Lógica de Predicados

Sitio:	Agencia de Habilidades para el Futuro	Imprimido por:	RODRIGO PINTO
Curso:	Lógica Computacional 1°D	Día:	martes, 26 de noviembre de 2024, 10:00
Libro:	Lógica de Predicados		

Descripción

Tabla de contenidos

1. Limitaciones de la lógica proposicional

Limitaciones de la lógica proposicional

Analicemos el siguiente razonamiento en lenguaje natural:
"Todos los perros son animales. Firulais es un perro. Por tanto, Firulais es un animal."

Si lo estructuramos el razonamiento queda:

- Todos los perros son animales
- Firulais es un perro
- Firulais es un animal

Suena lógico ¿verdad? Pareciera tratarse de un razonamiento válido y que si las premisas desde las cuales partimos son verdaderas, entonces la conclusión también debería serlo.

2. Limitaciones de la lógica proposicional - Análisis

Limitaciones de la lógica proposicional - Análisis

Vamos a formalizar el razonamiento para corroborar nuestro análisis. Observamos que contiene todas proposiciones atómicas. Por lo cual, nuestro diccionario queda de la siguiente manera:

p = Todos los perros son animales

q = Firulais es un perro

r = Firulais es un animal

Al extrapolar, el razonamiento en lógica proposicional queda:

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline r \end{array}$$

Vemos que la conclusión es independiente de las premisas, es decir, no se deduce de las mismas, por tanto, el razonamiento es INVÁLIDO.

2.1. Resolución

Limitaciones de la lógica proposicional - Resolución

Pero entonces, ¿cómo puede ser?, ¿cuál es el problema de nuestro razonamiento? ¿Será que es realmente inválido y nuestra intuición nos falló?

Pues no, la problemática radica en que las proposiciones mencionan una situación del universo general ("Todos los perros...") , pero no hacen mención sobre las características, ni estructura interna de dicha situación. En este ejemplo, una parte de lo mencionado en p ("Todos los perros son animales"), es utilizado por q ("...es un perro"), pero otra parte por r ("... es un animal"), es decir, el mismo individuo (Firulais), es mencionado tanto en q como en r. Esto se debe a que la lógica proposicional no involucra ni profundiza sobre individuos del universo. Lo cual nos lleva a entender que este lenguaje tiene ciertas limitaciones.

De esta manera...

Nuestra intuición no nos falló, lo que sucede es que estamos utilizando el lenguaje incorrecto para dicho ejemplo, ya que el mismo no nos provee las herramientas necesarias para construirlo.

3. Lógica de predicados

Lógica de predicados

Para expresar, y analizar oraciones más complejas y específicas, necesitamos una nueva herramienta.

Así es que la lógica, nos brinda un nuevo lenguaje con las herramientas necesarias para expresar y traducir oraciones que representen individuos, relaciones entre ellos y las características del universo.

Este nuevo lenguaje se llama lógica de predicados, también conocido como lógica de orden uno o lógica de primer orden.

Lógica de predicados

Este lenguaje nos va a permitir formalizar oraciones sobre individuos, sobre sus propiedades, y sobre cómo esos individuos se relacionan entre sí. Notar que la lógica de orden uno engloba a la lógica de orden cero. Es decir, que todo lo que se puede formalizar con lógica proposicional, también se puede formalizar con lógica de predicados, pero como ya vimos en el ejemplo anterior, no funciona al revés.

3.1. Elementos de la lógica de predicados

Elementos de la lógica de predicados

La lógica de predicados es un lenguaje, y como tal, podremos traducir oraciones al lenguaje natural y viceversa.

Para ello, aprovecharemos las mismas herramientas que ya conocemos de la lógica proposicional: la elaboración de un diccionario para formalizar las oraciones correspondientes.

Para elaborar el diccionario necesitaremos conocer los 4 elementos principales que nos brinda la lógica de predicados:

1. El/los dominios
2. Individuos
3. Propiedades
4. Relaciones

3.2. El dominio

El dominio

Los individuos, las propiedades y relaciones son parte de un elemento mayor: El dominio.

Definición

El dominio es el conjunto de valores que puede tomar cada individuo al cual le queremos aplicar una propiedad o relación. Básicamente, es el conjunto de individuos que queremos representar.

El dominio puede identificarse con el universo total o puede ser un conjunto restringido del mismo (un subconjunto). Por ejemplo, dentro del universo del cine, podemos contar con el dominio de las películas, el dominio de las plataformas para mirar películas, el dominio de las series, el dominio de las empresas que producen películas, etc.

Pero, ¿cómo definimos un dominio?

Bien, por ejemplo, si quisiéramos trabajar con 4 películas puntuales, las podemos definir enumerándolas una por una. Ahora bien, ¿qué pasa si quisiéramos expandir nuestro grupo de valores a todas las películas del mundo que se hayan filmado? Se tornaría muy tedioso, y hasta imposible agregar el resto una por una.

Es por esto que contamos con 2 maneras de definir el dominio: por extensión (o enumeración) y por comprensión. Por extensión: es la manera de definir la 1.ª situación, enumerando uno por uno cada valor.

Ejemplo: Dominio = [“La vida es bella”, “El hijo de la novia”, “Tiempo de valientes”, “Duro de matar”].

Este caso se utiliza para conjuntos muy reducidos. Por comprensión: simplemente mencionando el nombre del conjunto, por ejemplo: Dominio = películas. Es importante saber que pueden coexistir más de un dominio. Las oraciones más interesantes manejan 2 dominios.

3.3. Individuos

Individuos

Retomemos el ejemplo inicial: “Todos los perros son animales. Firulais es un perro. Por tanto, Firulais es un animal.”

En este ejemplo, ¿cuál creen que es el individuo? Para responder esta pregunta, veamos la definición de Individuo:

Definición

Un individuo es un elemento único e irrepetible del dominio. Puede ser una persona (Ariel, Ana, Belén), un animal (Firulais, Rocinante), o un valor más abstracto (El número 3, El color verde, etc.). Para determinar un individuo es necesario que sea identificable de forma unívoca. Si hablamos de “Ariel”, nos referimos a un solo Ariel, tiene un DNI único. Podemos saber quién es y señalarlo con el dedo. No hablamos de una persona cualquiera, sino de alguien particular: Ariel González.

Individuos dentro de un conjunto

Pero, ¿por qué hacer esta aclaración que parece tan obvia? Porque la manera en que identificamos a un individuo va a depender enteramente del dominio que estemos trabajando. Por ejemplo, si nuestro dominio, contempla el siguiente grupo de amigxs: [“Camila, Sofía, y Martín”], es muy simple identificar a cada individuo, pero si, en cambio, nuestro dominio se conforma de todas las personas que estudian en la universidad, es muy probable que haya más de una persona con el mismo nombre, ejemplo, más de una “Camila”. Por lo que debemos especificar mucho más acerca de qué “Camila” se trata, dado que son 2 individuos diferentes, es decir, debemos desambiguar para saber claramente sobre quién estamos hablando. Es importante notar que “Camila” es solo un nombre, pero lo que importa es la persona que representa dicho nombre, es decir, lo que importa no es el nombre, sino el individuo en sí.

Mismo individuo, muchas formas

Los números, por ejemplo, son elementos únicos e irrepetibles. Cinco es cinco, siempre. Sin embargo, podemos decir “cinco”, pero si habláramos en otro idioma diríamos por ejemplo “cinq”, “cinque”, “five”, “fem”, etc. Incluso en nuestro lenguaje cotidiano, sin hablar otro idioma, tenemos símbolos que representan al mismo individuo como ser “5”, o “V” (en números romanos). Más aún, si escribimos “3+2” o “4+1”, ¿Qué representan? Podríamos decir que es otra forma de escribir cinco. En este caso, lo que importa no es cómo lo escribimos, sino lo que queremos representar... el individuo en sí.

3.4. Propiedad

Propiedad

Mediante la lógica de predicados vamos a describir el universo. Mejor dicho, vamos a describir una parte puntual y significativa del mismo, el dominio, y para ello será necesario utilizar propiedades.

Definición

Una propiedad es un adjetivo, una cualidad, característica o atributo que puede aplicarse a un individuo perteneciente a un dominio. De esta manera podemos decir que “es un caballo valiente”, es una propiedad que puede aplicarse al individuo “Rocinante” del dominio de los animales.

4. Cuantificadores

Cuantificadores

Un cuantificador es una expresión que indica la cantidad de veces que un predicado es VERDADERO al aplicarse a cada uno de los individuos del dominio. Contamos con 3 tipos de cuantificadores:

1. Cuantificador universal: $\forall$
2. Cuantificador existencial: $\exists$
3. Cuantificador existencial negado: $\nexists$

4.1. Cuantificador Universal

Cuantificador Universal

El Cuantificador Universal se utiliza para representar conjuntos que afirman que todos los individuos del dominio cumplen el predicado.

Es decir, que si aplicamos el predicado a cada uno de los individuos del dominio, este debe dar VERDADERO en todos los casos. El símbolo para representar el cuantificador universal es: ∀, y se lee “Para todo”.

Veamos como ejemplo la oración mencionada anteriormente: “Todas las bandas de rock son populares”

- Diccionario: P(x) = x es una banda de rock popular
- Fórmula: ∀x.P(x)

Si analizamos cómo funciona el cuantificador universal, esta expresión es equivalente a decir: $\forall x.P(x) = P(c1) \wedge P(c2) \wedge P(c3) \wedge ... \wedge P(cn-1) \wedge P(cn)$, donde cada ci representa la constante del individuo i, y el cuantificador se aplica a toda la fórmula que viene luego del cuantificador, no a un único predicado.

Variables aplicadas a los predicados

¿Qué significa ∀x?, o mejor dicho, ¿qué representa esa x? Al igual que en la definición de los predicados, los cuantificadores también utilizan variables , pero en este caso la variable x no representa a un único individuo, sino al dominio completo, es decir, a todos los individuos. Los cuantificadores siempre se aplican al dominio completo, independientemente de su resultado.

La manera de interpretar esta fórmula es: “Para todo individuo del dominio de x, esa x cumple con el predicado.” ¿Por qué es importante asignarle una variable al cuantificador? Porque podemos cuantificar más de un individuo.

4.2. Cuantificador Existencial

Cuantificador Existencial

El cuantificador existencial se utiliza para representar conjuntos que afirman que algún individuo del dominio (o más de uno) cumplen el predicado.

Es decir, que si aplicamos el predicado a cada individuo del dominio, habrá al menos uno para el cual el predicado evaluará VERDADERO.

El símbolo para representar el cuantificador existencial es: $\exists$, y se lee “Existe”. Si queremos decir que “Algún individuo cumple el predicado R” escribimos: $\exists x.R(x)$ Si analizamos la fórmula, esto es equivalente a decir: $\exists x.R(x) = R(c1) \lor R(c2) \lor R(c3) \lor \dots \lor R(cn-1) \lor R(cn)$

4.3. Cuantificador Existencial Negado

Cuantificador Existencial Negado

El cuantificador existencial negado se utiliza para representar conjuntos que afirman que ningún individuo cumple el predicado. Es decir, que si aplicamos el predicado a cada individuo del dominio, todos los predicados evaluarán FALSO.

El símbolo para representar el cuantificador existencial negado es: ∄, y se lee "No existe".

Si queremos decir que "Ningún individuo cumple el predicado R", escribimos: $\nexists x.R(x)$.

Si analizamos la fórmula, esto es equivalente a decir:

$$\nexists x.R(x) = (\neg R(c1)) \wedge (\neg R(c2)) \wedge (\neg R(c3)) \wedge (\neg \ldots \wedge (\neg R(cn-1)) \wedge (\neg R(cn))$$

En este sentido se puede encontrar la siguiente equivalencia:

$$\nexists x.P(x) = \forall x.\neg P(x)$$

Si la interpretamos, observamos que está más cerca del cuantificador universal, pues también es lo mismo que decir “Todos no cumplen con ...” Se llama “cuantificador existencial negado” porque decir “Ninguno ...” Es lo mismo que decir “No existe alguno que ...”

5. Conclusiones

Conclusiones

Como conclusión de estos ejemplos podemos destacar que:

- **Siempre necesitamos definir un diccionario para armar o formalizar proposiciones**
- **Para proposiciones compuestas, al igual que en lógica proposicional, utilizamos conectivas**
- **Un individuo debe ser único, no puede ser un conjunto**
- **En lugar de definir un conjunto como constante, definimos la propiedad que lo describe. Ejemplo:"Las bandas de rock nacionales" no es un individuo, es una propiedad que se aplica a un individuo. Y si necesitamos extenderlo a más de uno, utilizamos un cuantificador.**
- **Los predicados cuantificados siempre se aplican al dominio completo y según la cantidad de casos que valúan VERDADERO podemos obtener como resultado un subconjunto del mismo o el conjunto total, dependiendo del tipo de cuantificador utilizado. Si se quisiese determinar qué casos valuaron verdadero y cuáles no, se deberá armar una tabla de verdad para su correspondiente análisis.**