Mapas de Karnaugh

Sitio:	Agencia de Habilidades para el Futuro	Imprimido por:	RODRIGO PINTO
Curso:	Lógica Computacional 1°D	Día:	martes, 26 de noviembre de 2024, 10:25
Libro:	Mapas de Karnaugh		

Tabla de contenidos

Simplificación mediante álgebra de Boole

Muchas veces, a la hora de aplicar el álgebra booleana, hay que reducir una expresión a su forma más simple o cambiarla a una forma más conveniente para conseguir una implementación más eficiente. El método que se va a tratar en esta sección utiliza las reglas, leyes y teoremas del álgebra de Boole para manipular y simplificar una expresión. Este método requiere un profundo conocimiento del álgebra booleana y una considerable experiencia en su aplicación, por no mencionar también un poquito de ingenio y destreza.

Una expresión booleana simplificada emplea el menor número posible de puertas en la implementación de una determinada expresión.

Simplificar la siguiente expresión utilizando técnicas del álgebra de Boole:

$$AB + A(B + C) + B(B + C)$$

Solución El método que se sigue no es necesariamente el único método posible.

Paso 1. Aplicar la ley distributiva al segundo y tercer término del siguiente modo:

$$AB + AB + AC + BB + BC$$

Paso 2. $(BB = B)$ al cuarto término.

$$AB + AB + AC + B + BC$$

Paso 3. $(AB + AB = AB)$ a los dos primeros términos.

$$AB + AC + B + BC$$

Paso 4. $(B + BC = B)$ a los dos últimos términos.

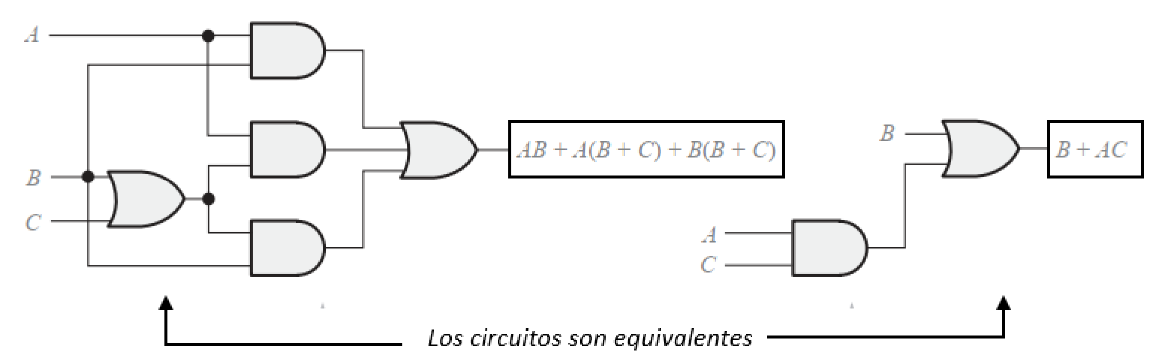
$$AB + AC + B$$

Paso 5. $(AB + B = B)$ al primero y tercer término.

$$B + AC$$

En este punto, la expresión ya no puede seguir simplificándose. Según vaya adquiriendo experiencia en la aplicación del álgebra de Boole, podrá combinar muchos de los pasos individuales.

Es importante resaltar que estos dos circuitos de puertas son equivalentes, es decir, para cualquier combinación de valores en las entradas A, B y C, obtenemos siempre la misma salida en ambos circuitos.


A
B
C
AB + A(B + C) + B(B + C)
B
A
C
B + AC
Los circuitos son equivalentes

Formas estándar de expresiones booleanas

Todas las expresiones booleanas, independientemente de su forma, pueden convertirse en cualquiera de las dos formas estándar: **suma de productos** o **producto de sumas**. La estandarización posibilita que la evaluación, simplificación e implementación de las expresiones booleanas sea mucho más sistemática y sencilla.

Suma de productos

Cuando dos o más productos se suman mediante la adición booleana, la expresión resultante se denomina suma de productos (SOP, Sum Of Products). Una suma de productos puede contener también términos de una única variable.

Ejemplos:

$$AB + ABC$$
$$ABC + CDE + \overline{B}C\overline{D}$$
$$\overline{A}B + \overline{A}B\overline{C} + AC$$

En una expresión con formato de suma de productos, una barra no puede extenderse sobre más de una variable; sin embargo, más de una variable puede tener una barra encima.

Forma estándar de la suma de productos

Una suma de productos estándar es aquella en la que todas las variables de la función aparecen en cada uno de los términos de la expresión. La expresión suma de productos estándar es importante en la construcción de tablas de verdad, y en el método de simplificación de los mapas de Karnaugh. Cualquier expresión suma de productos no estándar (que denominaremos simplemente suma de productos) puede convertirse al formato estándar utilizando el álgebra de Boole.

Cada término producto de una suma de productos que no contenga todas las variables de la función puede ampliase a su forma estándar de manera que incluya todas las variables del dominio y sus complementos. Como se muestra en los siguientes pasos, una suma de productos no estándar se convierte a su forma estándar utilizando el postulado básico de la suma, donde dice que la variable sumada a su complemento es igual a 1.

Ejemplo:

Convertir la siguiente expresión booleana al formato suma de productos estándar:

$$A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B} + AB\bar{C}D$$

El dominio de esta suma de productos es A, B, C, D. Considerando cada término por separado, se comprueba que al primer término, $A\bar{B}C$, le falta la variable D o $\bar{D}$, por lo que multiplicamos dicho término por $D + \bar{D}$ como sigue:

$$A\bar{B}C = A\bar{B}C(D + \bar{D}) = A\bar{B}CD + A\bar{B}C\bar{D}$$

En este caso se obtienen dos productos estándar.

En el segundo término $\bar{A}\bar{B}$ faltan las variables C o $\bar{C}$ y D o $\bar{D}$, por lo que lo multiplicamos por $C + \bar{C}$

$$\bar{A}\bar{B} = \bar{A}\bar{B}(C + \bar{C}) = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$$

Los dos términos que hemos obtenido carecen de la variable D o $\bar{D}$, por lo que multiplicamos ambos términos por $D + \bar{D}$

$$\begin{aligned}\bar{A}\bar{B} &= \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} = \bar{A}\bar{B}C(D + \bar{D}) + \bar{A}\bar{B}\bar{C}(D + \bar{D}) \\ &= \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\end{aligned}$$

En este caso, el resultado con cuatro productos estándar.

El tercer término, $AB\bar{C}D$, ya está en forma estándar. La suma de productos estándar completa que obtenemos finalmente es:

$$A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B} + AB\bar{C}D = A\bar{B}CD + A\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}D$$

Producto de sumas

Un producto de sumas estándar es aquel en el que todas las variables del dominio o sus complementos aparecen en cada uno de los términos de la expresión.

Cualquier producto de sumas no estándar (que denominaremos simplemente producto de sumas) puede convertirse a su forma estándar mediante el álgebra de Boole.

Ejemplos:

$$(A+\bar{B}+C)(A+B+\bar{D})(A+\bar{B}+\bar{C}+D)$$

$$(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+\bar{D})(A+\bar{B}+C+D)(A+B+\bar{C}+D)$$

En una expresión con formato de productos de sumas, una barra no puede extenderse sobre más de una variable; sin embargo, más de una variable puede tener una barra encima.

Forma estándar del producto de sumas

Cada término suma de una expresión producto de sumas que no contenga todas las variables del dominio puede extenderse para obtener su formato estándar incluyendo todas las variables del dominio y sus complementos. Como se establece en los pasos siguientes, un producto de sumas no estándar se convierte a su formato estándar utilizando la regla booleana que establece que una variable multiplicada por su complemento es igual a

0.

Ejemplo:

Convertir la siguiente expresión booleana a formato producto de sumas:

$$(A+\overline{B}+C)(\overline{B}+C+\overline{D})(A+\overline{B}+\overline{C}+D)$$

El dominio de este producto de sumas es A, B, C, D. Vamos a considerar término por término. En el primero $A+\overline{B}+C$, falta la variable D o $\overline{D}$, por lo que añadimos $D\overline{D}$ y aplicamos la regla 12 del siguiente modo:

$$A+\overline{B}+C = A+\overline{B}+C+D\overline{D} = (A+\overline{B}+C+D)(A+\overline{B}+C+\overline{D})$$

En el segundo término, $\overline{B}+C+\overline{D}$ falta la variable A o $\overline{A}$, por lo que añadimos $A\overline{A}$ y aplicamos la regla 12 como sigue:

$$\overline{B}+C+\overline{D} = \overline{B}+C+\overline{D}+A\overline{A} = (A+\overline{B}+C+\overline{D})(\overline{A}+\overline{B}+C+\overline{D})$$

El tercer término, $A+\overline{B}+\overline{C}+D$, ya está en formato estándar. El producto de sumas estándar de la expresión original es:

$$(A+\overline{B}+C)(\overline{B}+C+\overline{D})(A+\overline{B}+\overline{C}+D) =$$

$$(A+\overline{B}+C+D)(A+\overline{B}+C+\overline{D})(A+\overline{B}+C+\overline{D})(\overline{A}+\overline{B}+C+\overline{D})(A+\overline{B}+\overline{C}+D)$$

Expresiones booleanas y sus tablas de verdad

Todas las expresiones booleanas pueden convertirse fácilmente en tablas de verdad utilizando los valores binarios de cada término de la expresión. La tabla de verdad es una forma muy común, en un formato muy conciso, de expresar el funcionamiento lógico de un circuito. Además, las expresiones sumas de productos y producto de sumas pueden determinarse mediante las tablas de verdad. Las tablas de verdad pueden encontrarse en las hojas de especificaciones y en otros textos relativos al funcionamiento de los circuitos y sistemas digitales.

Conversión de una suma de productos a tabla de verdad

Para una expresión cuyo dominio es de dos variables, existen cuatro combinaciones distintas de estas variables ($2^2 = 4$). Para una expresión cuyo dominio tiene tres variables, existen ocho ($2^3 = 8$) combinaciones posibles de dichas variables. Para una expresión con un dominio de cuatro variables, existen dieciséis combinaciones diferentes de dichas variables ($2^4 = 16$), etc.

El primer paso para construir una tabla de verdad consiste en enumerar todas las posibles combinaciones de los valores de las variables de la expresión. A continuación, hay que pasar la suma de productos a su formato estándar, si no lo está ya. Para completar la tabla debemos tener en cuenta que cuando la variable no está complementada, el valor será 1, mientras que, si se encuentra complementada, es decir negada, entonces el valor que adopta es 0.

Por último, se escribe un 1 en la columna de salida (X) para cada valor binario que hace que la suma de productos estándar sea 1, y se escribe un 0 para los restantes valores.

Ejemplo:

Desarrollar una tabla de verdad para la expresión suma de productos estándar $\overline{A}\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C} + ABC$.

Solución Existen tres variables en el dominio, por lo que hay ocho posibles combinaciones de valores binarios de las variables, como se muestra en las tres columnas

Entradas			Salida	
A	***B***	***C***	***X***	**Término producto**
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\overline{A}\overline{B}C$
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	1	$A\overline{B}\overline{C}$
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	1	ABC

Conversión de un producto de sumas a tabla de verdad

Para construir la tabla de verdad de un producto de sumas, basta con enumerar todas las posibles combinaciones de valores binarios de las variables del mismo modo que se hace para una suma de productos. A continuación, hay que pasar el producto de sumas a su formato estándar, si no lo está ya. Para completar la tabla debemos tener en cuenta que cuando la variable no está complementada, el valor será 0, mientras que, si se encuentra complementada, es decir negada, entonces el valor que adopta es 1.

Por último, se escribe un 0 en la columna de salida (X) para cada valor binario que hace que la suma de productos estándar sea 0, y se escribe un 1 para los restantes valores binarios.

Ejemplo:

Desarrollar una tabla de verdad para la expresión producto de sumas estándar siguiente:

$$(A+B+C)(A+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)$$

Solución Existen tres variables en el dominio, por lo que hay ocho posibles combinaciones de valores binarios de las variables, como se muestra en las tres columnas de la izquierda de la Tabla 4.7. Los valores binarios que hacen que los términos suma de la expresión sean igual a 0 son $A + B + C$: 000; $A+\overline{B}+C : 010$; $A+\overline{B}+\overline{C} : 011$; $\overline{A}+B+\overline{C} : 101$ y $\overline{A}+\overline{B}+C : 110$. .Para cada uno de estos valores binarios, se escribe un 0 en la columna de salida, como se indica en la tabla. Para cada una de las restantes combinaciones, se escribe un 1 en la columna de salida.

Entradas			Salida	
A	***B***	***C***	***X***	**Término suma**
0	0	0	0	$(A+B+C)$
0	0	1	1	
0	1	0	0	$(A+\overline{B}+C)$
0	1	1	0	$(A+\overline{B}+\overline{C})$
1	0	0	1	
1	0	1	0	$(\overline{A}+B+\overline{C})$
1	1	0	0	$(\overline{A}+\overline{B}+C)$
1	1	1	1	

Mapas de Karnaugh

Un mapa de Karnaugh proporciona un método sistemático de simplificación de expresiones booleanas y, si se aplica adecuadamente, genera las expresiones sumas de productos y producto de sumas más simples posibles, conocidas como expresiones mínimas. Como hemos visto, la efectividad de la simplificación algebraica depende de nuestra familiaridad con las leyes, reglas y teoremas del álgebra de Boole y de nuestra habilidad para aplicarlas. Por otro lado, el mapa de Karnaugh es básicamente una “receta” para la simplificación.

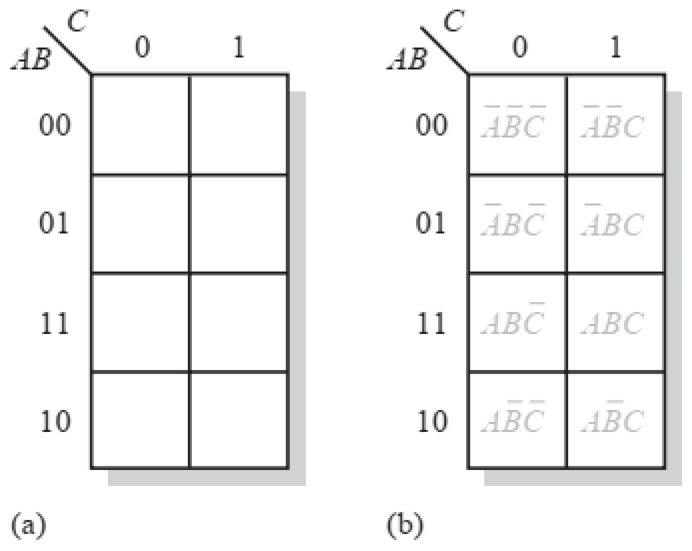
Un mapa de Karnaugh es similar a una tabla de verdad, ya que muestra todos los valores posibles de las variables de entrada y la salida resultante para cada valor. En lugar de organizar en filas y columnas como una tabla de verdad, el mapa de Karnaugh es una matriz de celdas en la que cada celda representa un valor binario de las variables de entrada. Las celdas se organizan de manera que la simplificación de una determinada expresión consiste en agrupar adecuadamente las celdas. Los mapas de Karnaugh se pueden utilizar para expresiones de dos, tres, cuatro y cinco variables.

El número de celdas de un mapa de Karnaugh es igual al número total de posibles combinaciones de las variables de entrada, al igual que el número de filas de una tabla de verdad. Para tres variables, el número de celdas necesarias es de $2^3 = 8$. Para cuatro variables, el número de celdas es de $2^4 = 16$.

Mapas de Karnaugh de tres variables

El mapa de Karnaugh de tres variables es una matriz de ocho celdas.

En este caso, A, B y C se emplean para denominar a las variables, aunque podían haberse usado cualesquiera otras letras. Los valores binarios de A y B se encuentran en el lado izquierdo (observe la secuencia) y los valores de C se colocan en la parte superior. El valor de una determinada celda es el valor binario de A y B, en la parte izquierda de la misma fila combinado con el valor de C en la parte superior de la misma columna. Por ejemplo, la celda de la esquina superior izquierda tiene un valor binario de 000 y la celda inferior derecha tiene un valor binario de 101.
La Figura (b) muestra los términos producto estándar representados por cada celda del mapa de Karnaugh.

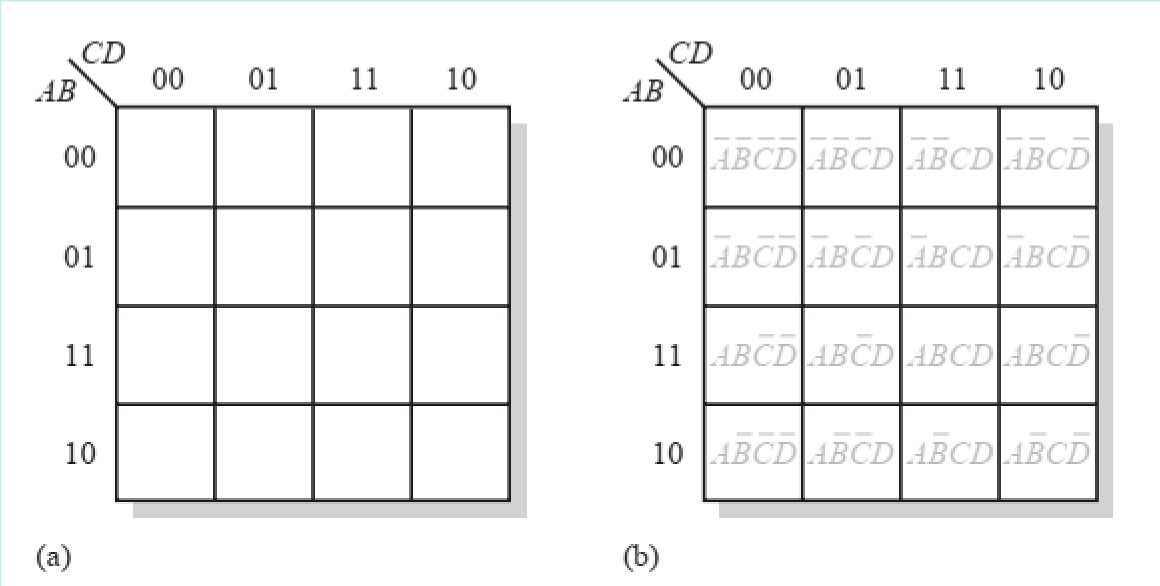


C
AB
0
1
00
01
11
10
(a)
C
AB
0
1
00
01
11
10
(b)

Mapas de Karnaugh de cuatro variables

El mapa de Karnaugh de cuatro variables es una matriz de dieciséis celdas.

Los valores binarios de A y B se encuentran en el lado izquierdo y los valores de C y D se colocan en la parte superior. El valor de una determinada celda es el valor binario de A y B, en la parte izquierda de la misma fila combinado con los valores binarios de C y D en la parte superior de la misma columna. Por ejemplo, la celda de la esquina superior derecha tiene un valor binario de 0010 y la celda inferior derecha tiene un valor binario de 1010. En la Figura (b) se indican los términos producto estándar representados por cada celda del mapa de Karnaugh de cuatro variables.

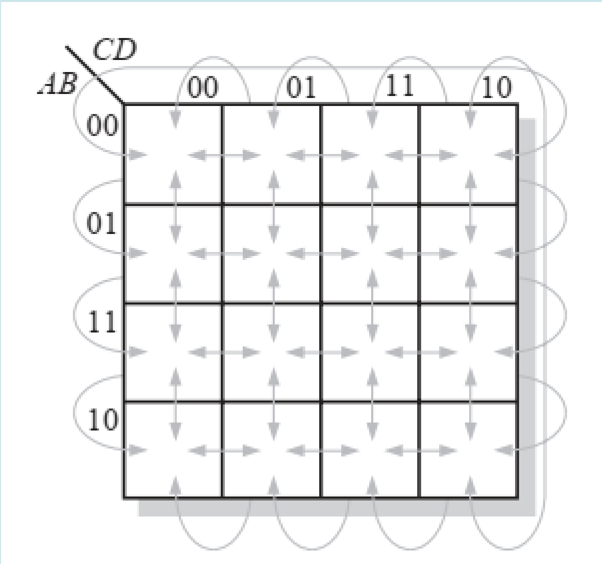


Adyacencia de celdas

Las celdas de un mapa de Karnaugh se disponen de manera que sólo cambia una única variable entre celdas adyacentes. La adyacencia se define por un cambio de una única variable. Las celdas que difieren en una única variable son adyacentes. Por ejemplo, en el mapa de tres variables, la celda 010 es adyacente a las celdas 000, 011 y 110. La celda 010 no es adyacente a la celda 001, ni a la celda 111, ni a la celda 100 ni a la celda 101.

Físicamente, cada celda es adyacente a las celdas que están situadas inmediatas a ella por cualquiera de sus cuatro lados. Un celda no es adyacente a aquellas celdas que tocan diagonalmente alguna de sus esquinas. Además, las celdas de la fila superior son adyacentes a las de la fila inferior y las celdas de la columna izquierda son adyacentes a las situadas en la columna de la derecha. Esto se denomina adyacencia cíclica, ya que podemos pensar que el mapa de Karnaugh se dobla de forma que se toquen los extremos superior e inferior como si fuera un cilindro o los extremos de la derecha e izquierda para formar la misma figura.

El siguiente mapa de Karnaugh ilustra la adyacencia de celdas en un mapa de cuatro variables, aunque se aplican las mismas reglas de adyacencia a los mapas de Karnaugh con cualquier número de celdas.



Las celdas que solo difieren en una variable, son adyacentes.

Las celdas con valores que difieren en más de una variable no son adyacentes.

Minimización mediante mapas de Karnaugh

Como se ha establecido en la sección anterior, el mapa de Karnaugh se utiliza para reducir expresiones booleanas a su expresión mínima. Una expresión suma de productos minimizada está formada por el mínimo número de términos producto posibles con el mínimo número de variables por término. Generalmente, una expresión suma de productos minimizada puede implementarse mediante un número de puertas menor que su expresión estándar, lo cual constituye la finalidad del proceso de simplificación.

Mapa de Karnaugh de una suma de productos

Por cada término de la expresión suma de productos, se coloca un 1 en el mapa de Karnaugh en la celda correspondiente al valor del producto. Se coloca un 1 en la celda correspondiente al valor de un término producto. Por ejemplo, para el término , se escribiría un 1 en la celda 101 de un mapa de Karnaugh de tres variables.
Antes de poder utilizar un mapa de Karnaugh, las expresiones booleanas deben estar en su forma estándar. Si una expresión no lo está, se pasará al formato estándar mediante el procedimiento descrito en los capítulos previos o mediante desarrollo numérico. Dado que, en cualquier caso, las expresiones tienen que evaluarse antes de pasarlas al mapa de Karnaugh, el desarrollo numérico es quizá el método más eficaz.

Cuando una expresión suma de productos se ha reflejado por completo en el mapa de Karnaugh, en dicho mapa habrá tantos 1s como términos producto tenga la suma de productos estándar. Las celdas que no contienen un 1 son aquellas para las que la expresión es igual a 0. Normalmente, cuando se trabaja con una expresión suma de productos, los 0s no se incluyen en el mapa.

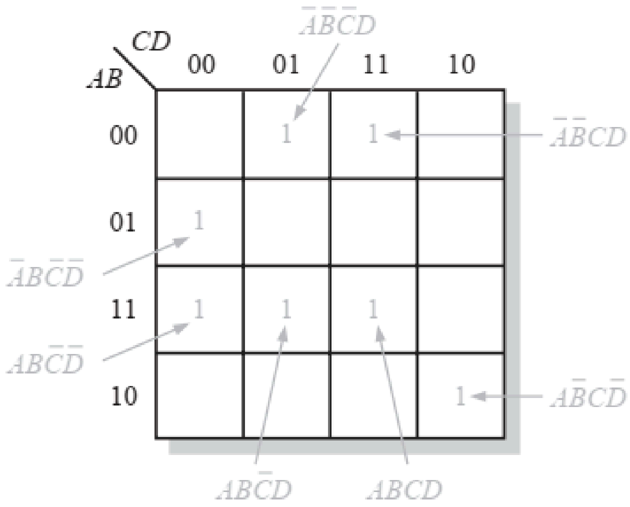
Ejemplo:

Transformar la siguiente suma de productos estándar en un mapa de Karnaugh:

$$\overline{A}\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + AB\overline{C}D + ABCD + AB\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + A\overline{B}C\overline{D}$$

$$\bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}D + ABCD + AB\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}C\bar{D}$$

0011 0100 1101 1111 1100 0001 1010



Simplificación de una suma de productos mediante el mapa de Karnaugh

El proceso que genera una expresión que contiene el menor número posible de términos con el mínimo número de variables posibles se denomina minimización. Después de haber obtenido el mapa de Karnaugh de una suma de productos, la expresión suma de productos mínima se obtiene agrupando los 1s y determinando la expresión suma de productos mínima a partir del mapa.

Agrupación de unos.

Podemos agrupar los unos del mapa de Karnaugh de acuerdo con las reglas siguientes, rodeando las celdas adyacentes que contengan unos. La finalidad es maximizar el tamaño de los grupos y minimizar el número de estos grupos.

1. Un grupo tiene que contener 1, 2, 4, 8 ó 16 celdas, valores que se corresponden con las potencias de 2. En el caso de un mapa de Karnaugh de 3 variables, el grupo máximo puede contener 2^3 = 8 celdas.

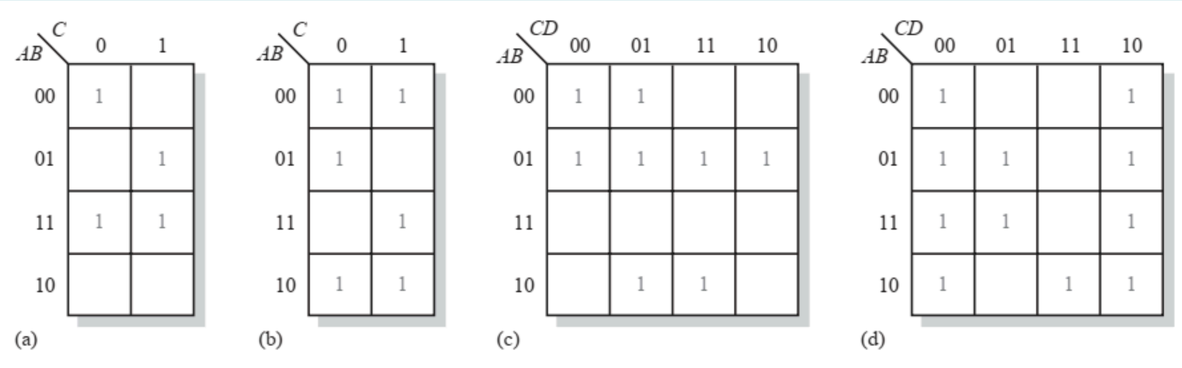
2. Cada celda de un grupo tiene que ser adyacente a una o más celdas del mismo grupo, pero no todas las celdas del grupo tienen que ser adyacentes entre sí.

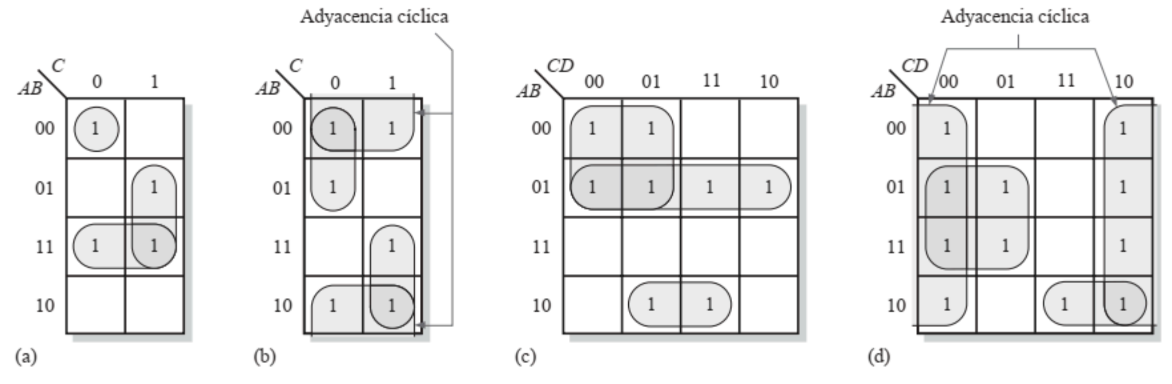
3. Incluir siempre en cada grupo el mayor número posible de 1s de acuerdo a la regla número 1.

4. Cada 1 del mapa tiene que estar incluido en al menos un grupo. Los 1s que ya pertenezcan a un grupo pueden estar incluidos en otro, siempre que los grupos que se solapen contengan 1s no comunes.

Ejemplo:

Agrupar los 1s de los siguientes mapas de Karnaugh





Cuando todos los 1s que representan los términos productos estándar de una expresión se han trasladado al mapa y se han agrupado adecuadamente, comienza el proceso de obtención de la suma de productos mínima. Para encontrar los términos mínimos y la expresión suma de productos mínima se aplican las siguientes reglas:

1. Agrupar las celdas que contienen 1s. Cada grupo de celdas que contiene 1s da lugar a un término producto compuesto por todas las variables que aparecen en el grupo en sólo una forma (no complementada o complementada). Las variables que aparecen complementadas y sin complementar dentro del mismo grupo se eliminan. A éstas se les denomina variables contradictorias.

2. Determinar la operación producto mínima para cada grupo.

Para un mapa de 3 variables:

1- Un grupo formado por 1 celda da lugar a un término producto de 3 variables.
2- Un grupo formado por 2 celdas da lugar a un término producto de 2 variables.
3- Un grupo formado por 4 celdas da lugar a un término de 1 variable.
4- Un grupo formado por 8 celdas indica que la expresión vale 1.

Para un mapa de 4 variables:

1- Un grupo formado por 1 celda da lugar a un término producto de 4 variables.

2- Un grupo formado por 2 celdas da lugar a un término producto de 3 variables.

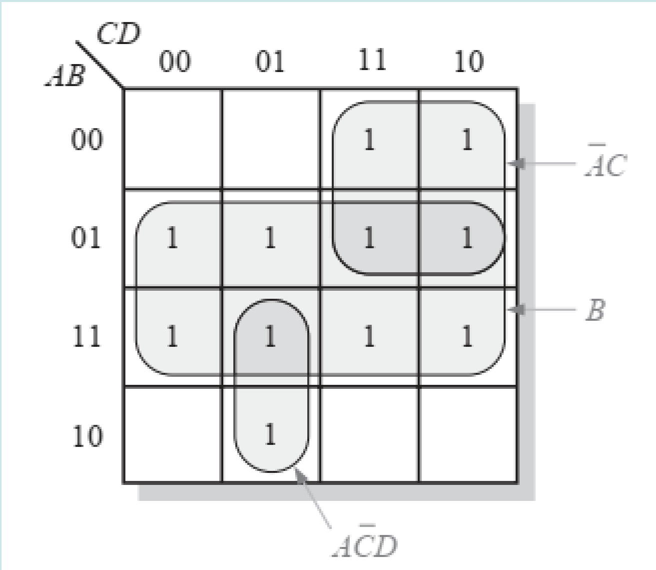
3- Un grupo formado por 4 celdas da lugar a un término producto de 2 variables.

4- Un grupo formado por 8 celdas da lugar a un término de 1 variable.

5- Un grupo formado por 16 celdas indica que la expresión vale 1.

3. Cuando se han obtenido todos los términos producto mínimos a partir del mapa de Karnaugh, se suman para obtener la expresión suma de productos mínima.

Ejemplo:



La expresión simplificada de este circuito es:

$$B+\overline{A}C+A\overline{C}D$$

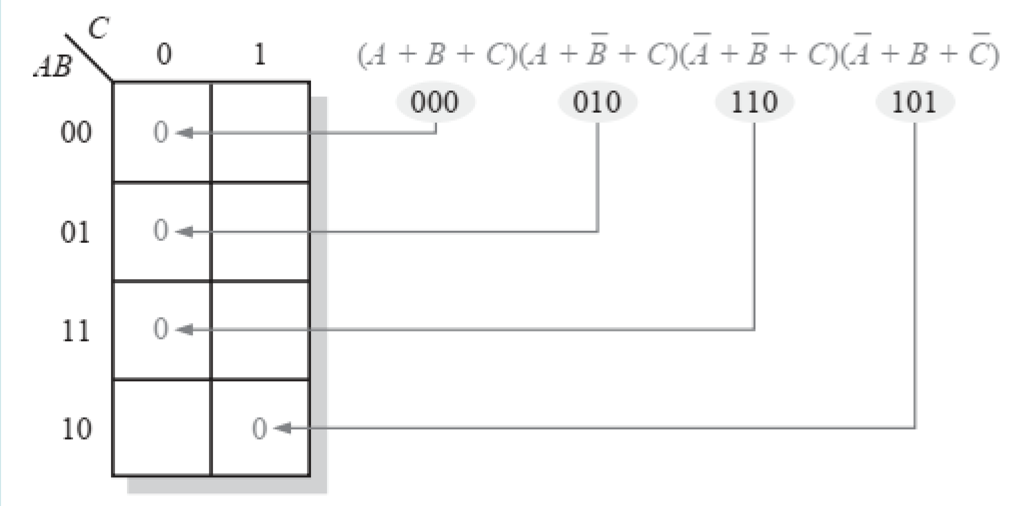
Mapas de Karnaugh de un producto de sumas

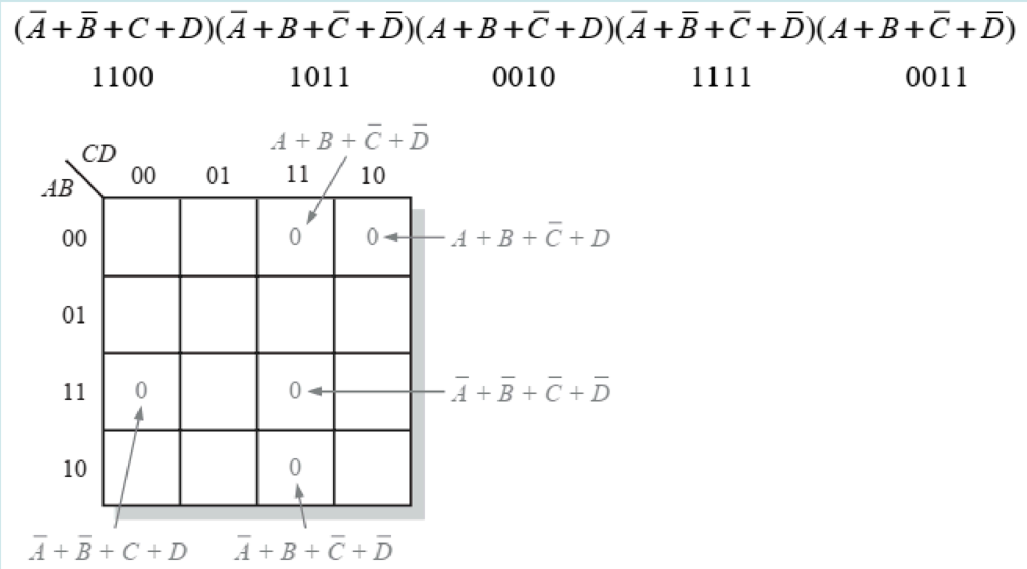
En la sección anterior estudiamos la minimización de una expresión suma de productos mediante los mapas de Karnaugh. En esta sección, nos vamos a centrar en las expresiones producto de sumas. Los métodos son muy similares, excepto que ahora se trata de productos de sumas, en los que los 0s representan los términos suma estándar y se colocan en el mapa de Karnaugh en lugar de los 1s.

Para un producto de sumas en forma estándar, se introduce un 0 en el mapa de Karnaugh por cada término suma de la expresión. Cada 0 se sitúa en la celda correspondiente al valor de un término suma. Por ejemplo, para la suma se escribe un 0 en la celda 010 del mapa de Karnaugh de 3 variables.

Cuando un producto de sumas se ha trasladado por completo al mapa, habrá tantos 0s en el mapa de Karnaugh, como términos suma en la expresión del producto de sumas estándar. Las celdas que no contienen un 0 son aquellas para las que la expresión vale 1. Generalmente, cuando se trabaja con productos de sumas, los 1s no se escriben.

Ejemplos:



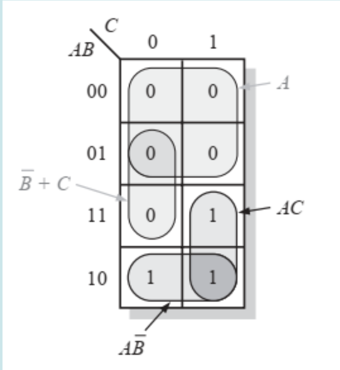


Simplificación mediante el mapa de Karnaugh de expresiones producto de sumas

El proceso de minimización de un producto de sumas es básicamente el mismo que para una expresión suma de productos, excepto que ahora hay que agrupar los ceros para generar el mínimo número de términos suma, en lugar de los 1s para obtener el número mínimo de términos producto. Las reglas para agrupar los 0s son las mismas que para agrupar los 1s.

Utilizar un mapa de Karnaugh para minimizar la siguiente expresión producto de sumas estándar:

$$(A+B+C)(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)$$



Observe que el 0 de la celda 110 se incluye en un grupo de dos celdas, utilizando el 0 del grupo de cuatro celdas. El término suma para cada grupo se muestra en la figura y la expresión suma de productos mínima resultante es:

$$A(\overline{B}+C)$$