Conceptos básicos de la teoría de conjuntos

Sitio: Agencia de Habilidades para el Futuro
Curso: Elementos de Analisis Matematico 1° D
Libro: Conceptos básicos de la teoría de conjuntos

Imprimido por: RODRIGO PINTO
Día: martes, 26 de noviembre de 2024, 06:15

Tabla de contenidos

1. Introducción

En esta sección vamos a introducirnos en la **teoría de conjuntos**, comenzando por las concepciones básicas de la misma.

Te invitamos recorrer el índice de la derecha, el cual contiene lo siguiente:

- El concepto de conjunto
- Pertenencia
- Formas de representación
- Relaciones entre conjuntos
- Conjunto universal

2. El concepto de conjunto

El **concepto de conjunto** es muy intuitivo y representa para la matemática la misma idea que en la vida cotidiana: una lista, colección o clase de objetos bien definidos, que poseen alguna propiedad en común y que pueden ser cualesquiera: números, letras, personas, entre otros. Los objetos que conforman un conjunto son llamados **elementos**.

¿Viste que en el problema 1 "El hotel de los conjuntos" aparecieron varias habitaciones que contenían una serie de elementos con una propiedad en común?
Bueno, es posible pensar esas habitaciones como conjuntos. Entonces tenemos el conjunto de las letras del abecedario, el conjunto de los números pares, el conjunto de las ciudades capitales de Argentina, entre otros.

¿Te acordás del problema 1? ***Hacé clic en el botón para ver la respuesta.***

Un requisito clave para que una agrupación de objetos pueda ser llamada conjunto, es que se pueda determinar si cierto objeto pertenece o no a él. Luego, la agrupación de "objetos lindos" no es un conjunto, ya que habrá cosas que para algunos son lindas pero para otros no.

Notación

Es usual denotar los conjuntos por letras mayúsculas: $A, B, P, V, \ldots$
Mientras que los elementos de los conjuntos se representan por letras minúsculas: $a, b, p, v, \ldots$

Por ejemplo, la habitación Z en la cual se alojan a todas las letras del abecedario, la podemos llamar conjunto Z.

Conjunto vacío

Existe un conjunto muy particular llamado conjunto vacío, que como su nombre lo indica, es el que no contiene elementos. Este conjunto se denota como $\emptyset$.

Ninguna de nuestras habitaciones representa el conjunto vacío, ya que todas contienen elementos.

3. Pertenencia

Si x es un elemento de un conjunto A dado, se dice que x pertenece a A y se denota $x \in A$.
En caso contrario, si x no es un elemento de A, se denota $x \notin A$.

Ejemplo 1: Para el caso del conjunto V de las vocales, tenemos que $e \in V$, pero $b \notin V$.

Ejemplo 2: Para el caso del conjunto $\mathbb{N}$ de los naturales, tenemos que $3 \in \mathbb{N}$, pero $\pi \notin$ \mathbb{N} .

Ejemplo 3: Para el caso del conjunto C de las ciudades capitales de Argentina, tenemos que Paraná \in C , pero Rosario $\notin$C , ya que no es una ciudad capital.

Notá que el hecho de establecer si un elemento pertenece o no a un conjunto, es similar a lo que hicieron en el problema 1 "El hotel de los conjuntos" al determinar en qué habitación iba cada turista, teniendo en cuenta que algunos no pudieron ser ubicado en ninguna de ellas.

¿Te acordás del problema 1? *Hacé clic en el botón para releerlo.*

4. Formas de representación

Un conjunto puede definirse de las siguientes maneras:

- por **extensión:** enumerando todos y cada uno de sus elementos;
- por **comprensión:** diciendo cuál es la propiedad que los caracteriza.

Para comprender lo anterior, vamos a ver los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1: Consideremos el conjunto V de las vocales. Para definir V por extensión escribimos:

$$V = \lbrace{a, e, i, o, u}\rbrace$$

Mientras que por comprensión se escribe:

$$V= \lbrace{las~vocales}\rbrace \quad \text{o bien} \quad V= \lbrace{x:x~es~vocal }\rbrace$$

En el último caso se lee **"V es el conjunto de todas las x tal que x es vocal"**, es decir, los dos puntos $(:)$ se leen como "tal que".

Ejemplo 2: Consideremos el conjunto P de los números que son pares. Para definir P por extensión escribimos:

\(P = \lbrace{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...}\rbrace \)

Los puntos suspensivos son para indicar que la lista de elementos sigue.

Mientras que por comprensión se escribe:

\(P = \lbrace{x:x~es~par}\rbrace \)

Observación: un conjunto se denota encerrando entre llaves a sus elementos (separando los mismo con comas si se define por extensión), o a su propiedad característica (si se define por comprensión).

Notar que los elementos de cada conjunto los podemos pensar como los huéspedes que se alojaban en las habitaciones del hotel de nuestro problema 1 "El hotel de los conjuntos".

¿Te acordás del problema 1? *Hacé clic en el botón para releerlo.*

Ejemplo 3:

Si el conjunto **\(A \)** se define por comprensión como **\(A= \lbrace{x\in \mathbb{N} : x \leq5}\rbrace \)**, entonces **\(A \)** se escribe por extensión como **\(A = \lbrace{1, 2, 3, 4, 5}\rbrace \)**.

Lo anterior se lee: "el conjunto A está formado por todos los elementos x que pertenecen al conjunto de los números naturales tales que son menores o iguales que 5".

Ahora, si consideramos $B= \lbrace{x\in \mathbb{Z} : x \leq5}\rbrace$, entonces B se escribe por extensión como $B= \lbrace{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5}\rbrace$.

Lo anterior se lee: "el conjunto B está formado por todos los elementos x que pertenecen al conjunto de los números enteros tales que son menores o iguales que 5".

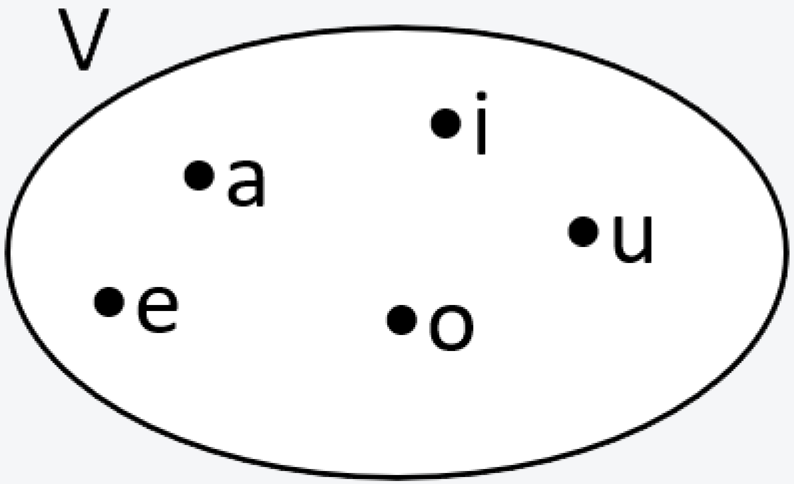
Si definimos $C = \lbrace{x \in \mathbb{Z} : -2 \leq x <5}\rbrace$, entonces tenemos que $C = \lbrace{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}\rbrace$.

Lo anterior se lee: "el conjunto C está formado por todos los elementos x que pertenecen al conjunto de los números enteros tales que son mayores o iguales que -2 y menores que 5".

4.1. Diagrama de Venn

Diagramas de Venn

Una forma de comprender mejor las relaciones entre conjuntos, y en especial las operaciones entre ellos que veremos en la parte 2, es realizar una representación gráfica de los mismos. Para ello se utiliza lo que se conoce como **diagrama de Venn** , en homenaje a su creador, que consiste en líneas circulares u ovaladas cerradas, donde se disponen los elementos señalados mediante puntos. El conjunto \(V \) de las letras vocales quedaría representado así:



4.2. Cardinal de un conjunto

Cardinal de un conjunto

Un conjunto puede ser finito, es decir, puede estar formado por una cantidad finita de elementos (por ejemplo 5 elementos como es el caso de las letras vocales), o bien contener una cantidad infinita de ellos y, en tal caso, se llama conjunto infinito (por ejemplo el conjunto de los números pares).

Sea A un conjunto, se llama **cardinal de** A a la cantidad de elementos distintos que tiene A y se denota $\#A$.

Por ejemplo:

$\#V = 5$ (recordá que V es el conjunto de todas las vocales).

$\#Z = 27$ (recordá que Z es el conjunto de todas las letras del abecedario).

$\#P = \infty$ (recordá que P es el conjunto de todos los números pares).

5. Relaciones entre conjuntos

Igualdad

Se dice que dos conjuntos **A y B** son iguales, si ambos tienen exactamente los mismos elementos, y en tal caso escribimos **$A=B$**.

Ejemplo 1: Notar que los siguientes conjuntos son iguales:

$$C = \lbrace{1, 2, 3, 4, 5}\rbrace, ~~~~~D = \lbrace{3, 5, 2, 1, 4}\rbrace ,~~~~~E = \lbrace{1, 4, 3, 1, 5, 2}\rbrace$$,

ya que al definir un conjunto no importa en qué orden se listen los elementos ni cuántas veces se repita cada uno. Luego, $C = D = E$.

Ejemplo 2: Notar que los siguientes conjuntos no son iguales:

$$P = \lbrace{pares}\rbrace ,~~~~~I = \lbrace{impares} \rbrace$$

Luego, **$P \neq I$**.

Notá que en nuestro problema 1 "El hotel de los conjuntos" todas las habitaciones son diferentes, porque ninguna tiene exactamente los mismos elementos que otra.

¿Te acordás del problema 1? *Hacé clic en el botón para releerlo.*

Este hotel es muy particular, organiza sus habitaciones agrupando a sus huéspedes con alguna propiedad en común.

Estamos en plena temporada alta de vacaciones y parece ser que le va muy bien, porque solo quedan disponibles las siguientes cinco habitaciones:

- Habitación Z → en la cual se alojan a todas las letras del abecedario.
- Habitación V → en la cual se alojan únicamente a las vocales.
- Habitación N → en la cual se alojan a todos los números naturales.
- Habitación P → en la cual se alojan únicamente a los números pares.
- Habitación C → en la cual se alojan a todas las ciudades capitales de Argentina.

Acaba de llegar un colectivo con turistas un poco extraños. Del micro bajan:

- Un grupo de letras: liderando la "a", seguida por la "b" y la "e".

- Los números primos 2 y 3, acompañados por el famoso número "π".

- Las ciudades de Paraná y Rosario.

El conserje emprende su trabajo de organizar a estos turistas en las habitaciones que tiene disponible.

¿En donde ubicará a cada uno/a? Te pedimos que lo ayudes en esta tarea.

¡ACLARACIÓN! Si un mismo turista puede estar en más de una habitación posible, asignarle ambas y que luego éste decida.

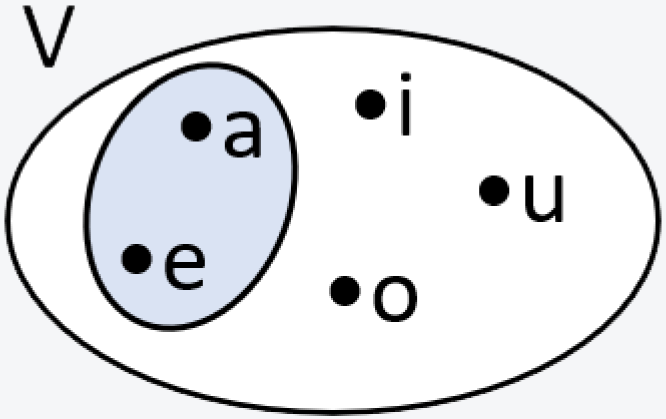
Inclusión

Se dice que un conjunto **\(A \)** está incluido (o contenido) en otro conjunto **\(B \)** , si todo elemento de **\(A \)** es también elemento de \(B \). Si esto ocurre, se denota por **\(A \subseteq B \)** .

También suele decirse que **\(A \)** es subconjunto de **\(B \)** .

Ejemplo 1:

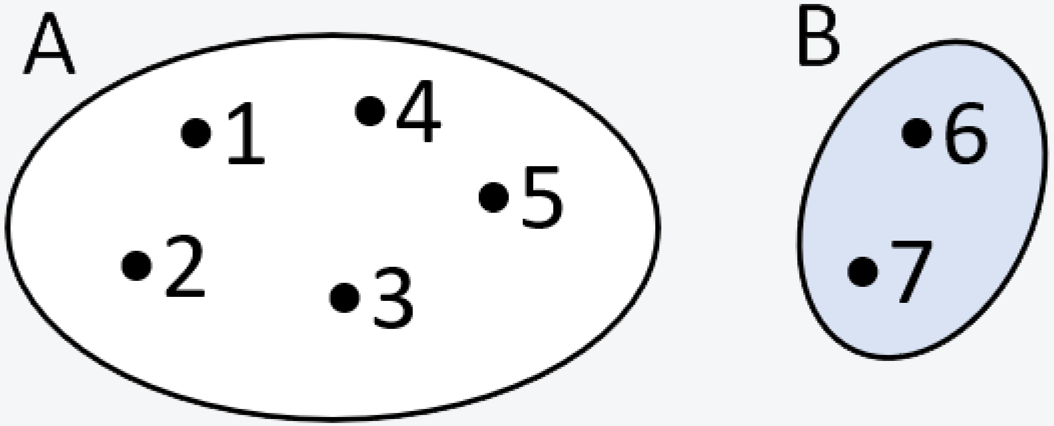
Si como antes \(V \) es el conjunto de las vocales y \(Z \) es el conjunto de todas las letras del abecedario, entonces \(V \subseteq Z \). También, \(\lbrace{a, e}\rbrace \subseteq V \), lo cual implica que el conjunto formado por las letras \(a \) y \(e \) está incluido o es un subconjunto de \(V \).



Observá que por este motivo, por ejemplo la letra e de nuestro problema 1, podía ser ubicada tanto en la habitación V como en la Z.

Ejemplo 2:

Si $A = \lbrace{1, 2, 3, 4, 5}\rbrace$ y $B = \lbrace{6, 7}\rbrace$, entonces B no está incluido en A.



¡Importante!

No se deben confundir los símbolos **$\in$** y **$\subseteq$,** ya que el primero relaciona un elemento con un conjunto, mientras que el segundo se usa para relacionar dos conjuntos. Luego, para el caso del conjunto **V** de las vocales, es **correcto** escribir:

$e \in V$, y también $\lbrace{e}\rbrace \subseteq V$,

pero es **incorrecto** escribir:

$e \subseteq V$, y también $\lbrace{e}\rbrace \in V$.

El último caso sería correcto si los elementos del conjunto V fueran a su vez otros conjuntos. Por ejemplo, si $V= \lbrace{\lbrace{a, i}\rbrace, \lbrace{e}\rbrace, \lbrace{e,u}\rbrace}\rbrace$, entonces V es un conjunto cuyos elementos son los conjuntos $\lbrace{a, i}\rbrace, \lbrace{e}\rbrace, \lbrace{e,u}\rbrace$. En este caso sí es verdad que $\lbrace{e}\rbrace \in V$, ya que ahora el conjunto compuesto por la letra “e” es un elemento de V. Sin embargo, no es verdad ahora que $e \in V$.

Subconjunto propio

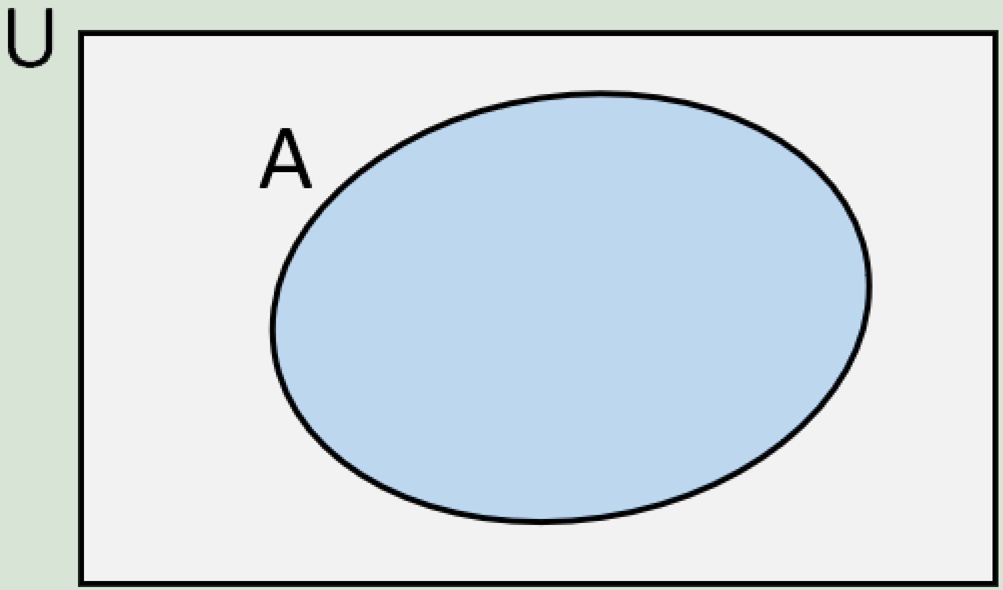
Se dice que B es subconjunto propio de A, si B es subconjunto de A pero "es más chico” que A (es decir, no es el mismo A). Esto significa que existen elementos de A que no están en B, lo que en símbolos se expresa como:

$B \subseteq A$ y $B \neq A$

Para indicar que B es subconjunto propio de A se utiliza la notación $B \subsetneq A$. Por ejemplo, el conjunto de las vocales es un subconjunto propio de las letras del abecedario.

6. Conjunto universal

Muchas veces trabajamos con uno o más conjuntos cuyos elementos pertenecen a un conjunto más grande llamado **universal**, el cual es denotado en general con la letra U y representado gráficamente en un diagrama de Venn mediante un rectángulo que contiene a los demás conjuntos con los que estamos trabajando:



Este conjunto universal dependerá del caso particular que estemos desarrollando. Por ejemplo, si hablamos de las letras de una palabra, podemos tomar como conjunto universal a todas las letras del abecedario; si trabajamos con el conjunto $\lbrace{1, 4, 7}\rbrace$ podemos tomar como conjunto universal al conjunto de los números naturales, pero también al de los enteros o al conjunto \(\lbrace{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}\rbrace \) de todos los dígitos. Para evitar estas ambigüedades, siempre que sea necesario indicaremos cuál es el conjunto universal.

Ejemplo:

Sea \(A=\lbrace{1, 4, 7}\rbrace \) y el conjunto universal \(U=\lbrace{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}\rbrace \), el diagrama de Venn nos queda: