\omega)$  cruza  $-180^\circ$  diversas vezes. O critério de Nyquist é baseado num resultado do Cálculo de Variável Complexa chamado **princípio do argumento de Cauchy**.

### 2.1 Princípio do Argumento

Nesta seção, discute-se o princípio do argumento de forma intuitiva. Para uma demonstração do princípio do argumento, sugere-se consultar o Apêndice WA.10 do livro de Franklin, Powell e Emami-Naeini [1].

Considere a função de transferência  $G_1(s)$  cujos polos e zeros estão indicados no plano  $s$  na Figura 3(a). Deseja-se avaliar  $G_1(s)$  para valores de  $s$  no contorno fechado em sentido horário  $C$ . Seja  $s_0$  um ponto de  $C$ . Pode-se escrever

$$G_1(s_0) = |G_1(s_0)|e^{j\angle G_1(s_0)}, \quad (6)$$

em que

$$\angle G_1(j\omega) = \psi_1 + \psi_2 - \phi_1 - \phi_2. \quad (7)$$

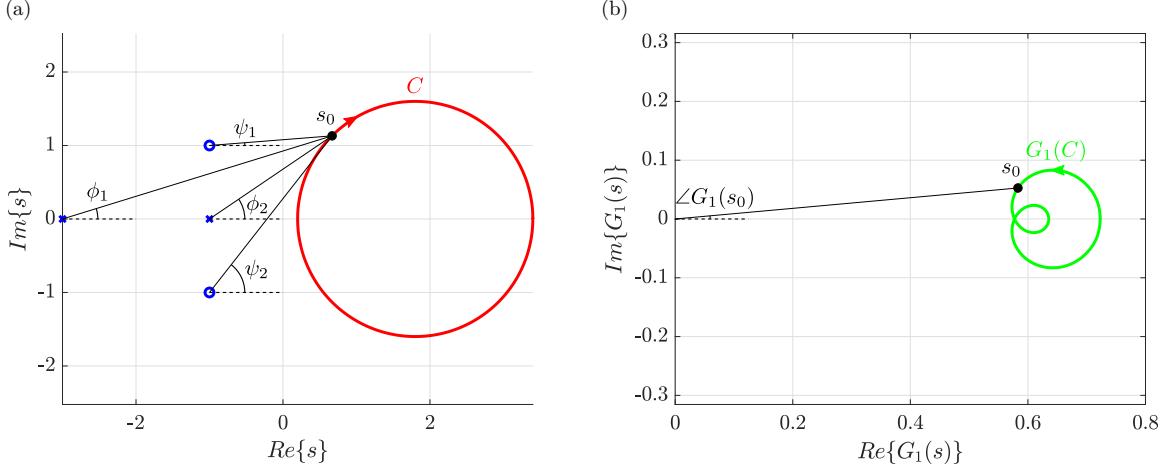


Figura 3: Mapeamento do contorno  $C$  realizado por  $G_1(s)$ : (a) padrão de polos e zeros de  $G_1(s)$  e contorno  $C$ ; e (b) mapeamento de  $C$  realizado por  $G_1(s)$ .

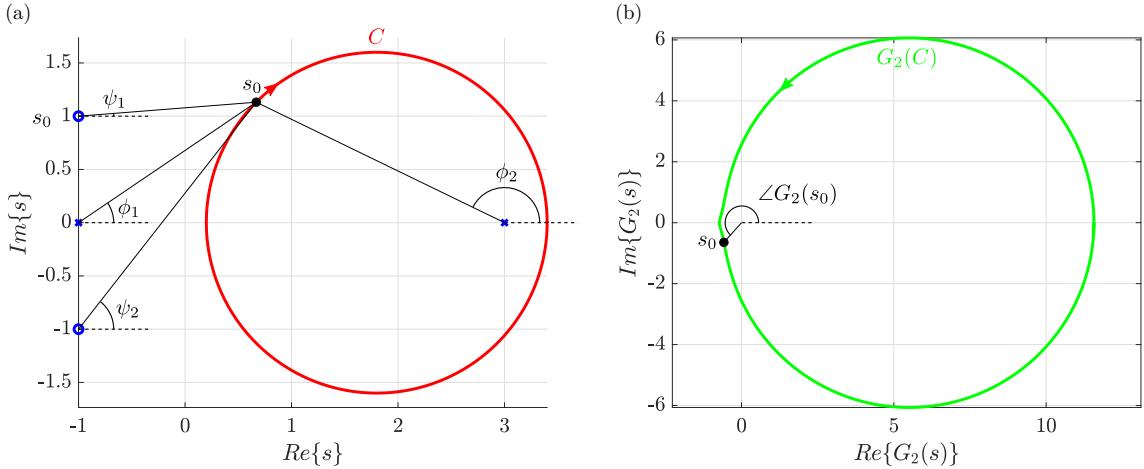


Figura 4: Mapeamento do contorno  $C$  realizado por  $G_2(s)$ : (a) padrão de polos e zeros de  $G_2(s)$  e contorno  $C$ ; e (b) mapeamento de  $C$  realizado por  $G_2(s)$ .

Enquanto  $s$  percorre  $C$  em sentido horário a partir de  $s_0$ ,  $\angle G_1(j\omega)$  não deve passar por uma mudança de  $360^\circ$ , dado que não há polos nem zeros no interior de  $C$ . Isto significa que o mapeamento de  $C$  realizado por  $G_1(s)$  não circula a origem, conforme evidencia a Figura 3(b).

Por outro lado, considere  $G_2(s)$ , que possui um polo dentro de  $C$ , conforme mostra a Figura 4(a). Nesse caso, quando  $s$  realiza um percurso completo em  $C$ , o ângulo  $\phi_2$  passa por uma mudança de  $-360^\circ$ . Desse modo, o mapeamento de  $C$  através de  $G_2(s)$  circula a origem no sentido anti-horário, como indica a Figura 4(b). Se houvesse um zero dentro de  $C$  ao invés de um polo, a origem também seria circulada, porém em sentido horário.

Com isso, anuncia-se o princípio do argumento: um mapeamento de um contorno fechado em sentido horário  $C$  realizado por uma função de variável complexa  $G(s)$  circula a origem  $Z - P$  vezes, em que  $Z$  e  $P$  representam os números de zeros e polos de  $G(s)$  dentro de  $C$ .

Por fim, determinar o número de voltas no sentido horário em torno da origem pode

não ser fácil para uma curva complicada. Assim, existe uma regra prática simples para realizar a contagem: traça-se uma reta da origem até o infinito (em qualquer direção) e então conta-se o número líquido de cruzamentos da esquerda para a direita que a curva faz com a reta. Esse procedimento está ilustrado na Figura 5.

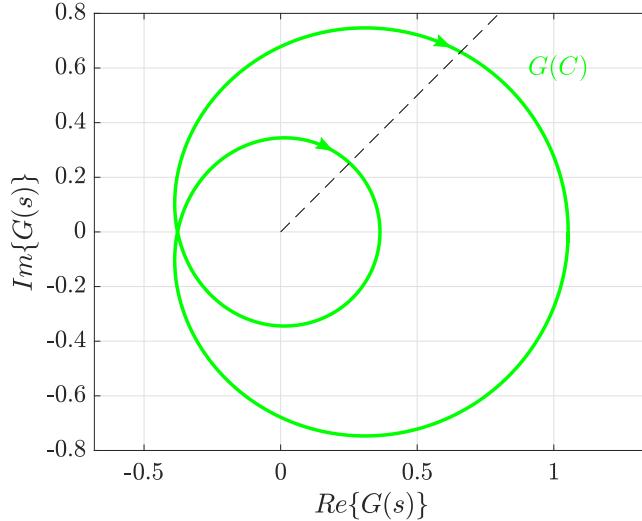


Figura 5: Contagem de voltas de  $G(C)$  no sentido horário em torno da origem.

### 3 Critério de Nyquist

Como comentado anteriormente, o critério de Nyquist usa o princípio do argumento para determinar a estabilidade de um sistema dinâmico em malha fechada. Como o princípio do argumento diz sobre o número de polos e zeros dentro de um contorno em sentido horário, é natural que se defina um contorno que envolva todo o semiplano direito (SPD). No caso, considera-se o contorno  $C$  mostrado na Figura 6.

Então, considere a malha de controle genérica apresentada na Figura 7. Pode-se escrever

$$G_f(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{KN(s)}{D(s) + KN(s)}, \quad (8)$$

em que  $N(s)$  e  $D(s)$  representam o numerador e o denominador de  $G(s)$ . Denote

$$F(s) = 1 + KG(s). \quad (9)$$

Assim, perceba que

$$F(s) = 1 + KG(s) = 1 + K \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{D(s) + KN(s)}{D(s)}. \quad (10)$$

Sejam  $Z$  e  $P$  os números de zeros e polos de  $F(s)$  no interior de  $C$  (i.e. no SPD), tem-se:

- $Z$  é o número de zeros de  $F(s)$  no SPD, que é o número de polos de  $G_f(s)$  no SPD, i.e. o número de polos de malha fechada no SPD.

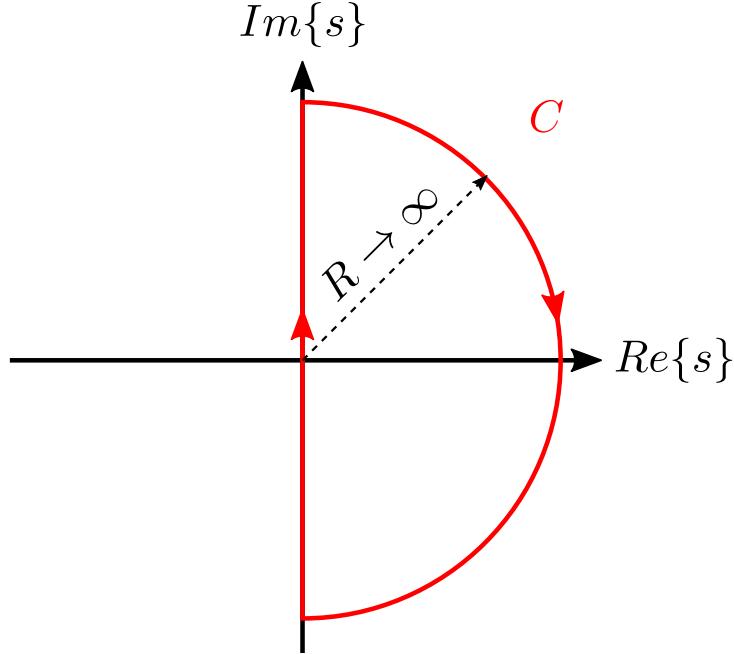


Figura 6: Contorno  $C$  usado no critério de Nyquist para envolver o SPD.

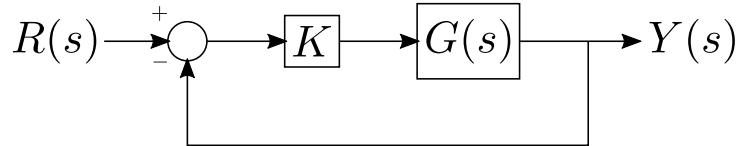


Figura 7: Malha genérica considerada no critério de Nyquist.

- $P$  é o número de polos de  $F(s)$  dentro de  $C$ , que é o número de polos de  $G(s)$  no SPD, i.e. o número de polos de malha aberta no SPD.

Para facilitar, assume-se inicialmente que não há polos de malha aberta no eixo imaginário  $s = j\omega$ , pois  $C$  passa por  $s = j\omega$ . Posteriormente, mostrar-se-á como generalizar o método para eliminar essa restrição.

Pelo princípio do argumento, o número de voltas de  $F(C) = 1 + KG(C)$  em torno da origem no sentido horário é  $Z - P$ . Perceba ainda que  $F(C)$  é  $KG(C)$  deslocado de uma unidade no eixo real. Logo, equivalentemente, pode-se trabalhar com o número de voltas de  $KG(C)$  em torno do ponto  $-1$ . Seja  $N$  o número de voltas no sentido horário em torno de  $-1$ , pode-se escrever

$$N = Z - P \Rightarrow Z = N + P, \quad (11)$$

que é a equação do critério de Nyquist, enquanto  $KG(C)$  é chamado de **diagrama de Nyquist**. Note que (11) relaciona o número de polos de malha fechada no SPD  $Z$  com o número de voltas em torno de  $-1$  no sentido horário de  $KG(C)$  e o número de polos de malha aberta no SPD  $P$ .

Para traçado do diagrama de Nyquist  $KG(C)$ , é interessante dividir  $C$  em três segmentos  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  conforme mostra a Figura 8. A partir disso, verifica-se que:

- $G(C_1)$  é o gráfico polar da resposta em frequência  $G(j\omega)$ .
- Como  $G(-j\omega)$  é o complexo conjugado de  $G(j\omega)$ , então  $G(C_2)$  é  $G(C_1)$  espelhado em torno do eixo real.
- $G(C_3)$  corresponde a  $\lim_{|s| \rightarrow \infty} G(s)$ . Para sistemas estritamente próprios (número de polos maior que o número de zeros), tem-se  $G(C_3) = 0$  (ponto na origem).
- $KG(C) = K|G(C)|e^{j\angle G(C)}$ , de modo que o efeito do ganho  $K$  é dilatar ou contrair  $G(C)$  em relação à origem. Se  $K < 0$ , então há uma reflexão dos pontos de  $G(C)$  em torno da origem.

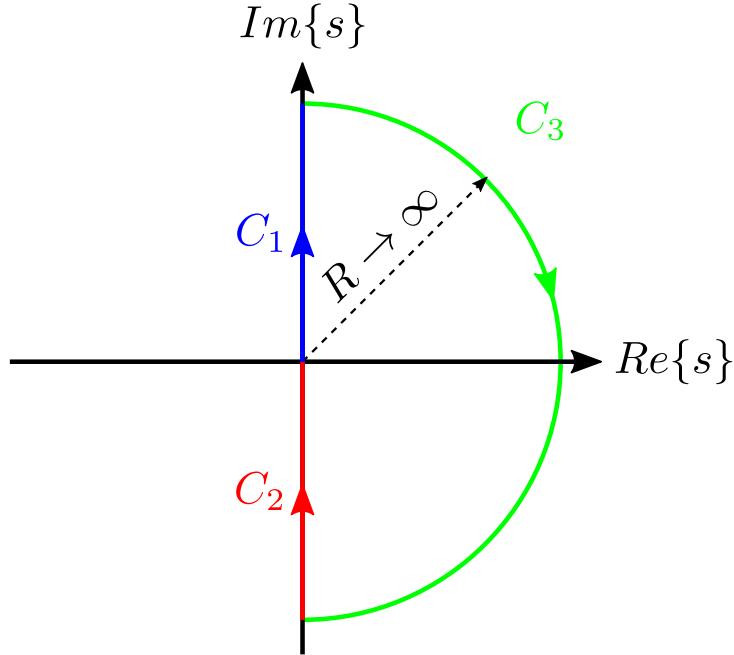


Figura 8: Contorno  $C$  do critério de Nyquist dividido em três segmentos  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ .

Em resumo, o procedimento para uso do critério de Nyquist é o seguinte:

1. Traça-se o diagrama de Nyquist  $KG(C)$ , em que  $C$  é a curva apresentada na Figura 6.
2. Determina-se o número de voltas no sentido horário  $N$  que  $KG(C)$  realiza em torno de  $-1$ .
3. Determina-se o número de polos de malha aberta no SPD  $P$  de  $G(s)$ .
4. Calcula-se o número de polos de malha fechada no SPD através de:  $Z = N + P$ .
5. Como conhecido da estabilidade de sistemas LIT, se  $Z = 0$ , o sistema é estável. Caso contrário ( $Z > 0$ ), o sistema é instável.

A dificuldade em usar o critério de Nyquist advém do traçado do diagrama de Nyquist, que pode ser bem complicado para sistemas de ordem elevada. Como  $G(C_1)$  corresponde ao gráfico polar da resposta em frequência, pode-se primeiramente traçar o diagrama de Bode para facilitar o traçado do diagrama de Nyquist. O MATLAB traça o diagrama de Nyquist através da função `nyquist(sys)`, em que `sys` é a função de transferência em questão.

**Exemplo 1.** Seja

$$G(s) = \frac{1}{s+1}. \quad (12)$$

Trace o diagrama de Nyquist para esse sistema considerando  $K = 1$ .

Primeiramente, pode-se traçar o diagrama de Bode de (12), conforme mostrado na Figura 9, e a partir disso traçar o diagrama de Nyquist. Pela resposta em frequência, verifica-se que o sistema varia de

$$|G(j\omega)| = 1 \text{ e } \angle G(j\omega) = 0 \text{ quando } \omega = 0 \quad (13)$$

até

$$|G(j\omega)| = 0 \text{ e } \angle G(j\omega) = -90^\circ \text{ quando } \omega \rightarrow \infty \quad (14)$$

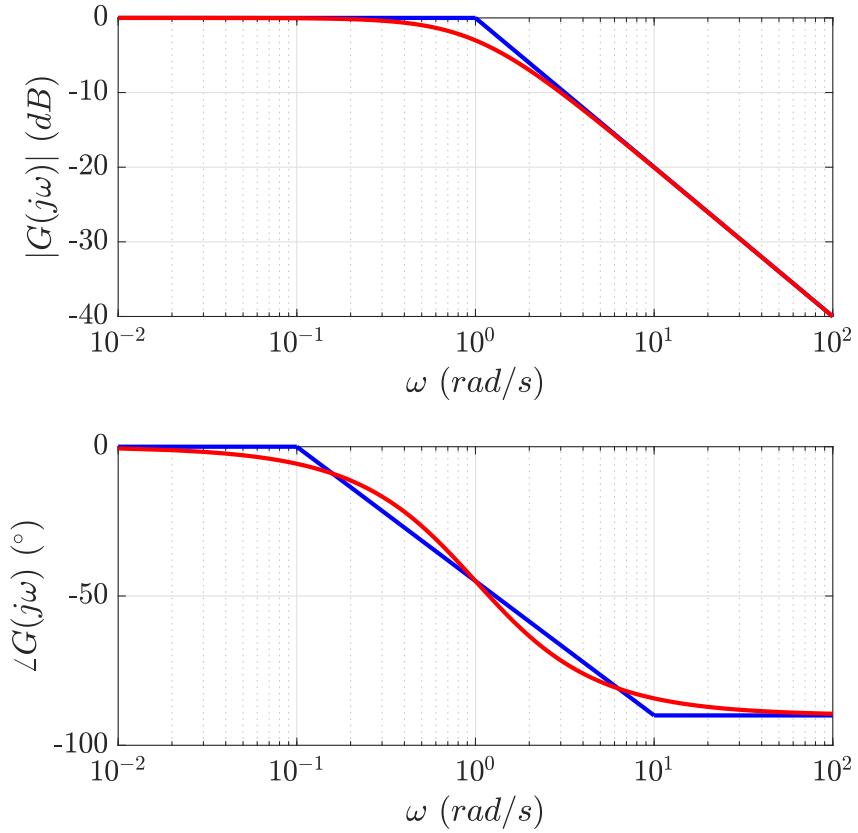


Figura 9: Diagrama de Bode da função de transferência definida em (12).

Com isso, pode-se traçar um esboço do diagrama de Nyquist conforme mostrado na Figura 10, em que a parte relativa a  $G(C_2)$  ( $\omega < 0$ ) foi obtida por reflexão de  $G(C_1)$  em

torno do eixo real. Nesse caso, tem-se

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} G(s) = 0, \quad (15)$$

de modo que  $G(C_3)$  corresponde ao ponto  $s = 0$ . Perceba que não há dilatação ou contração que faça com que o contorno mostrado na Figura 10 circule  $-1$ , de modo que não há valor  $K > 0$  que torna o sistema instável. Porém, com  $K < 0$  (reflexão em relação à origem), é sim possível que o contorno circule  $-1$ .

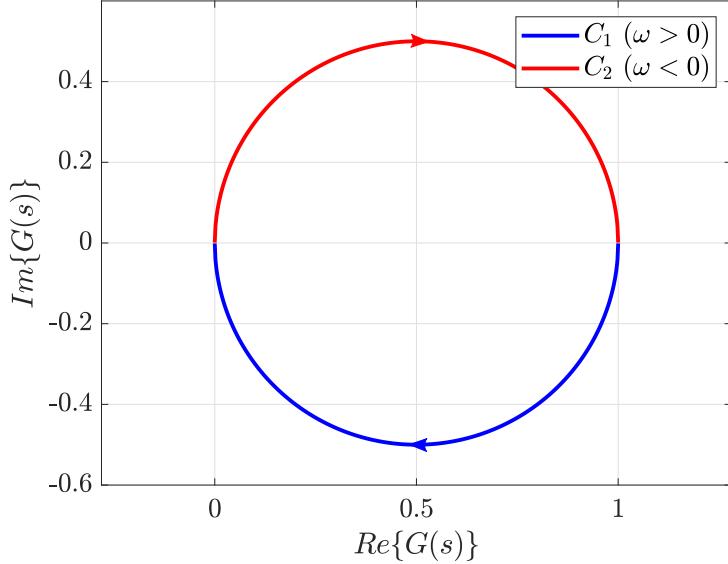


Figura 10: Diagrama de Nyquist da função de transferência definida em (12).

Uma forma mais direta de traçar o diagrama de Nyquist envolve analisar diretamente a equação da resposta em frequência

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}, \quad (16)$$

o que nesse caso simples permite rapidamente obter as conclusões contidas em (13) e (14). Outra maneira consiste em analisar como  $|G(j\omega)|$  e  $\angle G(j\omega)$  variam de acordo com  $\omega$  a partir das distâncias e ângulos dos polos e zeros até  $s = j\omega$ . Considere a Figura 11, de (12), pode-se escrever

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{m}, \quad \angle G(j\omega) = -\phi. \quad (17)$$

Da figura, é fácil verificar que:

- $m = 1$  e  $\phi = 0$  quando  $\omega = 0$ .
- $m \rightarrow \infty$  e  $\phi \rightarrow -90^\circ$  quando  $\omega \rightarrow \infty$ .

De modo que chega-se novamente em (13) e (14). Mostra-se na Figura 12 o diagrama de Nyquist traçado com a função `nyquist` do MATLAB. Finalmente, nas figuras 10 e 12,

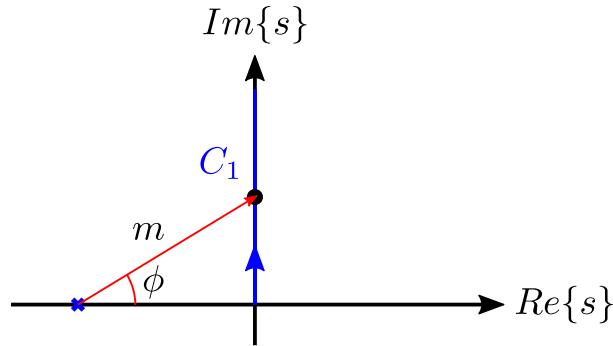


Figura 11: Procedimento para auxiliar traçado do gráfico polar de  $G(j\omega)$ .

o diagrama de Nyquist parece ser uma circunferência com centro em 0,5 e raio 0,5. De fato, perceba que

$$G(j\omega) - 0,5 = \frac{1}{j\omega + 1} - 0,5 = \frac{0,5 - 0,5j\omega}{1 + j\omega} = 0,5 \left( \frac{1 - j\omega}{1 + j\omega} \right) = 0,5e^{j[(1-j\omega)/(1+j\omega)]}, \quad (18)$$

de modo que fica comprovado que o diagrama de Nyquist é uma circunferência com centro em 0,5 e raio 0,5.

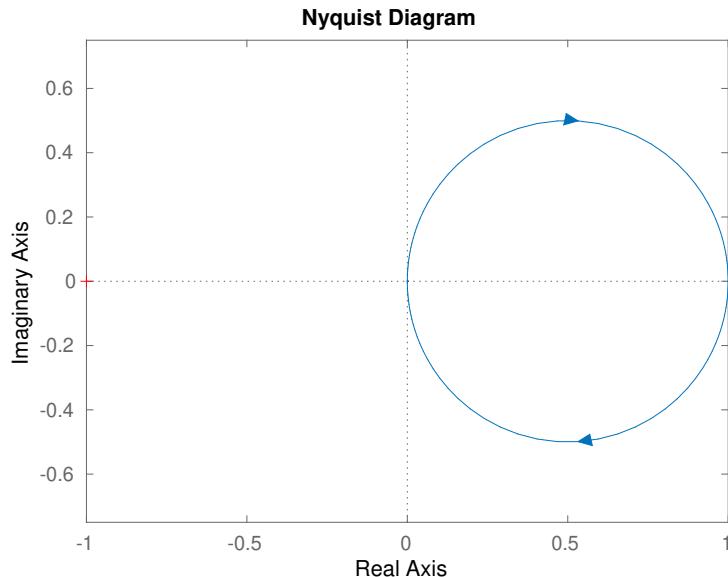


Figura 12: Traçado do diagrama de Nyquist de (12) com uso da função nyquist do MATLAB.

## Referências

- [1] Gene F. Franklin, J. Davis Powell, and Abbas F. Emami-Naeini. Feedback control of dynamic systems – web appendix. [https://www.scsolutions.com/wp-content/uploads/Z01\\_FRAN6598\\_07\\_SE\\_All\\_0.pdf](https://www.scsolutions.com/wp-content/uploads/Z01_FRAN6598_07_SE_All_0.pdf).

# Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA

## Controle para Sistemas Computacionais – CMC-12

### Notas da Aula 16 – Critério de Nyquist

**Professor:** Marcos Ricardo Omena de Albuquerque Maximo

4 de julho de 2020

Na aula passada, apresentou-se o critério de Nyquist e mostrou-se como aplicá-lo num exemplo simples. Nesta aula, continua-se a explicação sobre esse critério, considerando casos mais complicados.

## 1 Exemplos de Aplicação do Critério de Nyquist

Nessa seção, mostra-se alguns exemplos de aplicação do critério de Nyquist.

**Exemplo 1.** Seja

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}. \quad (1)$$

Analise a estabilidade de um sistema de controle em malha fechada para essa planta com uso do critério de Nyquist.

A resposta em frequência do sistema é

$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega+1)^2}, \quad (2)$$

de modo que

$$|G(j\omega)| = 1 \text{ e } \angle G(j\omega) = 0 \text{ quando } \omega = 0 \quad (3)$$

e

$$|G(j\omega)| = 0 \text{ e } \angle G(j\omega) = -180^\circ \text{ quando } \omega \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Com isso, perceba que em algum momento, o diagrama de Nyquist deve cruzar o eixo imaginário. Esse cruzamento deve acontecer quando  $G(j\omega)$  for um número imaginário puro. Desenvolvendo (2):

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{(j\omega+1)^2} = \frac{1}{1-\omega^2+2\omega j} = \frac{1-\omega^2-2\omega j}{(1-\omega^2)^2+4\omega^2} \Rightarrow \\ G(j\omega) &= \frac{1-\omega^2}{\omega^4+2\omega^2+1} - \frac{2\omega}{\omega^4+2\omega^2+1} j, \end{aligned} \quad (5)$$

Para que  $G(j\omega)$  seja imaginário puro, deve-se ter

$$\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} = 0 \Rightarrow \omega = 1 \text{ rad/s}, \quad (6)$$

de modo que

$$G(j\omega)|_{\omega=1} = -0,5j. \quad (7)$$

Assim, o diagrama de Nyquist de (1) pode ser esboçado como na Figura 1. Por curiosidade, esse diagrama de Nyquist em “formato de coração” é uma cardióide. Caso tenha interesse, existe um artigo por Emami-Naeini que discute formatos de alguns diagramas de Nyquist [1]. Num traçado manual, caso deseje-se maior precisão, pode-se determinar  $G(j\omega)$  para outros valores intermediários de  $\omega$ .

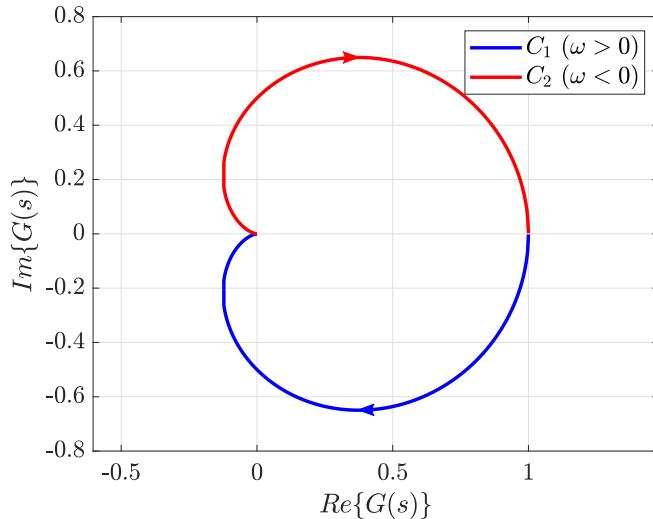


Figura 1: Diagrama de Nyquist da função de transferência (1).

Perceba que  $\lim_{|s| \rightarrow \infty} G(s) = 0$ , de modo que  $G(C_3)$  corresponde à origem. Lembre-se que  $C_3$  refere-se à semicircunferência com  $|s| \rightarrow \infty$  que faz parte do contorno  $C$  usado no diagrama de Nyquist, conforme notação da aula passada). Quanto à estabilidade, note que nenhuma dilatação ou contração do contorno mostrado na Figura 1 que o faça circular o ponto  $-1$ , de modo que o sistema é estável independente para qualquer valor de  $K > 0$ .

**Exemplo 2.** Seja

$$G(s) = \frac{100}{(s+1)(s+2)(s+5)}. \quad (8)$$

Use o critério de Nyquist para analisar a estabilidade de um sistema de controle em malha fechada para esse sistema dinâmico.

Para traçado do diagrama de Nyquist, considere o padrão de polos e zeros de (8) no plano  $s$ , mostrado na Figura 2. Com base no procedimento já discutido na aula passada, pode-se escrever

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{m_1 m_2 m_3}, \quad (9)$$

$$\angle G(j\omega) = -\phi_1 - \phi_2 - \phi_3, \quad (10)$$

de modo que

$$|G(j\omega)| = \frac{100}{2 \cdot 5} = 10 \text{ e } \angle G(j\omega) = 0 \text{ quando } \omega = 0 \quad (11)$$

e

$$|G(j\omega)| = 0 \text{ e } \angle G(j\omega) = -270^\circ \text{ quando } \omega \rightarrow \infty, \quad (12)$$

logo o diagrama de Nyquist deve cruzar o eixo imaginário e depois o eixo real. A expressão geral da resposta em frequência é

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{100}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)(j\omega + 5)} = 100 \frac{(1 - j\omega)(2 - j\omega)(5 - j\omega)}{(1 + \omega^2)(4 + \omega^2)(25 + \omega^2)} \Rightarrow \\ G(j\omega) &= 100 \frac{10 - 8\omega^2 + (\omega^3 - 17\omega)j}{(1 + \omega^2)(4 + \omega^2)(25 + \omega^2)}. \end{aligned} \quad (13)$$

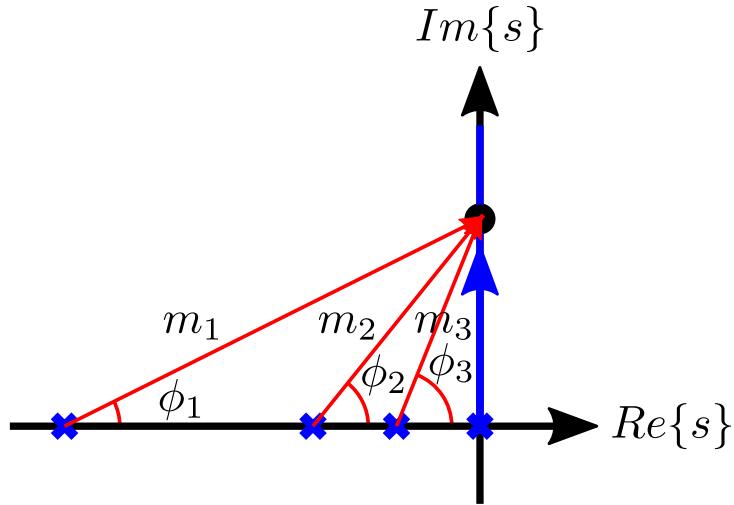


Figura 2: Procedimento para auxiliar traçado do gráfico polar de (8).

No ponto de cruzamento com o eixo imaginário:

$$\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} = 10 - 8\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ rad/s} \Rightarrow G(j\omega)|_{\omega=\sqrt{5}/2} = -5,6789j. \quad (14)$$

No ponto de cruzamento com o eixo real:

$$\operatorname{Im}\{G(j\omega)\} = \omega^3 - 17\omega = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{17} \Rightarrow G(j\omega)|_{\omega=\sqrt{17}} = -0,7937. \quad (15)$$

Com isso, pode-se esboçar o diagrama de Nyquist como mostrado na Figura 3. Nesse caso, com uma dilatação, é possível que o contorno circule o ponto  $-1$ .

Para determinar a faixa de valores de  $K$  que torna o sistema instável, ao invés de levar em conta o número de voltas de  $KG(s)$  em torno de  $-1$ , pode-se considerar o número de voltas de  $G(s)$  em torno de  $-1/K$ . Em termos práticos, esse truque facilita a análise de estabilidade, pois é mais fácil mover o ponto  $-1/K$  do que dilatar ou contrair todo o

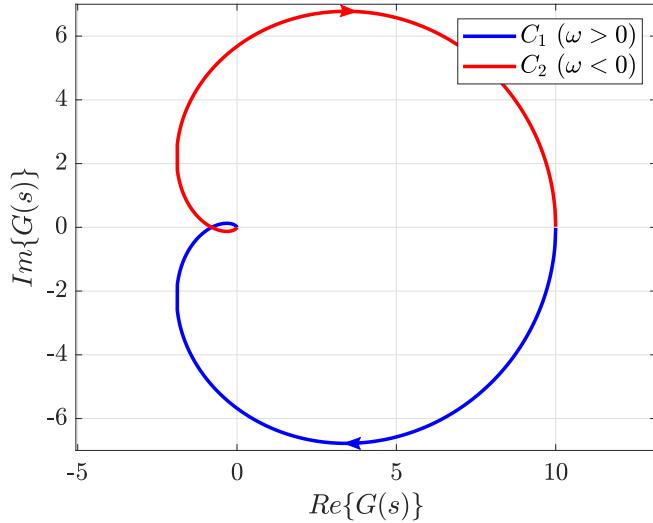


Figura 3: Diagrama de Nyquist da função de transferência (8).

diagrama de Nyquist. Assim, como pode-se verificar na Figura 3, o limiar de estabilidade acontece o ponto de cruzamento com o eixo real atinge  $-1/K$ :

$$-\frac{1}{K} = -0,7937 \Rightarrow K = 1,2599. \quad (16)$$

Finalmente, destaca-se que esse é um caso em que a estabilidade pode ser analisada através do diagrama de Bode, traçado para diferentes valores de  $K$  na Figura 4, em que a linha preta tracejada indica a frequência em que  $\angle G(j\omega) = -180^\circ$ . Para o sistema ser estável, basta que

$$|KG(j\omega)| < 1 \text{ quando } \angle G(j\omega) = -180^\circ. \quad (17)$$

**Exemplo 3.** Aplique o critério de Nyquist em

$$G(s) = \frac{4}{(s-1)(s+2)}. \quad (18)$$

No caso em questão, há um polo de malha aberta no semi-plano direito (SPD), de modo que a equação do critério de Nyquist  $Z = N + P$  deve ser levada em consideração para a análise de estabilidade. Perceba que

$$|G(j\omega)| = 2 \text{ e } \angle G(j\omega) = -180^\circ \text{ quando } \omega = 0 \quad (19)$$

e

$$|G(j\omega)| = 0 \text{ e } \angle G(j\omega) = -180^\circ \text{ quando } \omega \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Para facilitar a determinação do diagrama de Nyquist, pode-se primeiramente traçar o diagrama de Bode, conforme mostra a Figura 5. Com isso, pode-se determinar o diagrama de Nyquist conforme mostra a Figura 6. Perceba que para  $K$  suficientemente grande, o diagrama dá uma volta em torno de  $-1/K$  no sentido anti-horário ( $N = -1$ ), logo

$$Z = N + P = -1 + 1 \Rightarrow Z = 0 \quad (21)$$

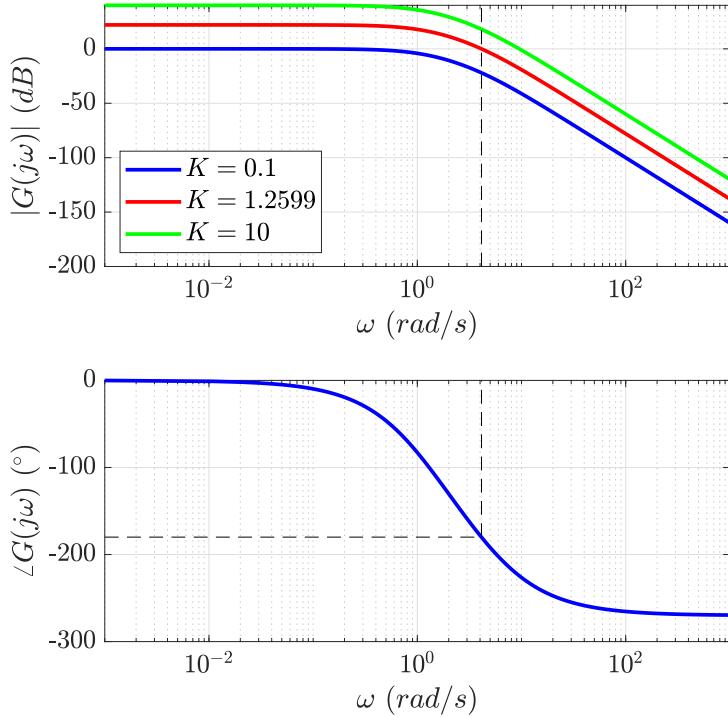


Figura 4: Diagrama de Bode da função de transferência (8). A linha preta tracejada indica a frequência em que  $\angle G(j\omega) = -180^\circ$ .

e o sistema é estável. Caso contrário, tem-se

$$Z = N + P = 0 + 1 \Rightarrow Z = 1 \quad (22)$$

e o sistema é instável, pois há um polo de malha fechada no SPD. O limiar de estabilidade é obtido quando

$$-\frac{1}{K} = -2 \Rightarrow K = 0,5. \quad (23)$$

Perceba que esse é um caso em que o sistema torna-se estável quando  $K$  é aumentado, ao contrário do que acontece na maioria dos sistemas reais. Essa conclusão também é corroborada pelo lugar geométrico das raízes (LGR), mostrado na Figura 7.

## 2 Diagrama de Nyquist com Polo de Malha Aberta no Eixo Imaginário

Quando polos de malha aberta no eixo imaginário, o contorno  $C$  definido anteriormente para o critério de Nyquist não pode mais ser aplicado, pois ele passaria em cima desses polos de malha aberta. Para resolver esse problema, basta fazer o contorno fazer um pequeno desvio para evitar passar por cima do polo no eixo imaginário. Em geral, usa-se uma semicircunferência com raio infinitesimal para esse desvio. A seguir, apresenta-se o uso desse truque em um exemplo.

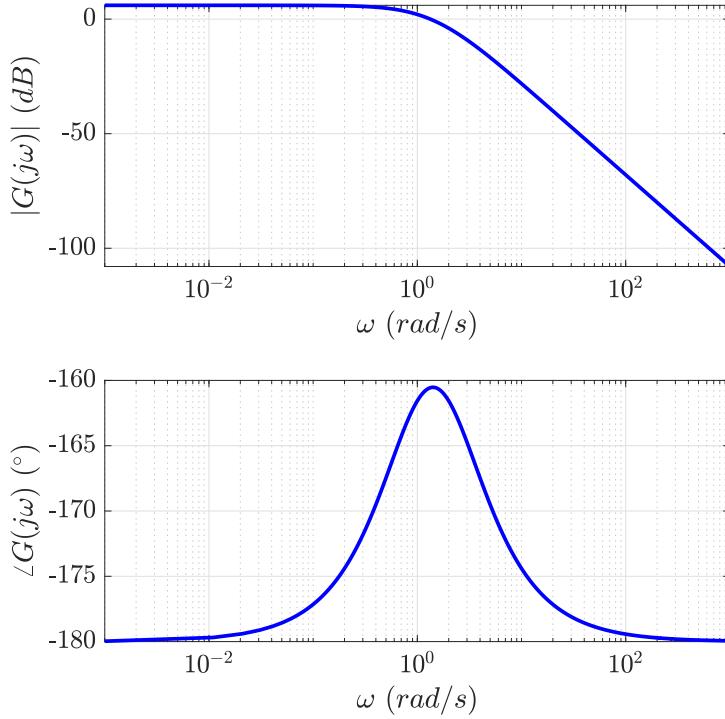


Figura 5: Diagrama de Bode da função de transferência (18).

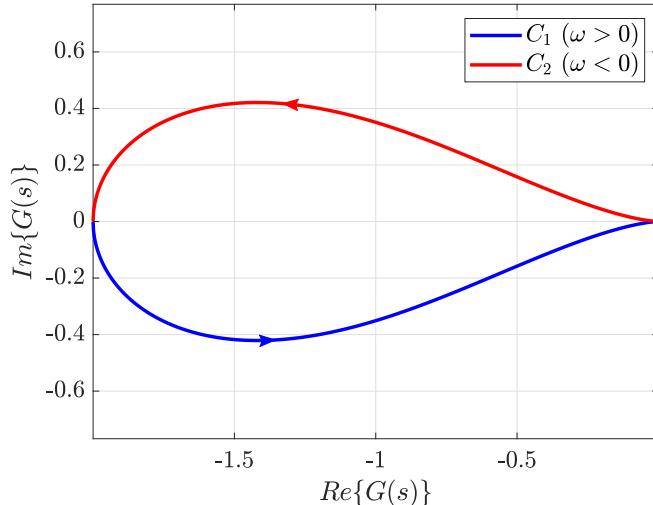


Figura 6: Diagrama de Nyquist da função de transferência (18).

**Exemplo 4.** Aplique o critério de Nyquist em

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}. \quad (24)$$

Como há um polo no eixo imaginário, o contorno  $C$  usado no diagrama de Nyquist deve fazer um desvio (de raio infinitesimal) em torno desse polo, conforme mostra a Figura 8. Assim,  $C_1$  representa  $j\omega$  com  $\omega$  variando de  $0^+$  até  $\infty$ . A resposta em frequência é

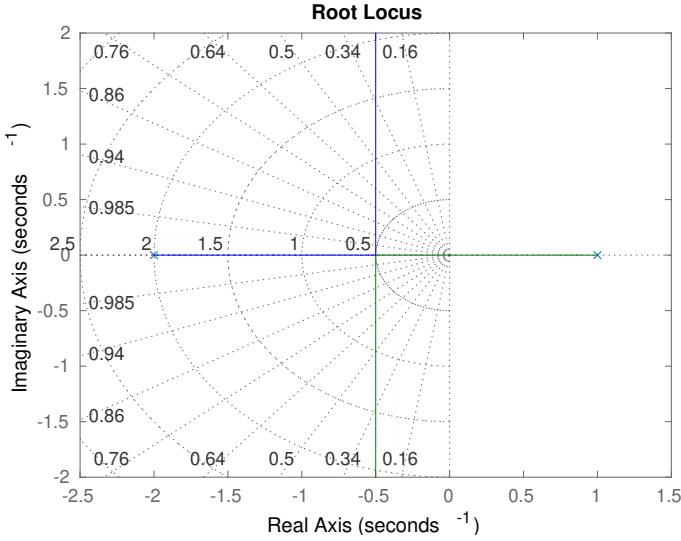


Figura 7: Lugar geométrico das raízes (LGR) da função de transferência (18).

dada por

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega + 1)^2}, \quad (25)$$

de modo que

$$|G(j\omega)| \rightarrow \infty \text{ e } \angle G(j\omega) = -90^\circ \text{ quando } \omega \rightarrow 0^+ \quad (26)$$

e

$$|G(j\omega)| = 0 \text{ e } \angle G(j\omega) = -270^\circ \text{ quando } \omega \rightarrow \infty. \quad (27)$$

Além disso, tem-se

$$|G(j\omega)| \rightarrow \infty \text{ e } \angle G(j\omega) = 90^\circ \text{ quando } \omega \rightarrow 0^- \quad (28)$$

Expandindo (18) para encontrar o cruzamento com o eixo real:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(-\omega^2 + 2j\omega + 1)} = \frac{1}{-2\omega^2 + j(\omega - \omega^3)}, \quad (29)$$

logo o cruzamento com o eixo real é encontrado quando

$$\operatorname{Im}\{G(j\omega)\} = 0 \Rightarrow \omega - \omega^3 = 0 \Rightarrow \omega = 1 \text{ rad/s} \quad (30)$$

e vale

$$\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}|_{\omega=1} = -0,5. \quad (31)$$

Para facilitar ainda mais o traçado, considere o diagrama de Bode mostrado na Figura 9. Juntando todas as informações consideradas, pode-se esboçar o diagrama de Nyquist conforme a Figura 10. O ganho que deixa o sistema no limiar de estabilidade é

$$-\frac{1}{K} = -0,5 \Rightarrow K = 2. \quad (32)$$

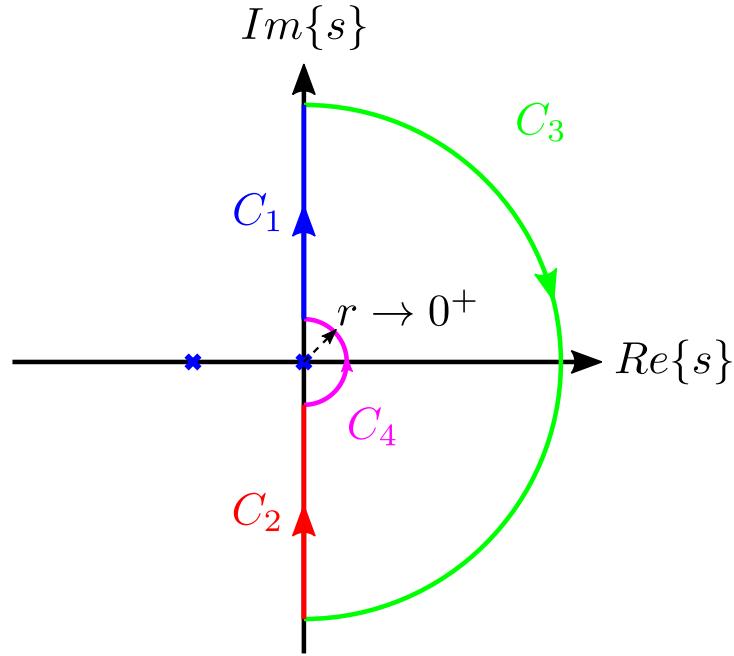


Figura 8: Contorno  $C$  usado no diagrama de Nyquist de (18), com desvio do polo em  $s = 0$ .

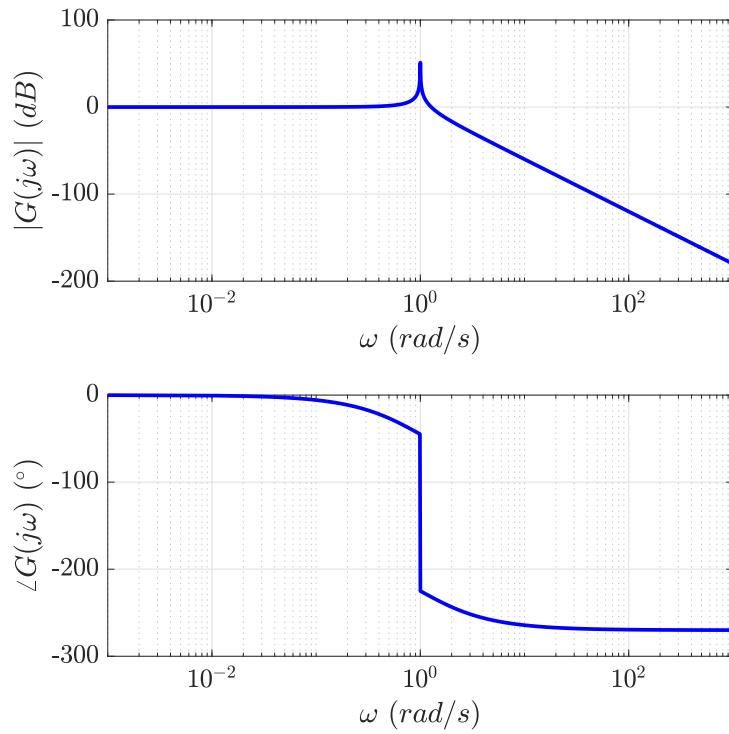


Figura 9: Diagrama de Bode da função de transferência (24).

Finalmente, destaca-se que em casos como esse em que há polos no eixo imaginário, o MATLAB não mostra a parte da curva relativa aos desvios quando se usa a função `nyquist`. Nesses casos, pode-se fazer o traçado usando um valor pequeno para o raio do desvio, como apresenta a Listagem 1.

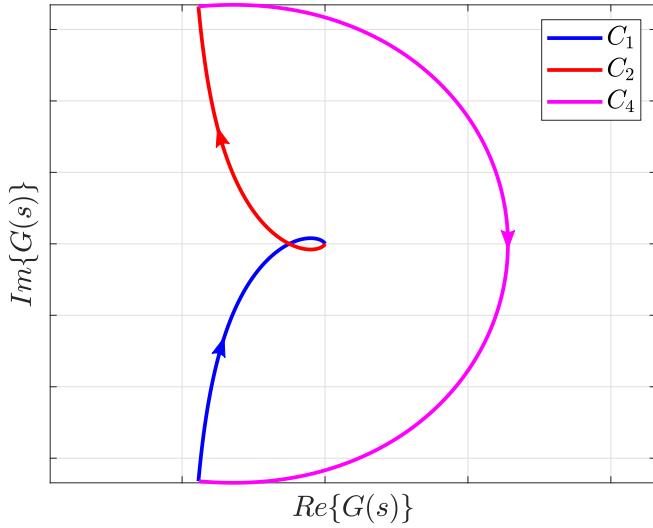


Figura 10: Diagrama de Nyquist da função de transferência (24).

Listagem 1: Código para traçado do diagrama de Nyquist considerando o desvio em torno do polo em  $s = 0$ .

```

1 s = tf('s');
2 G = 1 / (s * (s + 1)^2);
3
4 % Raio escolhido para desvio
5 r = 1/4;
6
7 figure;
8 hold on;
9
10 % Tracado do mapeamento de C1 e C2
11 w = r:1e-2:1000;
12 C1mx = zeros(size(w));
13 C1my = zeros(size(w));
14 for i=1:length(w)
15     sm = evalfr(G, w(i) * 1j);
16     C1mx(i) = real(sm);
17     C1my(i) = imag(sm);
18 end
19 plot(C1mx, C1my, 'b', 'LineWidth', 2);
20 plot(C1mx, -C1my, 'r', 'LineWidth', 2);
21
22 % Tracado do mapeamento de C4 (desvio)
23 angulos = -pi/2:1e-2:pi/2;
24 C4mx = zeros(size(angulos));
25 C4my = zeros(size(angulos));
26 for i=1:length(angulos)
27     sm = evalfr(G, r * exp(angulos(i) * 1j));
28     C4mx(i) = real(sm);
29     C4my(i) = imag(sm);
30 end
31 plot(C4mx, C4my, 'Color', [1, 0, 1], 'LineWidth', 2);

```

```
32 |  
33 axis equal;  
34 grid on;  
35 xlabel('Re\{G(j \omega)\}');  
36 ylabel('Im\{G(j \omega)\}');
```

## Referências

- [1] A. EMAMI-NAEINI. The shapes of nyquist plots [lecture notes]. *IEEE Control Systems Magazine*, 29(5):102–115, 2009.

# Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA

## Controle para Sistemas Computacionais – CMC-12

### Notas da Aula 17 – Margens de Estabilidade e Diagrama de Nichols-Black

**Professor:** Marcos Ricardo Omena de Albuquerque Maximo

18 de julho de 2020

Nas aulas anteriores, apresentou-se como determinar estabilidade de sistemas dinâmicos com uso de técnicas no domínio da frequência. Porém, para um sistema real, devido à inevitável existência de erro de modelo, tem-se interesse em não apenas saber se o sistema é estável para os valores nominais da planta (estabilidade nominal), mas também determinar o quão robusto a estabilidade do sistema é em relação a erros de modelo. Assim, apresentar-se-á as chamadas margens de estabilidade, que são medidas de robustez da estabilidade de um sistema. Além disso, apresenta-se brevemente o diagrama de Nichols-Black, que é um outro tipo de diagrama para apresentar a resposta em frequência de um sistema de maneira gráfica.

## 1 Margens de Estabilidade

Uma grande quantidade de sistemas de controle reais possuem um padrão quanto a estabilidade como o mostrado quando se apresentou a motivação para o critério de Nyquist: há um único valor de ganho  $K = K^*$  que deixa o sistema no limiar de estabilidade com o sistema estável para  $K < K^*$  e instável para  $K > K^*$ . Para esses sistemas, define-se medidas simples de **margens de estabilidade**.

Sabe-se que o modelo da planta possui incertezas. Assim, as margens de estabilidade determinam o quanto os parâmetros da planta podem variar sem comprometer a estabilidade do sistema. Em controle clássico, costuma-se trabalhar com as chamadas **margem de ganho** (GM, *gain margin*) e **margem de fase** (PM, *phase margin*), que consideram que todas as incertezas na malha aberta ocasionam apenas mudanças de ganho ou de fase, respectivamente.

Perceba que isso é claramente uma simplificação dos efeitos das incertezas, porém essas margens de estabilidade tem um apelo muito forte, pois são facilmente determinadas através do diagrama de Bode. Por conta disso, esses conceitos de margem de estabilidade são muito populares na indústria, onde há uma forte preocupação com robustez a incertezas no modelo. Finalmente, destaca-se que incertezas de modelo na malha aberta são geralmente atribuídas à planta, que de fato é a maior fonte de erro de modelo na maioria dos casos, porém podem estar também presentes em sensores, atuadores e até mesmo no

próprio controlador (como no caso de um controlador implementado através de circuito analógico).

A margem de ganho (GM) é o fator pelo qual o ganho na malha aberta pode ser aumentado antes do sistema instabilizar. Considera-se que todas as incertezas presentes na função de transferência da malha aberta podem ser aglomeradas em uma única incerteza de ganho  $\Delta K$ , conforme mostra a Figura 1.

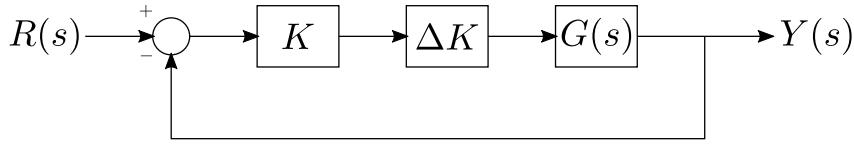


Figura 1: Malha de controle com incerteza de ganho  $\Delta K$ .

Como foi discutido anteriormente, pode-se inferir que o sistema é estável se

$$|KG(j\omega)| < 1 \text{ quando } \angle G(j\omega) = -180^\circ, \quad (1)$$

ou em  $dB$ :

$$|KG(j\omega)|_{dB} < 0 \text{ dB quando } \angle G(j\omega) = -180^\circ. \quad (2)$$

Desse modo, apreende-se que o sistema torna instável quando  $\Delta K$  for tal que

$$|K\Delta KG(j\omega)|_{dB} = 0 \text{ dB quando } \angle K\Delta KG(j\omega) = -180^\circ, \quad (3)$$

ou

$$|KG(j\omega)|_{dB} + \underbrace{(\Delta K)_{dB}}_{GM_{dB}} = 0 \text{ dB quando } \angle G(j\omega) = -180^\circ, \quad (4)$$

de modo que GM corresponde à distância vertical entre  $|KG(j\omega)|$  e  $0 \text{ dB}$  quando  $\angle G(j\omega) = -180^\circ$ . Note que geralmente tem-se  $\Delta K > 1$ , o que implica  $(\Delta K)_{dB} = GM_{dB} > 0$ .

A partir de (1), percebe-se que a estabilidade também é comprometida se o ponto onde ocorre o cruzamento de  $\angle G(j\omega) = -180^\circ$  for alterado. Se a fase do sistema for diminuída por uma incerteza de fase, conforme mostra a Figura 2, a frequência de cruzamento de  $\angle G(j\omega) - 180^\circ$  ocorrerá antes, de modo que poderá acontecer quando o ganho  $|KG(j\omega)| > 0 \text{ dB}$  (lembre que o ganho no diagrama de Bode em geral diminui ao longo de  $\omega$ ), de modo que o sistema será instável. Com isso, define-se também a chamada margem de fase (PM), que indica o quanto  $\angle G(j\omega)$  excede  $-180^\circ$  quando  $|KG(j\omega)|_{dB} = 0 \text{ dB}$ . Matematicamente:

$$\angle G(j\omega) = -180^\circ + \underbrace{\Delta\phi}_{PM} \text{ quando } |KG(j\omega)|_{dB} = 0 \text{ dB}. \quad (5)$$

A frequência em que o ganho  $\omega = \omega_{CP}$  em que o ganho cruza  $0 \text{ dB}$  é chamada de **frequência de cruzamento**. Destaca-se novamente que margens de ganho e de fase consideram variações **apenas** de ganho ou de fase, respectivamente. Para um determinado sistema, variações combinadas de ganho e de fase podem levar rapidamente à instabilidade, mesmo quando as margens de ganho e de fase são adequadas. Por conta disso, essas margens de estabilidade são bastante criticadas e outras formas de margens de estabilidade foram propostas na literatura.

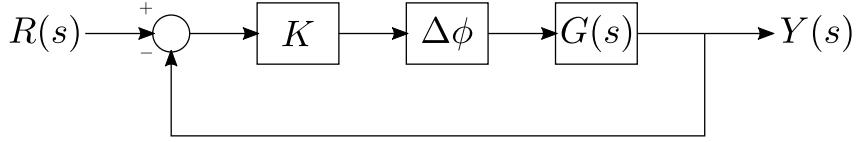


Figura 2: Malha de controle com incerteza de fase  $\phi$ .

Todavia, a forte intuição e utilidade prática presente nesses conceitos fazem com que sejam largamente utilizados em projetos reais, inclusive nos dias atuais. GM e PM (especialmente PM) quase sempre figuram como requisitos em projetos na indústria, juntamente com o conceito de banda passante.

Há regras de bolso para definir o quanto de margem é adequada para um certo sistema, o que depende de quanto incerto é esperado que um modelo da planta seja. O livro de Katsuhiko Ogata [1] recomenda que se adote como requisitos de  $30^\circ$  a  $60^\circ$  para PM e pelo menos  $6 \text{ dB}$  para  $GM_{dB}$ . Para sistemas bem modelados, como um motor elétrico, pode-se adotar valores baixos de margens de estabilidade como requisitos. Porém, para sistemas aeronáuticos, costuma-se usar valores maiores de margens, pois fenômenos aerodinâmicos são difíceis de modelar. Destaca-se também que desempenho (banda passante) e robustez (margens de estabilidade) definem uma relação de compromisso conhecida em sistemas de controle, de modo que excesso de robustez pode implicar baixo desempenho, logo também é necessário ser cauteloso em não exigir requisitos de robustez exagerados.

Na prática, engenheiros na indústria costumam se basear em GM e PM determinadas pelo diagrama de Bode para projetar com apoio do diagrama de Nyquist para verificar se GM e PM são margens de estabilidade adequadas para o sistema em questão. Além disso, para validação do projeto, costuma-se realizar diversas simulações numéricas (chamadas de simulações de Monte Carlo) em que os parâmetros da planta são amostrados em torno de valores nominais de acordo com distribuições de probabilidade.

**Exemplo 1.** Seja um sistema de controle com realimentação negativa para

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}. \quad (6)$$

Considerando ganho  $K = 1$ , determine a margens de ganho e de fase do sistema.

O diagrama de Bode do sistema é mostrado na Figura 3, com as margens de ganho (GM) e de fase (PM) destacadas em vermelho e verde, respectivamente. Para perceber mais claramente que essas são margens de estabilidade, verifique a Figura 4, em que o diagrama de Nyquist do sistema é apresentado. Lembre que a avaliações de estabilidade usam os diagramas da função de transferência de malha aberta  $G(s)$ .

No caso do diagrama de Nyquist, um aumento de ganho expande o diagrama, de modo ele se aproxima do  $-1$ . Equivalentemente, pode-se pensar que o ponto  $-1/K$  é aproximado da origem, até o momento que ele passa do ponto de cruzamento do diagrama de Nyquist no eixo real, de modo que o sistema torna-se instável de acordo com o critério de Nyquist. Por conta disso, a distância da origem até esse ponto de cruzamento é  $1/GM$ , conforme indicado na figura.

Quanto à fase, uma variação rotaciona (em torno da origem) os números complexos pertencentes ao diagrama no plano complexo, de modo que todo o diagrama é rotacionado.

Equivalentemente, pode-se pensar que o ponto -1 é rotacionado, conforme mostra o círculo tracejado na figura. Com isso, tem-se a PM indicada na figura, que corresponde ao quanto pode-se rotacionar o ponto -1 até que ele seja circulado pelo diagrama de Nyquist.

Na Figura 4, é possível perceber que uma mudança de ganho  $\Delta K$  combinada com uma de fase  $\phi$  pode ocasionar instabilidade mesmo quando  $\Delta K < GM$  e  $\phi < PM$ .

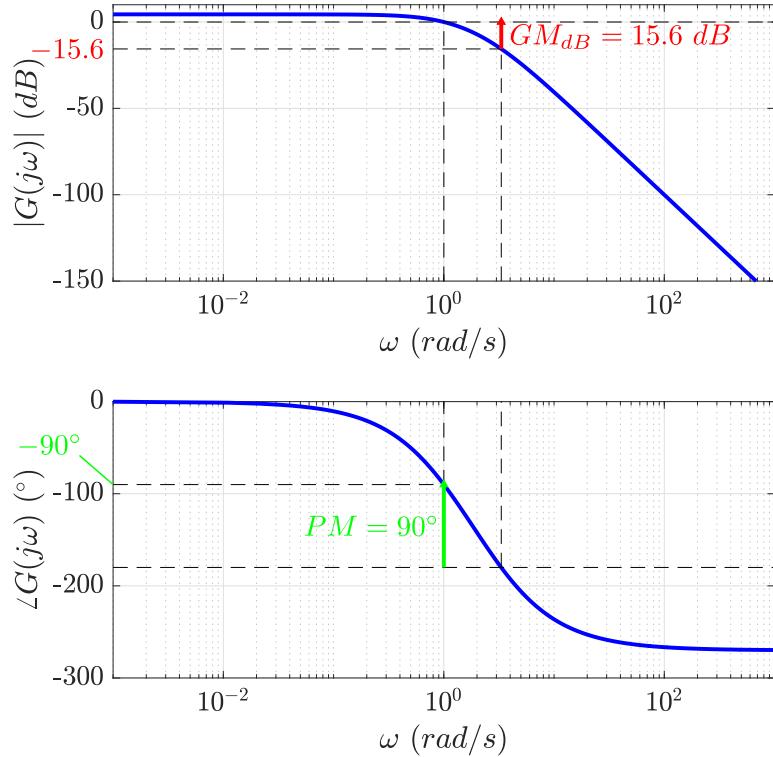


Figura 3: Margens de ganho e de fase no diagrama de Bode do Exemplo 1.

Além da obtenção através dos diagramas, é possível pedir para que o MATLAB encontre as margens de ganho e de fase através do comando `[Gm, Pm, Wcg, Wcp] = margin(G)`.  $G$  é a função de transferência em malha aberta  $G(s)$ .  $Gm$  e  $Wcg$  são a GM e a frequência em que GM é calculada.  $Pm$  e  $Wcp$  são a PM e a frequência em que PM é medida. Caso a função seja chamada sem retornos, o MATLAB traça um diagrama de Bode indicando as margens, como mostra a Figura 5.

Também é possível calcular as margens analiticamente. Primeiramente, a resposta em frequência de  $G(s)$  é

$$G(j\omega) = \frac{10}{-j\omega^3 - 6\omega^2 + 11j\omega + 6} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{10}{6 - 6\omega^2 + j(-\omega^3 + 11\omega)}. \quad (7)$$

Então, a frequência  $\omega_{CG}$  na qual  $\angle G(j\omega_{CG}) = -180^\circ$  (i.e.  $G(j\omega_{CG})$  é real e negativo) é

$$-\omega^3 + 11\omega = 0 \Rightarrow \omega_{CG} = \sqrt{11} \text{ rad/s} = 3,32 \text{ rad/s}. \quad (8)$$

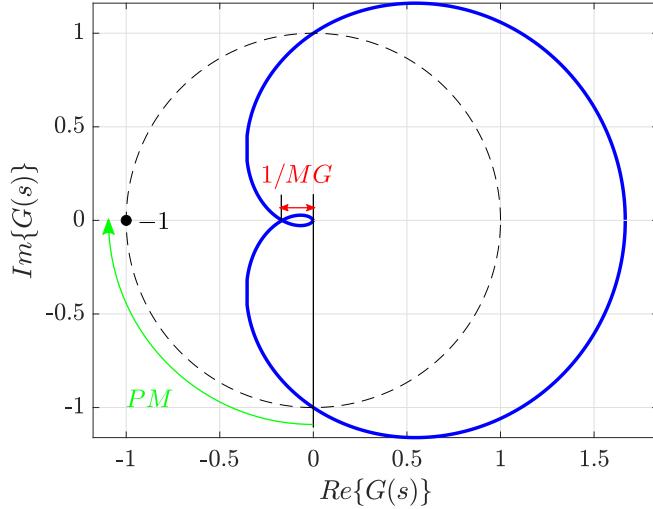


Figura 4: Margens de ganho e de fase no diagrama de Nyquist do Exemplo 1.

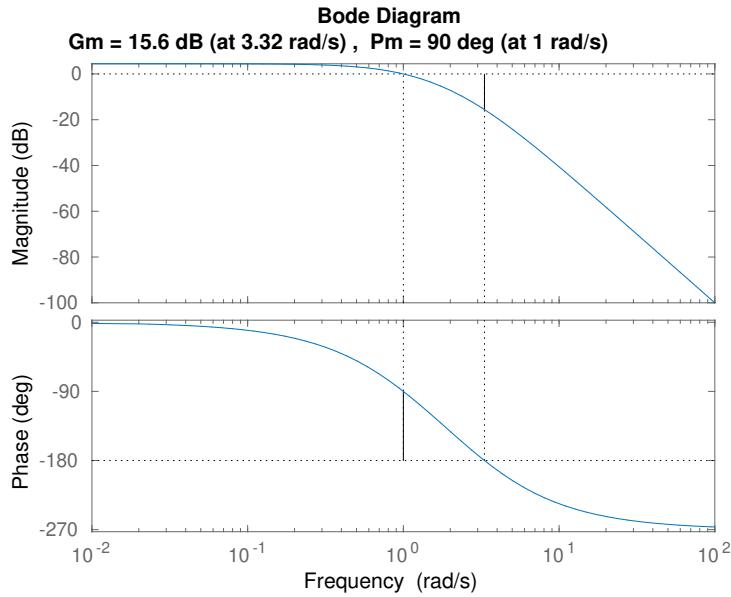


Figura 5: Diagrama de Bode com margens de ganho e de fase traçado com o comando `margin`.

Com isso, tem-se

$$G(j\omega_{CG}) = -\frac{1}{6}. \quad (9)$$

Como  $|G(j\omega_{CG})| < 1$ , o sistema é estável e a margem de ganho é dada por

$$GM|G(j\omega_{CG})| = 1 \Rightarrow GM = 6 \Rightarrow GM_{dB} = 20 \log_{10} 6 \Rightarrow GM_{dB} = 15,56 \text{ dB}. \quad (10)$$

Já a frequência  $\omega_{CP}$  ocorre quando

$$|G(j\omega)| = 1 \Rightarrow \frac{10}{\sqrt{36(1-\omega)^2 + (-\omega^3 + 11\omega)^2}} = 1 \Rightarrow$$

$$\omega^6 + 14\omega^4 + 49\omega^2 - 64 = 0 \Rightarrow \omega = \begin{cases} -0,5 \pm 2,78j \\ -0,5 \pm 2,78j \\ -1 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow \omega_{CP} = 1 \text{ rad/s}, \quad (11)$$

de modo que

$$G(j\omega_{CP}) = \frac{10}{10j} = -j \Rightarrow \angle G(j\omega_{CP}) = -90^\circ. \quad (12)$$

Com isso, a margem de fase pode ser determinada através de

$$PM = 180^\circ + \angle G(j\omega_{CP}) \Rightarrow PM = 90^\circ. \quad (13)$$

## 2 Relação entre Margem de Fase e Resposta Transitória para um Sistema de Segunda Ordem

Quando o sistema de segunda ordem padrão foi apresentado, comentou-se que a frequência natural  $\omega_n$  e o fator de amortecimento  $\xi$  influenciam principalmente a “velocidade dinâmica” e o amortecimento de um sistema. No domínio da frequência, o conceito de banda passante  $\omega_b$  é um bom substituto para generalizar a ideia de “velocidade dinâmica” para um sistema qualquer, o que torna esse o requisito mais popular em sistemas de controle. Já a margem de fase (PM) é comumente utilizada para generalizar o conceito de amortecimento. De fato, já foi mostrado que sistemas no limiar de estabilidade muitas vezes apresentam oscilações sustentadas, de modo que é intuitivo que um sistema com boa margem de fase tenha bom amortecimento.

Nesta seção, deduz-se uma fórmula para comprovar essa ligação entre PM e  $\xi$  no caso de um sistema de segunda ordem padrão. Além disso, mostra-se que a frequência de cruzamento  $\omega_{CP}$  está associada a  $\omega_n$ . Considera-se que a malha fechada tem dinâmica de segunda ordem padrão com frequência natural  $\omega_n$  e fator de amortecimento  $\xi$ , de modo que

$$G_f(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (14)$$

Para que  $G_f(s)$  seja um sistema de segunda ordem padrão, assuma que

$$G(s) = \frac{b}{s(s+a)}, \quad (15)$$

logo

$$G_f(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{Kb}{s^2 + as + Kb} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (16)$$

Portanto

$$Kb = \omega_n^2, \quad a = 2\xi\omega_n. \quad (17)$$

## 2.1 Relação entre a Frequência de Cruzamento e a Frequência Natural

A resposta em frequência de  $G(s)$  é

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega + 2\xi\omega_n)} = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + 2\xi\omega_n\omega j}. \quad (18)$$

Na frequência de cruzamento  $\omega = \omega_{CP}$ , tem-se

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| = 1 &\Rightarrow \frac{\omega_n^2}{\sqrt{\omega^4 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2}} = 1 \Rightarrow \omega^4 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2 - \omega_n^4 = 0 \Rightarrow \\ \omega^2 &= -2\xi^2 + \sqrt{4\xi^4 + 1}\omega_n^2 \Rightarrow \omega_{CP} = \omega_n\sqrt{-2\xi^2 + \sqrt{4\xi^4 + 1}} \Rightarrow \\ \frac{\omega_n}{\omega_{CP}} &= \frac{1}{\sqrt{-2\xi^2 + \sqrt{4\xi^4 + 1}}}. \end{aligned} \quad (19)$$

A Figura 6 mostra graficamente como a razão  $\omega_n/\omega_{CP}$  varia com  $\xi$ .

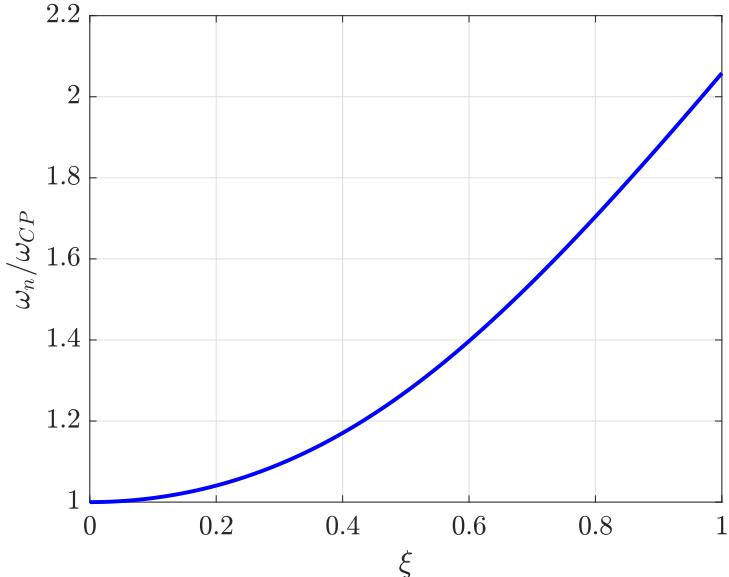


Figura 6: Dependência da razão  $\omega_n/\omega_{CP}$  com  $\xi$  para um sistema de segunda ordem padrão.

## 2.2 Relação entre Margem de Fase e Fator de Amortecimento

A margem de fase é dada por

$$PM = \angle G(j\omega_{CP}) + 180^\circ. \quad (20)$$

De (18), tem-se

$$\angle G(j\omega_{CP}) = -\arctan\left(\frac{2\xi\omega_n\omega_{CP}}{-\omega_{CP}^2}\right) = -\arctan\left(\frac{2\xi\omega_n}{-\omega_{CP}}\right), \quad (21)$$

logo

$$PM = -\arctan\left(\frac{2\xi\omega_n}{-\omega_{CP}}\right) + 180^\circ \Rightarrow$$

$$\tan(PM) = \tan\left(-\arctan\left(\frac{2\xi\omega_n}{-\omega_{CP}}\right)\right) = \frac{2\xi\omega_n}{\omega_{CP}}.$$
(22)

Usando a relação encontrada para  $\omega_{CP}$  em (19), chega-se a

$$\tan(PM) = \frac{2\xi}{\sqrt{-2\xi^2 + \sqrt{4\xi^4 + 1}}} \Rightarrow PM = \arctan\left(\frac{2\xi}{\sqrt{-2\xi^2 + \sqrt{4\xi^4 + 1}}}\right). \quad (23)$$

Uma aproximação muito utilizada para relacionar PM e  $\xi$  (inclusive para sistemas de ordens mais elevadas) é dada por

$$\xi \approx \frac{PM(^{\circ})}{100^\circ}. \quad (24)$$

A Figura 7 mostra a relação exata dada por (23) juntamente com a relação aproximada de (24). Perceba que (24) é uma boa aproximação na faixa de 0 até  $60^\circ$ , quando o comportamento é próximo de linear.

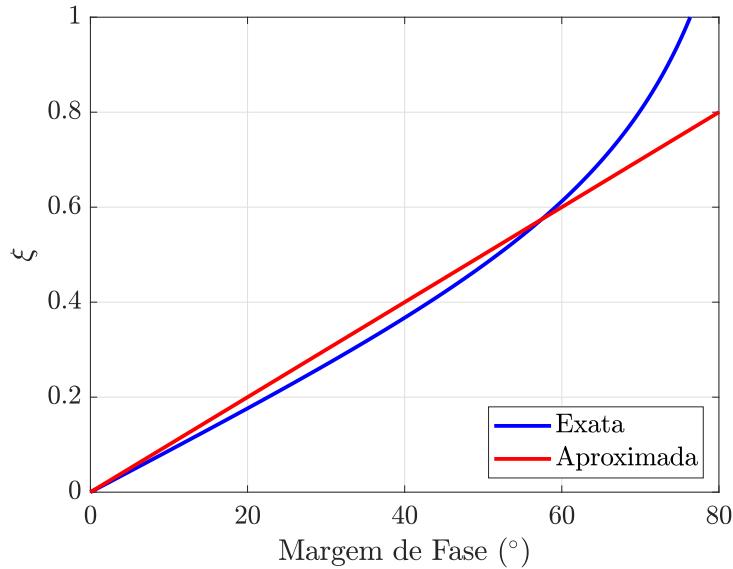


Figura 7: Relações exata (23) e aproximada (24) entre margem de fase e  $\xi$  para um sistema de segunda ordem padrão.

### 3 Carta de Nichols-Black

Outra maneira de apresentar a resposta em frequência de um sistema é através do **diagrama de Nichols-Black** (também chamado apenas **diagrama de Nichols**). O diagrama de Nichols é um gráfico retangular  $\angle G(j\omega) \times |G(j\omega)|_{dB}$ . Uma característica interessante do diagrama de Nichols é que ele costuma ser apresentado juntamente com

curvas de nível que apresentam o mapeamento entre ganho e fase de malha aberta para ganho e fase de malha fechada. Com isso, pode-se visualizar como a função de transferência de malha aberta influencia a função de transferência de malha fechada. Para determinar esse mapeamento, considera-se a resposta em frequência da malha fechada com ganho unitário  $K = 1$

$$G_f(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \Rightarrow G_f(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)}, \quad (25)$$

ou em forma polar

$$G_f(j\omega) = M(\omega)e^{j\alpha(\omega)}, \quad (26)$$

em que  $M(\omega) = |G_f(j\omega)|$  e  $\alpha = \angle G(j\omega)$ . Para ilustrar, a Figura 8 mostra um diagrama de Nichols para a função de transferência do Exemplo 1 traçado com uso do comando `nyquist` no MATLAB. A grade representa curvas de nível de  $M$  ou de  $N$ . Além disso, GM e PM são facilmente determinadas no diagrama de Nichols, conforme destacado na figura. Perceba que o ponto  $-1$  do diagrama de Nyquist equivalente ao ponto  $|G(j\omega)| = 0 \text{ dB}$  e  $\angle G(j\omega) = -180^\circ$  do diagrama de Nichols. Devido ao uso mais restrito do que os diagramas de Bode e de Nyquist, o diagrama de Nichols não será muito explorado no curso.

## Referências

- [1] Katsuhiko Ogata. *Engenharia de Controle Moderno*. LTC – Livros Técnicos e Ciêntificos Editora S.A., 1997.

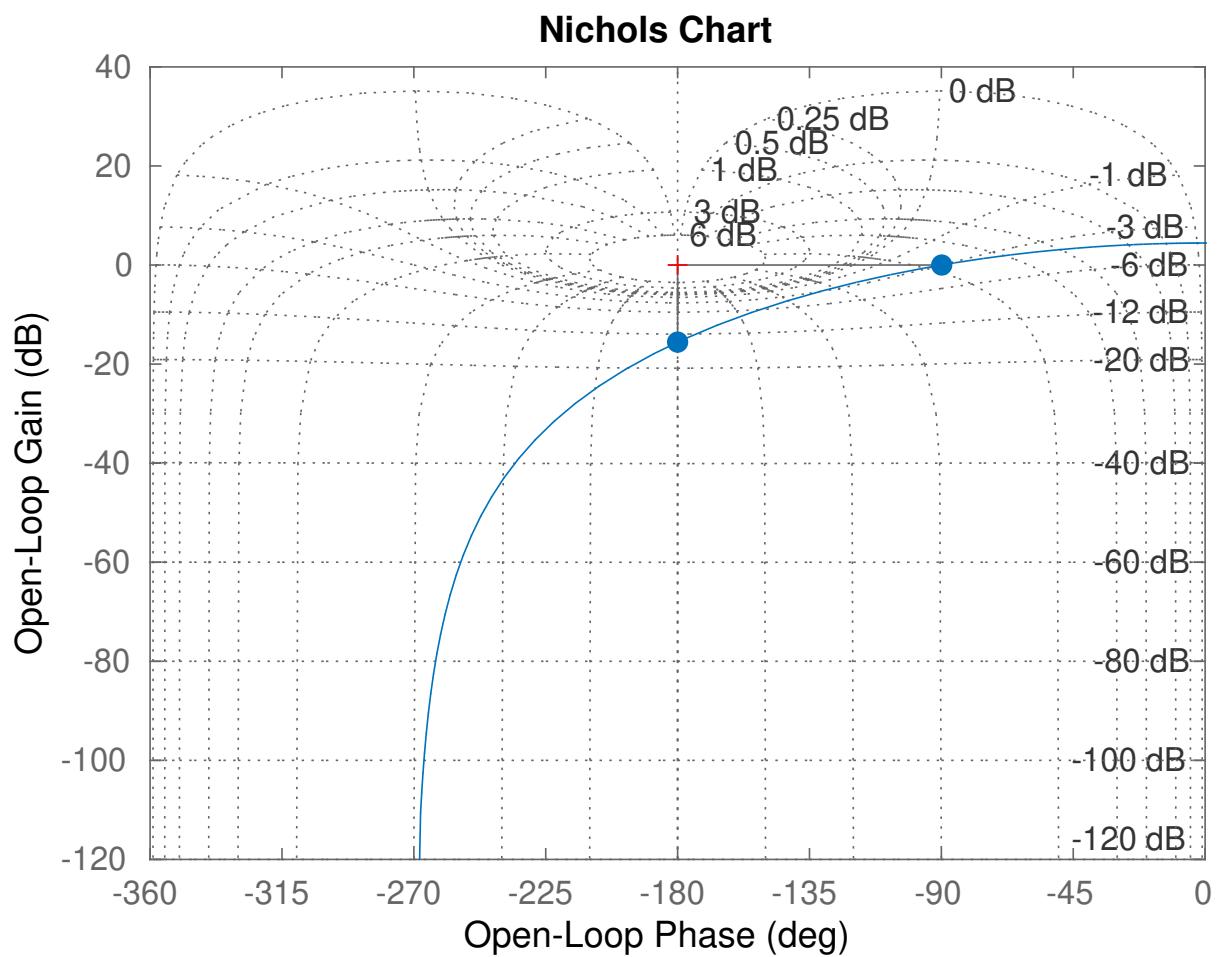


Figura 8: Diagrama de Nichols-Black para a função de transferência de (6) com margens de ganho e de fase destacadas.

# Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA

## Controle para Sistemas Computacionais – CMC-12

### Notas da Aula 18 – Atraso, Compensador *Lead-Lag* e Filtragem

**Professor:** Marcos Ricardo Omena de Albuquerque Maximo

26 de julho de 2020

## 1 Atraso

Em muitos sistemas reais, além de uma dinâmica em forma de uma função de transferência racional, i.e.  $G(s) = N(s)/D(s)$ , há também o que se chama de **atraso de transporte** (ou atraso puro). Em um sistema controlador por computador, é inevitável que o controlador introduza atraso, por conta do tempo de computação necessário para realizar as operações do controlador.

No caso do uso de um controlador clássico, como os vistos em CMC-12, como um controlador PID, os cálculos envolvidos na lei de controle são muito simples, de modo que não geram problemas se a dinâmica do sistema não for tão rápida. Entretanto, é comum ser necessário pré-processar os dados do sensor antes de usá-lo na lei de controle.

Por exemplo, no caso do robô VSS ITAndroids (exemplo do robô seguidor de linha), o processamento de imagem da câmera costuma demorar na ordem de 10 ms, mesmo com um algoritmo de visão computacional bem eficiente rodando em um computador de alto desempenho. Na verdade, nesse sistema, a maior contribuição para o atraso vem do próprio sensor, que é da ordem de 30 ms, mesmo a ITAndroids utilizando uma câmera PointGrey, específica para aplicações de visão computacional. Uma *webcam* comum costuma fornecer atrasos na ordem de 100-140 ms. Finalmente, destaca-se ainda que alguns sistemas possuem dinâmica tão rápida, como o controle da dinâmica de corrente de um motor elétrico, que mesmo as operações envolvidas em um simples PI podem representar um atraso prejudicial para o sistema.

### 1.1 Efeito de Atraso na Resposta em Frequência

Pela propriedade de atraso no tempo da transformada de Laplace, tem-se

$$\mathcal{L}\{f(t - \tau)\} = e^{-\tau s} \mathcal{L}\{f(t)\}. \quad (1)$$

Assim, considere um sistema como o mostrado na Figura 1. A função de transferência em malha aberta é

$$G_a(s) = K e^{-\tau s} G(s). \quad (2)$$

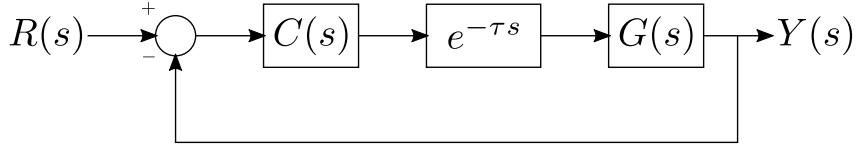


Figura 1: Malha de controle com atraso.

Com isso, a resposta em frequência torna-se

$$G_a(j\omega) = K e^{-\tau\omega j} G(j\omega), \quad (3)$$

de modo que

$$|G_a(j\omega)| = K |G(j\omega)| \quad (4)$$

e

$$\angle G_a(j\omega) = \angle G(j\omega) - \tau\omega. \quad (5)$$

Perceba pela (5) que o atraso introduz uma defasagem na resposta em frequência, que aumenta com  $\omega$ . Conforme discutido anteriormente,  $\angle G_a(j\omega)$  impacta a estabilidade de um sistema. Pense na margem de fase como métrica de estabilidade nesse caso. Por conta do atraso, o sistema terá uma perda de margem de fase de  $\tau\omega_{CP}$  ( $\omega_{CP}$  não é alterado pelo atraso, pois o ganho não é afetado de acordo com (4)). Assim, verifica-se que atraso é muito ruim para a estabilidade de um sistema.

## 1.2 Aproximações de Padé

A presença de um termo exponencial  $e^{\tau s}$  na função de transferência não foi problema para análise de  $G_a(j\omega)$ , porém esse termo é muito inconveniente para aplicação da maioria das técnicas vistas no curso. Por conta disso, costuma-se usar as **aproximações de Padé** para fornecer uma aproximação da função de transferência do atraso em formato de função racional. Pode-se escolher a ordem da aproximação de Padé, que dita quantos polos e zeros serão usados na aproximação, de modo que ordens maiores representam uma melhor aproximação, mas introduzem mais polos e zeros.

Para deduzir a aproximação de Padé de 1ª ordem, defina

$$x = \tau s. \quad (6)$$

Deseja-se realizar uma aproximação na forma

$$e^{-x} \approx \frac{b_1 x + b_0}{x + a_0}, \quad (7)$$

em que  $b_0$ ,  $b_1$  e  $a_1$  são coeficientes a serem determinados. Pode-se determinar valores para esses coeficientes através de expansões em série de Taylor dos dois lados de (7). A expansão em série de Taylor em torno de  $x = 0$  da exponencial é conhecida e dada por

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + \dots \quad (8)$$

Assim, denote

$$f(x) = \frac{b_1 x + b_0}{x + a_0}, \quad (9)$$

de modo que a expansão em série de Taylor de  $f(x)$  em torno de  $x = 0$  é

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots \quad (10)$$

com

$$f(0) = \frac{b_0}{a_0}, \quad (11)$$

$$f'(x) = \frac{b_1(x + a_0) - b_1x - b_0}{(x + a_0)^2} = \frac{b_1a_0 - b_0}{(x + a_0)^2} \Rightarrow f'(0) = \frac{b_1a_0 - b_0}{a_0^2}, \quad (12)$$

$$f''(x) = \frac{-2(b_1a_0 - b_0)}{(x + a_0)^3} \Rightarrow f''(0) = \frac{2(b_0 - b_1a_0)}{a_0^3}. \quad (13)$$

Com isso, pode-se reescrever (7) como

$$1 - x + \frac{1}{2}x^2 + \dots \approx \frac{b_0}{a_0} + \frac{b_1a_0 - b_0}{a_0^2} + \frac{b_0 - b_1a_0}{a_0^3}x^2 + \dots \quad (14)$$

Igualando os coeficientes dos primeiros termos em (14), tem-se

$$\begin{cases} \frac{b_0}{a_0} = 1 \\ \frac{b_1a_0 - b_0}{a_0^2} = -1 \\ \frac{b_0 - b_1a_0}{a_0^3} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = -1, \\ b_0 = 2, \\ a_0 = 2. \end{cases} \quad (15)$$

Portanto, a aproximação de Padé de 1<sup>a</sup> ordem é

$$e^{-\tau s} \approx \frac{-\tau s + 2}{\tau s + 2} = \frac{-s + 2/\tau}{s + 2/\tau}. \quad (16)$$

De forma análoga, pode-se determinar a aproximação de Padé de 2<sup>a</sup> ordem como

$$e^{-\tau s} \approx \frac{(\tau s)^2/12 - \tau s/2 + 1}{(\tau s)^2/12 + \tau s/2 + 1} = \frac{s^2 - (6/\tau)s + 12/\tau^2}{s^2 + (6/\tau)s + 12/\tau^2}. \quad (17)$$

No MATLAB, o comando `[num, den] = pade(T, N)` realizar uma aproximação de Padé de ordem  $N$  do atraso  $T$ .

## 2 Compensadores *Lead* e *Lag*

Quando controlador PD foi apresentado, comentou-se que o termo derivativo amplificava ruído, por isso o uso de um compensador PD puro não é recomendado numa aplicação prática. Com o ferramental de domínio da frequência aprendido nas últimas aulas, pode-se justificar melhor essa afirmação. O compensador PD é dado por

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + K_d s, \quad (18)$$

de modo que a resposta em frequência é

$$C(j\omega) = K_p + jK_d\omega, \quad (19)$$

logo

$$|C(j\omega)| = K_p \text{ quando } \omega = 0, \quad (20)$$

$$\angle C(j\omega) = 0 \text{ quando } \omega = 0, \quad (21)$$

$$|C(j\omega)| \rightarrow \infty \text{ quando } \omega \rightarrow \infty, \quad (22)$$

$$\angle C(j\omega) = 90^\circ \text{ quando } \omega \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Com isso, o diagrama de Bode do compensador PD tem a forma mostrada na Figura ???. Perceba que o PD produz ganho de fase, o que explica o aumento de estabilidade e amortecimento provocado por esse compensador, pois o ganho de fase gerado na frequência de cruzamento implica aumento de margem de fase.

Por outro lado, o PD possui ganho elevado em altas frequências, crescendo indefinidamente à medida que a frequência aumenta. Por conta disso, o PD amplifica ruído de alta frequência, que é tipicamente presente em sistemas reais.

Conforme já comentado, o tipo de modelo ruído mais comum é o chamado **ruído branco Gaussiano**, em que o ruído  $\nu$  é distribuído de acordo com uma Gaussiana de média nula e certo desvio padrão  $\sigma$ , i.e.  $\nu \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ <sup>1</sup>. Um ruído branco é um tipo de ruído que corrompe todas as frequências igualmente. Assim, como esse é o tipo de ruído mais frequentemente encontrado em sistemas reais, usar um PD puro não é aconselhável, pois o ruído presente em altas frequências será amplificado.

Para solucionar esse problema, é comum colocar um filtro passa-baixas de primeira ordem em série com o termo derivativo, de modo que a função de transferência do compensador fica

$$C(s) = K_p + K_d s \frac{a}{s+a} = \frac{(K_p + K_d a)s + K_p a}{s+a} = K \frac{s-z}{s-p}, \quad (24)$$

em que

$$K = K_p + K_d a, \quad z = -\frac{K_p a}{K_p + K_d a}, \quad p = -a. \quad (25)$$

No caso, deve-se escolher  $z >> p$  para não prejudicar o termo derivativo. Como pode-se ver na Figura 2, a adição do filtro passa-baixas de primeira ordem remove o crescimento indefinido do ganho, de modo que se reduz consideravelmente a amplificação de ruído de alta frequência. A estrutura de compensador

$$C(s) = \frac{s-z}{s-p} \quad (26)$$

refere-se aos chamados compensadores *lead* e *lag*:

---

<sup>1</sup>De fato, análise de ruídos reais comprovam que usar uma distribuição Gaussiana é um bom modelo para ruído na prática. Perceba que isso é um resultado esperado pela Matemática. Sinais de ruído geralmente são gerados pela soma de diversos fenômenos físicos. Pelo teorema do limite central, sabe-se que a soma de diversas variáveis aleatórias independentes produzem uma variável aleatória Gaussiana [1], logo é esperado que ruído seja Gaussiano.

- **Compensador *lead*** (também chamado **compensador de avanço de fase**): quando  $|z| < |p|$ , de modo que há **avanço** de fase no Bode.
- **Compensador *lag*** (também chamado **compensador de atraso de fase**): quando  $|z| > |p|$ , de modo que há **atraso** de fase no Bode.

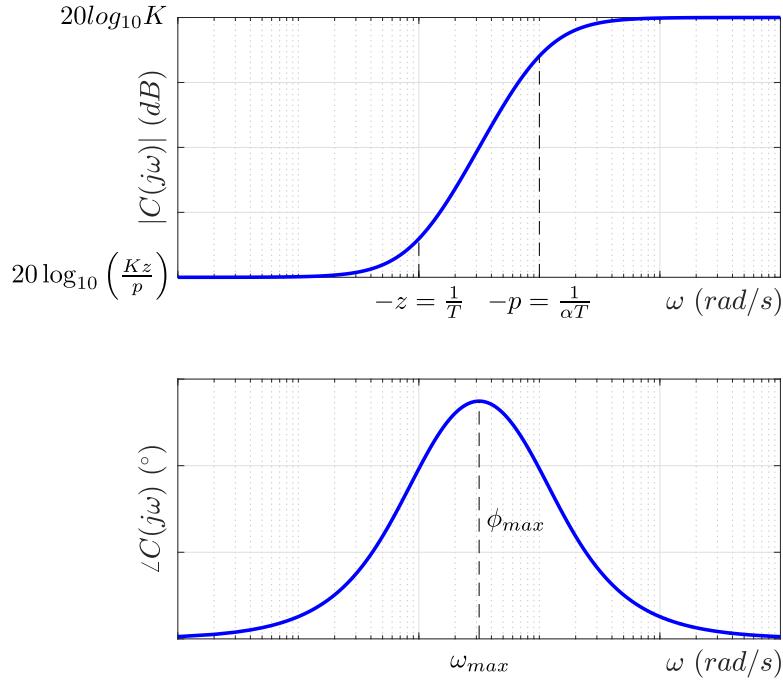


Figura 2: Diagrama de Bode de um compensador *lead*.

Os nomes *lead* e *lag* são mais populares, mesmo no Brasil, por isso a preferência por usá-los aqui. Nas subseções a seguir, entra-se em detalhes das vantagens e desvantagens de cada um dos compensadores, incluindo aplicações típicas e ligação com os compensadores PD e PI. Além disso, é possível usar os dois compensadores em série, dando origem a um compensador *lead-lag*, assim como o PID é a combinação de PD e PI.

## 2.1 Compensador *Lead*

O compensador *lead* é equivalente ao compensador apresentado em (26), i.e. é um PD com um filtro de primeira ordem no termo derivativo. Com isso, sua função de transferência é a mostrada na Figura 2. Embora o compensador *lead* amplifique menos ruído do que um compensador PD puro, deve-se destacar que ele ainda amplifica ruído consideravelmente, principalmente se um grande avanço de fase for necessário. Assim como o PD, o compensador *lead* geralmente é usado para aumentar o amortecimento de um sistema. Embora a estrutura apresentada em (26) seja de uso comum, considere

$$C(s) = \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}, \quad T > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (27)$$

de modo que o ganho DC do compensador não seja alterado. Uma comparação entre (26) e (27) revela que

$$z = -\frac{1}{T}, \quad p = -\frac{1}{\alpha T}, \quad \frac{z}{p} = \alpha. \quad (28)$$

A ideia é projetar o compensador para que o pico da fase (vide Figura 2) fique na frequência de cruzamento  $\omega = \omega_{CP}$ . A fase do compensador é dada por

$$\angle C(j\omega) = \angle \left( \frac{jT\omega + 1}{j\alpha T\omega + 1} \right) = \arctan(T\omega) - \arctan(\alpha T\omega) = \phi(\omega). \quad (29)$$

Lembre que a derivada da função arco tangente é

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}. \quad (30)$$

Logo, pode-se determinar a frequência  $\omega_{max}$  onde ocorre o pico de fase derivando (29) em relação a  $\omega$  e igualando a zero:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\omega} &= \frac{d}{d\omega} \arctan(T\omega) - \frac{d}{d\omega} \arctan(\alpha T\omega) = 0 \Rightarrow \frac{T}{1+T^2\omega^2} - \frac{\alpha T}{1+\alpha^2 T^2 \omega^2} = 0 \Rightarrow \\ 1 + \alpha^2 T^2 \omega^2 &= \alpha + \alpha T^2 \omega^2 \Rightarrow \alpha(\alpha - 1) T^2 \omega^2 = \alpha - 1 \Rightarrow \omega_{max} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}. \end{aligned} \quad (31)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \angle C(j\omega_{max}) &= \phi(\omega_{max}) = \phi_{max} = \arctan(T\omega_{max}) - \arctan(\alpha T\omega_{max}) \Rightarrow \\ \phi_{max} &= \underbrace{\arctan(1/\sqrt{\alpha})}_{\beta_1} - \underbrace{\arctan(\sqrt{\alpha})}_{\beta_2} = \beta_1 - \beta_2 \Rightarrow \\ \sin \phi_{max} &= \sin(\beta_1 - \beta_2) = \sin \beta_1 \cos \beta_2 - \cos \beta_1 \sin \beta_2. \end{aligned} \quad (32)$$

Note que

$$\begin{aligned} \tan \beta = x \Rightarrow \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = x \Rightarrow \sin^2 \beta = x^2 \cos^2 \beta \Rightarrow \sin^2 \beta = x^2(1 - \sin^2 \beta) \Rightarrow \\ \sin \beta = \pm \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \cos \beta = \pm \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned} \quad (33)$$

Como  $\beta_1$  e  $\beta_2$  estão no primeiro quadrante, tem-se

$$\sin \beta_1 = \frac{1/\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1+1/\alpha}}, \quad \cos \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{1+1/\alpha}}, \quad \sin \beta_2 = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}}, \quad \cos \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}. \quad (34)$$

Substituindo (34) em (32), chega-se a

$$\begin{aligned} \sin \phi_{max} &= \frac{1/\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1+1/\alpha}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} - \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+1/\alpha}} = \frac{1}{1+\alpha} - \frac{\alpha}{1+\alpha} \Rightarrow \\ \sin \phi_{max} &= \frac{1-\alpha}{1+\alpha}. \end{aligned} \quad (35)$$

Para fins de projeto, é mais conveniente isolar  $\alpha$  de acordo com

$$\alpha = \frac{1 - \sin \phi_{max}}{1 + \sin \phi_{max}}. \quad (36)$$

Com isso, projeta-se o compensador *lead* para fornecer um aumento de margem de fase  $\phi_{max}$  na frequência de cruzamento  $\omega = \omega_{CP} = \omega_{max}$  escolhendo-se como parâmetros

$$\alpha = \frac{1 - \sin \phi_{max}}{1 + \sin \phi_{max}}, \quad T = \frac{1}{\omega_{max}\sqrt{\alpha}}. \quad (37)$$

Recomenda-se usar o compensador *lead* para avanços de fase de até 70° [2]. Caso necessite-se de um avanço de fase maior que 70°, sugere-se tentar um *lead* duplo, i.e.

$$C(s) = \left( \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} \right)^2. \quad (38)$$

## 2.2 Compensador *Lag*

Assim como *lead* é uma alternativa para o PD, o *lag* é uma alternativa para o PI, cuja função de transferência é

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{K_p s + K_i}{s}. \quad (39)$$

Como já discutido antes, o uso típico do PI é para eliminar erro em regime. Por outro lado, o PI tende a deixar um sistema mais instável. Para entender o efeito instabilizante do PI, considere sua resposta em frequência, que é dada por

$$C(j\omega) = \frac{K_i + jK_p\omega}{j\omega}, \quad (40)$$

logo

$$|C(j\omega)| \rightarrow \infty \text{ quando } \omega = 0, \quad (41)$$

$$\angle C(j\omega) = -90^\circ \text{ quando } \omega = 0, \quad (42)$$

$$|C(j\omega)| = K_p \text{ quando } \omega \rightarrow \infty, \quad (43)$$

$$\angle C(j\omega) = 0, \text{ quando } \omega \rightarrow \infty, \quad (44)$$

Desse modo, o diagrama de Bode do compensador PI tem a forma mostrada na Figura 3. O compensador PI produz atraso de fase, começando o Bode já com  $-90^\circ$ . Na frequência de cruzamento  $\omega = \omega_{CP}$ , espera-se uma perda de fase menor, mas ainda considerável se  $K_i$  for alto. Assim, verifica-se que o compensador PI provoca perda de margem de fase, por isso seu efeito instabilizante.

O *lag* surge como uma alternativa para o PI, em que se obtém redução de erro em regime com um atraso de fase menos pronunciado. Para um sistema do tipo 0, o *lag* não é capaz de eliminar o erro em regime para entrada degrau completamente, como o PI faz. Embora erro nulo em regime seja elegante do ponto de vista teórico, na prática esse requisito não é muito relevante, pois outras fontes de erro não modeladas no sistema

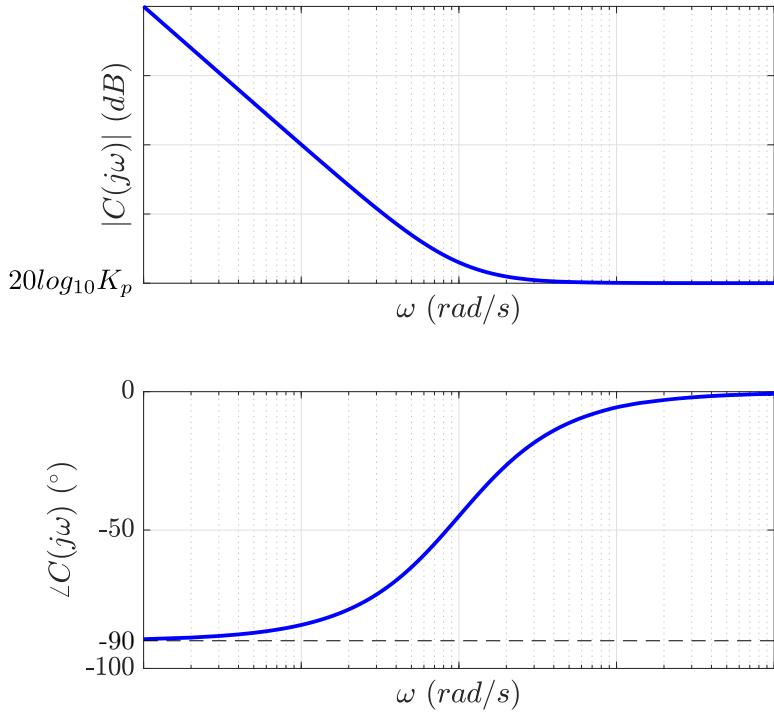


Figura 3: Diagrama de Bode de um compensador PI.

linear usado para projeto do sistema de controle costumam impedir erro nulo em regime de qualquer forma.

Por exemplo, imagine o caso de um controlador de posição para um servomotor, é comum existir algum desalinhamento mecânico de montagem entre a posição real do motor e o sensor usado para medi-la (um *encoder*, por exemplo). Por conta disso, é comum adotar um valor de erro em regime para entrada degrau não nulo como requisito, o que torna o uso do compensador *lag* interessante.

Embora a forma mostrada em (26) seja também usada, considere que a função de transferência do compensador *lag* é

$$C(s) = \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}, \quad T > 0, \quad \alpha > 1, \quad (45)$$

em que

$$z = -\frac{1}{T}, \quad p = -\frac{1}{\alpha T}, \quad \frac{z}{p} = \alpha. \quad (46)$$

A forma do diagrama de Bode do compensador *lag* é mostrada na Figura 4. A ideia do uso do *lag* é aumentar o ganho DC, de modo a reduzir o erro em regime, sem provocar muito atraso de fase na frequência de cruzamento  $\omega = \omega_{CP}$ . Assim, uma técnica de projeto é determinar  $\alpha$  de modo a dar o ganho DC desejado para atendimento ao requisito de erro em regime e então escolher  $T$  de modo a posicionar  $z$  distante da frequência de cruzamento  $\omega = \omega_{CP}$  (de modo que o *lag* afete pouco a margem de fase). Recomenda-se posicionar  $z$  numa frequência entre uma oitava (metade) e uma década abaixo da

frequência de cruzamento, de modo que

$$\frac{\omega_{CP}}{10} < \frac{1}{T} < \frac{\omega_{CP}}{2}. \quad (47)$$

Como é esperado que o *lag* afete a margem de fase, pode ser necessário algumas iterações de projeto até encontrar os parâmetros adequados para o compensador de modo a atender aos requisitos.

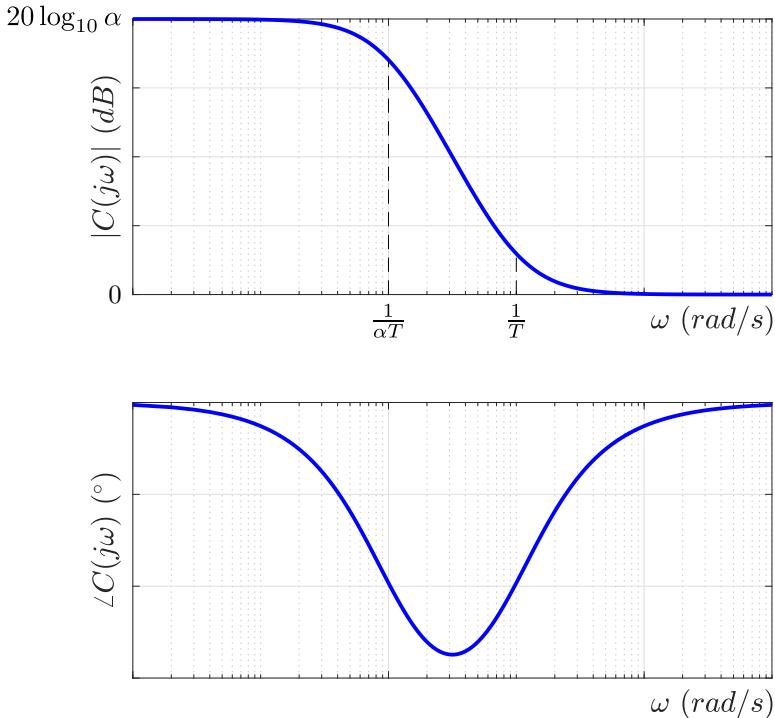


Figura 4: Diagrama de Bode de um compensador *lag*.

### 3 Filtragem de Ruído

Ruído de medida está sempre presente em sistemas de controle reais. Conforme comentado na Seção 2, na maioria das vezes, o ruído é do tipo branco, cuja potência está distribuída igualmente em todas as frequências<sup>2</sup>. Ao mesmo tempo, a banda de frequências de interesse do sistema de controle é limitada, porque em geral não se espera rastrear entradas com frequências arbitrariamente altas.

Assim, é comum o uso de filtros passa-baixas para atenuar o ruído de frequências altas, mesmo quando um derivativo não é utilizado. O mais comum é usar um sistema de

---

<sup>2</sup>Na prática, não é possível que o ruído afete frequências infinitamente altas, porque isso iria requerer energia infinita. Pense que até mesmo o sensor tem um limite de frequências que consegue capturar, pois o fenômeno usado para medição é um sistema dinâmico em si. Porém, o ruído branco é uma boa aproximação, dado que em geral o ruído de fato afeta frequências bem mais altas que as frequências de interesse do sistema de controle.

primeira ordem como filtro, conforme feito anteriormente. Porém, pode-se usar sistemas de ordem mais alta, como segunda ordem, caso deseje-se uma atenuação ainda mais forte em frequências altas. Por outro lado, sistemas de ordem mais alta também possuem uma queda de fase mais rápida, de modo que costumam consumir mais margem de fase e podem prejudicar a estabilidade do sistema.

Para atenuação de ruído de medida, o mais comum é adicionar um filtro logo após a leitura do sensor, conforme o bloco  $F_m(s)$  mostrado na Figura 5. Para projeto, costuma-se escolher a banda passante do filtro de modo que seja muito mais rápida que a banda passante da malha fechada  $G_f(s) = Y(s)/R(s)$ . Uma regra de bolso comumente adotada é escolher a banda passante do filtro como 10x a banda passante da malha fechada. Embora essa regra de bolso seja útil para guiar o projeto, o melhor a se fazer é analisar o impacto do filtro nas funções de transferência  $G_f(s) = Y(s)/R(s)$  e  $F_m(s) = Y(s)/N(s)$  no domínio da frequência (pelo diagrama de Bode, por exemplo) ou através de simulações, de modo a prover uma boa atenuação de ruído sem prejudicar as características do sistema de controle (banda passante, margem de fase etc.).

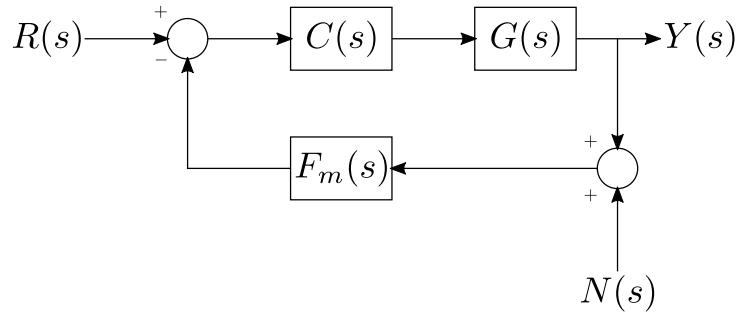


Figura 5: Diagrama de blocos com filtro para ruído de medida.

Por fim, para verificar como um filtro passa-baixas atenua o ruído, fez-se uma simulação no Simulink conforme mostra a Figura 6. Usou-se um ruído  $\nu \sim \mathcal{N}(0, 1)$  (i.e. distribuído de acordo com uma normal de média nula e variância 1). Para o filtro, considerou-se frequências de corte  $f_c \in \{1, 10, 100\} \text{ Hz}$ , ou equivalentemente  $a \in \{2\pi, 2\pi 10, 2\pi 100\} \text{ rad/s}$ . Os sinais no tempo na entrada e na saída do filtro são apresentados nas figuras 7(a) e 7(b), respectivamente, considerando as diferentes frequências de corte. Ademais, as figuras 8(a) e 8(b) mostram as magnitudes das transformadas de Fourier dos sinais na entrada e na saída, respectivamente. Perceba que quanto menor a frequência de corte do filtro, maior é a atenuação de altas frequências.

Destaca-se que embora filtros passa-baixas ainda sejam muito usados para atenuação de ruído na indústria, atualmente tem-se dado preferência ao uso dos chamados **observadores (estimadores) de estado**. Os observadores de estado se aproveitam do conhecimento da dinâmica da planta para prover uma estimativa de alta qualidade e com baixo atraso. Além disso, eles são capazes de estimar estados escondidos, que são estados não medidos por sensores disponíveis no sistema. Em especial, o **filtro de Kalman**, que é um estimador ótimo, tem muita popularidade por conta de seu excelente desempenho. Infelizmente, o estudo de estimadores de estado está além do escopo desse curso, mas trata-se de assunto visto em qualquer curso de Controle Moderno. Destaca-se também que métodos de estimação de estados em ambientes estocásticos são estudados em profundidade pela área de “Processamento de Sinais”.

Por último, comenta-se que sistemas dinâmicos por si só são filtros, de modo que o próprio sistema de controle “filtra” ruído presente na referência ou na medida. Intuitivamente, isso acontece pois o sistema não é capaz de rastrear altas frequências (muito acima de sua banda passante) e naturalmente as atenua. Mesmo quando o filtro para ruído de medida tem pouco impacto na saída devido à filtragem própria do sistema, ainda pode ser interessante um filtro na medida para evitar que haja muito ruído no comando, o que pode levar a desperdício excessivo de energia e danos ao atuador.

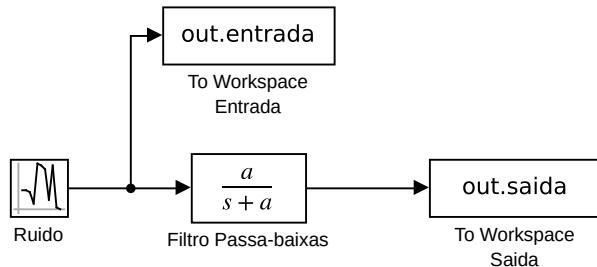


Figura 6: Diagrama Simulink usado para verificar a atenuação de ruído provocada por um filtro passa-baixas.

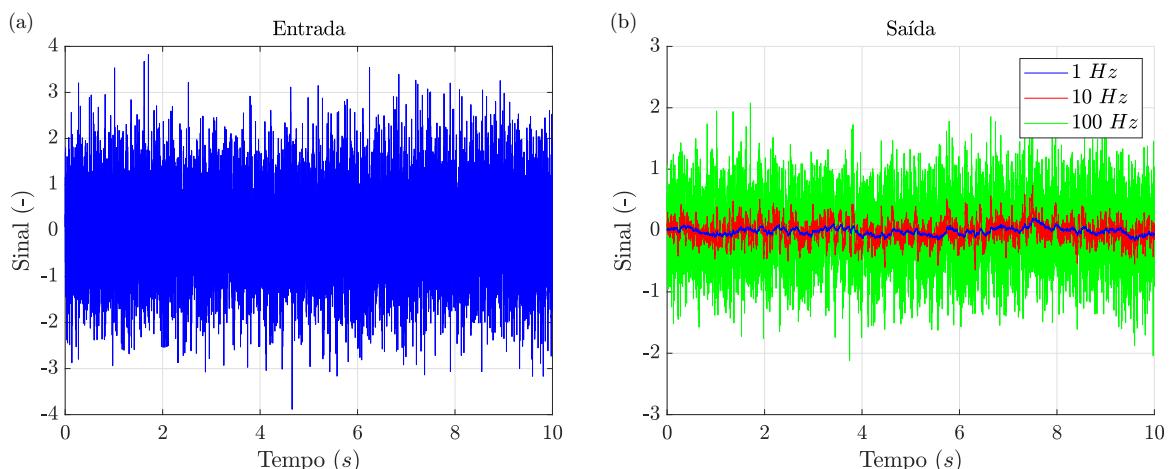


Figura 7: Simulação Simulink para verificar a atenuação de ruído provocada por um filtro passa-baixas: (a) sinal na entrada e (b) sinal na saída (considerando diferentes frequências de corte para o filtro).

## Referências

- [1] Dimitri P. Bertsekas and John N. Tsitsiklis. *Introduction to Probability, 2nd Edition*. Athena Scientific, 2008.
- [2] Gene F. Franklin, J. Davis Powell, and Abbas F. Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Pearson, The address, 2015. An optional note.

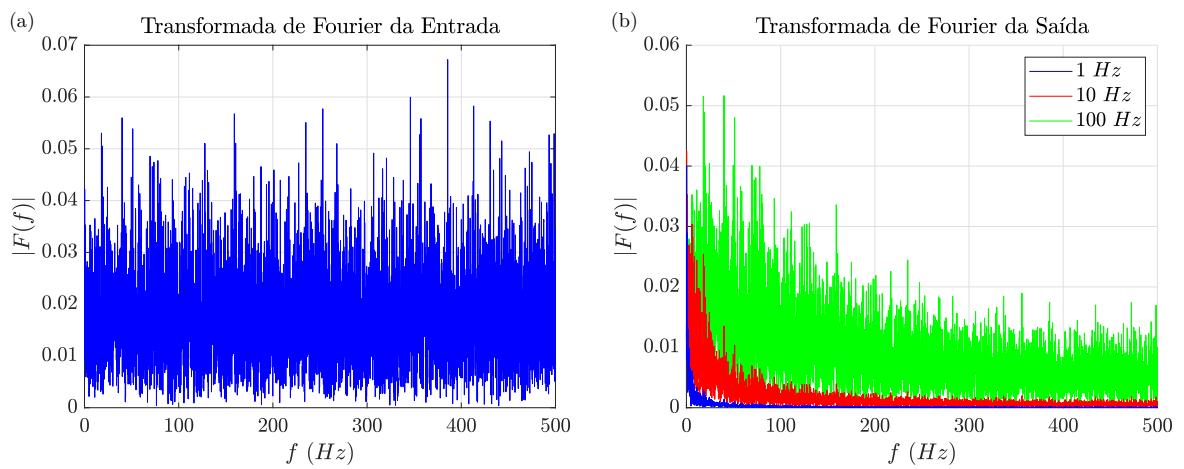


Figura 8: Transformada de Fourier de sinais da simulação Simulink para verificar a atenuação de ruído provocada por um filtro passa-baixas: (a) magnitude da transformada do sinal na entrada e (b) magnitude da transformada do sinal na saída (considerando diferentes frequências de corte para o filtro).

# Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA

## Controle para Sistemas Computacionais – CMC-12

### Notas da Aula 19 – Projeto no Domínio da Frequência

**Professor:** Marcos Ricardo Omena de Albuquerque Maximo

24 de julho de 2020

Nesta aula, apresenta-se exemplos de projeto no domínio da frequência.

**Exemplo 1.** Projete um controlador proporcional com ganho  $K > 0$  para controlar a planta

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)^2(s+10)}, \quad (1)$$

de modo a atender aos seguintes requisitos:

1. Banda passante  $\omega_b \geq 2 \text{ rad/s}$ .
2. Erro em regime para entrada degrau  $e_\infty \leq 0,2$ .
3. Margem de ganho  $GM_{dB} \geq 6 \text{ dB}$ .
4. Margem de fase  $PM \geq 30^\circ$ .

Intuitivamente, tem-se que

- Aumentar  $K$  aumenta  $\omega_b$ .
- Aumentar  $K$  diminuir  $e_\infty$ .
- Aumentar  $K$  diminui  $GM$ .
- Aumentar  $K$  diminui  $PM$ .

Portanto, aumentar  $K$  facilita atendimento aos requisitos 1 e 2, mas dificulta satisfazer os 3 e 4. Isso sugere uma relação de compromisso em relação ao ganho  $K$ . Perceba que a função de transferência em malha fechada é dada por

$$G_f(s) = \frac{10K}{(s+1)^2(s+10) + 10K} = \frac{10K}{s^3 + 12s^2 + 21s + 10 + 10K}. \quad (2)$$

Pela definição de banda passante, tem-se

$$|G_f(j\omega_b)| = \frac{\sqrt{2}}{2} G_f(0) \Rightarrow \frac{10K}{|10 + 10K - 12\omega_b^2 + j(21\omega_b - \omega_b^3)|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{10K}{10 + 10K}. \quad (3)$$

Com isso, considere o mínimo de  $\omega_b = 2 \text{ rad/s}$  do requisito para encontrar o limite inferior de  $K$  de acordo com

$$\begin{aligned} \left| \frac{10K}{10 + 10K - 12\omega_b^2 + j(21\omega_b - \omega_b^3)} \right|_{\omega_b=2} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{10K}{10 + 10K} \Rightarrow \\ 10K^2 + 116K - 240 &= 0 \Rightarrow K = \begin{cases} -13,39 \\ 1,79 \end{cases} \Rightarrow K = 1,79. \end{aligned} \quad (4)$$

Logo, para atendimento ao requisito de banda passante, deve-se ter

$$K \geq 1,79. \quad (5)$$

O erro em regime para entrada degrau é calculado por

$$e_\infty = 1 - G_f(0) = 1 - \frac{10K}{10 + 10K} = \frac{1}{1 + K}. \quad (6)$$

Para atendimento ao requisito de erro em regime, deve-se ter

$$e_\infty \leq 0,2 \Rightarrow \frac{1}{1 + K} \leq 0,2 \Rightarrow 0,2K \geq 0,8 \Rightarrow K \geq 4. \quad (7)$$

As margens de estabilidade são determinadas a partir da resposta em frequência da função de transferência de malha aberta, que é dada por

$$\begin{aligned} G_a(j\omega) = KG(j\omega) &= \frac{10K}{(j\omega + 1)^2(j\omega + 10)} = \frac{10K}{-j\omega^3 - 12\omega^2 + 21j\omega + 10} \Rightarrow \\ G_a(j\omega) &= \frac{10K}{10 - 12\omega^2 + j(21\omega - \omega^3)}. \end{aligned} \quad (8)$$

A frequência  $\omega_{CG}$  ocorre quando a resposta em frequência cruza  $-180^\circ$ , i.e. quando  $G_a(j\omega)$  é real e negativo, logo

$$21\omega_{CG} - \omega_{CG}^3 = 0 \Rightarrow \omega_{CG}^2 = 21 \Rightarrow \omega_{CG} = \sqrt{21} \text{ rad/s} \approx 4,58 \text{ rad/s}. \quad (9)$$

Assim

$$G_a(j\omega_{CG}) = \frac{10K}{10 - 12 \cdot 21} = -\frac{10K}{242} = -\frac{5K}{121}, \quad (10)$$

Perceba que

$$GM_{dB} \geq 6 \text{ dB} \Rightarrow GM \geq 10^{6/20} \Rightarrow GM_{min} = 10^{6/20}. \quad (11)$$

em que  $GM_{min}$  é o valor mínimo de margem de ganho que atende ao requisito. Portanto, para encontrar o valor máximo de  $K$  que atende ao requisito de margem de ganho, faça

$$|G_a(j\omega_{CG})|GM_{min} = 1 \Rightarrow \frac{5K}{121} \cdot 10^{6/20} = 1 \Rightarrow K = 12,13. \quad (12)$$

Logo, para atendimento ao requisito de margem de ganho, deve-se ter

$$K \leq 12,13. \quad (13)$$

Para o requisito de margem de fase, como  $K$  não afeta a fase, pode-se primeiramente determinar a frequência  $\omega^*$  que deixa o sistema com  $PM = PM_{min} = 30^\circ$  se  $\omega^* = \omega_{CP}$ . Então, obtém-se  $K^*$  que aloca  $\omega_{CP}$  nessa frequência como um valor máximo para  $K$ . Perceba que

$$\angle G_a(j\omega) = \angle \frac{10K}{(j\omega + 1)^2(j\omega + 10)} = -2 \arctan(\omega) - \arctan(\omega/10). \quad (14)$$

Como  $PM_{min} = 30^\circ$ , no limite do requisito, tem-se

$$\angle G_a(j\omega) = -180^\circ + 30^\circ = -150^\circ \Rightarrow 2 \underbrace{\arctan(\omega)}_{\alpha} + \underbrace{\arctan(\omega/10)}_{\beta} = 150^\circ. \quad (15)$$

Sabe-se que

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}, \quad \tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}. \quad (16)$$

Assim, usando as relações de (16) em (15), chega-se a

$$\begin{aligned} \tan(2\alpha + \beta) &= \frac{\tan(2\alpha) + \tan \beta}{1 - \tan(2\alpha) \tan \beta} = \frac{\frac{2\omega}{1 - \omega^2} + \frac{\omega}{10}}{1 - \frac{2\omega}{1 - \omega^2} \cdot \frac{\omega}{10}} = \tan 150^\circ = -0,5774 \Rightarrow \\ \frac{21\omega - \omega^3}{10 - 12\omega^2} &= -0,5774 \Rightarrow \omega^3 + 6,9288\omega^2 - 21\omega - 5,774 = 0 \Rightarrow \\ \omega &= \begin{cases} -9,1543 \\ 2,4786 \\ -0,2532 \end{cases} \Rightarrow \omega^* = 2,4786 \text{ rad/s.} \end{aligned} \quad (17)$$

O ganho  $K$  para alocar  $\omega_{CP} = \omega^* = 2,4786 \text{ rad/s}$  é

$$|KG(j\omega_{CP})| = 1 \Rightarrow \frac{10K}{|(j\omega_{CP} + 1)^2(j\omega_{CP} + 10)|} = 1 \Rightarrow K^* = 7,36. \quad (18)$$

Com isso, para atendimento ao requisito de margem de fase, deve-se ter

$$K \leq 7,36. \quad (19)$$

Portanto, de (5), (7), (13) e (19), todos os requisitos são atendidos se

$$4 \leq K \leq 7,36, \quad (20)$$

de modo que qualquer valor de  $K$  nesse intervalo pode ser escolhido para o projeto. Para comprovar atendimento aos requisitos, escolhe-se  $K$  na metade do intervalo, i.e.  $K = 5,68$ . Assim, as funções de transferência de malha aberta e fechada são

$$G_a(s) = \frac{56,8}{s^3 + 12s^2 + 21s + 10}, \quad G_f(s) = \frac{56,8}{s^3 + 12s^2 + 21s + 66,8}, \quad (21)$$

respectivamente. A Figura 1 mostra uma resposta ao degrau do sistema de controle em malha fechada projetado  $G_f(s)$ , comprovando atendimento ao requisito de erro em regime para entrada degrau de  $e_\infty \leq 0,2$ . A Figura 2(a) apresenta o diagrama de Bode da malha aberta  $G_a(s)$  para demonstrar atendimento aos requisitos de margens de estabilidade  $GM \geq 6 \text{ dB}$  e  $PM \geq 30^\circ$ . Finalmente, a Figura 2(b) mostra atendimento ao requisito de banda passante  $\omega_b \geq 2 \text{ rad/s}$ .

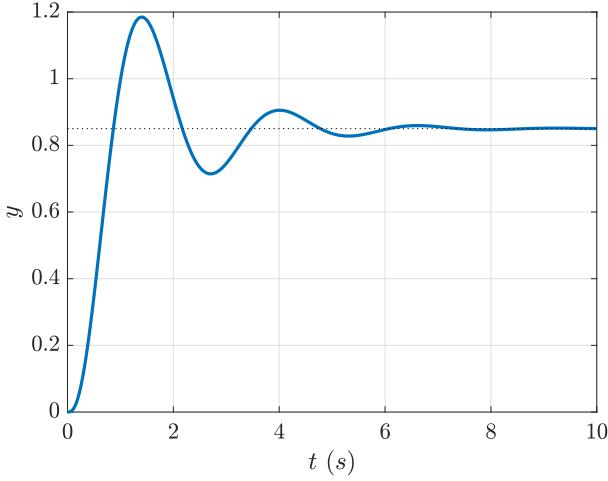


Figura 1: Resposta ao degrau do sistema projetado no Exemplo 1. Verifique atendimento ao requisito de erro em regime para entrada degrau de  $e_\infty \leq 0,2$ .

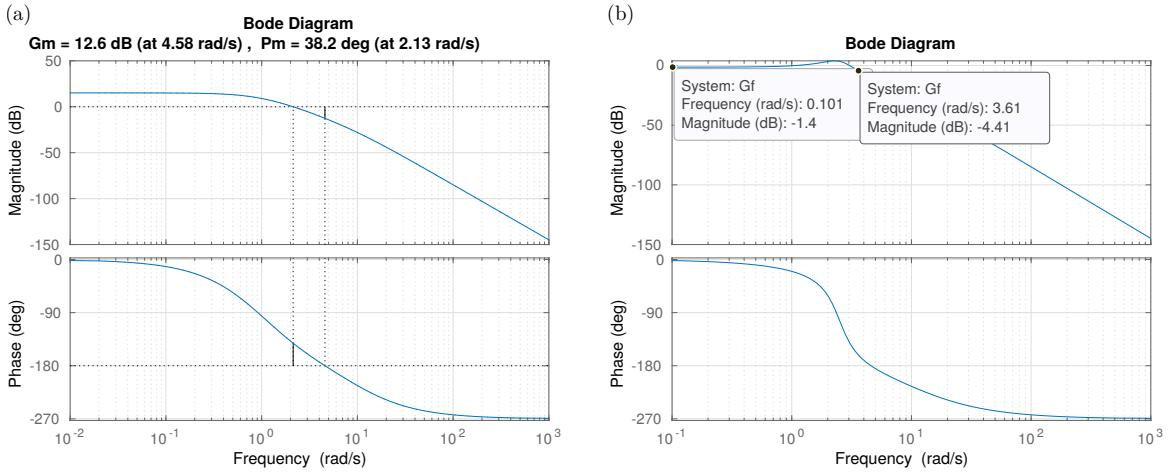


Figura 2: Diagramas de Bode relativos ao sistema projeto no Exemplo 1: (a) diagrama de Bode da malha aberta  $G_a(s)$  mostrando atendimento aos requisitos de margens de estabilidade  $GM \geq 6 \text{ dB}$  e  $PM \geq 30^\circ$ ; e (b) diagrama de Bode da malha fechada  $G_f(s)$  mostrando atendimento ao requisito de banda passante  $\omega_b \geq 2 \text{ rad/s}$ .

**Exemplo 2.** Projete um sistema de controle P+V para um servomotor de posição conforme diagrama de blocos apresentado na Figura 3. Considere que os parâmetros da planta [3] são

- $J = 3,2284 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .
- $b = 3,5077 \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$ .
- $K_t = 0,0274 \text{ N} \cdot \text{m/A}$ .
- $R = 4 \Omega$ .
- $L = 2,75 \cdot 10^{-6} \text{ H}$ .

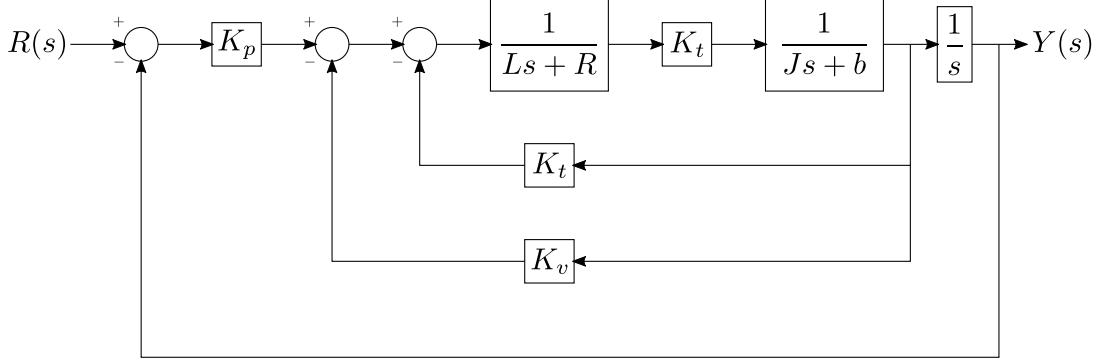


Figura 3: Malha para controle de servomotor de posição, usada no Exemplo 2.

Considerando como aproximação por polos dominantes, projete o sistema para atender aos seguintes requisitos:

- Erro nulo em regime para entrada degrau.
- Banda passante  $\omega_b = 10 \text{ Hz}$ .
- Margem de fase  $PM = 60^\circ$  em todas as malhas.

A função de transferência da planta é

$$G(s) = \frac{K_t}{s[(Js + b)(Ls + R) + K_t^2]} = \frac{K_t}{s[JLs^2 + (JR + bL)s + bR + K_t^2]}. \quad (22)$$

Previamente, apenas assumia-se  $L \approx 0$  para realizar a aproximação por polos dominantes. Alternativamente, pode-se considerar como aproximação que o polo mais distante é ignorado, conforme sugere o método de aproximação por polos dominantes.  $G(s)$  possui um polo na origem  $p_1 = 0$  e os demais polos são dados por

$$\begin{cases} p_2 = \frac{-(bL + JR) + \sqrt{(bL + JR)^2 - 4JL(bR + K_t^2)}}{2JL}, \\ p_3 = \frac{-(bL + JR) - \sqrt{(bL + JR)^2 - 4JL(bR + K_t^2)}}{2JL}. \end{cases} \quad (23)$$

No caso, o polo mais distante da origem é o  $p_3$ , logo esse é o polo negligenciado numa aproximação por polos dominantes. Perceba que se  $L \approx 0$ , a aproximação obtida assumindo  $L \approx 0$  é semelhante à obtida ao negligenciar  $p_3$ , pois

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{-(bL + JR) + \sqrt{(bL + JR)^2 - 4JL(bR + K_t^2)}}{2JL} = \\ &\frac{1}{2JL} \left[ -(bL + JR) + (bL + JR) \left( 1 - \frac{4JL(bR + K_t^2)}{(bL + JR)^2} \right)^{1/2} \right] \approx \\ &\frac{1}{2JL} \left[ -(bL + JR) + (bL + JR) \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4JL(bR + K_t^2)}{(bL + JR)^2} \right) \right] = -\frac{bR + K_t^2}{bL + JR} \Rightarrow \\ &p_2 \approx -\frac{bR + K_t^2}{JR}, \end{aligned} \quad (24)$$

que é o polo dominante obtido ao assumir  $L \approx 0$  em (22). Como esse é um exemplo numérico, pode-se também analisar os valores dos polos em si. Substituindo os valores dos parâmetros em  $G(s)$  e usando a função `pole` do MATLAB, os seguintes polos são obtidos:

$$p = \begin{cases} 0, \\ -59,23, \\ -1,4545 \cdot 10^6. \end{cases} \quad (25)$$

De fato, o polo mais rápido em  $s = -1,4545 \cdot 10^6$  está muito mais afastado da origem que os demais. Com aproximação por polos dominantes, a função de transferência da planta fica

$$G(s) = \frac{0,0274}{1,291 \cdot 10^{-5}s^2 + 0,0007648s}. \quad (26)$$

Com uso de um controlador P+V conforme apresentado na Figura 3, a função de transferência em malha fechada é

$$\begin{aligned} G_f(s) &= \frac{0,0274 \cdot K_p}{1,291 \cdot 10^{-5}s^2 + (0,0274 \cdot K_v + 0,0007648)s + 0,0274 \cdot K_p} \Rightarrow \\ G_f(s) &= \frac{0,0274 \cdot K_p / 1,291 \cdot 10^{-5}}{s^2 + (0,0274 \cdot K_v + 0,0007648)s / 1,291 \cdot 10^{-5} + 0,0274 \cdot K_p / 1,291 \cdot 10^{-5}}. \end{aligned} \quad (27)$$

Perceba que esse é um sistema com erro nulo em regime para entrada degrau, pois é uma sistema do tipo 1, logo o requisito 1 é trivialmente atendido. Para o projeto, pode-se aproveitar o fato de que  $G_f(s)$  é um sistema de segunda ordem padrão. Para isso, usa-se as fórmulas já conhecidas para converter os requisitos no domínio da frequência em parâmetros de um sistema de segunda ordem:

$$\begin{aligned} \tan(PM) &= \frac{2\xi}{\sqrt{-2\xi^2 + \sqrt{4\xi^4 + 1}}} \Rightarrow \tan^2(PM) = \frac{4\xi^2}{-2\xi^2 + \sqrt{4\xi^4 + 1}} \Rightarrow \\ &-2\xi^2 \tan^2(PM) + \tan^2(PM) \sqrt{4\xi^4 + 1} = 4\xi^2 \Rightarrow \\ \tan^2(PM) \sqrt{4\xi^4 + 1} &= 2\xi^2(2 + \tan^2(PM)) \Rightarrow 4\xi^4 + 1 = 4\xi^4 \frac{(2 + \tan^2(PM))^2}{\tan^4(PM)} \Rightarrow \\ 4\xi^4 \left[ \frac{(2 + \tan^2(PM))^2}{\tan^4(PM)} - 1 \right] &= 1 \Rightarrow \xi^4 = \frac{1}{4} \left[ \frac{(2 + \tan^2(PM))^2}{\tan^4(PM)} - 1 \right]^{-1} \Rightarrow \\ \xi &= \left\{ \frac{1}{4} \left[ \frac{(2 + \tan^2(60^\circ))^2}{\tan^4(60^\circ)} - 1 \right]^{-1} \right\}^{1/4} \Rightarrow \xi = 0,6124. \end{aligned} \quad (28)$$

$$\omega_b = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{4\xi^4 - 4\xi^2 + 2}} \Rightarrow \omega_n = 55,5192 \text{ rad/s.} \quad (29)$$

De (27), tem-se

$$\begin{cases} \frac{0,0274 \cdot K_p}{1,291 \cdot 10^{-5}} = \omega_n^2 \Rightarrow K_p = 1,4523 \text{ N} \cdot \text{m/rad}, \\ \frac{0,0274 \cdot K_v + 0,0007648}{1,291 \cdot 10^{-5}} = 2\xi\omega_n \Rightarrow K_v = 0,0041 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s/rad}. \end{cases} \quad (30)$$

Para verificação de atendimento aos requisitos, as figuras 4(a) e 4(b) apresentam os diagramas de Bode de malha fechada e de malha aberta da malha de posição, respectivamente. O efeito do indutor não foi desprezado na verificação. Perceba que o sistema atende aos requisitos. Além disso, a malha interna de velocidade tem margens de ganho e de fase infinitas, conforme mostra a Figura 5.

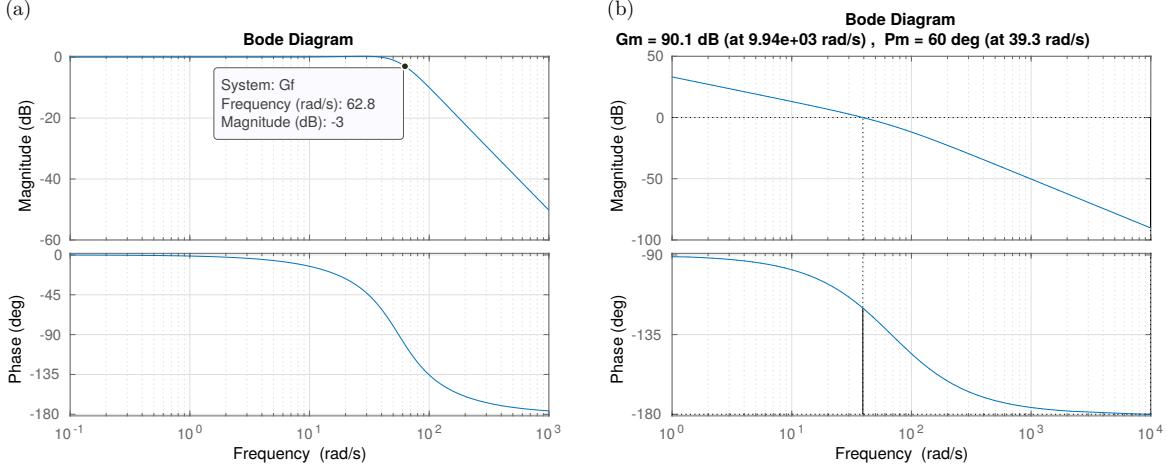


Figura 4: Diagramas de Bode para verificação do projeto do Exemplo 2: (a) diagrama de Bode da malha fechada mostrando atendimento ao requisito de banda  $\omega_b = 10 \text{ Hz} \approx 62,8 \text{ rad/s}$ ; e (b) diagrama de Bode da malha aberta de posição verificando atendimento ao requisito de margem de fase.

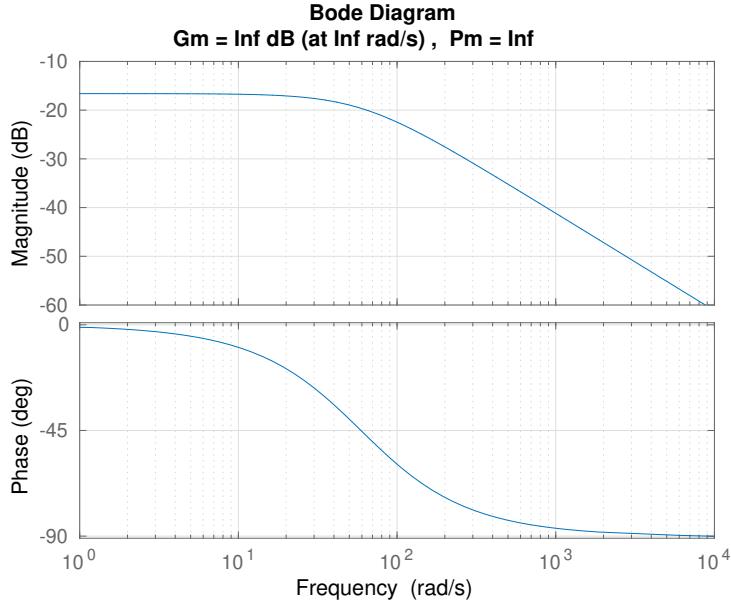


Figura 5: Margens de estabilidade da malha interna de velocidade.

**Exemplo 3.** [2] Seja

$$G(s) = \frac{2}{s(s + 4)}. \quad (31)$$

Projetar um controlador *lead* de modo a atender aos seguintes requisitos:

- Erro em regime para entrada rampa de inclinação unitária  $e_{\infty,rampa} \leq 0,05$ .
- Margem de fase  $PM \geq 45^\circ$ .

A função de transferência de um compensador *lead* (com ganho) é

$$C(s) = K \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}, \quad T > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (32)$$

de modo que a função de transferência da malha aberta fica

$$G_a(s) = C(s)G(s) = K \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} \frac{2}{s(s + 4)}. \quad (33)$$

Na aula 9, estudou-se sobre erro em regime para vários tipos de entrada. Naquela ocasião, verificou-se que, para um sistema do tipo 1, o erro em regime para entrada rampa unitária é

$$e_{\infty,rampa} = \frac{1}{K_{vo}}, \quad (34)$$

em que a constante de erro estático de velocidade é dada por

$$K_{vo} = \lim_{s \rightarrow 0} sG_a(s). \quad (35)$$

Para o sistema em questão:

$$K_{vo} = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( sK \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} \frac{2}{s(s + 4)} \right) = \frac{K}{2}. \quad (36)$$

Assim, para atendimento ao requisito de erro em regime:

$$e_{\infty,rampa} = \frac{1}{K_{vo}} = \frac{2}{K} \leq 0,05 \Rightarrow K \geq 40. \quad (37)$$

Como valores maiores de  $K$  dificultam o atendimento ao requisito de margem de fase, escolhe-se  $K = 40$ . Com isso, calcula-se a margem de fase de  $KG(s)$  para determinar o avanço de fase requerido da compensação *lead*. A frequência de cruzamento é encontrada quando

$$\begin{aligned} |KG(j\omega)| = 1 &\Rightarrow \left| \frac{2K}{j\omega(j\omega + 4)} \right| = 1 \Rightarrow 4K^2 = \omega^2(\omega^2 + 16) \Rightarrow \\ \omega^4 + 16\omega^2 - 6400 &= 0 \Rightarrow \omega^2 = \begin{cases} -88,4 \\ 72,4 \end{cases} \Rightarrow \omega_{CP} = 8,5 \text{ rad/s}. \end{aligned} \quad (38)$$

Logo, a margem de fase é

$$\begin{aligned} PM &= \angle G(j\omega_{CP}) + 180^\circ = \angle \left( \frac{2}{j\omega_{CP}(j\omega_{CP} + 4)} \right) + 180^\circ = \\ &-90^\circ - \arctan \left( \frac{\omega_{CP}}{4} \right) + 180^\circ \Rightarrow PM = 25,2^\circ. \end{aligned} \quad (39)$$

Portanto, para atendimento ao valor mínimo do requisito de  $PM_{min} = 45^\circ$ , projeta-se o *lead* para dar avanço de fase de

$$\phi_{max} = PM_{min} - PM = 19,8^\circ \quad (40)$$

em  $\omega_{CP} = 8,5 \text{ rad/s}$ . Com isso, tem-se

$$\alpha = \frac{1 - \sin \phi_{max}}{1 + \sin \phi_{max}} \Rightarrow \alpha = 0,4939, \quad (41)$$

$$T = \frac{1}{\omega_{CP}\sqrt{\alpha}} \Rightarrow T = 0,1674, \quad (42)$$

de modo que o controlador *lead* é dado por

$$C(s) = 40 \left( \frac{0,1674s + 1}{0,0827s + 1} \right) \Rightarrow C(s) = 81 \left( \frac{s + 6}{s + 12,1} \right). \quad (43)$$

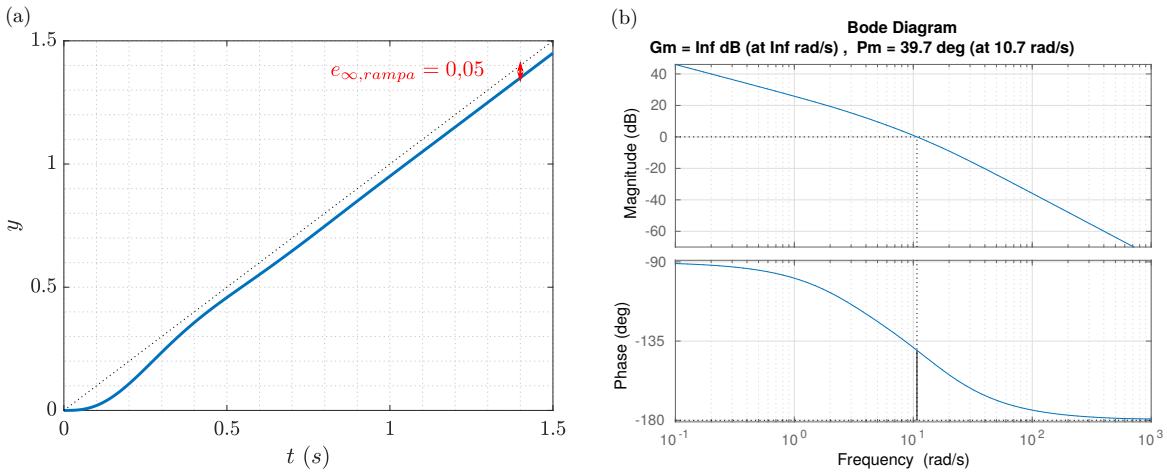


Figura 6: Verificação do sistema inicialmente projeto no Exemplo 4: (a) resposta à entrada rampa com inclinação unitária para comprovar atendimento ao requisito de erro em regime  $e_{\infty,rampa} \leq 0,05$ ; e (b) diagrama de Bode da malha aberta  $G_a(s)$  mostrando a margem de fase, que infelizmente não atende ao requisito de  $PM \geq 45^\circ$ .

Entretanto, ao verificar atendimento aos requisitos, como mostra a Figura 6, percebe-se que o sistema não atende ao requisito de margem de fase (veja a Figura 6(b)). Para compreender porque isso aconteceu, verifique o diagrama de Bode da compensação *lead* projetada sem considerar o ganho, i.e. o diagrama de Bode de

$$C_{lead} = \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = \frac{0,1674s + 1}{0,0827s + 1}. \quad (44)$$

Infelizmente, o ganho do *lead* (vide Figura 7) altera a frequência de cruzamento  $\omega_{CP} = 8,5 \text{ rad/s}$  para  $\omega_{CP} = 10,7 \text{ rad/s}$  (vide Figura 6(b)), de modo que o pico do avanço de fase do *lead* não ocorre mais na frequência de cruzamento.

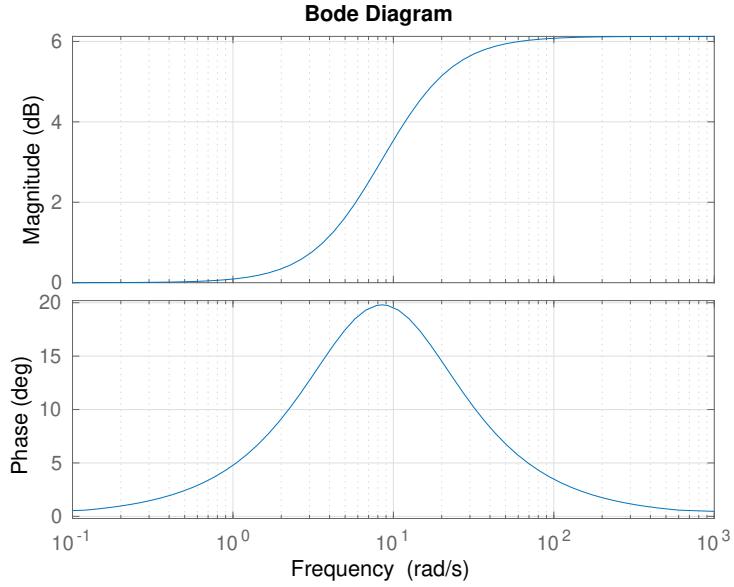


Figura 7: Diagrama de Bode de  $C_{lead}(s)$  (Exemplo 3), compensação *lead* sem considerar o ganho.

Para compensar esse efeito, pode-se incluir um adicional  $\Delta\phi_{max}$  ao avanço de fase do *lead*. Por exemplo, considere  $\Delta\phi_{max} = 10^\circ$ , de modo que

$$\phi'_{max} = \phi_{max} + \Delta\phi_{max} = 19,8^\circ + 10^\circ = 29,8^\circ. \quad (45)$$

Com isso, os novos parâmetros do *lead* são

$$\alpha' = 0,336, \quad (46)$$

$$T' = 0,203, \quad (47)$$

de modo que o novo controlador *lead* fica

$$C'(s) = 40 \left( \frac{0,2030s + 1}{0,1002s + 1} \right) = 81 \left( \frac{s + 4,9}{s + 10} \right). \quad (48)$$

Como pode-se ver na Figura 8, o novo projeto atende ao requisito de margem de fase.

**Exemplo 4.** (adaptado de [2]) Considere a planta e os requisitos do Exemplo 3, porém projete um controlador *lag*.

Como a compensação *lag* atrasa a fase ao invés de avançar, não é mais possível atender ao requisito de erro em regime apenas com o ganho  $K$ , pois isso torna o atendimento ao requisito de margem de fase impossível. Por outro lado, o *lag* remove erro em regime. Com isso, a abordagem adotada agora envolve usar o maior possível  $K$  considerando o atendimento ao requisito de margem de fase e então “completar” o que falta de ganho em baixas frequências com o *lag* para atendimento ao requisito de erro em regime. Como o *lag* produz atraso de fase, considera-se um adicional de fase  $\Delta PM = 10^\circ$  em relação ao valor mínimo do requisito  $PM_{min}$ , assim  $K$  é escolhido de modo a manter uma margem de fase

$$PM = PM_{min} + \Delta PM = 45^\circ + 10^\circ = 55^\circ \quad (49)$$

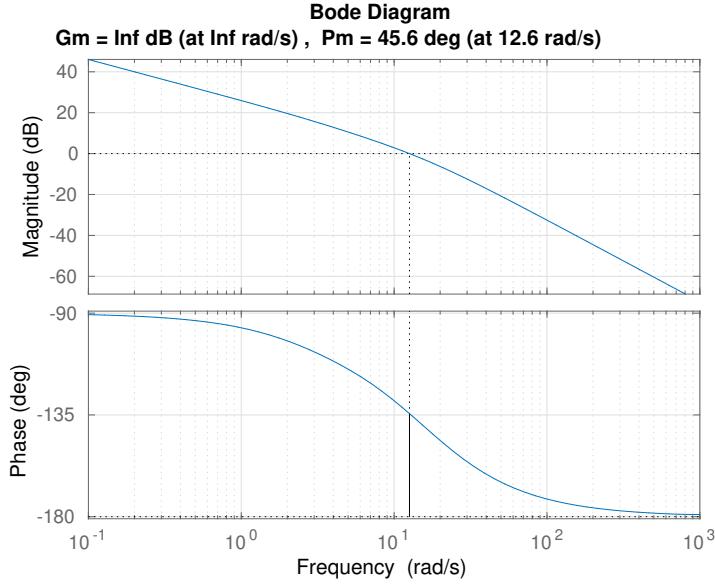


Figura 8: Diagrama de Bode da malha aberta  $G_a(s)$  do novo projeto do Exemplo 3, após correção.

Portanto, a frequência de cruzamento deve acontecer quando

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega_{CP}) &= -180^\circ + PM \Rightarrow \angle \left( \frac{2K}{j\omega(j\omega + 4)} \right) = -125^\circ \Rightarrow \\ \arctan \left( \frac{\omega}{4} \right) &= 35^\circ \Rightarrow \omega_{CP} = 2,8 \text{ rad/s}. \end{aligned} \quad (50)$$

Logo, o valor de  $K$  deve ser tal que

$$|KG(j\omega_{CP})| = 1 \Rightarrow K \left| \frac{2}{j\omega_{CP}(j\omega_{CP} + 4)} \right| = 1 \Rightarrow K = 6,84. \quad (51)$$

O compensador *lag* é dado por

$$C(s) = K\alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}, \quad T > 0, \quad \alpha > 1. \quad (52)$$

A constante de erro estático de velocidade é

$$K_{vo} = \lim_{s \rightarrow 0} sG_a(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( K\alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} \frac{2}{s(s + 4)} \right) = \frac{K\alpha}{2}. \quad (53)$$

Para atendimento ao requisito de erro em regime, deve-se ter

$$e_{\infty, rampa} = \frac{1}{K_{vo}} = \frac{2}{K\alpha} \leq 0,05 \Rightarrow \alpha \geq 5,85. \quad (54)$$

De modo a introduzir o mínimo de atraso de fase possível, escolhe-se  $\alpha = 5,85$ . Além disso, para evitar que o *lag* influencie muito na margem de fase, recomenda-se [1]

$$\frac{\omega_{CP}}{10} \leq \frac{1}{T} \leq \frac{\omega_{CP}}{2}. \quad (55)$$

Para avaliar o efeito da escolha de  $T$ , escolhe-se

$$T_1 = \frac{10}{\omega_{CP}}, \quad T_2 = \frac{5}{\omega_{CP}}. \quad (56)$$

A Figura 9 apresenta o erro  $e(t) = r(t) - y(t)$  para entrada rampa com inclinação unitária considerando  $T_1$  e  $T_2$ . Já as figuras 10(a) e 10(b) mostram as margens de estabilidade com  $T = T_1$  e  $T = T_2$ , respectivamente. Ambos os controladores atendem aos requisitos, mas nota-se uma relação de compromisso entre eles: enquanto  $T = T_1$  resultou em maior margem de fase (vide Figura 10),  $T_2$  reduz o erro mais rapidamente (vide Figura 9). Intuitivamente,  $T_2$  aloca o compensador mais distante da origem, o que deixa o efeito do *lag* mais forte, mas em contrapartida consome mais margem de fase.

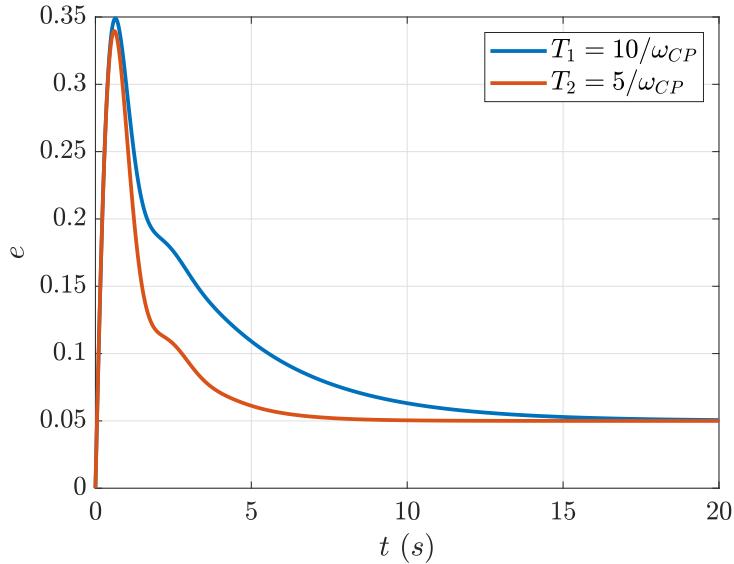


Figura 9: Erro para entrada rampa com inclinação unitária para sistemas projetados no Exemplo 4.

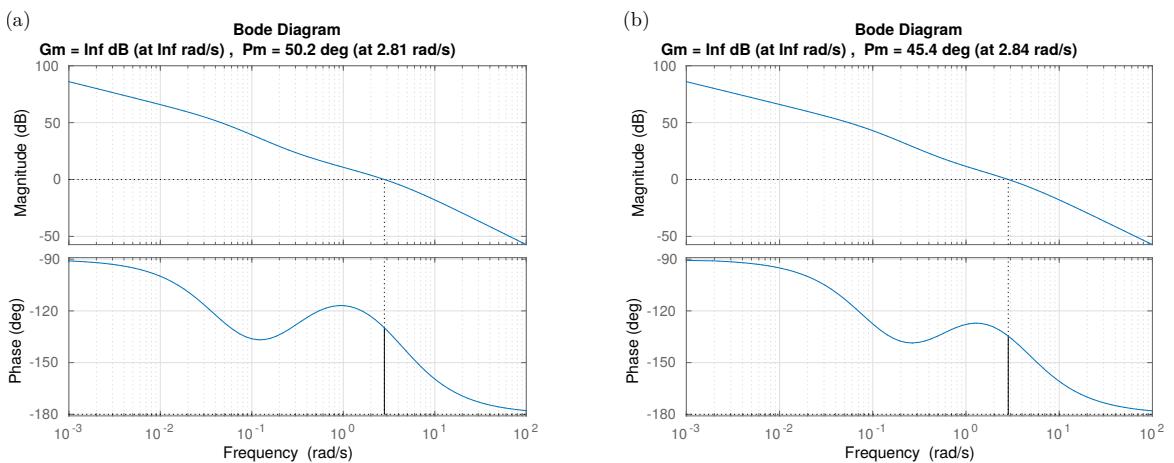


Figura 10: Diagramas de Bode da malha aberta  $G_a(s)$  do sistema projeto no Exemplo 4: (a)  $T_1 = 10/\omega_{CP}$  e (b)  $T_2 = 10/\omega_{CP}$ .

## Referências

- [1] Gene F. Franklin, J. Davis Powell, and Abbas F. Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Pearson, The address, 2015. An optional note.
- [2] Roberto Kawakami Harrop Galvão. Slides da Disciplina EES-10. <http://www.ele.ita.br/~kawakami/ees10/>.
- [3] Bill Messner, Dawn Tilbury, Luis Oms, Joshua Pagel, Yanjie Sun, Munish Suri, Christopher Caruana, Dai Kawano, Brian Nakai, Pradya Prempraneerach, , Jonathan Luntz, JD Taylor, and Shuvra Das. Control tutorials for matlab & simulink. <http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=MotorPosition&section=SystemModeling>.

# Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA

## Controle para Sistemas Computacionais – CMC-12

### Notas da Aula 20 – Controle por Computador

**Professor:** Marcos Ricardo Omena de Albuquerque Maximo

25 de julho de 2020

Como já mencionado durante o curso, atualmente a grande maioria dos controladores são implementados através de computador, o que traz várias vantagens. Dentre elas, destaca-se a facilidade em usar algoritmos de controle sofisticados (por exemplo, pode-se usar uma rede neural como controlador) e a flexibilidade em permitir ajustes nos parâmetros de controle. O uso de circuitos analógicos para implementação de controladores limita muito as leis de controle que podem ser utilizadas e um novo ajuste de ganhos exige a troca de componentes físicos.

A principal desvantagem introduzida por uso de computador para controle é a necessidade de discretização, pois o computador trabalha em tempo discreto. Durante o curso, viu-se algumas formas de se discretizar controladores projetados em tempo contínuo. Nesta aula, o assunto é abordado de uma maneira mais formal. A discussão apresentada aqui se aplica se qualquer dispositivo digital for usado para implementar o controlador, seja o dispositivo um computador, um microcontrolador, uma FPGA etc. Finalmente, destaca-se que essa é apenas uma introdução ao assunto com foco em aplicação prática. O assunto de controle por computador é explorado durante cerca de um bimestre na disciplina Sistemas de Controle II (EES-20), que é recomendada como continuação de CMC-12 para os interessados.

## 1 Introdução ao Controle por Computador

A Figura 1 apresenta o que acontece quando se faz controle com uso de computador. O computador consegue usar novas medidas e atualizar a saída apenas em tempos discretos, espaçados entre si do chamado tempo de amostragem  $T$ , conforme mostra a Figura 1(a) (no exemplo, assume-se  $T = 0,1\text{ s}$ ). Em geral, em controle, trabalha-se com  $T$  constante, pois isso facilita as análises matemáticas. Nesse contexto, é comum passar a se referir aos equivalentes discretos das variáveis do sistema de controle com a seguinte notação:

$$y[k] = y(t = kT), \quad u[k] = u(t = kT). \quad (1)$$

em que  $k$  é o índice do instante de amostragem em questão. Enquanto não há novas medidas, o computador geralmente “segura” o mesmo comando através de um segurador

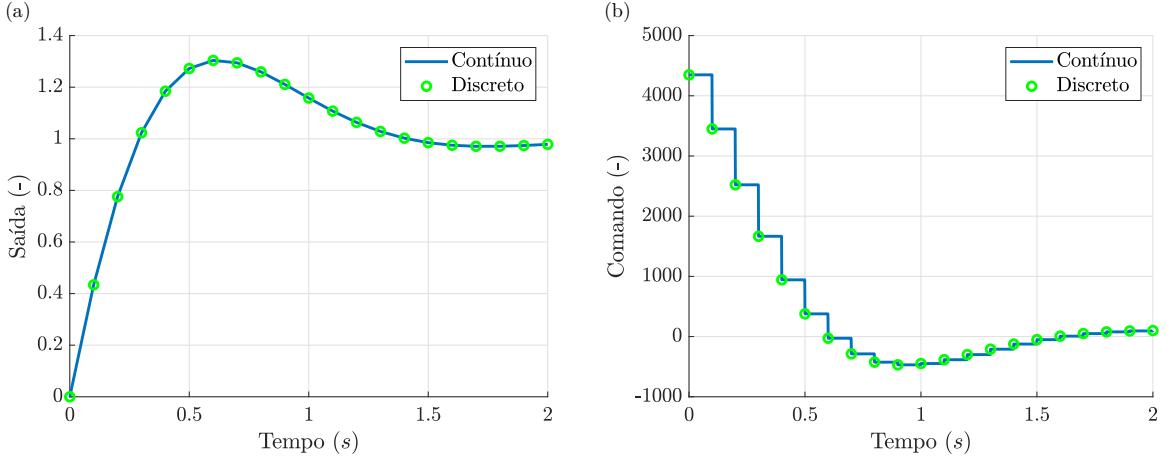


Figura 1: Sistema de controle implementado por computador: (a) saída da planta e medidas tomadas em amostras discretas e (b) comando produzido pelo computador. Em (a), embora a planta varia sua saída em tempo contínuo (curva azul), o computador é capaz de incorporar medidas apenas em instantes discretos espaçados entre si pelo tempo de amostragem (círculos verdes). Em (b), perceba que o computador “segura” o comando durante o período de amostragem.

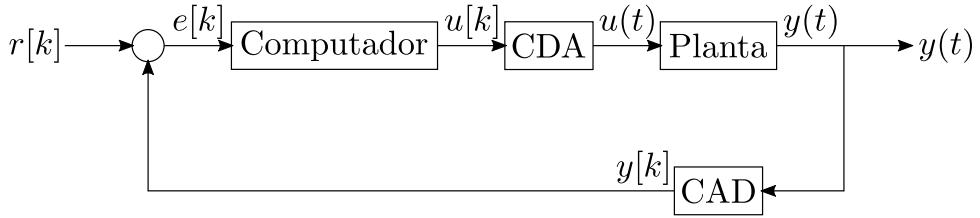


Figura 2: Diagrama esquemático de controle por computador.

de ordem zero (em inglês, *zero order holder* ou ZOH) (vide Figura 1(b)), ou seja, o comando contínuo que chega na planta durante um período de amostragem é

$$u(t) = u[k], \quad t \in [kT, (k+1)T]. \quad (2)$$

Ademais, a Figura 2 mostra um diagrama esquemático de uma malha de controle implementada em computador. A saída  $y(t)$  é amostrada por um conversor analógico-digital (CAD), o que resulta em uma medida discreta  $y[k]$ . Então, o algoritmo de controle executando no computador (processador) processa  $y[k]$  e responde com um comando  $u[k]$ . Um conversor digital-analógico (CDA) transforma  $u[k]$  em  $u(t)$  para aplicação na planta, segurando  $u[k]$  (ZOH) até a chegada do próximo comando  $u[k+1]$ . Perceba que numa aplicação real, é comum haver a interação entre diversos dispositivos físicos para implementação do sistema de controle como um todo. Ademais, em algumas aplicações, alguns desses blocos podem estar fisicamente no mesmo dispositivo (por exemplo, pode-se usar o CAD presente em um microcontrolador).

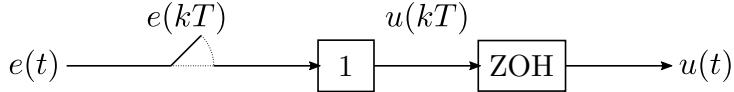


Figura 3: Sistema amostrador-segurador (*sample&hold*) para entendimento do atraso introduzido pela discretização.

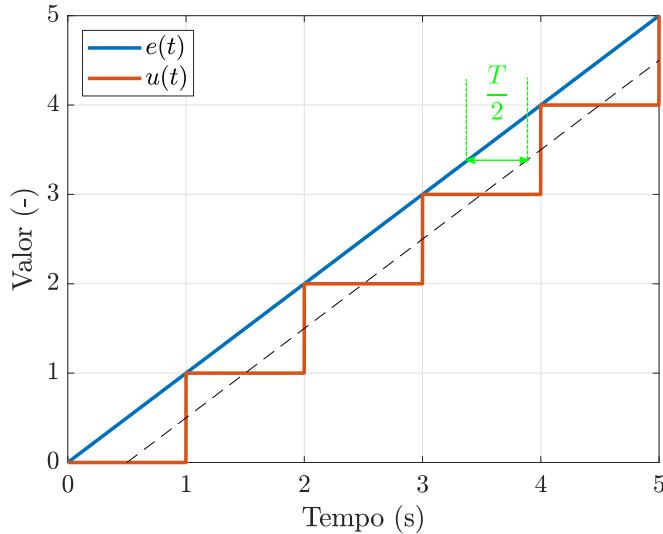


Figura 4:  $e(t)$  e  $u(t)$  do sistema amostrador-segurador da Figura 3.

## 2 Efeitos Introduzidos pelo Uso do Computador

Como o computador é capaz de atualizar o comando de controle apenas em tempos discretos, a implementação digital de uma lei de controle é apenas uma aproximação de sua versão de tempo contínuo. Com isso, introduz-se alguns efeitos indesejáveis.

### 2.1 Amostragem

A implementação de controle em computador requer amostragem do sinal, conforme mostrado na Figura 1, o que introduz atraso na malha. Para entender melhor, considere um amostrador-segurador como o da Figura 3, em que o tempo de amostragem é  $T = 1\text{ s}$ . Seja então uma entrada  $e(t)$  em formato de rampa, conforme apresentado em azul na Figura 4. Assim, tem-se o  $u(t)$  mostrado em laranja na Figura 4. “Em média”,  $u(t)$  segue a tendência mostrada pela reta preta tracejada, de modo que o atraso médio introduzido pela discretização no tempo é de  $T/2$ . A discretização de um controlador qualquer possui o mesmo efeito: introduz  $T/2$  de atraso. Como já foi visto anteriormente, atraso “consome” margem de fase, o que explica porque a discretização prejudica a estabilidade de um sistema. Uma abordagem simples para compensar esse efeito é projetar incluindo um adicional de margem de fase em relação à margem de fase desejada.

É importante que em todas as iterações o tempo de amostragem seja respeitado. Por conta disso, deve-se certificar que o tempo de processamento é sempre menor que o tempo de amostragem. Caso isso não seja verdade, deve-se trocar o processador por um com

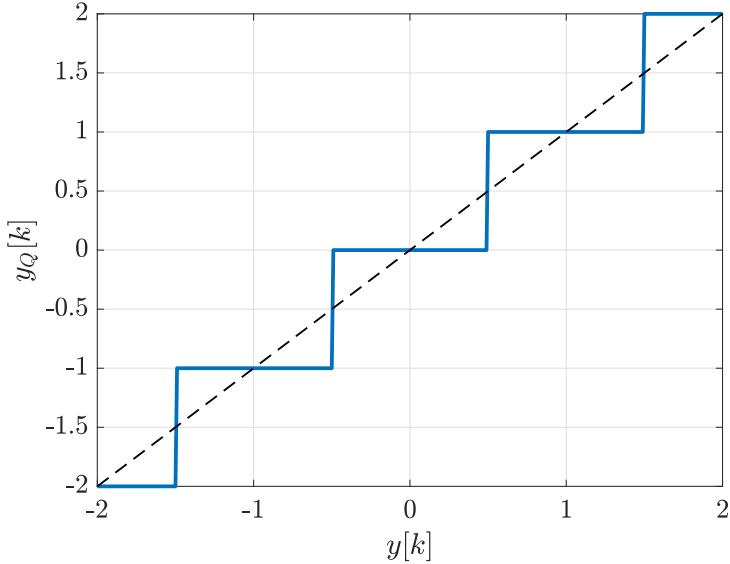


Figura 5: Quantização de um sinal  $y[k]$ , gerando o sinal quantizado  $y_Q[k]$ .

maior capacidade de processamento ou otimizar o algoritmo utilizado.

Destaca-se ainda que na implementação de controladores, é muito importante que o tempo de amostragem seja bem determinístico (i.e. sem grandes flutuações). Conforme estudado num curso de sistemas operacionais (CES-33), os sistemas operacionais mais populares (e.g. Windows e Linux) são otimizados para uma boa experiência de usuário num ambiente multitarefas, de modo que não é possível garantir um bom determinismo de tempo para uma determinada tarefa com eles. No caso de uso de um computador para controle, recomenda-se o uso de um sistema operacional de tempo real, principalmente se o tempo de amostragem for pequeno (na ordem de alguns milissegundos ou menor). Há versões do Linux com suporte a tempo real.

## 2.2 Quantização

Um computador não consegue representar números com precisão arbitrária, pois eles devem ter uma quantidade finita de *bits*. Assim, além da discretização no tempo, o uso de computador produz a discretização dos valores de  $y[k]$  e  $u[k]$  (e também das operações intermediárias realizadas na lei de controle). Para a malha de controle, a quantização gera um efeito semelhante a um “ruído” (porém, perceba que a quantização não é aleatória nem tem distribuição Gaussiana), de modo que é comum chamar o efeito de “ruído de quantização”. A Figura 5 mostra uma representação gráfica do valor quantizado  $y_Q[k]$  de uma medida  $y[k]$ , com intervalo de quantização de 1, em que foi usado um critério de aproximação pelo vizinho mais próximo.

Tipicamente, o maior problema com quantização é na medida  $y[k]$  realizado pelo sensor, principalmente porque implementar um CAD com alta precisão e baixo atraso é difícil, conforme estuda-se num curso de microcontroladores (EEA-27). Com o avanço dos dispositivos digitais, isso tem se tornado um problema cada vez menor. Entretanto, ainda é problema se for necessário derivar  $y[k]$ , seja através de uma derivada numérica direta ou por compensadores (e.g. PD ou *lead*).

Por exemplo, no controle de um motor elétrico, a amplificação do ruído de quantização gerado pela derivação da medida do *encoder* (sensor de posição) costuma ser problema. No caso de controle de velocidade, a derivação da medida de posição para obtenção de velocidade é inevitável. No caso de controle de posição, a informação de velocidade é usada para aumentar o amortecimento do sistema, o que geralmente é necessário para uma resposta bem amortecida. Para mitigar o problema, costuma-se usar filtragem, um tacômetro (sensor de velocidade) ou um *encoder* de alta precisão (ou alguma combinação dessas estratégias).

A precisão das operações intermediárias realizadas pelo dispositivo também podem representar problemas, principalmente em dispositivos embarcados que não possuem unidade lógica-aritmética (ULA) para operações com ponto flutuante e uma representação com inteiros tiver que ser utilizada. Entretanto, suporte para operações em ponto flutuante tem sido cada vez mais comum em microcontroladores.

Como quantização é um efeito não-linear, a avaliação do efeito da quantização sobre um sistema em particular geralmente é feita através de simulação numérica. Esse tipo de avaliação é fundamental quando o sistema possui algum elemento que deriva o sinal quantizado.

### 2.3 Tempo de Processamento

Como já comentado antes, o tempo de processamento introduz atraso na malha, o que reduz a margem de fase (além do atraso já introduzido pela própria discretização!). Embora o mais comum é associar o tempo de processamento ao cálculo da lei de controle realizada no computador, note que qualquer tempo desde a aquisição do sinal de medida até a atuação na planta deve ser contabilizado. Isso inclui tempo gasto com conversão analógico-digital, por exemplo. Para muitos dispositivos, há uma relação de compromisso entre precisão e tempo de processamento que deve ser levada em conta. Por exemplo:

- Em visão computacional, processar imagens com maior resolução produzem medidas menos quantizadas, mas aumenta o tempo computacional.
- Num CAD, é comum haver a possibilidade de aumentar a quantidade de *bits* usada na aquisição em troca de maior tempo de processamento.
- Operações com maior precisão requerem maior tempo computacional. Mesmo quando a ULA não possui suporte a ponto flutuante, é possível emular a partir de operações com inteiros, mas isso costuma envolver um custo computacional muito maior, de modo que é um recurso geralmente evitado na implementação de malhas de controle.

## 3 Transformada Z

A transforma de Laplace de uma função  $f(t)$  é

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt. \quad (3)$$

Aproximando a integral por uma soma, tem-se

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \approx \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-skT}T = T \sum_{k=0}^{\infty} f[k] (e^{sT})^{-k} = T \sum_{k=0}^{\infty} f[k]z^{-k}, \quad (4)$$

em que  $z = e^{sT}$ . Desse modo, define-se a chamada transformada Z (“versão” discreta da transformada de Laplace) como

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} f[k]z^{-k}. \quad (5)$$

Assim como há o conceito de função de transferência no domínio de Laplace, em que  $G(s) = Y(s)/U(s)$ , existe também o conceito de função de transferência discreta no domínio Z, em que  $G(z) = Y(z)/U(z)$ , que tem a forma

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a^{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}, \quad (6)$$

em que  $m \leq n$  (para que o sistema seja próprio). A relação  $z = e^{sT}$  mapeia o semi-plano esquerdo (SPE) no plano  $s$  para o interior do círculo unitário no plano  $z$ . Com isso, um sistema discreto descrito por  $G(z)$  é estável se todos os polos de  $G(z)$  estiverem no interior do círculo unitário.

Assim como com a transformada de Laplace, também monta-se tabelas de transformada Z para facilitar a obtenção de inversas. Além disso, há diversas propriedades da transformada Z. Dado o pouco tempo restante na disciplina, essas questões não serão abordadas, mas certamente são estudadas num curso de controle digital, como EES-20. Mostra-se apenas a propriedade de atraso no tempo, pois ela é necessária para a discretização de controladores contínuos. Perceba que

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{y[k-1]\} &= \sum_{k=0}^{\infty} y[k-1]z^{-k} = \underbrace{y[-1]}_{=0} z^0 + z^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} y[k-1]z^{-(k-1)} \xrightarrow{k'=k-1} \\ \mathcal{Z}\{y[k-1]\} &= z^{-1} \sum_{k'=0}^{\infty} y[k']z^{-k'} \Rightarrow \mathcal{Z}\{y[k-1]\} = z^{-1} \mathcal{Z}\{y[k]\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Generalizando, tem-se

$$\mathcal{Z}\{y[k-n]\} = z^{-n} \mathcal{Z}\{y[k]\}. \quad (8)$$

## 4 Discretização de Controladores Contínuos

Embora seja possível projetar diretamente em tempo discreto, a abordagem mais popular em controle clássico é projetar no contínuo e depois discretizar o controlador. Anteriormente no curso, mostrou-se como discretizar os termos de um controlador PID. Entretanto, deseja-se um método geral, que seja capaz de discretizar qualquer controlador contínuo, i.e. deseja-se um método que forneça a lei de controle em tempo discreto  $u[k]$  a partir do sua equivalente em tempo contínuo  $u(t)$ .

A maioria dos métodos de projetos vistos em CMC-12 fornecem o controlador como uma função de transferência  $C(s) = U(s)/E(s)$ . Assim, mostra-se primeiro como transformar  $C(s) = U(s)/E(s)$  em seu equivalente discreto  $C(z) = U(z)/E(z)$ . Então, apresenta-se como usar a transformada Z inversa para obter a lei  $u[k]$  a partir de  $C(z)$ . Anteriormente, mostrou-se três estratégias de discretização:

1. Aproximar derivada por diferenças finitas:

$$\dot{e}(t) \approx \frac{e(t) - e(t - T)}{T}, \quad (9)$$

2. Aproximar integral por soma de retângulos:

$$\int_0^{t=kT} e(\tau) d\tau \approx \sum_{i=0}^{k-1} e(iT)T, \quad (10)$$

3. Aproximar integral por soma de trapézios:

$$\int_0^{t=kT} e(\tau) d\tau \approx \sum_{i=1}^k \left( \frac{e(iT) + e((i-1)T)}{2} \right) T. \quad (11)$$

Cada uma dessas estratégias resulta em fórmula diferente para discretizar uma função de transferência. Há ainda outras formas de discretização não comentadas aqui.

## 4.1 Método de Euler

O método de Euler se baseia na estratégia mostrada em (9). Considere

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = s \Rightarrow u(t = kT) = \dot{e}(t = kT) \approx \frac{e(t) - e(t - T)}{T}. \quad (12)$$

Em notação discreta, pode-se escrever

$$u[k] = \frac{e[k] - e[k-1]}{T}. \quad (13)$$

Aplicando a transformada Z, obtém-se

$$U(z) = \frac{1}{T} (E(z) - z^{-1}E(z)) \Rightarrow C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{T}. \quad (14)$$

Comparando (12) e (14), sugere-se o uso da seguinte relação entre  $s$  e  $z$  para aproximar um controlador contínuo:

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T}. \quad (15)$$

O método de Euler consiste em substituir cada ocorrência de  $s$  em  $C(s)$  usando (15) para obter  $C(z)$ . Embora a relação (15) tenha sido deduzida assumindo  $C(s) = s$ , o método pode ser usado para um  $C(s)$  qualquer.

## 4.2 Integração Retangular

Nesse caso, considere

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{s} \Rightarrow u(t) = \int_0^{t=kT} e(\tau) d\tau \approx T \sum_{i=0}^{k-1} e(iT). \quad (16)$$

Pode-se escrever

$$\begin{aligned} u[k] &= T \sum_{i=0}^{k-1} e[i] = T \sum_{i=0}^{k-2} e[i] + Te[k-1] = u[k-1] + Te[k-1] \Rightarrow \\ U(z) (1 - z^{-1}) &= Tz^{-1}E(z) \Rightarrow C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T}{z-1}. \end{aligned} \quad (17)$$

Comparando (16) e (17), obtém-se

$$\frac{1}{s} = \frac{T}{z-1} \Rightarrow s = \frac{z-1}{T}. \quad (18)$$

## 4.3 Método de Tustin (ou Transformação Bilinear)

Seja

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{s} \Rightarrow u(t) = \int_0^{t=kT} e(\tau) d\tau \approx \sum_{i=1}^k \left( \frac{e(iT) + e((i-1)T)}{2} \right) T. \quad (19)$$

Pode-se escrever

$$\begin{aligned} u[k] &= \sum_{i=1}^k \left( \frac{e[i] + e[i-1]}{2} \right) T = \sum_{i=1}^{k-1} \left( \frac{e[i] + e[i-1]}{2} \right) T + \left( \frac{e[k] + e[k-1]}{2} \right) T = \\ u[k] &= u[k-1] + \left( \frac{e[k] + e[k-1]}{2} \right) T \Rightarrow U(z) (1 - z^{-1}) = T \left( \frac{1 + z^{-1}}{2} \right) E(z) \Rightarrow \quad (20) \\ C(z) &= \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T}{2} \left( \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \right). \end{aligned}$$

Comparando (19) e (20), obtém-se

$$\frac{1}{s} = \frac{T}{2} \left( \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \right) \Rightarrow s = \frac{2}{T} \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) = \frac{2}{T} \left( \frac{z-1}{z+1} \right). \quad (21)$$

A transformação de Tustin é um método muito popular para discretização de controladores contínuos. Em geral, Tustin é o melhor método dentre os três mostrados aqui, o que é esperado, dado que é baseado em integração por trapézios. No MATLAB, o comando `sysd = c2d(sysc, T, 'tustin')` transforma uma função de transferência contínua `sysc` em uma discreta `sysd` através do método de Tustin, considerando período de amostragem `T`.

## 4.4 Obtenção da Lei de Controle no Tempo Discreto

Para obter a lei de controle discreta  $u[k]$  a partir da função de transferência do controlador discreto  $C(z)$ , adota-se o seguinte procedimento:

$$\begin{aligned} C(z) &= \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \Rightarrow \\ (1 + a_{n-1} z^{-1} + \cdots + a_0 z^{-n})U(z) &= (b_m z^{m-n} + b_{m-1} z^{m-n-1} + \cdots + b_0 z^{-n})E(z) \Rightarrow \quad (22) \\ u[k] &= -a_{n-1} u[k-1] - \cdots - a_0 u[k-n] + b_m e[k-n+m] + \cdots + b_0 e[k-n]. \end{aligned}$$

**Exemplo 1.** Seja

$$C(s) = 2 \left( \frac{s+1}{s+2} \right). \quad (23)$$

Encontre uma lei de controle discreta  $u[k]$  para o controlador  $C(s)$  com uso do método de Tustin. Considere  $T = 0,5$  s. Pelo método de Tustin, tem-se

$$s = \frac{2}{T} \left( \frac{z-1}{z+1} \right), \quad (24)$$

logo

$$\begin{aligned} C(z) &= 2 \left[ \frac{\frac{2}{T} \left( \frac{z-1}{z+1} \right) + 1}{\frac{2}{T} \left( \frac{z-1}{z+1} \right) + 2} \right] = 2 \left( \frac{5z-3}{6z-2} \right) = \frac{5-3z^{-1}}{3-2z^{-1}} \Rightarrow \quad (25) \\ (3-z^{-1})U(z) &= (5-3z^{-1})E(z) \Rightarrow u[k] = \frac{1}{3}u[k-1] + \frac{5}{3}e[k] - e[k-1]. \end{aligned}$$

## 5 Escolha da Taxa de Amostragem

Primeiramente, o **critério de amostragem de Nyquist** (não confundir com o critério de estabilidade de Nyquist!) dita que o mínimo absoluto de taxa de amostragem que se deve adotar é o dobro da máxima frequência de interesse do sistema para evitar um efeito chamado de *aliasing*. Entretanto, para estabilidade do sistema de controle, essa taxa costuma ser baixa. A propósito, estuda-se o critério de amostragem de Nyquist em disciplinas de telecomunicações (ELE-32) ou de processamento de sinais. Assim, o principal critério que deve embasar a escolha da taxa de amostragem é o requisito de margem de fase.

Ademais, existem as seguintes regras de bolso com base na banda passante e no tempo de subida do sistema:

- Frequência de amostragem de pelo menos 20 vezes a banda passante do sistema:

$$f_s \geq 20 \frac{\omega_b}{2\pi} \Rightarrow T \leq \frac{2\pi}{20\omega_b}. \quad (26)$$

- Tempo de amostragem no máximo 1/6 do tempo de subida de 10% a 90%  $t_r|_{10\%}^{90\%}$ :

$$T \leq \frac{t_r|_{10\%}^{90\%}}{6}. \quad (27)$$