Sistemas de ecuaciones lineales 2x2

Sitio:	Agencia de Habilidades para el Futuro	Imprimido por:	RODRIGO PINTO
Curso:	Elementos de Analisis Matematico 1° D	Día:	martes, 26 de noviembre de 2024, 06:54
Libro:	Sistemas de ecuaciones lineales 2x2		

Tabla de contenidos

1. Introducción

Existen diferentes métodos que permiten resolver este tipo de sistemas de ecuaciones. En esta sección veremos los siguientes:

1. Método de sustitución
2. Método de igualación
3. Regla de Cramer o método de determinantes.

En el libro 2 veremos el método gráfico.

Es importante saber que, cualquiera sea el método que se utilice, la solución es siempre la misma.

2. Método de sustitución

Para resolver un sistema de ecuaciones mediante el método de sustitución debemos:

1. Despejar, en cualquiera de las dos ecuaciones, una de las dos incógnitas.
2. Sustituir, en la otra ecuación, esa incógnita por la expresión hallada en el paso anterior. Obtendremos así una ecuación lineal con una sola incógnita, la cual debemos resolver. Aquí encontraremos el valor de una de las incógnitas, pero aún falta la otra.
3. Calcular el valor de la otra incógnita reemplazando el resultado anterior en la expresión hallada en el paso 1.
4. Armar la solución.
5. Verificar si la solución obtenida es correcta.

Ejemplo

Vamos a resolver con este método el sistema que planteamos con el problema 1: "Furgonetas y autos":

$$\begin{cases} 12x + 4y = 72 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

Pasos	Resolución	Explicación

1	$x+y=10$ $x=10-y$	Conviene despejar una incógnita cuyo proceso sea simple, pero puede ser cualquiera. Aquí elegimos despejar x de la segunda ecuación.
2	$12x+4y=72$ $12\cdot(10-y)+4y=72$ $12\cdot 10-12y+4y=72$ $120-8y=72$ $-8y=72-120$ $y=\frac{-48}{-8}$ $y=6$	Tomamos la ecuación que no usamos antes, en nuestro caso la primera. Reemplazamos la x por lo que obtuvimos en el paso 1. Es fundamental colocarlo entre paréntesis. Luego, se aplica propiedad distributiva y se resuelve la ecuación lineal. Con este procedimiento ya encontramos el valor de la incógnita y, pero aún nos falta la x.
3	$x=10-y$ $x=10-6$ $x=4$	Consideramos la expresión despejada en el paso 1, reemplazamos la y por el valor encontrado en el paso 2 y calculamos el valor de la x.
4	$S=(4,6)$	Armamos la solución. La letra S hace referencia al conjunto solución. Se anotan entre paréntesis el valor de x e y, en ese orden.

5	Primera ecuación: $12 \cdot 4 + 4 \cdot 6 = 72$ Segunda ecuación: $4 + 6 = 10$	Comprobamos que es la solución correcta, reemplazando en ambas ecuaciones los valores de las incógnitas encontrados y verificando que den los resultados deseados.

Por lo tanto, como la solución es única (un valor para cada incógnita), el sistema se clasifica como **compatible determinado.**

Observen que hemos llegado a la misma solución que antes.

3. Método de igualación

Para resolver un sistema de ecuaciones mediante el método de igualación debemos:

1. Despejar una de las dos incógnitas (la misma) en ambas ecuaciones.
2. Igualar las expresiones obtenidas en el paso 1, generando una ecuación lineal con una sola incógnita, la cual debemos resolver. Aquí encontraremos el valor de una de las incógnitas, pero aún falta la otra.
3. Calcular el valor de la otra incógnita reemplazando el resultado anterior en cualquiera de las expresiones obtenidas en el paso 1.
4. Armar la solución.
5. Verificar si la solución obtenida es correcta.

Ejemplo

Vamos a resolver el siguiente sistema de ecuaciones mediante el método de igualación:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ y - 4x = 6 \end{cases}$$

Pasos	Resolución	Explicación

1	Primera ecuación: $3x+2y=1$ $2y=1-3x$ $y=(1-3x):2$ $y=1:2-3x:2$ $y=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x$ Segunda ecuación: $y-4x=6$ $y=6+4x$	Despejamos de ambas ecuaciones la incógnita y, pero también podría haber sido la x.

2	$y = y$ $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x = 6 + 4x$ $\frac{1}{2} - 6 = 4x + \frac{3}{2}x$ $-\frac{11}{2} = \frac{11}{2}x$ $-\frac{11}{2} : \frac{11}{2} = x$ $-1 = x$	**Igualamos las dos expresiones obtenidas en el paso 1 y resolvemos la ecuación que nos queda planteada.**
3	$y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x$ $y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot (-1)$ $y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$ $y = 2$	**Para calcular el valor de y, elegimos una de las expresiones que despejamos en el paso 1 y reemplazamos la x por el valor encontrado. Acá optamos por la primera (con ambas da lo mismo).**
4	$S = (-1, 2)$	**Armamos la solución al sistema.**

5	Primera ecuación: $3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 =$ $-3 + 4 = 1$ Segunda ecuación: $2 - 4 \cdot (-1) =$ $2 + 4 = 6$	Verificamos la solución encontrada.

Por lo tanto, como la solución es única (un valor para cada incógnita), el sistema se clasifica como **compatible determinado.**

4. Regla de Cramer o método de determiantes

La regla de Cramer es otro método que nos servirá para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Como ya anticipamos, este método utiliza determinantes. Para explicar cómo funciona, vamos a utilizar el siguiente sistema de ecuaciones a modo de ejemplo:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 15 \\ 4x + 3y = 21 \end{cases}$$

Paso 1: operar algebraicamente, si fuera necesario, para que los coeficientes de las incógnitas queden en el mismo orden en el primer miembro de la igualdad y en el segundo, solamente los términos independientes. Recordá que los coeficientes son los números que están junto a las letras. En nuestro caso, ya está ordenado como se pide.

Paso 2: debemos calcular el determinante principal del sistema (que vamos a simbolizar con Δ), el cual está formado por los números que acompañan a las x e y, en nuestro caso queda:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-3) \cdot 4 = 6 - (-12) = 6 + 12 = 18$$

Números con la x

Números con la y

Recordá que el signo negativo delante de un paréntesis, cambia de signo al número que se encuentra dentro de él, no así el signo positivo.

Paso 3: calcular los determinantes de las incógnitas que se obtienen a partir del determinante principal, remplazando los coeficientes de la incógnita correspondiente por los términos independientes. A estos los vamos a simbolizar con Δ_x y Δ_y.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 15 & -3 \\ 21 & 3 \end{vmatrix} = 15 \cdot 3 - (-3) \cdot 21 = 45 - (-63) = 45 + 63 = 108$$

Cambiamos los números con la x por los términos independientes

Números con la y

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 15 \\ 4 & 21 \end{vmatrix} = 2 \cdot 21 - 15 \cdot 4 = 42 - 60 = -18$$

Números con la x

Cambiamos los números con la y por los términos independientes

Observá que cuando calculamos el determinante de la incógnita x (Δ_x), se cambia la columna x por los términos independientes (la columna y queda igual). Mientras que cuando calculamos el determinante de la incógnita y (Δ_y), la columna x queda igual y se cambia la columna y por los términos independientes. Es importante respetar el orden del determinante principal.

Paso 4: si el determinante principal es distinto de cero, el sistema tiene una única solución. El valor de las incógnitas se obtiene haciendo la división entre su determinante y el determinante principal:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{108}{18} = 6 \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-18}{18} = -1$$

Esto significa que la solución al sistema es $S = (6, -1)$. Verifiquemos para comprobar que dicha solución es correcta:

$$2 \cdot 6 - 3 \cdot (-1) =$$
$$12 + 3 = 15$$

$$4 \cdot 6 + 3 \cdot (-1) =$$
$$24 - 3 = 21$$

¿Qué hubiera sucedido si el determinante principal $\Delta_y = 0$ daba cero?

En este caso se pueden presentar dos situaciones:

-
- Si $\Delta_x = 0$ y $\Delta_y = 0$, el sistema tiene infinitas soluciones.
- Si $\Delta_x \neq 0$ y $\Delta_y \neq 0$, el sistema no tiene solución. Podría ocurrir que $\Delta_x \neq 0$ ó $\Delta_y \neq 0$, pero esto solo ocurre en casos excepcionales (rectas paralelas a los ejes, por ejemplo) que no son los que estudiamos con frecuencia.

5. Un sistema sin solución

Vamos a resolver el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el método de igualación:

$$\begin{cases} -2x + 4y = 10 \\ 4x - 8y = 16 \end{cases}$$

Paso 1: despejamos de ambas ecuaciones la variable x,

Ecuación 1	Ecuación 2
$-2x + 4y = 10$ $-2x = 10 - 4y$ $x = \frac{10-4y}{-2}$ $x = -5 + 2y$	$4x - 8y = 16$ $4x = 16 + 8y$ $x = \frac{16+8y}{4}$ $x = 4 + 2y$

Paso 2: Igualamos y resolvemos,

$$-5 + 2y = 4 + 2y$$

$$2y - 2y = 4 + 5$$

$$0 = 9$$

Observá que hemos llegado a un absurdo, ya que 0 no es igual a 9. Por lo tanto, el sistema no tiene solución y se clasifica como incompatible.

¿Qué hubiera sucedido en la regla de Cramer?

Si hubiéramos resuelto este sistema con la regla de Cramer, los determinantes nos hubiesen quedado de la siguiente manera:

$$\Delta = 0, \Delta_x = -144 \text{ y } \Delta_y = -72$$

Como el determinante principal es igual a cero, pero al menos uno de los determinantes de las incógnitas es distinto de cero (en este caso ambos), el sistema no tiene solución.

6. Un sistema con infinitas soluciones

Vamos a resolver el siguiente sistema de ecuaciones empleando el método de sustitución:

$$\begin{cases} 2x - y = 1\\ 6x-3y=3 \end{cases}$$

Paso 1: despejamos de la primera ecuación la variable y.

$$2x - y = 1$$

$$2x - 1 = y$$

Paso 2: sustituimos esta expresión en la segunda ecuación y resolvemos.

$$6x - 3 \cdot (2x - 1) = 3$$

$$6x - 3 \cdot 2x - 3 \cdot (-1) = 3$$

$$6x - 6x + 3 = 3$$

$$6x-6x = 3 - 3$$

$$0=0$$

Cuando obtenemos cero de ambos lados, significa que el sistema tiene infinitas soluciones, por lo que se clasifica como compatible indeterminado.

Este resultado se deriva del hecho de que la segunda ecuación es equivalente a la primera. Nuestros cálculos han puesto de manifiesto que el sistema de dos ecuaciones es equivalente a la ecuación $y = 2x - 1$. Así, cualquier par ordenado de números (x, y) que satisfaga la ecuación $y = 2x - 1$, constituye una solución para el sistema.

En particular, mediante la asignación del valor de t a x, donde t es cualquier número real, nos encontramos con que $y = 2t - 1$ y que el par ordenado $(t, 2t - 1)$ es una solución del sistema.

La variable t se llama parámetro. Por ejemplo, poner $t = 0$ da el punto $(0; -1)$ como solución del sistema y poner $t = 1$ da el punto $(1; 1)$ como otra solución. Ya que t representa cualquier número real, hay una infinidad de soluciones del sistema.

Observación: decir que un sistema tiene infinitas soluciones no significa que cualquier punto va a ser solución.

Decir que un sistema tiene infinitas soluciones no significa que cualquier punto va a ser solución. Por ejemplo, el punto $(3; 8)$ no es solución del sistema porque no cumple con la primera ecuación:

$$2 \cdot 3 - 8 = 6 - 8 = -2 \neq 1$$

¿Qué hubiera sucedido en la regla de Cramer?

Si hubiéramos resuelto este sistema con la regla de Cramer, los determinantes nos hubiesen quedado de la siguiente manera:

$\Delta =0$, $\Delta_x =0$ y $\Delta_y =0$

Como los tres determinantes son iguales a cero, el sistema tiene infinitas soluciones.

7. Relación con el problema 1

Relación con el problema 1: "Furgonetas y autos"

En el primer problema se buscó la solución a dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$12x+4y=72$$
$$x+y=10$$

x representa la cantidad de furgonetas e y la cantidad de autos.

La respuesta al problema completo (partes 1 y 2) fue que salieron hacia Córdoba 4 furgonetas y 6 autos particulares, es decir, $x=4$ e $y=6$.

¿Por qué es la solución al problema?

Es la respuesta al problema porque verifica ambas ecuaciones, es decir, cuando reemplazamos por dichos valores, la igualdad se cumple. Veamos:

Ecuación 1: $12 \cdot 4 +4 \cdot 6 = 48+24=72$

Ecuación 2: $4+6=10$

¿Por qué no es solución $x=2$ e $y=12$?

No es solución la opción de 2 furgonetas y 12 autos, porque si bien verifica la primera ecuación $(12 \cdot 2 +4 \cdot 12 = 24+48=72)$, no lo hace con la segunda $(2+12=14 \neq 10)$. Podríamos haber tomado otra opción a modo de ejemplo.

Algo similar sucede con la posibilidad de 5 furgonetas y 5 autos, la cual cumple con la segunda ecuación $(5+5=10)$, pero no con la primera $(12 \cdot 5 +4 \cdot 5 = 60+20=80 \neq 72)$.

Entonces, la idea de buscar un par de valores que verifiquen dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, es lo que conduce a los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, y será nuestro tema de trabajo de esta semana.

8. Definición

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones con las mismas incógnitas. Resolver un sistema significa hallar todas las soluciones del sistema, es decir, todos los valores posibles para las incógnitas que hacen verdadera cada una de las ecuaciones.

En particular, veremos métodos para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, el cual es uno de la forma

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

donde a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 y c_2 son números reales, y las incógnitas son x e y. La llave se usa para enfatizar que se quiere que ambas ecuaciones se cumplan a la vez, es decir, una solución al sistema son valores para x e y que hacen válidas ambas igualdades simultáneamente.

Un ejemplo de este tipo de sistemas de ecuaciones es el que podemos armar con las dos ecuaciones de nuestro problema 1, "Furgonetas y autos", el cual nos queda de la siguiente manera:

$$\begin{cases} 12x+4y=72 \\ x+y=10 \end{cases}$$

Este tipo de sistemas de ecuaciones son también llamados de **"2×2"**, haciendo referencia a que tenemos 2 ecuaciones con 2 incógnitas. Esta semana solo trabajaremos con sistemas de este tipo, en la próxima generalizaremos para sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

¿Cómo saber si un par de valores es o no solución al sistema?

Un poco de esto ya hablamos en la introducción del libro. Acá vamos a usar otro ejemplo.

Para saber si un par de valores x e y son solución de un sistema de ecuaciones, debemos comprobar que verifiquen ambas ecuaciones simultáneamente, es decir, que al reemplazar los valores de x e y en las dos ecuaciones, las igualdades se cumplen.

Ejemplo

Dado el sistema:

$$\begin{cases} 2x-y=5 \\ 3x+2y=11 \end{cases}$$

vamos a averiguar si los siguientes pares de valores son solución o no.

- $x=3$ e $y=1$:

$$2 \cdot 3 -1 =6-1=5$$

$$3 \cdot 3 +2 \cdot 1 =9+2=11$$

Luego, como se verifican ambas ecuaciones, el par $x=3$ e $y=1$ es solución del sistema.

- $x=-4$ e $y=-13$

$$2 \cdot (-4) - (-13) =-8+13=5$$

$$3 \cdot (-4) +2 \cdot (-13) =-12-26=-38$$

Vemos que $x=-4$ e $y=-13$ no es una solución del sistema, ya que si bien verifica la primera ecuación, no verifica la segunda. Por lo tanto, no basta con que se verifique una sola ecuación, se deben cumplir ambas para los mismos valores de x e y.

La solución en el ejemplo anterior también se puede escribir como el par ordenado $(3,1)$, como veremos en el próximo libro cuando presentemos una interpretación gráfica de este tipo de sistemas y de sus soluciones. Allí encontraremos también una explicación para el siguiente hecho.

Clasificación de los sistemas

Dado un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, ocurre exactamente una de las siguientes opciones:

- Tiene una solución única.
- Tiene infinitas soluciones.
- No tiene solución.

Estas tres opciones son las únicas posibilidades para las soluciones de un sistema de este tipo: una, ninguna o infinitas.

Los sistemas reciben un nombre de acuerdo a la cantidad de soluciones que posean: **compatible determinado** (solución única), **compatible indeterminado** (infinitas soluciones) o **incompatible** (sin solución).

9. Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones

Existen muchas situaciones, tanto de la vida cotidiana como de otras ciencias, que se pueden resolver mediante la utilización de sistemas de ecuaciones.

A continuación, se detallan algunas consideraciones para facilitar esta tarea:

1. Identificar cada una de las incógnitas, es decir, lo que se quiere hallar pero se desconoce. Estas por lo general se pueden determinar fácilmente mediante una cuidadosa lectura de la pregunta del problema. Introducir notación para las incógnitas, llamándolas \(x \) e \(y \) o con alguna otra letra.
2. Utilizar los datos que aporta el problema para plantear las dos ecuaciones. Luego, armar el sistema.
3. Resolver el sistema planteado utilizando cualquiera de los métodos enseñados e interpretar los valores hallados, sin perder de vista qué representan cada una de las incógnitas.
4. Verificar el resultado en el sistema original.
5. Dar la respuesta al problema.