Relaciones

Sitio: Agencia de Habilidades para el Futuro
Curso: Elementos de Analisis Matematico 1° D
Libro: Relaciones
Imprimido por: RODRIGO PINTO
Día: martes, 26 de noviembre de 2024, 06:19

Tabla de contenidos

1. Introducción

En esta sección estudiaremos los siguientes contenidos:

- Pares ordenados
- Producto cartesiano y sus diferentes representaciones
- Concepto de relación, dominio, imagen y sus diferentes representaciones

En el índice de la derecha encontrarás las explicaciones con diferentes ejemplos y la vinculación con el problema 1: "Organizando las habitaciones del hotel".

2. Relación con el problema 1

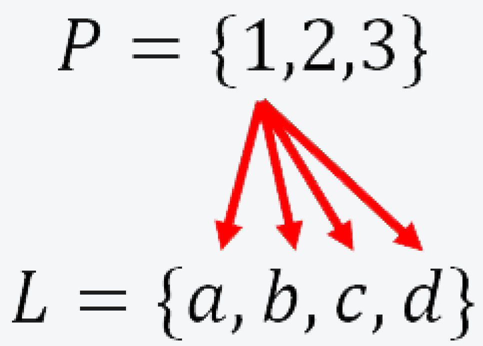
Relación con el problema 1: "Organizando las habitaciones del hotel"

En el problema 1 "Organizando las habitaciones del hotel", aparecieron dos conjuntos de elementos, ¿te diste cuenta cuáles son? ¡Exacto! Un conjunto de elementos está formado por los números de los pisos y el otro, por las letras de las habitaciones. Así, si al primero lo llamamos P y al segundo L, los definimos por extensión de la siguiente manera:

$$P = \{1, 2, 3\}, \qquad L = \{a, b, c, d\}$$

Podemos combinar un elemento del conjunto P con uno del conjunto L, que de hecho es lo que hicieron para ayudar al conserje a organizar las habitaciones.

Por ejemplo, si combinamos el elemento 1 del conjunto P con cada letra del conjunto L, nos quedaría:



Si los anotamos en forma de lista sería: $1a$, $1b$, $1c$ y $1d$.

Como son dos elementos, podemos emplear una mejor forma de escribirlos que es la que vimos en el curso de preingreso, mediante pares ordenados, en los cuales se colocan los dos elementos entre paréntesis y separados por una coma. **El orden en este caso sería primero el número del piso y luego, la letra de la habitación.**

Por lo tanto, si escribimos todas las combinaciones posibles entre los elementos del conjunto P y L nos quedaría:

$$(1,a),(1,b),(1,c),(1,d),(2,a),(2,b),(2,c),(2,d),(3,a),(3,b),(3,c),(3,d)$$

Lo que acabamos de hacer anteriormente es lo que se conoce como **producto cartesiano.**

3. Pares ordenados

Como ya vimos en el recorrido 1 "Los elementos de la teoría de los conjuntos", los conjuntos $\{a, b\}$ y $\{b, a\}$ son iguales, no importa el orden con que aparecen los elementos a y b. En muchas situaciones, es significativo el orden en que aparecen los elementos a y b, y en este caso estamos en presencia de lo que se llama par ordenado , que lo indicaremos por (a, b). Al primer elemento del par ordenado se le llama primera componente o primera coordenada y en forma análoga, se lo llama al segundo elemento. Dos pares ordenados son iguales si son iguales componente a componente. Por lo tanto, si $a \neq b$ tenemos que $\{a, b\} = \{b, a\}$, pero $(a, b) \neq (b, a)$.

Ejemplo

Con la edad y la altura (en centímetros) de cada estudiante de una clase podemos formar pares ordenados (e, a), en los que el primer elemento indica la edad de un alumno y la segunda coordenada indica su altura. El par ordenado $(16, 150)$ indica que hay un estudiante de 16 años que mide 150 cm. En cambio, el par $(150, 16)$ es obviamente distinto al primero. Además, es prácticamente imposible que haya algún estudiante que se ajuste a esas características.

¿Te acordás del problema 1 en el Recorrido 1? *Hacé clic en el botón para releerlo.*

4. Producto cartesiano

El **producto cartesiano** de dos conjuntos A y B (se simboliza $A \times B$) es el conjunto de todos los pares ordenados (x,y), tales que "x" pertenece al primer conjunto A e "y" pertenece al segundo conjunto B, es decir:

$$A \times B = \lbrace{(x,y):x \in A,~y \in B}\rbrace$$

Por lo tanto, tomando el ejemplo de nuestro problema 1 "Organizando las habitaciones del hotel", el producto cartesiano se expresa de la siguiente manera:

$$P \times L = \lbrace{(1,a), (1,b), (1,c), (1,d), (2,a), (2,b), (2,c), (2,d), (3,a), (3,b), (3,c), (3,d)}\rbrace$$

Notar la importancia del orden, dado que los elementos de $L \times P$ son:

$$L \times P= \lbrace{(a,1), (b,1), (c,1), (d,1), (a,2), (b,2), (c,2), (d,2), (a,3), (b,3), (c,3), (d,3)}\rbrace$$

La interpretación de lo anterior sería que el conserje del hotel haya decidido primero escribir la letra de la habitación y luego el número del piso.

¿Te acordás del problema 1? ***Hacé clic en el botón para releerlo.***

Por lo tanto, $P \times L \neq L \times P$, esto es, el producto cartesiano no es conmutativo. Solo sería conmutativo si ambos conjuntos fueran iguales.

¿Cuántos elementos tiene un producto cartesiano?

La cantidad de elementos de $A \times B$ se puede calcular multiplicando la cantidad de elementos del conjunto A por la cantidad de elementos del conjunto B.

Para nuestro problema 1, como $\#P=3$ y $\#L=4$, entonces $\#(P \times L)=3 \cdot 4=12$.

Veamos ahora otro **ejemplo**:

Supongamos que ahora el conserje quiere cambiar el estilo del hotel y colorear la puerta de cada habitación. Para ello, tiene a disposición dos colores de pinturas: rojo y azul. Si llamamos C al conjunto formado por los colores, nos queda por extensión:

$$\mathbf{C= \lbrace rojo, azul\rbrace}.$$

Entonces, si quiere pintar todas las puertas de cada piso del mismo color, **¿cuáles son las posibles combinaciones?**

Para responder a esta pregunta, podemos hacer el producto cartesiano $P \times C$, el cual nos queda:

$$P \times C= \lbrace(1,rojo), (1,azul), (2,rojo), (2,azul), (3,rojo), (3,azul)\rbrace$$

Hemos generado entonces 6 posibles combinaciones, ya que como $\#P=3$ y $\#C=2$, entonces $\#(P \times C)=3 \cdot 2=6$.

4.1. Diferentes representaciones

Como vimos anteriormente, los productos cartesianos son conjuntos, por lo que pueden representarse tanto por extensión como por comprensión. Sin embargo, tenemos también dos representaciones que ayudan a ver con más facilidad este concepto, las cuales son:

- Diagramas sagitales
- Diagramas cartesianos

Explicaremos a continuación cada una de ellas, tomando como ejemplo el producto cartesiano $P \times L$ de nuestro problema 1 "Organizando las habitaciones del hotel":

$$P \times L = \lbrace(1,a), (1,b), (1,c), (1,d), (2,a), (2,b), (2,c), (2,d), (3,a), (3,b), (3,c), (3,d)\rbrace$$

¿Te acordás del problema 1? *Hacé clic en el botón para releerlo.*

4.2. Diagrama sagital

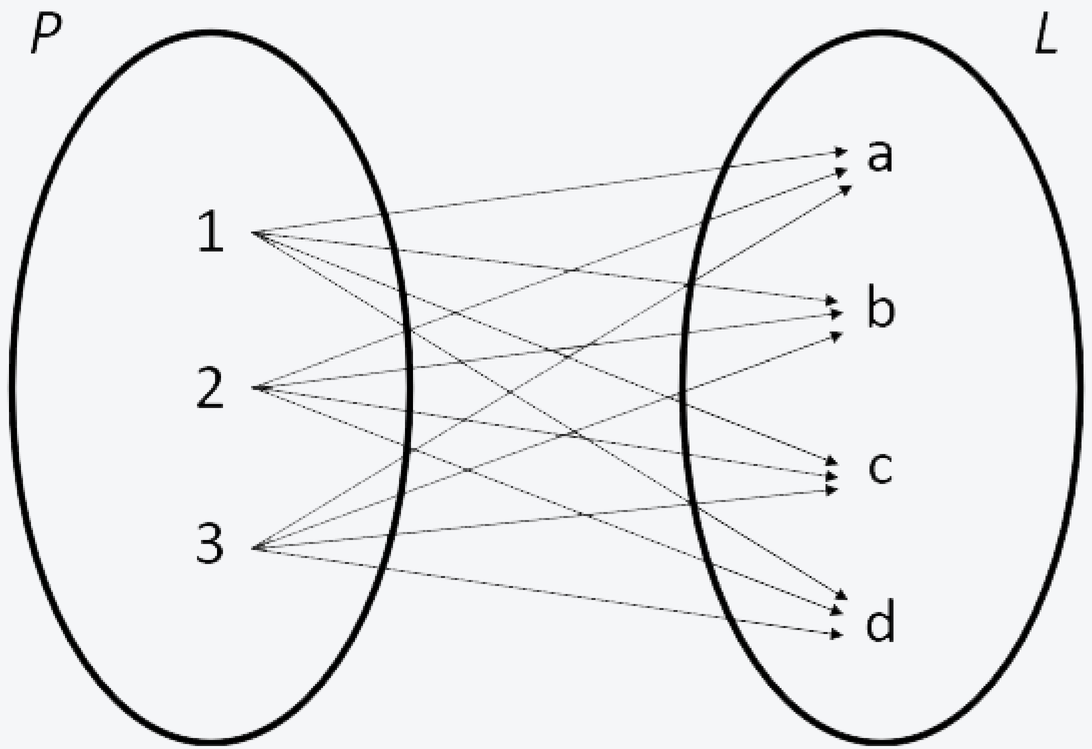
Otra forma de representar un producto cartesiano es mediante un **esquema sagital** . El mismo consiste en graficar dos diagramas de Venn, uno a la izquierda que representa al primer conjunto y otro a la derecha que representa el segundo. Luego, desde cada elemento del primer conjunto sale una flecha hacia cada elemento del segundo conjunto.

Entonces, cada flecha representa un par ordenado y, el elemento de partida de la flecha es el primer elemento del par ordenado, mientras que el elemento destino de la flecha es el segundo elemento del par.

Por ejemplo, el diagrama de

$$P \times L = \lbrace(1,a), (1,b), (1,c), (1,d), (2,a), (2,b), (2,c), (2,d), (3,a), (3,b), (3,c), (3,d)\rbrace$$

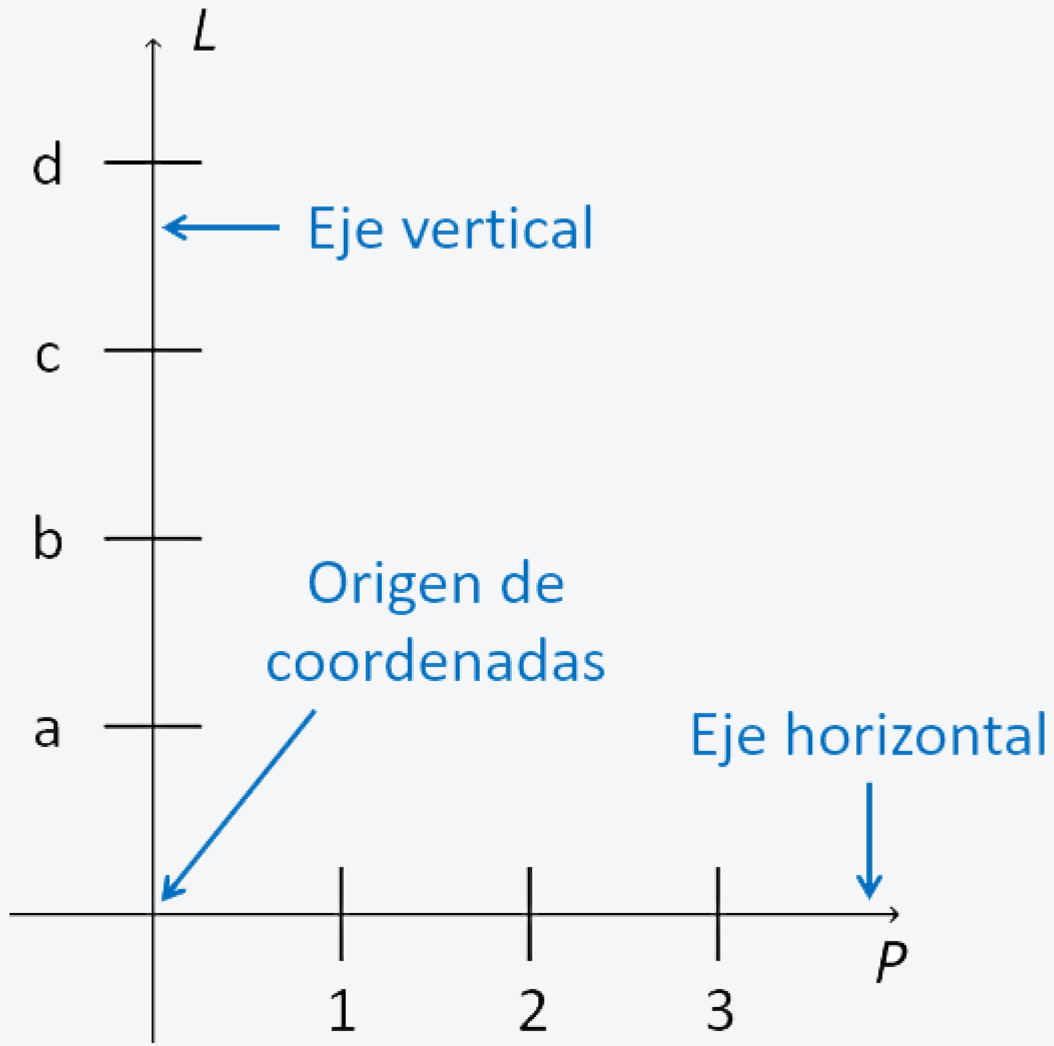
es:


P
L
1
2
3
a
b
c
d

4.3. Diagrama cartesiano

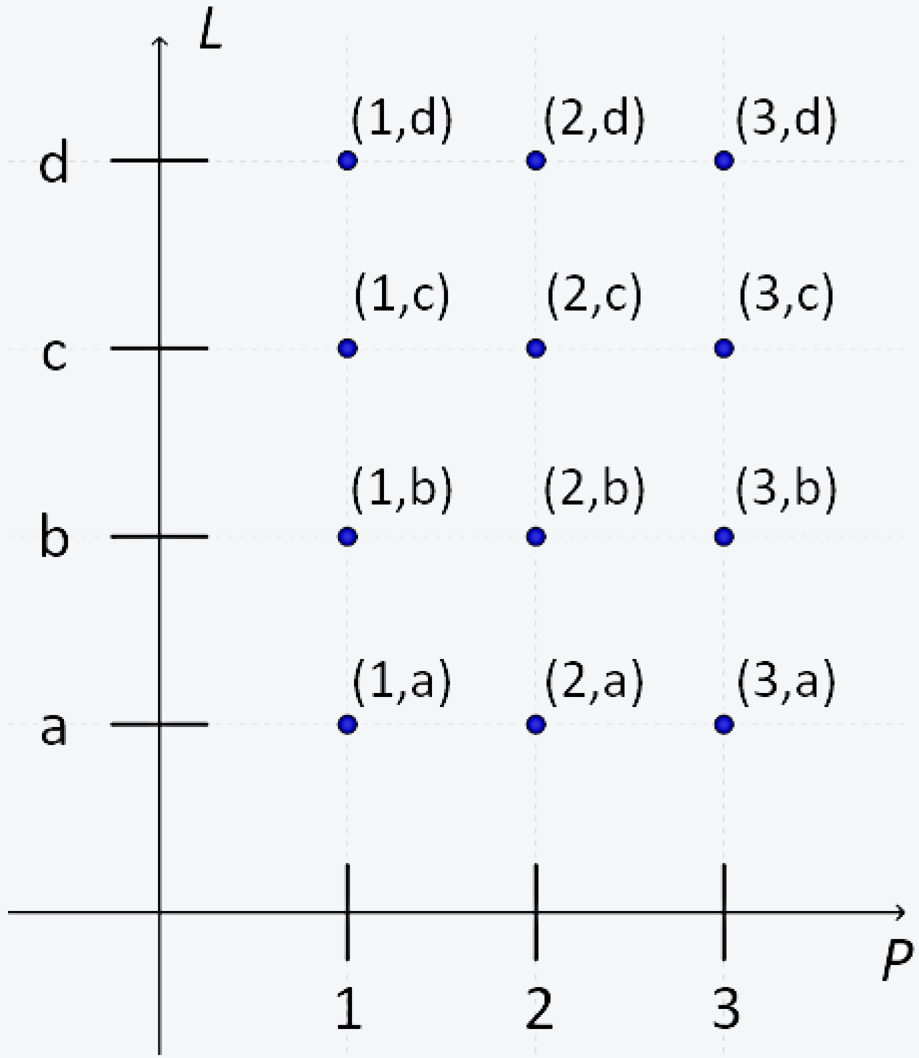
Como los elementos de $P \times L$ son pares ordenados, podemos graficar dicho conjunto en un sistema de coordenadas rectangulares denominado coordenadas cartesianas.

Por ejemplo, para representar los elementos de $P \times L$ en coordenadas cartesianas, se colocan dos rectas perpendiculares, una horizontal y otra vertical que llamaremos ejes. La intersección de estos ejes se llama origen de coordenadas.



Sobre el eje horizontal se colocan los elementos del conjunto \(P \), todos a la misma distancia entre ellos (y respecto al origen de coordenadas). Sobre el eje vertical se procede de igual modo pero con los elementos de \(L \).

Luego, en forma perpendicular a los ejes, por cada uno de los elementos se trazan rectas que al intersecarse determinan puntos del plano. Cada uno de estos puntos representa uno de los pares ordenados del producto cartesiano, en el siguiente gráfico los señalamos uno por uno:


L
(1,d)
(2,d)
(3,d)
d
(1,c)
(2,c)
(3,c)
c
(1,b)
(2,b)
(3,b)
b
(1,a)
(2,a)
(3,a)
a
P
1
2
3

5. Relación

Nosotros conocemos relaciones entre elementos, entre conjuntos y entre elementos y conjuntos. Por ejemplo, existen relaciones de amistad entre personas, relaciones de inclusión entre conjuntos, relaciones de orden entre números, etc. Ahora nosotros estudiaremos la siguiente relación:

Definición: R es una relación de A en B si y solo si se cumple que R está incluida en el producto cartesiano $A \times B$, es decir, $R \subseteq A \times B$.
Así, notemos que los elementos de una relación son pares ordenados.
Al conjunto A se lo llama conjunto de partida y al B, conjunto de llegada.

Algunas aclaraciones en cuanto a la notación:

1. **R es una relación de A en B también se puede indicar por $R: A \to B$.**
2. **Si el par (x,y) pertenece a la relación R, se acostumbra a denotar por $(x,y) \in R$.**
3. **La escritura xRy sirve para indicar que x e y están relacionados según la relación R. También se podría emplear $y=R(x)$. Esta última notación va a cobrar mayor sentido cuando trabajemos con las funciones.**

Ejemplo 1. Si volvemos a nuestro ejemplo, podríamos indicar la siguiente relación:

$$R_{1}: \lbrace{habitaciones~de~piso~par}\rbrace$$

De todas las habitaciones nos quedaríamos con las que están en el segundo piso, las cuales son las que marcan a continuación :

$$P \times L = \lbrace{(1,a), (1,b), (1,c), (1,d), \textbf{(2,a), (2,b), (2,c), (2,d)}, (3,a), (3,b), (3,c), (3,d)}\rbrace$$

Por lo tanto, los elementos de la relación R_{1} son:

$$R_{1}= \lbrace{(2,a), (2,b), (2,c), (2,d)}\rbrace$$

Y vemos que cumple con la definición de relación, ya que $R_{1} \subseteq P \times L$.

Ejemplo 2. Tomando el mismo problema, podríamos haber definido esta otra relación:

$$R_{2}: \lbrace{habitaciones~con~vocal}\rbrace$$

Aquí los elementos de la relación R_{2} cambiaron y son:

$$R_{2}= \lbrace{(1,a), (2,a), (3,a)}\rbrace$$

Y se sigue cumpliendo la definición de relación, ya que $R_{2} \subseteq P \times L$. También, lo podemos indicar así:

$\lbrace{(1,a), (2,a), (3,a)}\rbrace \subseteq \lbrace{(1,a), (1,b), (1,c), (1,d), (2,a), (2,b), (2,c), (2,d), (3,a), (3,b), (3,c), (3,d)}\rbrace$

¿Te acordás del problema 1? *Hacé clic en el botón para releerlo.*

5.1. Dominio e imagen

Se denomina **dominio de una relación** al conjunto de los elementos de A que intervienen en la relación y se llama **imagen, rango o recorrido**, al conjunto de los elementos de B que intervienen en los pares ordenados de la relación.

Simbólicamente:

- Para el dominio: $Dom~R \subseteq A$
- Para la imagen: $Im~R \subseteq B$

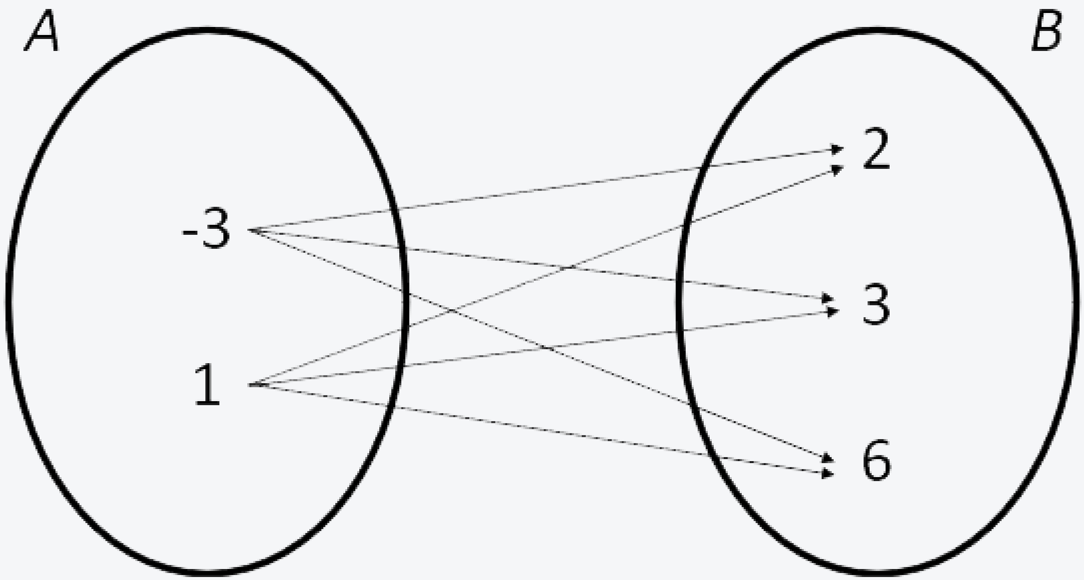
Notá que tanto el dominio como el conjunto imagen de una relación, pueden ser todo el conjunto de partida (o de llegada) o un subconjunto de ellos.

5.2. Ejemplo y representaciones

Dados los conjuntos $A= \lbrace{-3,1}\rbrace$ y $B= \lbrace{2,3,6}\rbrace$, encontrar todos los pares ordenados (x,y) que satisfagan la relación R definida de A en B como:

$$R= \lbrace{(x,y) \in A \times B : x+y=3 }\rbrace.$$

Para resolver este ejemplo, primero debemos armar el conjunto del producto cartesiano $A \times B$, para lo cual nos vamos a ayudar de un diagrama sagital:



Por lo tanto, el producto cartesiano está formado por los siguientes pares ordenados:

$$A \times B = \lbrace{(-3,2), (-3,3), (-3,6), (1,2), (1,3), (1,6)}\rbrace$$

De los pares ordenados anteriores, tenemos que quedarnos con los que cumplen la condición de la relación R, la cual es que $x+y=3$, es decir, aquellos cuya suma de sus componentes sea igual a 3. La siguiente tabla muestra este proceso de selección:

Pares ordenados	Cálculo	¿Cumple la relación R?
$(-3,2)$	$-3+2=-1$	NO
$(-3,3)$	$-3+3=0$	NO
$(-3,6)$	$-3+6=3$	SI
$(1,2)$	$1+2=3$	SI
$(1,3)$	$1+3=4$	NO
$(1,6)$	$1+6=7$	NO

Por lo tanto, los elementos de la relación R son:

$$R= \lbrace{(-3,6), (1,2)}\rbrace$$

Toda relación queda definida si se conoce el conjunto de partida, el conjunto de llegada y la regla mediante la cual se asocian los elementos.

Observar que en el ejemplo anterior, el conjunto de partida corresponde al conjunto A, el conjunto de llegada es el conjunto B y la expresión $x+y=3$ es la regla que asocia los elementos de los dos conjuntos.

Una relación puede representarse en forma verbal, simbólica, con una tabla o con una gráfica. En nuestro ejemplo, tenemos:

- **Verbal:** relación que pertenece al producto cartesiano entre los conjuntos \(A \) y \(B \), tal que la suma de sus componentes da como resultado tres.
- **Simbólica:** \(R= \lbrace{(x,y) \in A \times B : x+y=3 }\rbrace \)
- **Tabla:**

Elementos de A	Elementos de B
-3	6
1	2

- **Gráfica:**