# Sistemas de ecuaciones lineales nxn

| | |
|---|---|
| Sitio: | Agencia de Habilidades para el Futuro |
| Curso: | Elementos de Analisis Matematico 1° D |
| Libro: | Sistemas de ecuaciones lineales nxn |
| Imprimido por: | RODRIGO PINTO |
| Día: | martes, 26 de noviembre de 2024, 06:55 |

# Tabla de contenidos

# 1. Vinculación con el acertijo: "¿Cuánto vale cada fruta?"

En el acertijo "¿Cuánto vale cada fruta?", el número de cada fruta se puede pensar como una incógnita, ya que no lo conocemos y queremos averiguarlo. Además, en cada renglón, las incógnitas se relacionan mediante operaciones matemáticas y se muestra el total, por lo que podemos pensarlas como ecuaciones.


Por otro lado, el objetivo era encontrar el valor de cada fruta que hicieran verdaderas las tres ecuaciones simultáneamente. Por lo tanto, el concepto de sistema de ecuaciones vuelve a aparecer.

Si llamamos $x$ al valor de la frutilla, $y$ al de la naranja y $z$ al de la banana, podemos escribir lo anterior como el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 22 \\ x + 2y + z = 19 \\ x + y + 3z = 30 \end{cases}$$

La solución que debieron encontrar es: $x = 6, y = 3$ y $z = 7$. Vamos a verificar para comprobar que efectivamente es la solución:

$$2 \cdot 6 + 3 + 7 = 12 + 3 + 7 = 22$$

$$6 + 2 \cdot 3 + 7 = 6 + 6 + 7 = 19$$

$$6 + 3 + 3 \cdot 7 = 6 + 3 + 21 = 30$$

Este es un sistema de ecuaciones lineales de $3 \times 3$, ya que tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas.

Como las tres ecuaciones se verifican para esos valores de las incógnitas, la terna $(6, 3, 7)$ es la solución al sistema. Importante anotar los valores en orden. También podemos indicar la solución de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

# 2. Introducción

En esta sección vamos a introducirnos en los **sistemas de ecuaciones lineales**, comenzando por las concepciones básicas de la misma.

**Te invitamos recorrer el índice de la derecha, el cual contiene lo siguiente:**

- Vinculación con el acertijo: ¿Cuánto vale cada fruta?
- Forma matricial de un SEL
- Regla de Cramer
- Conceptos previos
- Teorema de Rouché-Frobenius
- Eliminación gaussiana
- Resolución de problemas

# 3. Definición

Se llama sistema de $m$ ecuaciones lineales con $n$ incógnitas, a un conjunto de $m$ ecuaciones lineales en las mismas $n$ incógnitas. En forma general, tenemos:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Llamaremos solución del sistema a cada asignación de valores de las incógnitas $\{x_1 = k_1, x_2 = k_2, \ldots, x_n = k_n\}$ que sea solución común a todas las ecuaciones del sistema, es decir, que verifique todas las igualdades simultáneamente. Se llama solución general del sistema, al conjunto de todas las soluciones del sistema. Resolver un sistema es hallar su solución general.

Cuando el sistema tiene hasta cuatro incógnitas, se suelen emplear las siguientes letras: $x,\ y,\ z,\ w$, en lugar de $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$.

Veamos un ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - y + 4z = -4 \\ -5x + 2z = 6 \\ x + y - 6z = -1 \\ x + y + z = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Este es un sistema de $4$ ecuaciones lineales con $3$ incógnitas. Observá que en la segunda ecuación falta la incógnita $y$. En caso de ser necesario, se puede completar con $0y$.

Veamos si la terna $\left(-1, 3, \frac{1}{2}\right)$ es solución del sistema anterior:

$$3 \cdot (-1) - 3 + 4 \cdot \frac{1}{2} = -3 - 3 + 2 = -4$$

$$-5 \cdot (-1) + 2 \cdot \frac{1}{2} = 5 + 1 = 6$$

$$-1 + 3 - 6 \cdot \frac{1}{2} = -1 + 3 - 3 = -1$$

$$-1 + 3 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Como se verifican las cuatro ecuaciones, es correcta la terna $\left(-1, 3, \frac{1}{2}\right)$. Recordá que con que no se verifique una de ellas, no es solución al sistema.

Si tenemos un sistema con igual cantidad de incógnitas que de ecuaciones, decimos que es un sistema de ecuaciones lineales de $n \times n$. Un ejemplo es el sistema armado en el acertijo "¿Cuánto vale cada fruta?", en el cual había tres ecuaciones y tres incógnitas.

# 4. Forma matricial de un SEL

Cualquier sistema de ecuaciones lineales (SEL) se puede expresar de forma matricial.
En forma general, el SEL

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

se puede escribir como:

$$AX = B$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Observación: se puede comprobar que la expresión $AX = B$ es equivalente al sistema expresado, puesto que al efectuar el producto entre $A$ y $X$ e igualarlo a $B$, se tienen las ecuaciones de dicho sistema.

A la matriz $A$ se le llama matriz del sistema o de los coeficientes. El vector $X$ es el de las incógnitas y el vector $B$, es el de los términos independientes.

Por ejemplo, el sistema de nuestro acertijo era:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 22 \\ x + 2y + z = 19 \\ x + y + 3z = 30 \end{cases}$$

De forma matricial nos queda $AX = B$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 22 \\ 19 \\ 30 \end{pmatrix}$$

De esta manera, resolver el sistema de ecuaciones lineales se transforma en resolver la ecuación matricial $AX = B$ que, como se vio en el recorrido 4, el "despeje" queda: $X = A^1 \cdot B$. Entonces, al resolver el producto entre la matriz inversa de los coeficientes y la matriz de los términos independientes, obtendremos la matriz de las incógnitas $X$ y por ende, la solución al sistema de ecuaciones lineales. Podés resolverlo y verás que la solución es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

### Matriz ampliada del sistema

Llamamos matriz ampliada del sistema, a la matriz que se forma cuando añadimos a la matriz de los coeficientes, el vector de los términos independientes:

$$A^* = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Para nuestro ejemplo, la matriz ampliada es:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 22 \\ 1 & 2 & 1 & 19 \\ 1 & 1 & 3 & 30 \end{array}\right)$$

# 4.1. Clasificación de los SEL

Estableceremos tres criterios básicos para la clasificación de los SEL.

### 1. Según la solución

Atendiendo a la existencia o no de soluciones de un sistema y al número de estas, se da la siguiente clasificación.

Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es un sistema incompatible si no tiene solución. Por el contrario, se dice que es un sistema compatible si tiene alguna solución.

Como ya vimos en la semana anterior, en este último caso solo caben dos posibilidades:

- Que el sistema tenga una única solución, y en este caso se dice que es un sistema compatible determinado,
- Que tenga infinitas soluciones, llamándose sistema compatible indeterminado.

En consecuencia, la solución general de un sistema compatible determinado consistirá en la única solución posible del sistema. Mientras que la solución general de un sistema compatible indeterminado, vendrá expresada en función de uno o más parámetros. En este último caso, para cada asignación de valores que le demos a los parámetros obtendremos una solución concreta del sistema.

### 2. Según la naturaleza de los términos independientes

Un sistema se puede clasificar a partir de observar las características del vector de los términos independientes $B$.

Si $B$ es el vector nulo de orden $m \times 1$, diremos que el sistema es homogéneo. En caso de que al menos un elemento de $B$ sea no nulo, el sistema será no homogéneo.

Simbólicamente:

$$AX = B \text{ es homogéneo si y solo si } B = 0_{m\times 1}$$

$$AX = B \text{ es no homogéneo si y solo si } B \neq 0_{m\times 1}$$

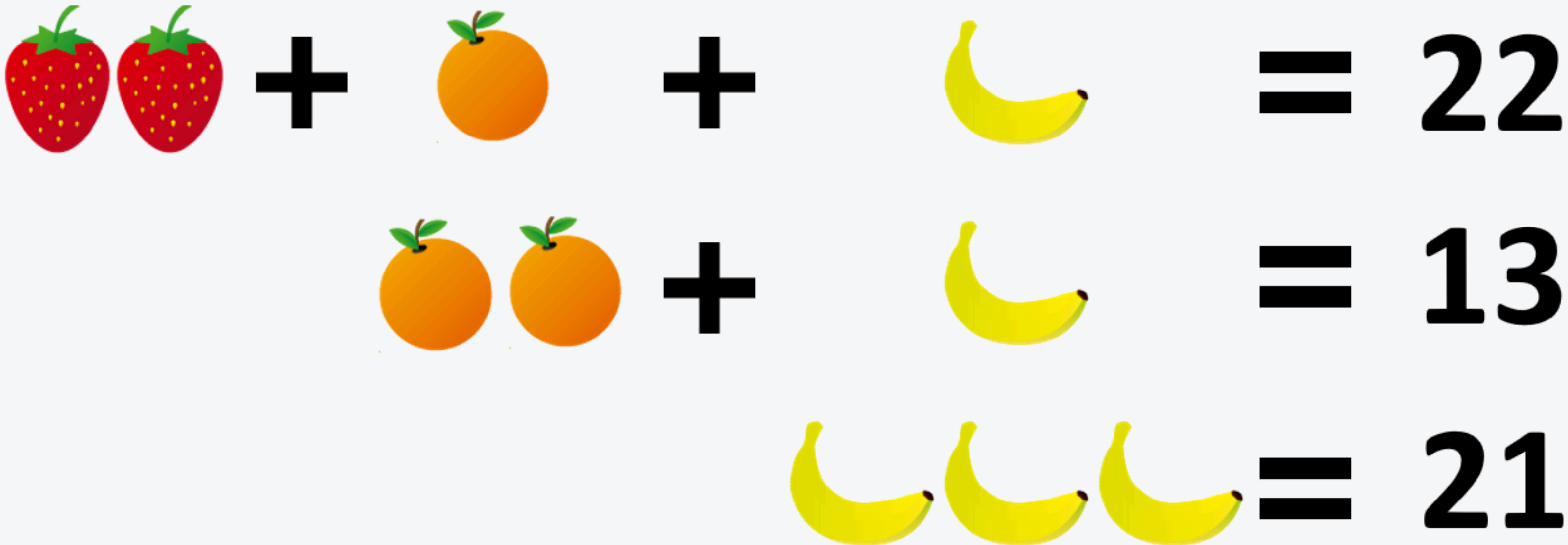
### 3. Según el número de ecuaciones y de incógnitas

Otra forma de clasificar los sistemas es a partir del número de ecuaciones $(m)$ y el número de incógnitas $(n)$ que lo conforman. Si estos números son iguales, diremos que el SEL es normal $(m = n)$. En cambio, si son diferentes, el sistema se considera general $(m \neq n)$.

Si clasificamos el sistema de ecuaciones del acertijo "¿Cuánto vale cada fruta?", decimos que es compatible determinado, no homogéneo y normal.

# 4.2. SEL triangulares

Si el acertijo de las frutas hubiera estado presentado así:




Hubiera sido más simple resolverlo, ¿verdad? Porque con la última ecuación podemos encontrar el valor de la banana. Luego, reemplazamos ese valor en la ecuación de arriba y encontramos el de la naranja. Finalmente, sustituimos estos dos valores en la primera y encontramos el número correspondiente a la frutilla. Este procedimiento se conoce como sustitución escalonada.

Utilizando letras para las incógnitas, el sistema nos queda:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 22 \\ 2y + z = 13 \\ 3z = 21 \end{cases}$$

Este sistema se dice que está en forma triangular o escalonado, porque la incógnita $x$ no aparece en la segunda ecuación, y las incógnitas $x$ e $y$ no aparecen en la tercera ecuación.

Es fácil resolver un sistema que está en forma triangular si se usa sustitución, como veremos a continuación:

De la ecuación $3$, obtenemos el valor de $z$ haciendo:

$$3z = 21$$

$$z = 21 : 3$$

$$z = 7$$

Sustituimos el valor de $z$ en la ecuación $2$ y despejamos $y$:

$$2y + 7 = 13$$

$$2y = 13 - 7$$

$$y = 6 : 2$$

$$y = 3$$

Finalmente, en la ecuación $1$ reemplazamos los valores de $y$ y $z$, y despejamos la incógnita $x$:

$$2z + 3 + 7 = 22$$

$$2x = 22 - 3 - 7$$

$$x = 12 : 2$$

$$x = 6$$

Por lo tanto, la solución es la terna $(6, 3, 7)$ que coincide con lo que habíamos dicho antes.

# 5. Regla de Cramer

Vamos a extender el método de determinantes aprendido con sistemas de ecuaciones lineales de $2 \times 2$, para sistemas de ecuaciones lineales de $n \times n$. Considere el sistema de $n$ ecuaciones lineales con $n$ incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2 \\ ~\vdots~~~~~~~~~~~~~ \vdots ~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~ \vdots ~~~~~~~~~~ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

que puede escribirse en la forma:

$$AX=B$$

Si $\left| \begin{matrix} A \end{matrix} \right| \neq 0$, el sistema tiene una solución única. A partir de la matriz $A$ se definen $n$ nuevas matrices:

$$A_1=\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & ... & a_{1n}\\ b_2 & a_{22} & ... & a_{2n}\\ \vdots &\vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & ... & a_{1n}\\ a_{21} & b_2 & ... & a_{2n}\\ \vdots &\vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, ... , A_n=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & b_1\\ a_{21} & a_{22} & ... & b_2\\ \vdots &\vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & b_n \end{pmatrix}$$

Es decir, $A_i$ es la matriz obtenida al reemplazar la columna $i$ de $A$ por $B$.

Una vez aclarado lo anterior, estamos en condiciones de enunciar la regla de Cramer.

### Regla de Cramer

Sea $A$ una matriz de $n \times n$ y suponga que $\left| \begin{matrix} A \end{matrix} \right| \neq 0$. Entonces, la solución única al sistema $AX=B$ está dada por:

**$x_1= \frac{ \left| \begin{matrix} A_1\end{matrix} \right| }{ \left| \begin{matrix} A \end{matrix} \right| }$, $x_2= \frac{ \left| \begin{matrix} A_2\end{matrix} \right| }{ \left| \begin{matrix} A \end{matrix} \right| }$, ... , $x_i= \frac{ \left| \begin{matrix} A_i\end{matrix} \right| }{ \left| \begin{matrix} A \end{matrix} \right| }$, ... , $x_n= \frac{ \left| \begin{matrix} A_n\end{matrix} \right| }{ \left| \begin{matrix} A \end{matrix} \right| }$**

### Solución de un sistema de 3 x 3 utilizando la regla de Cramer

Vamos a resolver el siguiente sistema aplicando la regla de Cramer:

$$\begin{cases} 2x+4y+6z=18 \\ 4x+5y+6z=24 \\ 3x+y-2z=4 \end{cases}$$

Primero vamos a armar la matriz de los coeficientes:

$$A= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6\\ 4 & 5 & 6\\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ahora calcularemos su determinante, como se explicó en el recorrido 4:

$$\left| \begin{matrix} A \end{matrix} \right|=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6\\ 4 & 5 & 6\\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} =6 \neq 0$$

de manera que el sistema tiene una única solución. Después, calculamos el resto de los determinantes de las matrices que se obtienen de cambiar la columna por los términos independientes, como se muestra a continuación:

$$\left| \begin{matrix} A_1 \end{matrix} \right| =\begin{vmatrix} 18 & 4 & 6\\ 24 & 5 & 6\\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} =24, \quad \left| \begin{matrix} A_2 \end{matrix} \right| =\begin{vmatrix} 2 & 18 & 6\\ 4 & 24 & 6\\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} =-12 \quad \text{y} \quad \left| \begin{matrix} A_3 \end{matrix} \right| =\begin{vmatrix} 2 & 4 & 18\\ 4 & 5 & 24\\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} =18.$$

Para calcular el valor de cada incógnita hacemos:

$$x_1= \frac{ \left| \begin{matrix} A_1\end{matrix} \right| }{ \left| \begin{matrix} A \end{matrix} \right| }= \frac{24}{6}=4, \quad x_2= \frac{ \left| \begin{matrix} A_2\end{matrix} \right| }{ \left| \begin{matrix} A \end{matrix} \right| }= -\frac{12}{6}=-2, \quad \text{y} \quad x_3= \frac{ \left| \begin{matrix} A_3\end{matrix} \right| }{ \left| \begin{matrix} A \end{matrix} \right| }= \frac{18}{6}=3$$

Por lo tanto, la solución al sistema de ecuaciones es $(4,-2,3)$. Pueden verificar y comprobar que efectivamente esta es la solución.

### Solución de un sistema de 4 x 4 usando la regla de Cramer

Te proponemos que resuelvas el siguientes sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+3y+5z+2w=2 \\ ~~~-y+3z+4w=0 \\ 2x+y+9z+6w=-3 \\ 3x+2y+4z+8w=-1 \end{cases}$$

La solución a la cual debés llegar es la siguiente:

$$x= -\frac{29}{10},~y= \frac{7}{4}, ~z=- \frac{7}{20},~ w= \frac{7}{10}$$

# 6. Conceptos previos

Vamos a ver y recordar algunos conceptos previos antes de mostrar otros métodos de resolución que sirven para cualquier tipo de sistemas de ecuaciones lineales.

### Operaciones elementales entre renglones

Dada una matriz, se pueden realizar las siguientes operaciones elementales entre renglones:

1. Sumar un múltiplo de un renglón a otro.
2. Multiplicar un renglón por una constante diferente de cero.
3. Intercambiar dos renglones.

Usamos la siguiente notación para describir las operaciones elementales de renglones:

| Símbolo | Descripción |
|---|---|
| $R_i \rightarrow R_i+kR_j$ | Cambia el i-ésimo renglón al sumar $k$ veces el renglón $j$ a él, y luego regresa el resultado al renglón $i$. |
| $R_i \rightarrow kR_i$ | Multiplica el i-ésimo renglón por $k$. |
| $R_i \leftrightarrow R_j$ | Intercambia los renglones i-ésimo y j-ésimo. |

**Ejemplo**

Dada la matriz:

$$A=\left( \begin{matrix} 8 & 0 & 2\\ 2 & 7 & 1\\ 6 & 3 & 9 \end{matrix} \right)$$

podemos realizar las siguientes operaciones entre renglones:

$$A=\left( \begin{matrix} 8 & 0 & 2\\ 2 & 7 & 1\\ 6 & 3 & 9 \end{matrix} \right)R_3 \rightarrow \frac{1}{3}R_3 \left( \begin{matrix} 8 & 0 & 2\\ 2 & 7 & 1\\ 2 & 1 & 3 \end{matrix} \right)R_1 \leftrightarrow R2 \left( \begin{matrix} 2 & 7 & 1\\ 8 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 3 \end{matrix} \right)R_1 \rightarrow R_1+(-1)R_3 \left( \begin{matrix} 0 & 6 & -2\\ 8 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 3 \end{matrix} \right)$$

Primero multiplicamos el renglón $3$ por $\frac{1}{3}$. Luego, intercambiamos los renglones $1$ y $2$ entre sí. Por último, cambiamos el renglón $1$ por la suma de él y el producto entre $-1$ y el renglón $3$.

### Matriz escalonada por renglones

En el recorrido 4 ya se habló de matrices escalonadas. Sin embargo, aquí lo volvemos a retomar y vamos a exigirle además que cada primer número sea $1$. Esto no es necesario, pero si facilitará el trabajo a la hora de resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Una matriz de tamaño $m \times n$ se llama escalonada por renglones si cumple con las siguientes condiciones:

1. El primer número diferente de cero de cada renglón (leyendo de izquierda a derecha) es $1$. Este se llama pivote o entrada inicial.
2. La entrada inicial de cada renglón está a la derecha de la entrada inicial del renglón situado inmediatamente arriba de él.

3. Todos los renglones formados enteramente de ceros están en la parte inferior de la matriz.

Una matriz está en forma escalonada reducida por renglones si está en la forma escalonada y también satisface la siguiente condición:

- Todo número arriba y debajo de cada entrada inicial es un $0$.

Por ejemplo, la matriz $A$ está escalonada por renglones, no así la matriz $B$. Por su parte, la matriz $C$ está escalonada reducida:

$$A=\left( \begin{matrix} 1 & -2 & 7 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 8 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right), \quad B=\left( \begin{matrix} 0 & 1 & 7 & 9\\ 1 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right), \quad C=\left( \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \end{matrix} \right)$$

Observación: dada una matriz podemos lograr otra matriz equivalente escalonada, aplicando las operaciones por renglones. También se puede hacer con la calculadora Symbolab, como explicaremos más adelante.

### Rango de una matriz

Dada una matriz $A$ de cualquier tamaño, el rango de la misma está dado por el número de filas o renglones no completamente nulos una vez que la matriz esté en la forma escalonada. Este número se indica con $rg(A)$.

Por ejemplo, si tomamos las matrices anteriores, $rg(A)=3$ y $rg(C)=3$. Para determinar el rango de la matriz $B$, primero se debe llevarla a su forma escalonada.

Usando Symbolab, se puede calcular el rango de cualquier matriz colocando el comando "rango", seguido de la matriz dada.

# 7. Teorema de Rouché-Frobenius

Sea $AX = B$ la representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales y sea $A^*=(A|B)$ la matriz ampliada del sistema. Entonces, el sistema es compatible si y solo si $rg(A)=rg(A^*)$. En este caso el sistema es compatible determinado si $rg(A)$ coicnide con el número de incógnitas, y es compatible indeterminado si $rg(A)$ es menor que el número de incógnitas.
Por ejemplo, en el acertijo "¿Cuánto vale cada fruta?", el sistema era:

$$\begin{cases} 2x+y+z=22 \\ x+2y+z=19 \\ x+y+3z=30 \end{cases}$$

La matriz ampliada del sistema nos queda:

$$A^*=\left ( \begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 22\\ 1 & 2 & 1 & 19\\ 1 & 1 & 3 & 30 \end{array} \right )$$

Mediante las operaciones entre renglones, vamos a llevarla a la forma escalonada (con entradas principales iguales a uno). Para ello, seguiremos algunos consejos:

Primero debemos hacer que en la esquina superior izquierda tengamos un $1$. Para lo cual, vamos a multiplicar al renglón $1$ por $\frac{1}{2}$:

$$A^*=\left ( \begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 22\\ 1 & 2 & 1 & 19\\ 1 & 1 & 3 & 30 \end{array} \right ) R_1 \rightarrow \frac{1}{2}R_1 \left ( \begin{array}{rrr|r} 1 & \frac{1}{2} &\frac{1}{2} & 11\\ 1 & 2 & 1 & 19\\ 1 & 1 & 3 & 30 \end{array} \right )$$

También podríamos haber intercambiado el segundo (o tercer) renglón por el primero. Luego, hacemos que los números debajo de este sean ceros, sumando múltiplos apropiados del primer renglón a los renglones debajo de él:

$$\left ( \begin{array}{rrr|r} 1 & \frac{1}{2} &\frac{1}{2} & 11\\ 1 & 2 & 1 & 19\\ 1 & 1 & 3 & 30 \end{array} \right ) R_2 \rightarrow R_2+(-1)R_1$$ $$\left ( \begin{array}{rrr|r} 1 & \frac{1}{2} &\frac{1}{2} & 11\\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 8 \\ 1 & 1 & 3 & 30 \end{array} \right ) R_3 \rightarrow R_3+(-1)R_1$$ $$\left ( \begin{array}{rrr|r} 1 & \frac{1}{2} &\frac{1}{2} & 11\\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 19 \end{array} \right )$$

A continuación, debemos obtener un $1$ inicial en el segundo renglón, y luego ceros debajo de él:

$$\left ( \begin{array}{rrr|r} 1 & \frac{1}{2} &\frac{1}{2} & 11\\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 19 \end{array} \right ) R_2 \rightarrow \frac{2}{3}R_2$$ $$\left ( \begin{array}{rrr|r} 1 & \frac{1}{2} &\frac{1}{2} & 11\\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{16}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 19 \end{array} \right ) R_3 \rightarrow R_3+(-\frac{1}{2})R_2$$ $$\left ( \begin{array}{rrr|r} 1 & \frac{1}{2} &\frac{1}{2} & 11\\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{16}{3} \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{49}{3} \end{array} \right )$$

En cada etapa hay que asegurarse de que toda entrada inicial esté a la derecha de la entrada inicial en el renglón arriba de él. Si es necesario, se reacomodan los renglones. Se debe continuar este proceso hasta llegar a una matriz en forma escalonada por renglones:

$$\left ( \begin{array}{rrr|r} 1 & \frac{1}{2} &\frac{1}{2} & 11\\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{16}{3} \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{49}{3} \end{array} \right ) R_3 \rightarrow \frac{3}{7}R_3$$ $$\left ( \begin{array}{rrr|r} 1 & \frac{1}{2} &\frac{1}{2} & 11\\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{16}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right ).$$

Hemos llegado a la matriz escalonada. Se puede observar que el $rg(A)=rg(A^*)=3$. Por ello, el sistema es compatible. Además, como el número de incógnitas coincide con los rangos, el sistema es determinado, tal como lo vimos anteriormente.

Observen que tomando la matriz aumentada escalonada, podemos reescribir el sistema de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x+ \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=11 \\ ~~~y+\frac{1}{3}z=\frac{16}{3} \\ ~~~~~~z=7 \end{cases}$$

El cual nos queda con forma triangular y se puede resolver con sustitución como ya explicamos antes. Esta es la idea de base del método que explicaremos luego.

## Sistemas compatibles indeterminados e incompatibles

Si en el caso anterior, la matriz escalonada nos hubiera quedado de la siguiente manera:

$$A^*= \left ( \begin{array}{rrr|r} 1 & \frac{1}{2} &\frac{1}{2} & 11\\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{16}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array} \right ).$$

El $rg(A)=2$ y $rg(A^*)=3$, por lo que $rg(A) \neq rg(A^*)$ y en consecuencia, el sistema es incompatible.

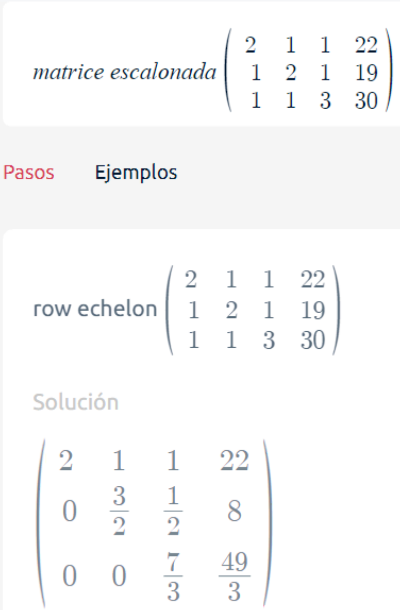
En cambio, si la matriz escalonada resultaba ser:

$$A^*= \left ( \begin{array}{rrr|r} 1 & \frac{1}{2} &\frac{1}{2} & 11\\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{16}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right ).$$

El $rg(A)=rg(A^*)=2$, pero es menor que el número de incógnitas. Por lo que, según el teorema, el sistema sería compatible indeterminado.

# 7.1. Forma escalonada utilizando Symbolab

Para obtener la matriz escalonada en Symbolab debemos usar el comando "matrice escalonada", seguido de la matriz en cuestión:




Como podrás observar, Symbolab no coloca las entradas principales con $1$. Esto lo solucionamos fácilmente multiplicando cada renglón por el inverso multiplicativo del primer número que aparece en él:

$$R_1 \rightarrow \frac{1}{2}R_1$$
$$R_2 \rightarrow \frac{2}{3}R_2$$
$$R_3 \rightarrow \frac{3}{7}R_3$$

Haciendo esto, llegamos a la matriz escalonada que obtuvimos anteriormente:

$$A^*=\left ( \begin{array}{rrr|r} 1 & \frac{1}{2} &\frac{1}{2} & 11\\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{16}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right ).$$

Recordá que no es necesario que los primeros números de cada renglón sean un uno para tener la matriz escalonada, solo lo hacemos para facilitar el trabajo posterior. De no hacerlo, deberán hacer un poco más de "despejes" al momento de sustituir de forma escalonada, pero se llega igualmente a la solución. En los videos que proponemos para esta semana se resuelve así.

# 8. Eliminación gaussiana

A la regla de Cramer que vimos antes, vamos a sumarle dos métodos que sirven para resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales.

### Solución de un sistema usando eliminación gaussiana

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales por este método, seguiremos los siguientes pasos:

1. Escribimos la matriz aumentada del sistema.
2. Mediante las operaciones elementales de renglones (o el uso del Symbolab), se transforma la matriz aumentada en la forma escalonada por renglones.
3. Escribimos el nuevo sistema de ecuaciones que corresponde a la forma escalonada por renglones de la matriz aumentada y resolvemos por medio de sustitución.

Ejemplo: vamos a resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales usando eliminación gaussiana.

$$\begin{cases} 4x+8y-4z=4 \\ 3x+8y+5z=-11 \\ -2x+y+12z=-17 \end{cases}$$

Primero escribimos la matriz aumentada del sistema y luego usamos operaciones elementales de renglones para llevarla en forma escalonada. Nosotros emplearemos Symbolab.

*matrice escalonada* $\begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 & 4 \\ 3 & 8 & 5 & -11 \\ -2 & 1 & 12 & -17 \end{pmatrix}$

Pasos Ejemplos

row echelon $\begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 & 4 \\ 3 & 8 & 5 & -11 \\ -2 & 1 & 12 & -17 \end{pmatrix}$

Solución

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$A^*=\left ( \begin{array}{rrr|r} 4 & 8 & -4 & 4\\ 0 & 2 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -10 & 20 \end{array} \right )$$

Aquí ya está en forma escalonada y podríamos armar el sistema. Pero vamos a hacer que las entradas principales sean iguales a uno. Para ello, multiplicamos cada renglón por el inverso multiplicativo del primer número del renglón:

$$R_1 \rightarrow \frac{1}{4}R1$$
$$R_2 \rightarrow \frac{1}{2}R2$$
$$R_3 \rightarrow -\frac{1}{10}R3$$

$$A^*=\left ( \begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right )$$

Observemos que $rg(A)=rg(A^*)=3$ y el número de incógnitas es $3$, por lo que según el teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es compatible determinado.

Ahora tenemos una matriz equivalente en forma escalonada por renglones, y el correspondiente sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ ~y+4z=-7 \\ ~~z=-2 \end{cases}$$

Usamos sustitución escalonada para resolver el sistema.

En la segunda ecuación, cambiamos $z$ por $-2$ y despejamos $y$:

$$y+4 \cdot (-2)=-7$$

$$y=-7+8$$

$$y=1$$

En la primera ecuación, cambiamos $y$ y $z$ por sus valores y despejamos $x$:

$$x+2 \cdot 1-(-2)=1$$

$$x=1-2-2$$

$$x=-3$$

Entonces, la solución única del sistema es $(-3,1,-2)$.

## 8.1. Eliminación de Gauss-Jordan

Si ponemos la matriz aumentada de un sistema lineal en forma escalonada reducida por renglones, entonces no necesitamos sustitución para resolver el sistema. Para poner una matriz en forma escalonada por renglones reducida, usamos los pasos siguientes:

1. Utilizar operaciones elementales de renglón para poner la matriz en forma escalonada por renglones.
2. Obtener ceros arriba de cada entrada inicial al sumar múltiplos del renglón que contenga esa entrada a los renglones arriba de él. Empezar con la útima entrada inicial y trabajar hacia arriba.

El uso de la forma escalonada por renglones reducida para resolver un sistema se llama eliminación de Gauss-Jordan.

En el ejemplo anterior, usamos eliminación de Gauss en la matriz aumentada de este sistema, para llegar a una matriz equivalente en forma escalonada por renglones. Continuamos usando operaciones elementales de renglones en la última matriz para llegar a una matriz equivalente en forma escalonada reducida por renglones.

Si utilizamos el Symbolab, aquí podemos obtener directamente la matriz escalonada reducida. Para ello, se debe colocar el comando "Gauss-Jordan", seguido de la matriz en cuestión, como se muestra a continuación:

$$gauss - jordan \begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 & 4 \\ 3 & 8 & 5 & -11 \\ -2 & 1 & 12 & -17 \end{pmatrix}$$

Pasos Ejemplos

gauss jordan $\begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 & 4 \\ 3 & 8 & 5 & -11 \\ -2 & 1 & 12 & -17 \end{pmatrix}$

Solución

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^*=\left ( \begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right )$$

Ahora tenemos una matriz equivalente en forma escalonada reducida por renglones, y el correspondiente sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \\ z=-2 \end{cases}$$

En consecuencia, de inmediato llegamos a la solución $(-3,1,-2)$.

# 8.2. Otros ejemplos

### Un sistema donde no hay solución

Vamos a resolver el siguiente sistema mediante eliminación gaussiana:

$$\begin{cases} x-3y+2z=12 \\ 2x-5y+5z=14 \\ x-2y+3z=20 \end{cases}$$

Armamos la matriz ampliada:

$$A^*= \left ( \begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 12\\ 2 & -5 & 5 & 14\\ 1 & -2 & 3 & 20 \end{array} \right )$$

La llevamos a la forma escalonada por renglones:

$$A^*= \left ( \begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{array} \right )$$

Como el $rg(A) \neq rg(A^*)$, el sistema es incompatible.

Esta última matriz está en forma escalonada por renglones, de modo que podemos detener el proceso de eliminación de Gauss. Ahora, si convertimos el último renglón en forma de ecuación, obtenemos $0x+0y+0z=18$, o bien $0=18$, lo cual es falso. No importa qué valores escojamos para $x$, $y$ o $z$, la última ecuación nunca será un enunciado verdadero. Esto significa que el sistema no tiene solución.

### Un sistema con infinitas soluciones

Vamos a resolver el siguiente sistema utilizando el método Gauss-Jordan:

$$ \begin{cases} -3x-5y+36z=10 \\ -x+7z=5 \\ x+y-10z=-4 \end{cases} $$

Armamos la matriz ampliada:

$$ A^*=\left ( \begin{array}{rrr|r} -3 & -5 & 36 & 10\\ -1 & 0 & 7 & 5\\ 1 & 1 & -10 & -4 \end{array} \right ) $$

La llevamos a la forma escalonada reducida por renglones:

$$ A^*=\left ( \begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -7 & -5\\ 0 & 1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right ) $$

Como $rg(A)=rg(A^*)=2$, pero es menor que el número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones.

El tercer renglón corresponde a la ecuación $0=0$. Esta ecuación es siempre verdadera, no importa cuáles valores se usen para $x$, $y$ o $z$. Como la ecuación no agrega información nueva acerca de las incógnitas, podemos eliminarla del sistema. En consecuencia, la última matriz corresponde al sistema:

$$ \begin{cases} x-7z=-5 \\ y-3z=1 \end{cases} $$

A continuación, despejamos las incógnitas iniciales $x$ e $y$ en términos de la incógnita no inicial $z$.

$$ x=7z-5 $$

$$ y=3z+1 $$

Para obtener la solución completa, con $t$ representamos cualquier número real y expresamos $x$, $y$ y $z$ en términos de $t$:

$$x=7t-5$$

$$y=3t+1$$

$$z=t$$

También podemos escribir la solución como la terna ordenada $(7t-5, 3t+1, t)$, donde $t$ es cualquier número real.

Para obtener soluciones particulares, le damos valores al parámetro $t$. Por ejemplo, si $t=5$, una de las infinitas soluciones es $(30, 16, 5)$.

# 9. Resolución de problemas

Los sistemas de ecuaciones lineales se utilizan para modelar situaciones que involucran varias cantidades variables. Resolvamos juntos el siguiente ejemplo:
Un agricultor tiene $1200$ acres de tierras en las que produce maíz, trigo y soja. Cuesta $\$45$ por acre producir maíz, $\$60$ producir trigo y $\$50$ producir soja. Debido a la demanda del mercado, el agricultor producirá de trigo el doble que de maíz. Ha asignado $\$63750$ para el costo de producir sus cosechas. ¿Cuántos acres de cada cultivo debe plantar?

Primero vamos a identificar las incógnitas:

**$x:$ Cantidad de acres de maíz**
**$y:$ Cantidad de acres de trigo**
**$z:$ Cantidad de acres de soja**

Luego, vamos a armar las ecuaciones:

Ecuación $1$: sabemos que el agricultor tiene $1200$ acres en total. Así que podemos plantear lo siguiente:

$$x+y+z=1200$$

Ecuación $2$: tenemos como dato el costo por acre de producir cada uno y el total del presupuesto. Así que armamos:

$$45x+60y+50z=63750$$

Ecuación $3$: finalmente, nos dice que el agricultor producirá de trigo el doble que de maíz, lo cual conduce a:

$$y=2x \text{ o bien, } -2x+y=0$$

Tenemos todo lo necesario para armar el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y+z=1200 \\ 45x+60y+50z=63750 \\ -2x+y=0 \end{cases}$$

A continuación, procedemos a resolverlo. Podríamos utilizar la regla de Cramer, eliminación gaussina o Gauss-Jordan. Aquí lo haremos con este último.

Armamos la matriz ampliada:

$$\left ( \begin{array}{rrr|r} 1& 1 & 1 & 1200 \\ 45 & 60 & 50 & 63750 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

La transformamos en la escalonada reducida utilizando Symbolab:

$$gauss - jordan\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1200 \\ 45 & 60 & 50 & 63750 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pasos Ejemplos

$$\text{gauss jordan}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1200 \\ 45 & 60 & 50 & 63750 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 250 \\ 0 & 1 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 1 & 450 \end{pmatrix}$$

De lo anterior, vemos que:

$$\begin{cases} x=250 \\ y=500 \\ z=450 \end{cases}$$

Así que estamos en condiciones de decir que el agricultor debe plantar $250$ acres de maíz, $500$ acres de trigo y $450$ acres de soja.