Conceptos de Lógica Proposicional

Sitio: Agencia de Habilidades para el Futuro
Curso: Lógica Computacional 1°D
Libro: Conceptos de Lógica Proposicional
Imprimido por: RODRIGO PINTO
Día: martes, 26 de noviembre de 2024, 09:57

Descripción

Tabla de contenidos

1. Repasando lo visto hasta ahora

Repasando lo visto hasta ahora...

Bueno, hasta ahora hemos aprendido un concepto fundamental de la informática: ¿qué es la lógica y para qué sirve? De manera muy sintética sería: "Para describir el universo, a través de respuestas que recolectamos, mediante la formulación de preguntas básicas y generales." Pero como ya sabemos, las preguntas básicas nos brindan además, una manera más sencilla de formular la pregunta genérica o general. Para lograr esto, la lógica también nos provee una herramienta que conecta dichas preguntas básicas: Las conectivas.

Por tanto, ahora que sabemos cómo conectar expresiones (preguntas y respuestas), estamos en condiciones de mencionarlas de una manera más formal. Es por eso que de ahora en adelante, las expresiones generales las denominaremos "compuestas" , y las expresiones básicas "simples" .

2. ¿Cuándo una expresión es verdadera?

¿Cuándo una expresión es verdadera?

Bien, ahora sí, ya habiendo repasado, avancemos. Como introducción a lo que sigue, vamos a plantear el siguiente interrogante: **¿Cómo saber cuándo una pregunta compuesta es VERDADERO y cuándo es FALSO?**

La realidad es que, hasta el momento, solo la podemos deducir o intuir, basándonos en el comportamiento de sus preguntas simples (mediante sus tablas). Esta tarea puede ser muy sencilla, solamente con 2 conectivas, pero ¿qué pasa cuando tenemos más de 2?, la cosa se empieza a complicar. Este es el caso de preguntas compuestas por demasiadas preguntas simples , siendo muy difícil resolverlas"mentalmente", y, por tanto, demasiado propensa a errores.

Análisis mediante tabla de verdad

Pensemos, por ejemplo, el caso de alguien que quiere cocinar varios platos con verduras.

Es probable que pregunte algo por el estilo: ¿hay papas? y ¿hay batatas?, o ¿hay papas? y ¿hay zanahorias?, o ¿es cierto que no hay papas? y ¿hay batatas?

La pregunta en sí es bastante ambigua, como para saber cuándo"todo eso" es verdadero o falso. Pero la lógica, nos brinda una vez más, una herramienta eficaz y precisa para determinar cuándo una pregunta compuesta es VERDADERO y cuándo es FALSO. La misma consiste en un método denominado Análisis mediante tabla de verdad , y consta en elaborar una tabla para la pregunta compuesta, que contiene todas las preguntas simples como pasos intermedios para determinar la respuesta final. De esta manera, se puede determinar qué valores debe tener cada pregunta simple para que la pregunta compuesta sea VERDADERO.

3. Tabla de verdad: pasos para armarla

Tabla de verdad

Para aplicar este método, no hace falta más conocimientos que los vistos hasta ahora.

Sólo es cuestión de ordenar la información, y comprender el funcionamiento interno del método y los beneficios de contar con él. Con esto nos referimos a que la tabla a elaborar, no es más ni menos, que las tablas vistas en cada conectiva, las cuales, a partir de ahora, las denominaremos formalmente como Tablas de verdad.

Revisemos la forma del ejemplo mencionado previamente:

- ¿hay papas? y ¿hay batatas?,
- o ¿hay papas? y ¿hay zanahorias?,
- o ¿es cierto que no hay papas? y ¿hay batatas?

Así como en matemáticas, una expresión compleja se resuelve paso a paso, solucionando cada una de las operaciones por separado en un cierto orden, las tablas de verdad utilizan el mismo método, pero aplicado a las conectivas, obteniendo como resultado varias preguntas compuestas "intermedias"

Tabla de verdad - Pasos para armarla

¿Cómo sería esto? Bien, veamos el "paso a paso" de este método:

1. Identificar las preguntas simples que componen la pregunta compuesta
2. Formalizar la pregunta compuesta en término de preguntas simples utilizando las conectivas necesarias
3. Armar la tabla de verdad
4. Colocar una columna por cada pregunta simple
5. Completar las filas con los valores de verdad correspondientes. Pensar en todas las combinaciones posibles.
6. Colocar las columnas de las preguntas compuestas intermedias.
7. Completar las filas de las preguntas compuestas intermedias aplicando la conectiva correspondiente

Composición de una pregunta compuesta: Pregunta (simple o compuesta) + CONECTIVA + Pregunta (simple o compuesta)

3.1. Ejemplo

Tabla de verdad: ejemplo

Analicemos finalmente el ejemplo de la verdulería para armar su tabla de verdad, siguiendo los pasos mencionados.

Paso 1: identificar las preguntas simples

Listamos las preguntas simples que son distintas:

- ¿hay papas?
- ¿hay batatas?
- ¿hay zanahoria?

Notar que "¿es cierto que no hay papas?" es una pregunta que se resuelve con su opuesto: "¿hay papas?" , y ya está identificada.
Importante: las expresiones (tanto preguntas como respuestas) deberán expresarse en la forma positiva, dado que la negativa hace referencia a la conectiva de Negación.

Paso 2: Formalizar la pregunta compuesta

Para esto, debemos formular la pregunta original en términos de las preguntas compuestas intermedias. Para lo cual, será de suma importancia el orden de los términos, mediante el uso de paréntesis que separan cada uno. Nos quedaría de la siguiente forma: (¿hay papas? y ¿hay batatas?, o ¿hay papas? y ¿hay zanahorias?, o ¿es cierto que no hay papas?

y ¿hay batatas?) = (¿hay papas? ∧ ¿hay batatas?) ∨ (¿hay papas? ∧ ¿hay zanahorias?) ∨ ((¬ ¿hay papas?) ∧ ¿hay batatas?) Volvemos a remarcar la importancia de detallar las expresiones de manera positiva, haciendo uso de la conectiva "¬" para denotar su opuesto.

Paso 3: Armamos la tabla de verdad

3.1) Colocamos una columna por cada pregunta simple

Por una cuestión de espacio y clarificación, para este punto realizaremos pasos intermedios que nos ayudarán a diagramar la tabla de una manera más concisa.
Para ello vamos utilizar letras que nos permitirán hacer referencia a cada pregunta (tal como lo hemos visto en otras oportunidades). Esto es: p = "¿hay papas?" q = "¿hay batatas?" r = "¿hay zanahorias?" De esta manera podemos armar nuestra tabla con dichas letras, pero recordando que representan las preguntas a responder: p | q | r

Paso 3: Armamos la tabla de verdad

3.2) Completamos las filas con los valores de verdad

Las respuestas a las preguntas son binarias, por lo cual cada "celda" contendrá un valor de verdad. Ahora bien, ¿cuántas filas debemos completar en la tabla? Bueno, para responder esto pensemos que puede haber papas y batatas, pero no zanahorias. O puede haber papas, pero no batatas ni zanahorias, y así sucesivamente. Es decir, a priori no sabemos cómo nos responderá la verdulera, y es por eso que tenemos que analizar todos los casos posibles. Para cada caso, completamos con una nueva fila, colocando los valores binarios de las respuestas a cada pregunta que tendría en dicho caso. Por ejemplo, en la primera fila tenemos el caso donde contamos con todas las verduras, y en la segunda, donde sólo falta zanahoria.

p q r

VERDADERO VERDADERO VERDADERO

VERDADERO VERDADERO FALSO

De la misma manera completamos con los casos restantes, para todas las combinaciones posibles. Por una cuestión de comodidad, en lugar de escribir la palabra completa VERDADERO , y FALSO , anotaremos V y F respectivamente:

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

3.2. Armado de una tabla general

Técnica para armar cualquier tabla

¡Perfecto!, ya tenemos nuestra tabla con las preguntas simples y sus respectivas respuestas.

Ahora ustedes se preguntarán ¿cómo hizo para saber cuántas filas hay y qué valores tienen? ¿Hay alguna técnica?

La respuesta es ¡Sí!. A continuación vamos a ver, de manera general, cómo crear una tabla de verdad completa, sin perder casos, ni duplicarlos.

Para esto llamemos n a la cantidad de preguntas simples (letras en este caso), y N a la cantidad de casos posibles, donde, N = 2n. En nuestro ejemplo, como tenemos 3 letras, es que tenemos N = 23 = 8 casos posibles. Esto en cuanto a la cantidad de filas, ahora bien, para completar los valores dentro, veamos.

Si observan el orden de los valores en la tabla, se repite un comportamiento, es decir, hay un patrón. Entonces, la manera de completar los valores es aplicando la siguiente fórmula a cada columna: N / 2m , siendo m = nro de columna actual.

Para nuestro ejemplo con N = 8 casos posibles (combinaciones) nos queda:

1. Columna 1: N/(21) -> 8/2 = 4. Es decir, completamos la columna con 4 filas V , y 4 filas F, alternadamente, cubriendo así los 8 casos.
2. Columna 2: N/(22) -> 8/4 = 2. Es decir, completamos la columna con 2 filas V , y 2 filas F, alternadamente hasta cubrir los 8 casos.
3. Columna 3 :N/(23) -> 8/8 = 1. Es decir, completamos la columna con 1 fila V , y 1 fila F, alternadamente hasta cubrir los 8 casos.

3.3. Ejemplo - Continuación

Tabla de verdad: ejemplo - continuación

Bien, luego de este gran paréntesis sobre el armado de una tabla de verdad de manera general, retomamos el ejemplo de la verdulería. Nos habíamos quedado, justamente en el paso del armado de la tabla.

Paso 3: Armar tabla de verdad
3.3) Colocar las columnas de las preguntas compuestas intermedias.

Recordemos que teníamos una pregunta compuesta de 3 términos. Para comenzar, tomemos el 1er término (paréntesis): "(Hay papas? ∧ ¿hay batatas?)".
Ahora hay que agregar una columna a la tabla con esta pregunta compuesta. Para ello, recordemos que unimos las preguntas con conectivas. Las mismas siguen aplicándose para el caso de las letras. En nuestro ejemplo, se trata de una conjunción . Quedando: $p \wedge q$

Notar que "¿es cierto que no hay papas?" es una pregunta que se resuelve con su opuesto: "¿hay papas?" , y ya está identificada.
Importante: las expresiones (tanto preguntas como respuestas) deberán expresarse en la forma positiva, dado que la negativa hace referencia a la conectiva de Negación.

Paso 3: Armar la tabla

3.4) Completar las filas de las preguntas compuestas intermedias.

Una vez que tenemos la columna, deberemos completar con los valores correspondientes. Lo cual implica revisar la tabla de verdad de la conjunción, y aplicar la conectiva a las variables (letras) involucradas. Veamos cómo quedaría la tabla con esta nueva columna:

p	q	r	p ∧ q
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	F

Estamos en el último paso, y para finalizar debemos reiterar el mismo proceso con el resto de los términos.
En esta instancia, ya vamos notando que se trata de una tabla bastante grande. Es por eso que antes de avanzar, será

mejor repasar la pregunta compuesta formulada en los 3 términos, usando las variables:

- (¿hay papas? ∧ ¿hay batatas?) ∨
- (¿hay papas? ∧ ¿hay zanahorias?) ∨
- ((¬ ¿hay papas?) ∧ ¿hay batatas?)

Con las variables (letras): (p ∧ q) ∨ (p ∧ r) ∨ ((¬ p) ∧ q) Al tratarse de una tabla grande será necesario, primero resolver los términos intermedios, y luego los de más afuera, quedando:

p	q	r	p ∧ q	p ∧ r	·p
V	V	V	V	V	F
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	F
V	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	F	V
F	F	F	F	F	V

En este punto ya tenemos que agregar columnas que usan los valores de las columnas que calculamos previamente. Sólo resta aplicar la conectiva correspondiente:

p q r p ∧ q p

∧ r ·p (·p) ∧ q

V V V V V F F

V V F V F F F

V F V F V F F

V F F F F F F

F V V F F V V

F V F F F V V

F F V F F V F

F F F F F V F

Por último resolvemos las disyunciones por partes de los términos de "afuera", de izquierda a derecha, y siempre usando la columna de los resultados que fuimos obteniendo (términos intermedios) para completar según las tablas de cada conectiva. La tabla de verdad final queda de la siguiente manera:

p q r p ∧ q p ∧ r

·p (·p) ∧ q (p ∧ q)

∨ (p ∧ r) ((p ∧ q)

∨ (p ∧ r)) ∨ ((·p) ∧ q)

V V V V V F F V V

V V F V F F F V V

V F V F V F F V V

V F F F F F F F F

F V V F F V V F V

F V F F F V V F V

F F V F F V F F F

F F F F F V F F F

3.4. Analizando el resultado

Analizando el resultado

Si miramos las filas resultantes de una tabla de verdad, podremos ver en qué casos la respuesta será VERDADERO de forma un poco más sencilla.

Por ejemplo, podemos apreciar que basta con que haya papas y alguna otra verdura (batatas o zanahorias) o que haya batatas y no papas, independientemente de si hay zanahorias o no.

No sólo nos permite entender mejor los casos de verdad y de falsedad de la pregunta, sino que nos va a permitir comprender mejor la naturaleza de la misma, y por tanto formular nuevas preguntas.

4. Valuaciones

Valuaciones

Se denomina Valuación al conjunto de valores de verdad asignados a cada pregunta compuesta.

Esta información nos sirve para entender que el universo es de una manera particular (estamos imaginando la forma en la que nos respondería la verdulera).

No siempre podemos saber cómo es el universo, pero podemos analizar todas las posibles valuaciones y encontrar resultados interesantes.

5. Tautologías

Tautologías

Imaginemos la siguiente pregunta compuesta:

¿hay naranjas? o ¿es cierto que no hay naranjas?

La forma lógica de esta pregunta es:

Llamamos p = ¿hay naranjas?

Por lo tanto, la fórmula queda: $p \vee \neg p$

Analicemos las posibles valuaciones para dicha fórmula: sólo hay una pregunta, "¿hay naranjas?", cuya respuesta es binaria. Veamos, entonces, mediante la tabla de verdad, qué pasa con la pregunta compuesta en cada caso:

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V	F	V
F	V	V

Tautología

Decimos que una expresión es una tautología, cuando todas sus valuaciones posibles dan VERDADERO. Imaginemos ahora la siguiente pregunta compuesta: ¿hay naranjas? y ¿es cierto que no hay naranjas? La forma lógica de esta pregunta es: $p \wedge \neg p$ Analicemos las posibles valuaciones para dicha fórmula. Nuevamente, solo hay una pregunta, "¿hay naranjas?" . Veamos en este ejemplo, mediante la tabla de verdad, qué pasa con la pregunta compuesta en cada caso:

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	F
F	V	F

Contradicción

Decimos que una expresión es una contradicción, cuando todas sus valuaciones posibles dan FALSO. Contingencias Notar que una pregunta simple, nunca puede ser una tautología o contradicción, pues puede ser respondida tanto con VERDADERO como con FALSO . Bueno, veamos un último ejemplo. Se tiene la pregunta compuesta: ¿hay para preparar un bizcochuelo? = ¿hay limones? v ¿hay naranjas? Nuevamente formalizamos y procedemos a armar la tabla de verdad para su posterior análisis. Llamamos p = ¿hay limones?, q = ¿hay naranjas? La fórmula quedaría: $p \vee q$ La tabla de verdad de la pregunta compuesta es:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V

F F F

En este caso, como se puede observar, a diferencia de las anteriores, la pregunta tiene como respuestas ambos valores binarios.

Contingencia

Decimos que una expresión es una contingencia , si algunas de las valuaciones posibles dan VERDADERO y otras dan FALSO . Analizando la tabla concluimos que: Para las primeras 3 valuaciones la tabla nos indica que se puede preparar bizcochuelo, dado que la respuesta a la pregunta compuesta es VERDADERO. Mientras que en la última valuación, al no contar con ambos ingredientes, la respuesta termina siendo FALSO . Por eso decimos, que dependiendo del valor de las preguntas simples, se obtienen diferentes resultados sobre la pregunta compuesta.

6. Donde la metáfora se queda corta

Donde la metáfora se queda corta

Hasta ahora vimos cómo la lógica nos ayuda a formular preguntas, ya sean simples o compuestas, que nos permiten conocer mejor el universo sobre el cual estamos trabajando. Pero, las preguntas son meras disparadoras de lo que realmente nos interesa.

Entonces, ¿qué es lo que realmente nos interesa? Pues bien, para poder sacar conclusiones sobre el universo, nos interesa obtener información sobre el mismo, que es en lo que nos vamos a centrar de ahora en adelante. Esta información, como lo hacíamos con las preguntas, también tienen un Valor de Verdad. Es decir, vamos a poder considerar a la información como VERDADERO o FALSO.

Podríamos pensar en la siguiente oración: "La Tierra es plana". ¿Consideramos que dicha oración es VERDADERO o FALSO ? En la actualidad conocemos su respuesta (dejando de lado, ciertas teorías que manifiestan lo contrario). O sea, que si formulamos la pregunta, "¿La Tierra es plana?" , entonces, alguna persona de la ciencia nos respondería FALSO . Pero, ¿cuál habría sido la respuesta si hubieramos formulado dicha pregunta hace 1500 o 2000 años?, probablemente, la intuición o el conocimiento de la época habría dicho que la respuesta era VERDADERO . Por lo tanto, el valor de verdad de una oración, estará dada por un momento dado, en base al conocimiento que tengamos sobre la misma, en dicho momento. Así pues, si tenemos la oración: "Hoy es un día soleado" , su valor de verdad dependerá del día en que se esté realizando dicha evaluación.

Podríamos pensar también en:

- "La Tierra gira alrededor del sol".
- "La enfermedades son causadas por animales microscópicos".

Todas estas oraciones fueron consideradas falsas en su momento, pero luego, pasaron a considerarse verdaderas cuando el estado de la ciencia y la técnica fue avanzando. Por tanto, la lógica se usa para analizar la realidad en un momento específico , no le interesan las preguntas en sí mismas, sino el análisis de la información, y la manera en que ésta se relaciona con otra información del universo.

7. Lógica proposicional

Lógica proposicional

La lógica proposicional o lógica de orden cero es la rama de la lógica matemática que estudia las proposiciones, los métodos de vincularlas mediante conectores lógicos, y las relaciones y propiedades que se derivan de dichos procedimientos.

Proposiciones

Ahora bien, pero entonces ¿qué es una proposición?

Una proposición es una entidad atómica de la lógica proposicional, portadora de un valor de verdad.

Es decir, que una proposición es una oración que brinda información, sobre lo que podemos decir que es cierto o no. Es, podríamos decir, la posibilidad de que eso se cumpla.

Las proposiciones usan la función informativa del lenguaje (también llamada a veces descriptiva o aseverativa).

8. Funciones del lenguaje

Funciones del lenguaje

Puede ser útil repasar las funciones del lenguaje para tener más claro qué cosas son proposiciones y cuáles no:

Imperativo	¡Ven a verme!	Le damos una orden o instrucción a otra persona.
Exclamativo	¡Viva la libertad!	Expresamos una emoción o un deseo.
Interrogativo	¿Está lloviendo?	Solicitamos información sobre un evento o situación.
Informativo	El trabajo es muy complicado.	Transmitimos información que puede ser falsa o verdadera. En este caso el trabajo puede ser cierto que sea complicado, o puede ser falso, y ser sencillo.

Importante

Sólo la función informativa corresponde a una proposición

8.1. Ejemplos de proposiciones

Ejemplos de proposiciones

A continuación algunos ejemplos de proposiciones, cuyo valor de verdad puede ser fácil de responder (en un momento determinado), al tratarse de información conocida:

- La Tierra es un planeta
- Está lloviendo en este lugar y hace mucho frío
- La cancha de Boca Jrs. está en La Boca
- Argentina no ganó el mundial de 1982

Los ejemplos que veremos a continuación, si bien cumplen con la definición de proposición, para poder conocer su valor de verdad necesitaremos información que, a priori no conocemos.

- Todas las células eucariotas tienen pared celular
- El transistor más pequeño del mundo mide 14nm
- Argentina clasificará para el mundial FIFA Canadá/Estados
- Unidos/México 2026
- Toyota es uno de los mayores fabricantes de autos del mundo

Veamos otros ejemplos. En estos casos también ¿podemos decir que son proposiciones?:

- La tierra
- Trufa
- La torta de chocolate
- Compró helado

La respuesta es no, dado que las oraciones están mal formadas gramaticalmente. Toda oración debe tener, sujeto, verbo y predicado. Veamos más ejemplos:

- ¡Viva la patria!
- ¿Quién más viene a la fiesta?

En estos casos, las oraciones están gramaticalmente correctas. Entonces, ¿son proposiciones?
La respuesta, nuevamente, es no.

Más ejemplos

El último ejemplo de oraciones tampoco son proposiciones, dado que no son oraciones que informen. La primera oración se trata de una exclamación que menciona un sentimiento, sensación o deseo, en lugar de información, y la segunda se trata de una interrogación.

Por otro lado, en los ejemplos de la presentación anterior

¿podríamos responder si son VERDADERO o FALSO?

Claramente no, entonces, otro motivo más para justificar que no son proposiciones , dado que no están informando, y tampoco se puede determinar su valor de verdad.

8.2. Proposiciones compuestas

Proposiciones compuestas

Ahora que sabemos distinguir entre una proposición y una oración que no lo es, veamos un ejemplo un poco más complejo.

Se tiene la siguiente proposición:

El avión se estrelló en la cordillera o realizó un aterrizaje de emergencia.

Si observamos, veremos que, en realidad, hay dos partes bien notorias que informan distintas situaciones. Es decir, si esto fuera una pregunta, sería una pregunta compuesta por dos partes: "¿El avión se estrelló en la cordillera?", o "¿El avión realizó un aterrizaje de emergencia?".

El truco está en que la oración contiene una conectiva de disyunción ("o"), que nos indica que puede separarse en dos partes, al igual que en las preguntas.

El avión se estrelló en la cordillera o realizó un aterrizaje de emergencia

Es decir que, la oración está formada por dos proposiciones unidas por una conectiva.

Las proposiciones (tantas como se necesiten) pueden unirse en formas tan complejas como sea necesario, usando las conectivas de conjunción, disyunción, o disyunción exclusiva, así como también la conectiva de negación para obtener su opuesto (entre otras que aún no hemos visto).

8.3. Proposiciones atómicas y compuestas

Proposiciones atómicas y compuestas

Al igual que en las preguntas, las proposiciones también pueden clasificarse en simples y compuestas. Tener en cuenta que conforme vayamos avanzando en los distintos conceptos, iremos utilizando términos cada vez más técnicos y formales.
Es por eso que, de ahora en adelante, a las proposiciones simples, las denominaremos proposiciones atómicas, ya que comprenden la unidad más pequeña que puede formar una oración.

Definición

Llamamos proposiciones atómicas a aquellas que no contienen conectivas, y proposiciones compuestas a aquellas que utilizan conectivas, para en la mayoría de las veces, unir proposiciones.

El valor de verdad de la proposición compuesta, dependerá entonces, del valor de verdad de sus proposiciones atómicas, en base a las conectivas que las unen (de la misma forma que sucedía al unir preguntas).

Tener en cuenta que una proposición compuesta puede estar formada a su vez por otras proposiciones compuestas, o por proposiciones atómicas. Eventualmente, siempre debe haber una proposición atómica. Veamos ejemplos:

1. El día está soleado y caluroso

La conectiva “y” está uniendo dos proposiciones atómicas. Por un lado, “El día está soleado” y por otro “El día está caluroso”. Notar que al dividir las proposiciones, la 2.ª proposición no la formulamos como simplemente:”caluroso” , dado que se trataría de una palabra y no de una proposición. Es muy importante tener cuidado al momento de formular las proposiciones atómicas de la oración que se está trabajando, y respetar el concepto de proposición.

2. El día está soleado y caluroso, o, el día está nublado y frío

En este ejemplo tenemos varias conectivas: la conjunción “y” que une proposiciones atómicas, y la disyunción “o” que, a la vez, está uniendo dos proposiciones compuestas.

8.4. Proposiciones compuestas - "La forma"

Proposiciones compuestas - “La forma”

Como la lógica trabaja sobre las formas, es importante analizar e identificar cómo es la estructura de una proposición compuesta que une proposiciones:

proposición CONECTIVA proposición

Entonces, siguiendo con el ejemplo nro.2, y reconociendo las conectivas, encontramos:
El día está soleado y caluroso, o, el día está nublado y frío donde las proposiciones atómicas están resaltadas en rojo, y las proposiciones compuestas se encuentran subrayadas

8.5. Conectivas en el lenguaje natural

Conectivas en el lenguaje natural

Veamos ahora el siguiente ejemplo:

Tal vez el avión se estrelló en la cordillera, tal vez realizó un aterrizaje de emergencia.

Si analizamos la oración, veremos que no cambia el significado con respecto al primer ejemplo que vimos, aunque tiene una diferencia en su redacción.

En el lenguaje natural (en nuestro caso el español), las conectivas pueden tomar diversas formas.

Si bien algunas resultan bastante obvias, hay otras que al principio resultan muy complejas de identificar e interpretar correctamente, dado que estamos menos habituados.

8.6. Indicadores de lenguaje natural

Indicadores de lenguaje natural

A estas palabras que "indican" una conectiva se las denominan Indicadores . A continuación veamos algunos ejemplos: Conectores Lógicos

Tipo de Conector	Conectores
Conjunción	", ", y, también, además, adicionalmente, en adición, ahora, incluso, inclusive, así mismo, de igual forma, del mismo modo, igualmente, sin embargo, no obstante, pero, pese, empero, aunque, aun así, a pesar de, tanto como, al igual que, por otra parte, más, “no… ni…” (el “ni” también es una negación), aparte, así mismo, “por otro lado”
Disyunción	o, “tal vez… tal vez …", "o de pronto", aunque de pronto, "puede… o … puede", aunque puede
Disyunción exclusiva	o bien
Negación	no, no es cierto que, no es verdad que, ni (también indica conjunción)

8.7. Proposiciones ocultas

Proposiciones ocultas

Para ir concluyendo sobre el concepto de proposiciones, veamos un ejemplo un poco "tramposo":

La luz está encendida o la luz está apagada

A simple vista, se distinguen claramente dos proposiciones atómicas y su correspondiente conectiva, la disyunción ("o").

1. La luz está encendida
2. La luz está apagada

Sin embargo, conociendo la naturaleza de las luces, sabemos que una luz sólo tiene dos estados posibles, estar encendida o estar apagada (olvidemos las luces con atenuación). Si una luz no está encendida, entonces está apagada, y viceversa.

Es decir, nuestras dos proposiciones son opuestas, por lo tanto, una puede expresarse en términos de la otra utilizando la conectiva de negación. Quedando así, solo una proposición atómica. ¿Cómo es esto? A ver veamos:
La oración anterior podría reescribirse como:
La luz está encendida o la luz no está encendida

Ahora sí, vemos claramente que hay solo una proposición atómica: “La luz está encendida” y las dos conectivas, disyunción (“o”) y negación (“no”) , en realidad no son necesarias.

La lógica nos permite razonar mejor acerca de lo que expresa el lenguaje natural, pues este es muy amplio y ambiguo. Sin embargo, analizar el lenguaje natural requiere mucha práctica, y observación cuidadosa sobre lo que estamos comunicando.

8.8. Análisis del lenguaje natural

Análisis del lenguaje natural: variable proposicional

Pensemos ahora la siguiente proposición compuesta:

El avión se estrelló en la cordillera o realizó un aterrizaje de emergencia y se encuentra incomunicado.

Si la analizamos bien, podemos identificar bastante información al respecto. La proposición:

1. Está compuesta por tres proposiciones atómicas
2. Tiene dos conectivas que unen sus proposiciones atómicas
3. Posee un valor de verdad

Pero, ¿cómo estructuramos toda esta información para determinar su valor de verdad?

Como ya hemos aprendido, la lógica es una rama de la matemática que se basa en las formas, y ésta no va a ser la excepción. Por tanto, la manera de estructurar una proposición compuesta y conocer su valor de verdad, consistirá en formalizar la oración mediante fórmulas.

Formalización

Antes de avanzar con el ejemplo anterior, realicemos un "paréntesis" para entender de qué se trata la formalización. Más adelante, retomaremos dicha proposición como ejemplo.

Bien, para formalizar una oración necesitaremos aprender el lenguaje de la lógica proposicional. Para ello repasemos este concepto:

Lenguaje

Un lenguaje es un sistema de comunicación, el cual se encuentra definido y estructurado.

Para comprender mejor este concepto, podemos hacer un

paralelismo con los lenguajes más conocidos: los idiomas.

Así como podemos traducir una oración del idioma español al idioma inglés, vamos a poder traducir una oración del lenguaje natural (español) al lenguaje de la lógica proposicional. Obviamente para ello deberemos conocer la estructura de cada idioma.

Variable proposicional

Reforzando el concepto una vez más, sabemos que, siendo una ciencia formal, la lógica no se focaliza en el "sentido" de las oraciones, sino en la forma en la que se encuentran estructuradas. Así, para poder traducir una proposición, deberemos identificar sus partes, (proposiciones atómicas) para reemplazarlas por, lo que se conoce, como variables proposicionales.

Definición

Una variable proposicional se refiere a una letra, a la cual le asignamos semánticamente una proposición atómica; comenzando, por convención, pero no necesariamente, desde la p y siguiendo el orden alfabético.

¿Les suena conocido?

Este método ya lo hemos utilizado al estructurar las preguntas para analizarlas mediante una tabla de verdad.

Variable proposicional - Ejemplo

Veamos la siguiente proposición de ejemplo:

“La Tierra gira en torno al Sol y gira sobre su eje”.

Como ya vimos, esta oración está compuesta por dos proposiciones atómicas. Por lo tanto, para formalizar, le asignaremos una variable proposicional a cada proposición atómica:

p = La Tierra gira en torno al Sol

q = La Tierra gira sobre su eje

Así, la traducción a lógica proposicional queda con la siguiente fórmula: “$p \wedge q$”.

Es decir que la proposición “La Tierra gira en torno al Sol y gira sobre su eje” en lenguaje natural se corresponde con la fórmula “$p \wedge q$” en lógica proposicional, y viceversa.

9. Formalización - Diccionario

Formalización - Diccionario

Este es un ejemplo simple, por lo cual la traducción es bastante fácil de seguir, pero a medida que contamos con oraciones más largas, y por ende, muchas variables, la formalización se vuelve más compleja. Es por ello que, la lógica nos provee otro elemento para organizar estas variables.

Diccionario

Se lo conoce como diccionario del lenguaje al conjunto de asignaciones de variables con nociones semánticas.

Tanto para generar una fórmula, como para traducirla, vamos a necesitar de su correspondiente diccionario.

9.1. Ejemplo completo

Formalización - Ejemplo completo

Paso 1: Conectivas: una disyunción (“o”) , y una conjunción (“y”).

Paso 2: Proposiciones atómicas:

1. **El avión se estrelló en la cordillera**
2. **El avión realizó un aterrizaje de emergencia**
3. **El avión se encuentra incomunicado**

Nuevamente, notar que al formular, no escribimos simplemente, "Realizó un aterrizaje de emergencia” , dado que estaría faltando el sujeto. Las proposiciones atómicas deben leerse independientemente del

resto y respetar el sentido de la oración original.

Paso 3: Diccionario:

p = El avión se estrelló en la cordillera

q = El avión realizó un aterrizaje de emergencia

r = El avión se encuentra incomunicado

De esta forma, cuando nombremos a “p” en la fórmula, sabremos que se corresponde con la proposición “El avión se

estrelló en la cordillera".

Paso 4: Traducción (fórmula lógica): p ∨ (q ∧ r).

9.2. Uso de paréntesis

Formalización - Uso de paréntesis

Como habrán notado en la fórmula del ejemplo anterior, incluimos paréntesis que hasta ahora no habían sido necesarios.

¿Por qué creen que en este caso sí lo son?

Veamos, ¿cómo realizaríamos la traducción de la expresión sin paréntesis?: $p \vee q \wedge r$.

Claramente queda muy ambiguo. Por otro lado, como ya vimos en la presentación anterior, las conectivas, en su mayoría, actúan entre dos expresiones, en este caso, entre dos proposiciones. Por lo que para desambiguar, necesitamos colocar paréntesis sí o sí.

Pero entonces, ¿dónde los colocamos? Sabemos que tenemos dos posibilidades:

$p \vee (q \wedge r)$ **, y** $(p \vee q) \wedge r$

¿Representan lo mismo ambas expresiones?

Intuitivamente diríamos que no. ¿Cómo lo podemos asegurar de manera empírica?

9.3. Comprobación empírica

Formalización - Comprobación empírica

Para comprobarlo, basta con utilizar una herramienta que ya conocemos: realizar una tabla de verdad para cada expresión, y comparar las valuaciones de ambas tablas. A continuación queda evidenciado, que ambas expresiones no significan lo mismo, dado que no tienen exactamente las mismas valuaciones.

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

Probablemente, se preguntarán ¿por qué tenemos que demostrarlo empíricamente?

Pues, para muchas disciplinas que utilizan la lógica como ciencia de apoyo, poder analizar correctamente una oración es de vital importancia.

Imaginemos por ejemplo un/a abogado/a que intenta probar la inocencia de su cliente, o un/a sociólogo/a intentando analizar un discurso político.

Por ese motivo, las ciencias empíricas y formales intentan evitar el uso de lenguajes ambiguos dentro de sus libros, e intentar dejar muy en claro qué fórmula es la que corresponde a un texto, dentro de la misma redacción.

9.4. Fórmulas bien formuladas

Fórmulas bien formuladas

Es importante que cuando llegues a la traducción de una fórmula lógica, la misma este bien formulado o bien expresada.

A continuación veremos las formas que puede adoptar una fórmula bien formulada:

- **Toda variable proposicional es una fórmula válida (proposiciones atómicas)**
- **Si A es una fórmula válida, entonces (¬ A) también lo es Si A y B son fórmulas válidas, entonces:**
  - **A ∧ B es una fórmula válida**
  - **A ∨ B es una fórmula válida**
  - **A XOR B es una fórmula válida**

donde A y B, pueden ser tanto proposiciones atómicas como compuestas.

Ejemplo: A= p y B= q

ó

A= (p ∧ q) B= (r ∨ s)

A continuación te damos varios ejemplos de fórmulas bien expresadas.

p

p ∧ q

(p ∧ q) ∨ (r ∨ s)

¬(p ∧ q)

Podés reemplazar estas fórmulas por A y B, para comparar con las reglas que te dimos en la diapo anterior, y ver que efectivamente son válidas.
Ahora entonces ¿qué formas no serían válidas?

Veamos un par de ejemplos:

1. Sin uso de paréntesis:

p ∧ q ∨ r

Al no aplicar paréntesis, la traducción es ambigua, y la fórmula no puede ser traducida correctamente.

2. Mal uso de las conectivas:

p¬q

p ∧ ∨q

En el primero, utiliza una conectiva de negación para unir 2 proposiciones, cuando la negación sólo trabaja sobre una.

En el segundo, utiliza 2 conectivas juntas consecutivamente, cuando las conectivas operan sobre expresiones. El único caso que ésto puede ser válido es con una negación, siempre y cuando se haga uso correcto de los paréntesis: p ∧ (¬q)

10. Resumen general

Resumiendo

Las tablas de verdad nos permiten analizar expresiones y así obtener conclusiones

La lógica proposicional o de orden cero, es la lógica que tiene como objeto de estudio las proposiciones.

Una proposición es una oración escrita utilizando la función informativa del lenguaje.

Toda proposición tiene un valor de verdad, ya sea VERDADERO o FALSO

Las proposiciones pueden ser atómicas, es decir, sin tener conectivas. Las proposiciones pueden ser compuestas, es decir, contener conectivas.

En una fórmula lógica identificamos cada proposición atómica con una variable proposicional distinta. Para realizar traducciones entre el lenguaje natural y la lógica proposicional necesitamos construir un diccionario.

Para armar el diccionario y posterior traducción, necesitas conocer el lenguaje de lógica proposicional.

A continuación veremos, a modo de resumen, cada una de las partes que involucran una fórmula en lógica proposicional:

Símbolos descriptivos:

Las variables proposicionales (letras minúsculas), donde cada letra representa una proposición atómica.

Símbolos lógicos: Conectivas

Conjunción “∧”

Disyunción “∨”

Disyunción exclusiva “XOR”

Negación “¬”

Símbolos auxiliares: (de necesitarse)

Los paréntesis: “(” , “)”