Funciones exponenciales y logarítmicas

Sitio: Agencia de Habilidades para el Futuro
Curso: Elementos de Analisis Matematico 1° D
Libro: Funciones exponenciales y logarítmicas
Imprimido por: RODRIGO PINTO
Día: martes, 26 de noviembre de 2024, 06:44

Tabla de contenidos

1. Introducción

2. Relación con el problema 2

3. Función exponencial
3.1. Tablas y gráficos
3.2. Transformaciones de una función exponencial
3.3. Asíntota horizontal

4. Función logarítmica
4.1. Tablas y gráficos
4.2. Transformaciones de funciones logarítmicas
4.3. Asíntota vertical

1. Introducción

En esta sección estudiaremos los siguientes contenidos:

- Relación con el problema 2: Deuda con interéses
- Función exponencial
- Función logarítmica

Te invitamos a navegar por la tabla de contenidos a la derecha para profundizar en estas temáticas.

2. Relación con el problema 2

Relación con el problema 2: Deuda con intereses

En el problema 2 se pide calcular la deuda de Carlos al finalizar el plazo de cuatro días. La forma de resolución que se optó es ir calculando el monto adeudado día a día, ya que hay que tener en cuenta que los intereses se calculan en base al capital acumulado del período anterior. Sin embargo, existe una fórmula que permite calcular de manera directa la deuda de Carlos, la cual es la siguiente:

$$C(t) = C_0 \cdot (1 + \frac{r}{100})^t$$

donde C_0 es el capital inicial, r es la tasa de interés (que se la divide por 100 para quitar el porcentaje), t es el tiempo y $C(t)$ el capital acumulado luego de ese tiempo. Esta fórmula corresponde al **interés compuesto.**

Para nuestro problema 2, tenemos los siguientes datos:

$$C_0 = 20000, \quad r = 10\%, \quad t = 4 \; días$$

Por lo tanto, reemplazamos en la fórmula del interés compuesto y calculamos $C(4)$, es decir, el capital que se acumuló luego de cuatro días.

$$C(4) = 20000 \cdot (1 + \frac{10}{100})^4$$

$$C(4) = 29282$$

Observá que hemos llegado a la misma respuesta que antes.

¿Te acordás del problema 2? *Hacé clic en el botón para ver la respuesta.*

¿Qué es el interés compuesto?

El interés compuesto representa la acumulación de intereses que se generan en un período determinado de tiempo, por un capital inicial C_0, según la tasa de interés y la cantidad de períodos. A diferencia del interés simple, en el que la ganancia no se acumula hasta terminar el proceso, en el compuesto los intereses que se obtienen al final de cada período de inversión se añaden al capital inicial, es decir, se capitalizan, generando interés en el siguiente período de tiempo.

Si observás con detenimiento la fórmula del interés compuesto, verás que la variable tiempo está en el exponente. Si nosotros hubiéramos querido calcular la deuda a los 3 días, el proceso sería similar pero cambiaríamos t por el valor 3.

$$C(3) = 20000 \cdot (1 + \frac{10}{100})^3$$

$$C(3) = 26620$$

Si generalizamos, podemos escribir:

$$C(t) = 20000 \cdot (1 + \frac{10}{100})^t$$

Como la variable independiente está en el exponente, el interés compuesto es una aplicación de un tipo de función diferente al que venimos trabajando y recibe el nombre de función exponencial.

¿Te diste cuenta por qué?

3. Función exponencial

Las **funciones exponenciales** aparecen modelando numerosas situaciones, desde fenómenos de la naturaleza (como el número de bacterias que se reproducen por fisión binaria, la cantidad de miembros de poblaciones, la desintegración radiactiva, o la concentración de medicamentos en sangre, entre otros), hasta problemas pertenecientes al campo de la ciencias económicas (en las formulas de interés compuesto), como vimos en el problema 2, Deuda con intereses.

¿Te acordás del problema 2? *Hacé clic en el botón para releerlo.*

Definición

Una función exponencial es una de la forma:

$$f(x)=a^x$$

siendo $a>0$ y $a \neq 1$, o una transformación de ella (como veremos más adelante). Es decir, es una función en la que la variable independiente aparece en el exponente, y la base a es positiva y distinta de 1. Por ejemplo, si $a=2$ tenemos:

$$f(x)=2^x$$

Entonces, de la definición de potencia sabemos calcular, por ejemplo:

$$f(3)=2^3=8,~~~~~f(-1)=2^{-1}= \frac{1}{2},~~~~~f(\frac{3}{2})=2^{ \frac{3}{2} } \approx2,83,~~~~~f(\pi)=2^\pi \approx 8,82$$

Se puede ver que no importa el número que le asignemos al exponente, la operación se puede calcular. Por lo tanto, el dominio de las funciones exponenciales es el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

Analicemos las restricciones de la definición:

¿Por qué se pide que la base a no sea cero, uno, ni tampoco negativa?

Veamos lo siguiente:

- Si $a=1$, la función $f(x)=1^x$ resulta ser constante, ya que 1 elevado a cualquier número da como resultado 1.
- Si $a=0$, la función $f(x)=0^x$ no se podría calcular cuando $x=0$. Además, en todos los otros casos el resultado sería cero.
- Si $a<0$, obtendríamos puntos aislados, ya que cuando el exponente sea par, el resultado va a ser positivo, pero cuando sea impar, el resultado va a ser negativo.

De ahí que se pide que la base no tome estos valores.

3.1. Tablas y gráficos

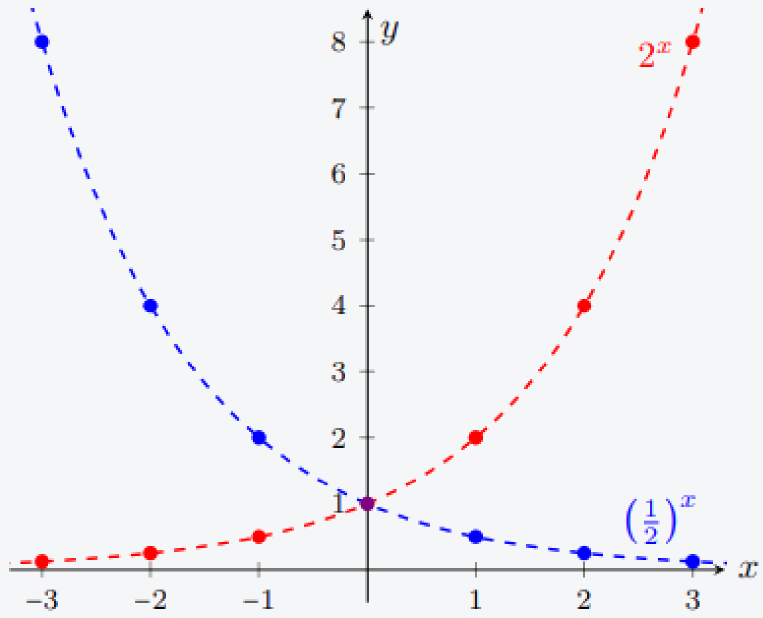
Para esbozar la gráfica de una función exponencial, comenzaremos realizando una tabla de valores. Para ello, tomaremos las siguientes funciones exponenciales:

\(f(x)=2^x,~~~~~g(x)=(\frac{1}{2})^x \)

Las tablas de valores para estas funciones son las siguientes:

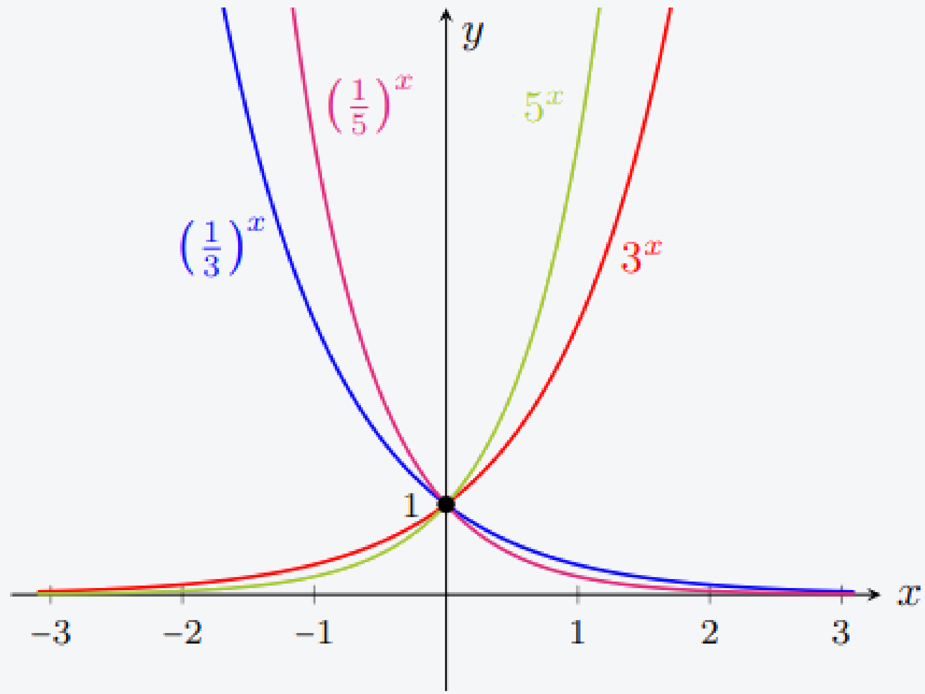
x	$f(x)=2^x$	$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	$2^{-3}=\frac{1}{8}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8$
-2	$2^{-2}=\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$
-1	$2^{-1}=\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$
0	$2^{0}=1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=1$
1	$2^{1}=2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=\frac{1}{2}$
2	$2^{2}=4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{1}{4}$
3	$2^{3}=8$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{1}{8}$

En la figura siguiente representamos los puntos (con el color indicado en cada tabla) y los unimos para observar el aspecto de la gráfica de cada función:



Como puede verse, se produce una reflexión respecto del eje y, esto se debe a que las bases de ambas funciones son recíprocas $(a~y~ \frac{1}{a})$.

A continuación, se incluye la gráfica de a^x para $a=3,~~a= \frac{1}{3},~~a=5,~~\frac{1}{5}.$



Algunas observaciones sobre la función $f(x)=a^x~~(a>0,~a \neq1)$ son las siguientes:

- $Dom~f= \mathbb{R}$
- $Im~f=(0; + \infty)$
- $f(0)=1$, es decir, aquí vemos la ordenada al origen.
- Si $a>1$ la función es creciente y si $0<a<1$ es decreciente.
- La gráfica de f nunca interseca al eje x, aunque se acerca a él tanto como se quiera (hacia la derecha cuando $0<a<1$ y hacia la izquierda cuando $a>1$). Formalmente, esto último se expresa diciendo que el eje x es un asíntota horizontal para f, como ya vimos antes.

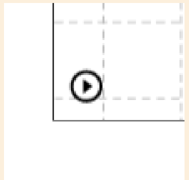
Recordá que podés ayudarte con el software (hacé clic aquí para acceder) para realizar las gráficas de las funciones.

3.2. Transformaciones de una función exponencial

Analizaremos a continuación cómo ciertas transformaciones de una función modifican su gráfica. En forma general, suponiendo que conocemos la gráfica de una función cualquiera f, veremos cómo obtener la gráfica de las siguientes transformaciones: desplazamiento vertical y horizontal, reflexión con respecto al eje x, y expansiones o contracciones verticales. Usaremos la función exponencial, pero vale para la gráfica de cualquier función.

1. Desplazamiento vertical:

Te pedimos que visualices la siguiente animación y concluyas sobre qué sucede si a la función exponencial básica $f(x)=a^x$ le sumamos o le restamos una cierta cantidad. Para explicar todas las transformaciones, se toma como ejemplo la función $f(x)=2^x$, pero podría ser cualquier otra.

Para ver la animación deberás hacer clic en el botón  disponible en el siguiente recurso.

En el caso de no poder visualizar la animación podés hacer clic [aquí].

En forma general, decimos que la gráfica de $g(x)=a^x+k$ está desplazada verticalmente k unidades hacia arriba si $k>0$, o hacia abajo si $k<0$, siempre tomando de referencia la gráfica de la función $f(x)=a^x$.

Por ejemplo, la gráfica de la función $g(x)=2^x+3$ está desplazada 3 unidades hacia arriba con respecto a la gráfica de la función $f(x)=2^x$.

2. Desplazamiento horizontal

Te pedimos que visualices la siguiente animación y concluyas sobre qué sucede si a la variable independiente x en la función exponencial básica $f(x)=a^x$, le sumamos o le restamos una cierta cantidad h.

GeoGebra

En el caso de no poder visualizar la animación podés hacer clic aquí.

Es posible ver que si a la variable x le restamos h, la gráfica se desplaza de forma horizontal hacia la derecha h unidades. Mientras que si le sumamos, se desplaza esa cantidad pero hacia la izquierda.

Por ejemplo, la gráfica de la función $g(x)=2^{x-4}$ está desplazada 4 unidades hacia la derecha con respecto a la gráfica de la función $f(x)=2^x$.

3. Reflexión respecto del eje x

Te pedimos que visualices la siguiente animación y concluyas sobre qué sucede si colocamos un signo negativo delante de la base en la función básica $f(x)=a^x$.

En el caso de no poder visualizar la animación podés hacer clic [aquí](#) .

Como se puede observar, el signo negativo lo que hace es reflejar la gráfica de \(f \) respecto del eje \(x \). Funciona como una especie de espejo.

4. Expansión y contracción vertical

Te pedimos que visualices la siguiente animación y concluyas sobre qué sucede si a la función exponencial básica la multiplicamos por un número real distinto de cero.

En el caso de no poder visualizar la animación podés hacer clic **aquí** .

En forma general, decimos que la gráfica de $g(x)=c\cdot a^x$ se expande verticalmente con factor c si $c>1$, o se contrae si $0<c<1$, siempre tomando de referencia la gráfica de la función $f(x)=a^x$.

3.3. Asíntota horizontal

Todas las funciones exponenciales tienen una asíntota horizontal.

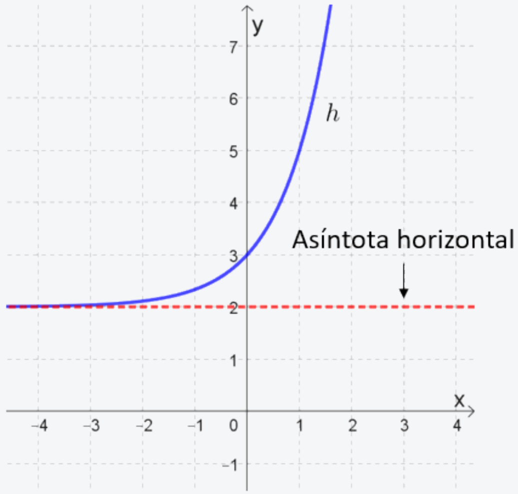
Como dijimos anteriormente, en la función exponencial básica $f(x)=a^x$ con $a>0$ y $a \neq 1$, la asíntota horizontal es el eje x, es decir, la recta $y=0$. Ahora bien, como vimos la gráfica de la función exponencial puede desplazarse hacia arriba o hacia abajo. Por lo tanto, la asíntota horizontal se va a desplazar de igual manera.
Si planteamos de forma general la siguiente función:

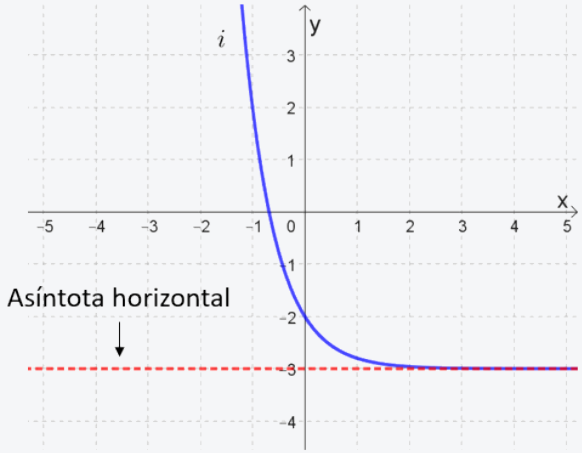
$g(x)=a^x+k$ (con $a>0$ y $a \neq 1$)

La asíntota horizontal es: $y=k$.

Ejemplo

La asíntota horizontal de la función $h(x)=3^x+2$ es $y=2$. Mientras que la de $i(x)=(\frac{1}{5})^x -3$ es $y=-3$. Esto se puede apreciar en las siguientes gráficas:


y
h
Asíntota horizontal
x


y
i
x
Asíntota horizontal

4. Función logarítmica

Logaritmación

Recordemos primero qué es la logaritmación.
El logaritmo de un número en cierta base, es el exponente al que hay que elevar la base para obtener dicho número. En símbolos:

$$log_a(b)=c \leftrightarrow a^c=b$$

siendo a la base del logaritmo que debe ser un número real positivo y distinto de uno, y b es el argumento del logaritmo el cual tiene que ser un número real positivo.

Por ejemplo:

- $log_2(8)=3$ porque $2^3=8$
- $log_3(81)=4$ porque $3^4=81$
- $log_2(-25)$ no tiene solución, porque el argumento tiene que ser un número positivo.

Ahora sí, vamos a definir la función logarítmica.

Definición

La función logarítmica básica está dada por:

$$f(x)=log_a(x),$$

siendo la base a positiva y distinta de 1. Como recordamos anteriormente, solamente podemos calcular el logaritmo de cantidades positivas, por lo cual el dominio de f es el intervalo $(0;+ \infty)$. Al igual que las funciones exponenciales, esta es la función de base y trabajaremos con transformaciones de ella, lo que puede afectar también al dominio. Vamos a detenernos en qué significa esto antes de analizar la gráfica de estas funciones. Determinaremos el dominio de algunas funciones logarítmicas, de manera similar (aunque no igual) a cómo lo hicimos con las irracionales.

Dominio de funciones logarítmicas

Supónganse que queremos determinar el dominio de las funciones:

$$f(x)=log_2(x-5),~~~~~g(x)=log_3(\frac{1}{2}x+1)$$

Teniendo en cuenta que el logaritmo está definido solo para cantidades positivas, para determinar el dominio de f planteamos $x-5>0$, lo que implica que $x>5$. Luego, $Dom~f= \{x \in\mathbb{R}:x>5 \}$ o bien, $Dom~f=(5;+ \infty)$. Nosotros emplearemos más esta última opción.
Para el caso g, el requisito es $\frac{1}{2}x+1>0$, de lo que se deduce que $x>-2$.
$Dom~g=(-2;+ \infty)$

Notar que la base no afecta al momento de determinar el dominio de una función logarítmica.

¿Te diste cuenta cuál es la diferencia entre el procedimiento para buscar el dominio de las funciones irracionales (de índice par) con el de las logarítmicas?

4.1. Tablas y gráficos

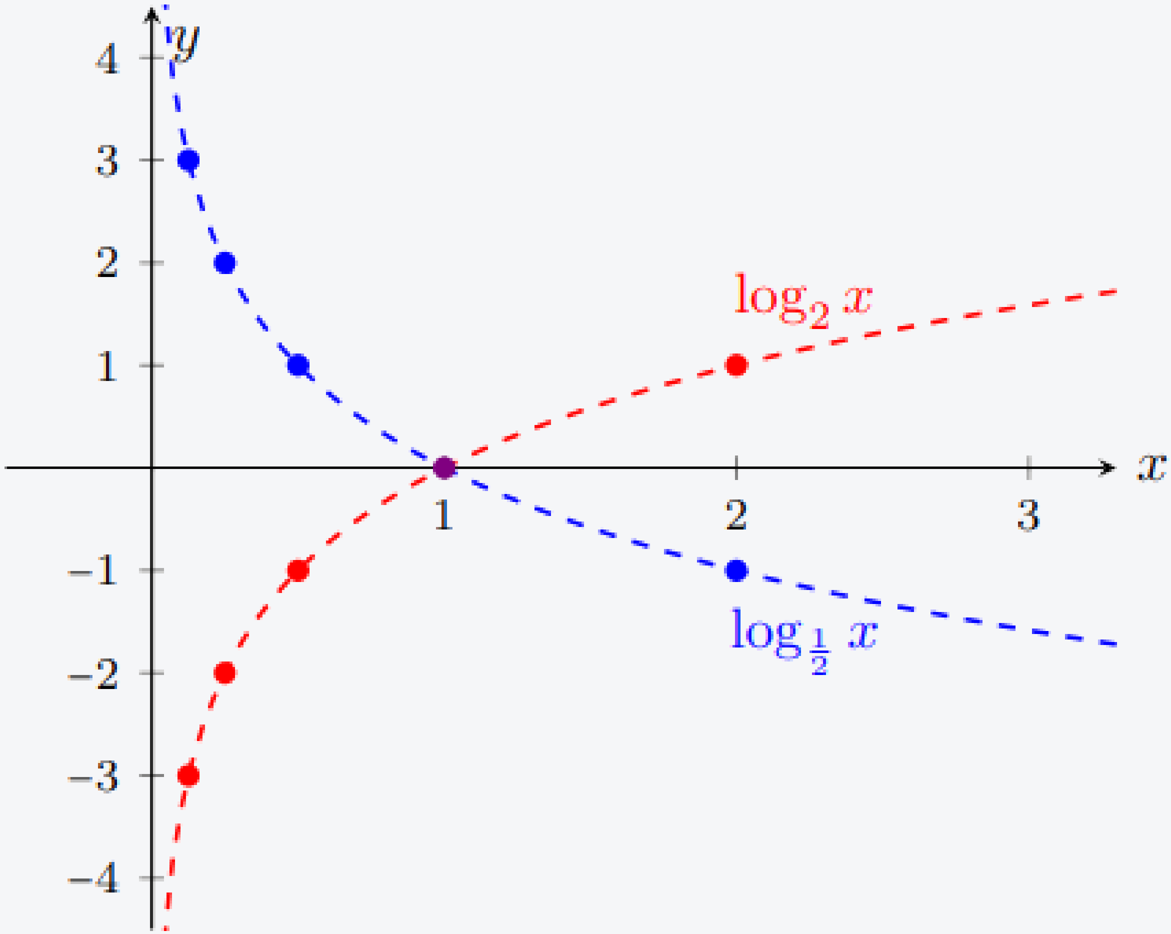
Al igual que hicimos antes para las funciones exponenciales, vamos a esbozar las gráficas de dos funciones logarítmicas mediante la construcción de tablas de valores. Estas son:

\(f(x)=log_2(x),~~~~~g(x)=log_{ \frac{1}{2} }(x) \)

Las tablas de valores para estas funciones son las siguientes:

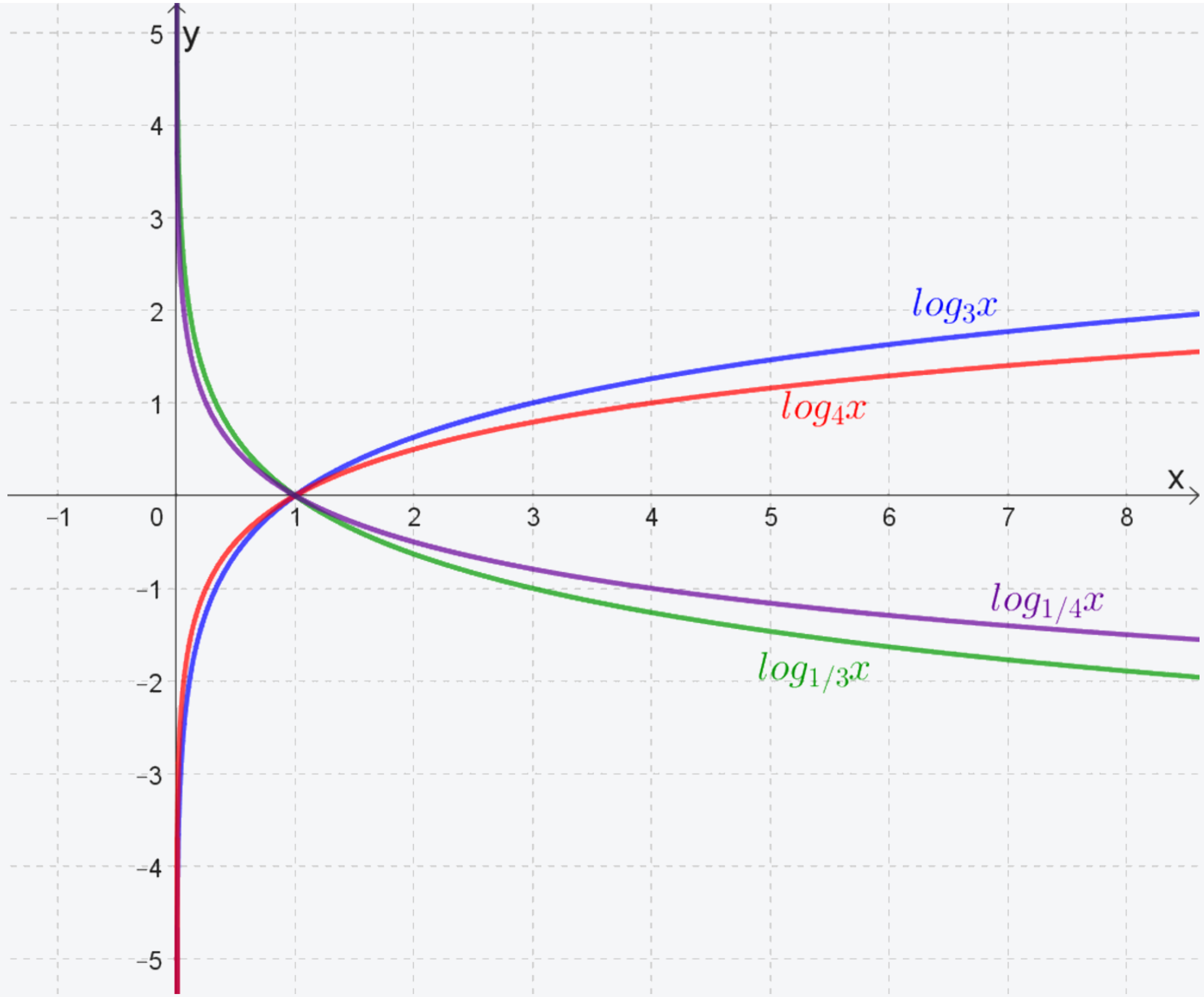
x	$f(x) = \log_2 x$	$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$
8	3	-3
4	2	-2
2	1	-1
1	0	0
$\frac{1}{2}$	-1	1
$\frac{1}{4}$	-2	2
$\frac{1}{8}$	-3	3

A continuación, representamos los puntos (con el color indicado en cada tabla) y los unimos con línea punteada para ver el aspecto de la gráfica de cada función.



Como puede verse, se produce una reflexión respecto del eje \(x \), esto se debe a que las bases de ambas funciones son recíprocas \((a~y~ \frac{1}{a}) \).

Seguidamente, incluimos otras gráficas más de funciones logarítmicas:



A partir de lo anterior, podemos obtener las siguientes conclusiones sobre la función logarítmica $f(x)=log_a(x)$ con $a>0$ y $a \neq 1$:

- $Dom~f=(0;+ \infty)$.
- $Im~f=\mathbb{R}$.
- $f(1)=0$, es decir, aquí estará su raíz.

- Si $a>1$ la función crece, y si $0<a<1$, la función decrece.
- La gráfica de f nunca interseca al eje y, aunque se acerce a él tanto como uno quiera (hacia arriba cuando $0<a<1$ y hacia abajo cuando $a>1$). Esto significa que el eje y es una asíntota vertical para f.

Recordá que podés ayudarte con el software para realizar las gráficas de las funciones. Para acceder podés hacer **clic** aquí.

4.2. Transformaciones de funciones logarítmicas

Las transformaciones explicadas para las funciones exponenciales, se siguen cumpliendo para las logarítmicas y en realidad para cualquier función que se considere.

Ejemplo 1. La gráfica de la función $g(x)=log_2(x)+1$ va a estar desplazada un lugar hacia arriba con respecto a la de la función $f(x)=log_2(x)$.

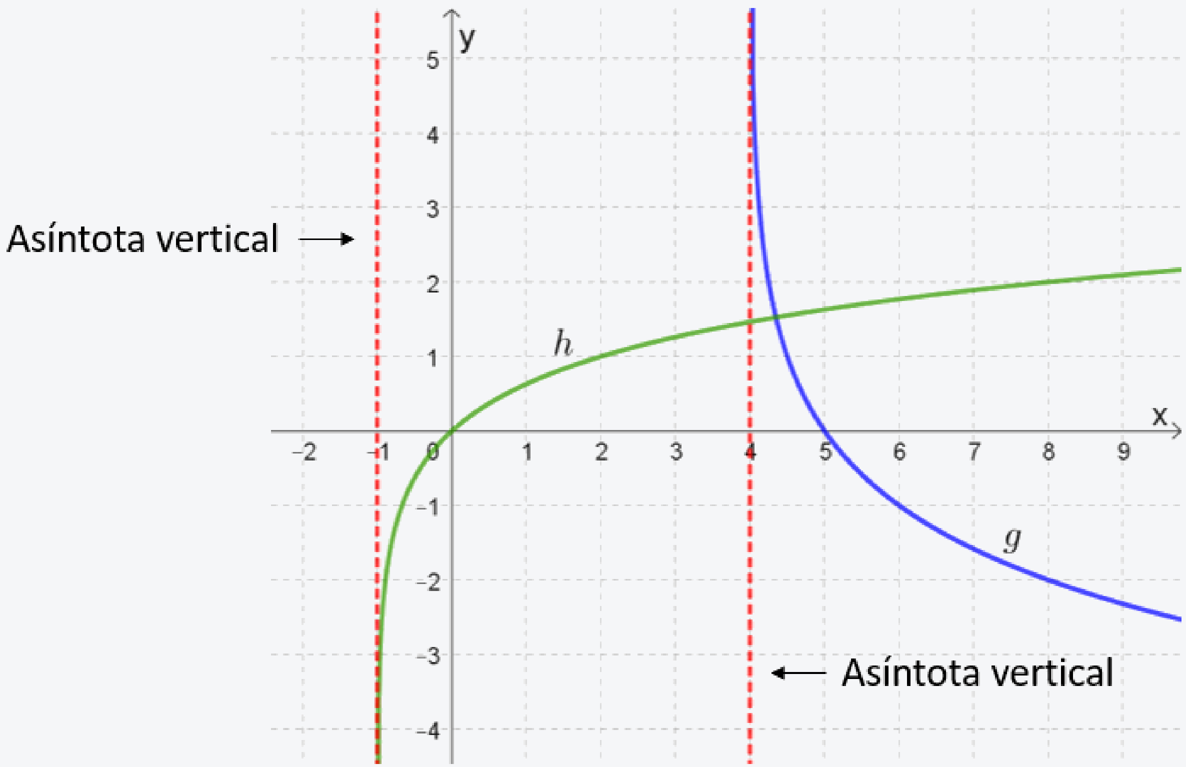
Ejemplo 2. La gráfica de la función $h(x)=log_2(x-1)$ va a estar desplazada un lugar hacia la derecha con respecto a la de la función $f(x)=log_2(x)$.

4.3. Asíntota vertical

Todas las funciones logarítmicas tienen una asíntota vertical. Como dijimos anteriormente, si partimos de la función de base $f(x)=log_a(x)$ con $a>0$ y $a \neq 1$, la asíntota vertical es el eje y, es decir, la recta $x=0$. Ahora bien, si la gráfica se desplaza horizontalmente, también lo hará la asíntota vertical.

Por ejemplo, la asíntota de la función $g(x)=log_{0,5}(x-4)$ es $x=4$. Mientras que la de la función $h(x)=log_3(x+1)$ es $x=-1$.

Gráficamente, nos queda:


Asíntota vertical
Asíntota vertical
y
x
h
g
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9