Límites infinitos y al infinito

Sitio:	Agencia de Habilidades para el Futuro	Imprimido por:	RODRIGO PINTO
Curso:	Elementos de Analisis Matematico 1° D	Día:	martes, 26 de noviembre de 2024, 06:46
Libro:	Límites infinitos y al infinito		

Tabla de contenidos

1. introducción

En esta sección vamos a comenzar a estudiar:

- Límites en el infinito
- Límites infinitos

2. Relación con el problema 2

Relación con el problema 2: Pasajeros infinitos

Vimos que cuando x toma valores cada vez más grandes, el precio que cada pasajero debe pagar tiende a 0. ¿Esto tiene lógica, no? Porque cuantos más sean, menos dinero va a pagar cada uno y cuando sean muchísimos, prácticamente no van a tener que pagar nada (todo en caso hipotético obviamente).

Cuando la variable x toma valores muy grandes, decimos que tiende al infinito. Por lo tanto, si llamamos x a los pasajeros y $f(x)$ al dinero que cada persona debe pagar, podemos indicar lo siguiente:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

Este tipo de límites y otros más vamos a estudiar en el presente libro.

¿Te acordás el problema 2? *Hacé clic en el botón para releerlo.*

Pasajeros infinitos

¿Te acordás del problema sobre la excursión del hotel de la semana 5? Te dejamos nuevamente el enunciado para que lo recuerdes:

El hotel ofrece una excursión por los cerros que rodean la ciudad. Para hacerlo, se debe alquilar un colectivo que cuesta $\$72000$, cuyo monto se reparte entre el número de personas que vayan al paseo.

Aquellos interesados en realizarla, deben informarle al conserje y este luego les informa cuánto dinero debe pagar cada uno, ya que todo dependerá de cuántas personas realicen la excursión.

En este problema, tuviste que completar una tabla, la cual les quedó de la siguiente manera:

Cantidad de personas que realizan la excursión	5	8	12	15	20
Dinero que debe pagar cada persona	\$14400	\$9000	\$6000	\$4800	\$3600

3. Límites en el infinito

Vamos a estudiar qué pasa con la función $f(x) = \frac{8x+1}{4x-8}$, cuando x toma valores positivos cada vez más grandes, es decir, tiende al infinito.
Para esto, vamos a construir una tabla de valores como la siguiente:

x	$f(x)$
100	2,043367
1000	2,004258
10000	2,000425
100000	2,000043
1000000	2,000004

Puede notarse que a medida que $x \to \infty$, $f(x) \to 2$. Esto lo escribimos de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 2$$

Límite en el infinito

Sea f una función definida en algún intervalo (a, ∞). Entonces:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente cercanos a L si tomamos x lo suficientemente grande.

¿Qué sucede con nuestra función cuando x toma valores negativos cada vez más pequeños, es decir, tiende al infinito negativo?

Veamos...

x	$f(x)$
-100	1,958333
-1000	1,995758
-10000	1,999575
-100000	1,999958
-1000000	1,999996

Puede notarse el mismo comportamiento que antes: a medida que $x \to -\infty$, $f(x) \to 2$. Esto lo escribimos de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$$

Límite en el infinito negativo

Sea f una función definida en algún intervalo $(-\infty, a)$. Entonces:

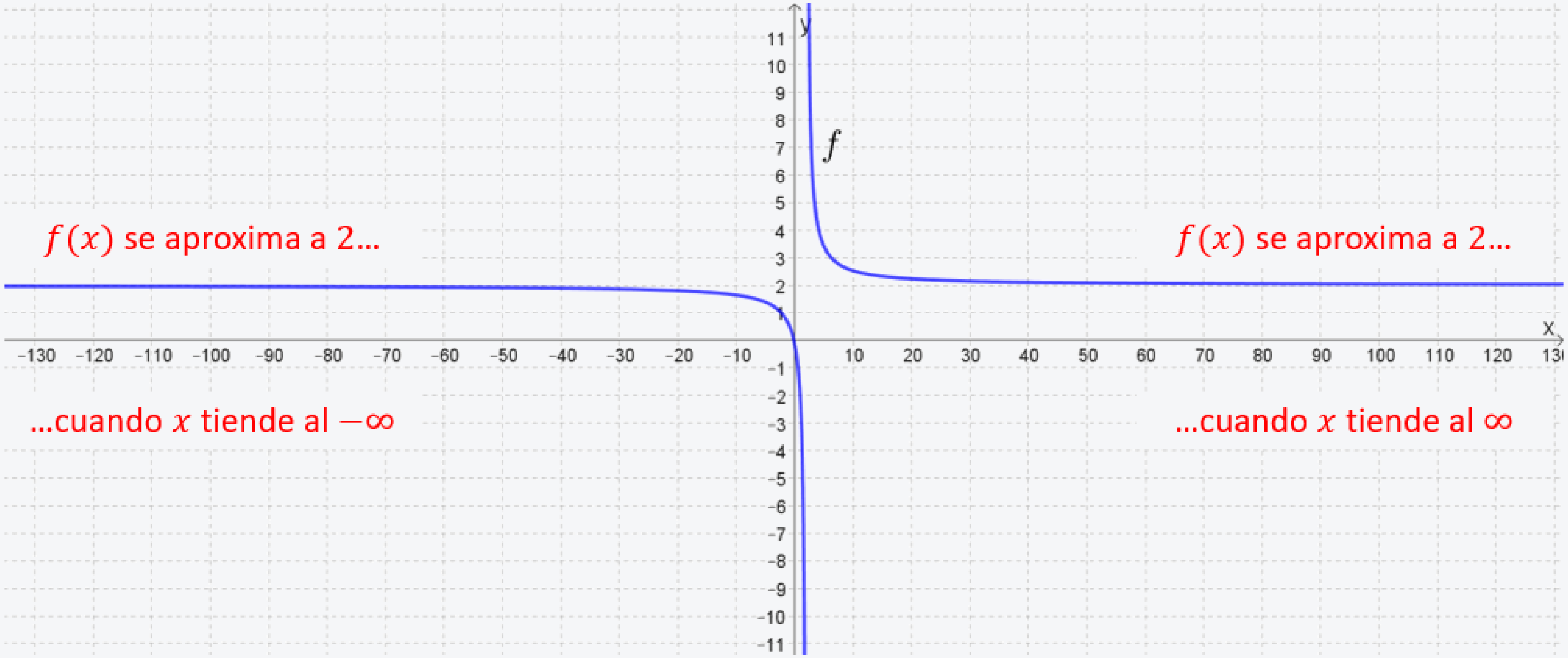
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente cercanos a L si tomamos x lo suficientemente chico.

Observación

El símbolo ∞ (o $-\infty$) no representa un número.

Lo anterior puede verse gráficamente:



Observá que la curva se aproxima a la recta $y = 2$ que, como ya vimos antes, recibe el nombre de asíntota horizontal. Este comportamiento hace que el límite sea 2. Por lo tanto, ambos conceptos están relacionados y los definimos de la siguiente manera:

Asíntota horizontal

La recta $y = L$ se denomina asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$ si:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

3.1. Otros ejemplos

Vamos a determinar los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x}$

(b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$

Observá que cuando x es grande, $\frac{1}{x}$ se hace pequeña. Por ejemplo:

$$\frac{1}{100} = 0,01 \qquad \frac{1}{10000} = 0,0001 \qquad \frac{1}{1000000} = 0,000001$$

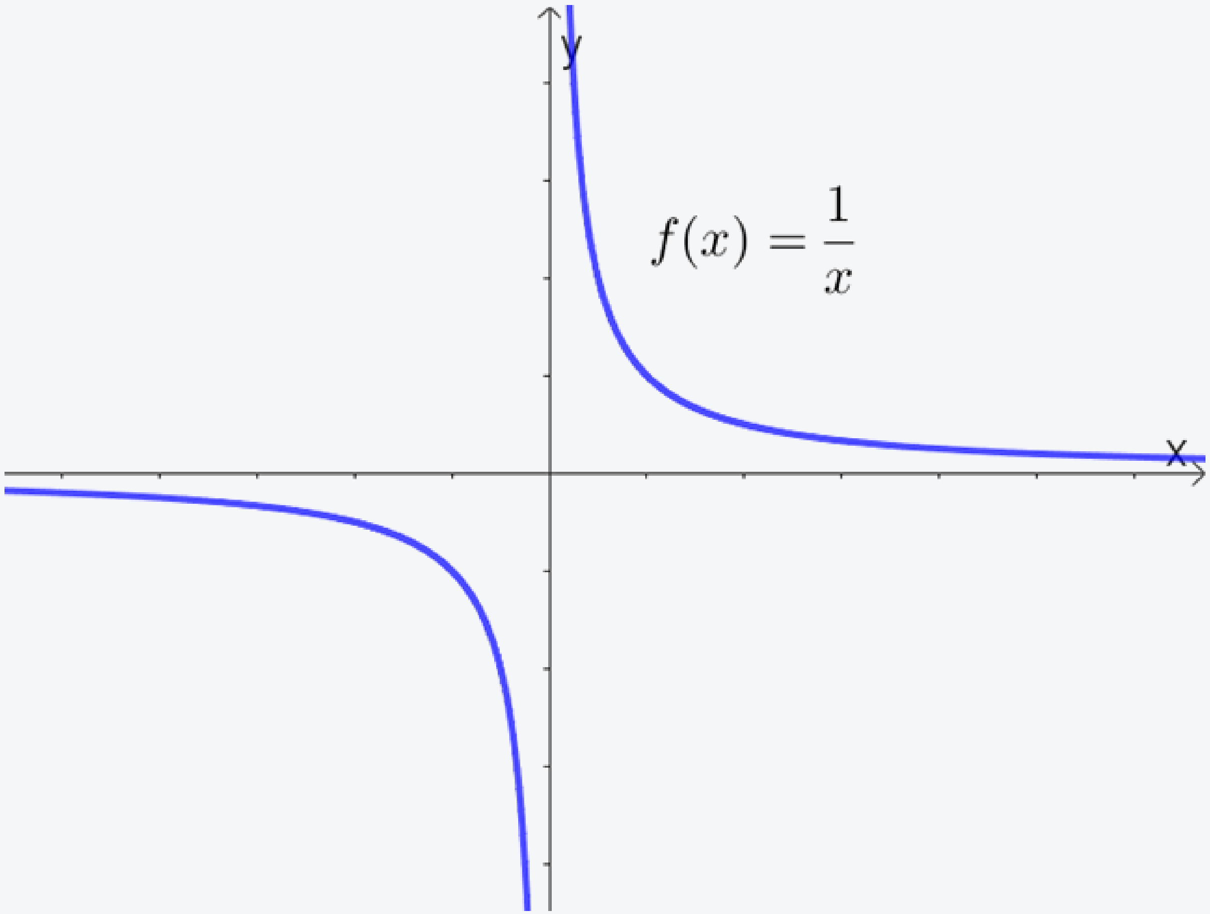
En realidad, al tomar x suficientemente grande, podemos hacer $\frac{1}{x}$ tan cercana a 0 como queramos. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Un razonamiento similar muestra que cuando x tiende al infinito negativo, $\frac{1}{x}$ es pequeña negativa, de modo que también tenemos:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Se deduce que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de la curva $f(x) = \frac{1}{x}$. La hipérbola es:



3.2. Regla importante de cálculo

Las propiedades de límites que estudiamos en el libro anterior (hacé clic **aquí** para releerlo) se cumplen también para límites en el infinito. En particular, si combinamos la ley sobre el límite de una potencia con los resultados del ejemplo anterior, obtenemos la siguiente e importante regla para calcular límites.

Si k es un entero positivo, entonces:

$$\lim\limits_{x \to \infty } \frac{1}{x^k}=0 \quad \text{y} \quad \lim\limits_{x \to -\infty } \frac{1}{x^k}=0$$

Ejemplo: vamos a determinar el $\lim\limits_{x \to \infty } \frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}$

Para estimar el límite en el infinito de una función racional, primero dividimos el numerador y el denominador entre la potencia superior de x que haya en el denominador. (Podemos suponer que $x \neq 0$, porque estamos interesados solo en valores grandes de x). En este caso, la potencia superior de x del denominador es x^2, de modo que tenemos:

$$\lim\limits_{x \to \infty } \frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}=\lim\limits_{x \to \infty } \frac{3- \frac{1}{x}- \frac{2}{x^2}}{5+ \frac{4}{x}+ \frac{1}{x^2} }$$ dividimos numerador y denominador entre x^2

$$\lim\limits_{x \to \infty } \frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}= \frac{\lim\limits_{x \to \infty}3- \frac{1}{x}- \frac{2}{x^2}}{\lim\limits_{x \to \infty}5+ \frac{4}{x}+ \frac{1}{x^2}}$$ por el límite de un cociente

$\lim\limits_{x \to \infty } \frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}= \frac{\lim\limits_{x \to \infty }3-\lim\limits_{x \to \infty } \frac{1}{x}-2\lim\limits_{x \to \infty } \frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x \to \infty }5+4\lim\limits_{x \to \infty } \frac{1}{x}+\lim\limits_{x \to \infty } \frac{1}{x^2}}$ por límites de sumas y diferencias

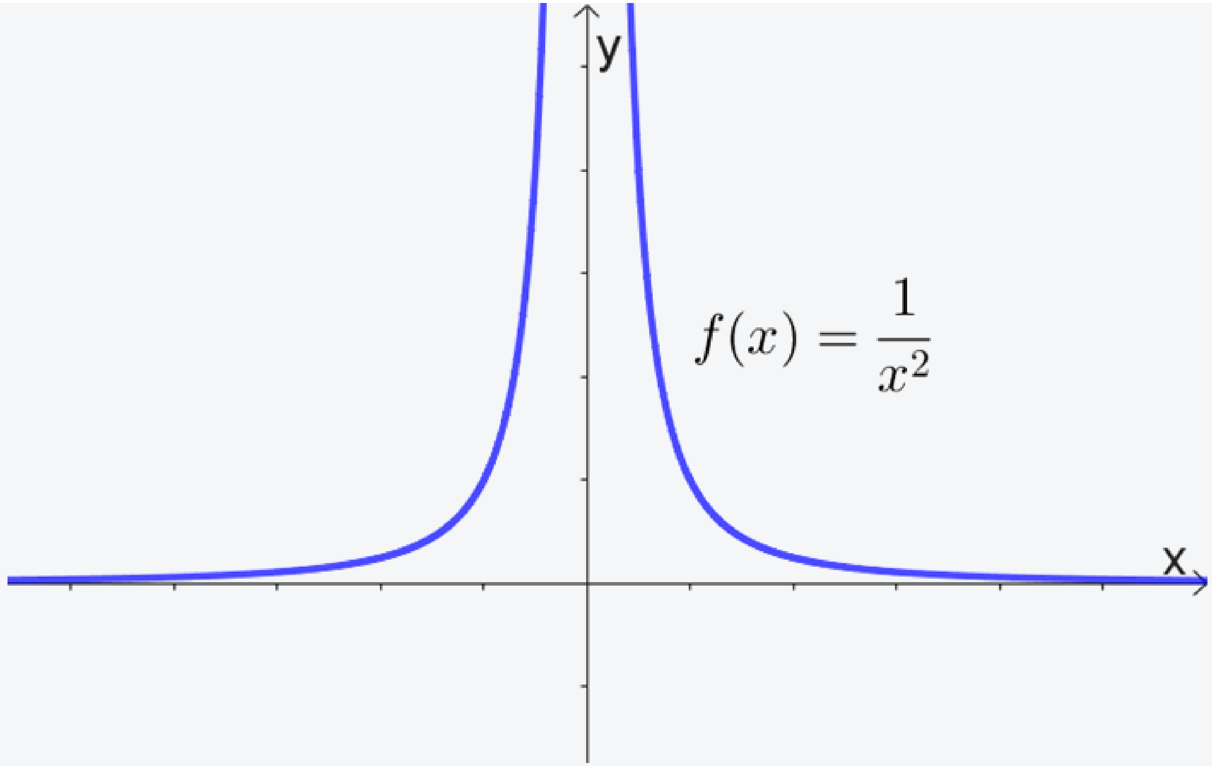
$\lim\limits_{x \to \infty } \frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}= \frac{3-0-2 \cdot 0}{5+4 \cdot 0+0}= \frac{3}{5}$ por la propiedad anterior

4. Límites infinitos

Vamos a estudiar que pasa con la función $f(x)= \frac{1}{x^2}$ cuando x tiende al valor 0 por ambos lados.

x	$f(x)$
±1	1
$\pm0,5$	4
$\pm0,2$	25
$\pm0,1$	100
$\pm0,05$	400
$\pm0,01$	$10\,000$
$\pm0,001$	$1\,000\,000$

Según vemos en la tabla, conforme x se acerca a 0 por ambos lados, la función se hace muy grande. De hecho, se desprende de la gráfica de la función que los valores de $f(x)$ pueden ser arbitrariamente grandes, tomando x lo suficientemente cercano a 0. Así, los valores de $f(x)$ no se aproximan a un número, por lo que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ no existe.



Para indicar el tipo de comportamiento exhibido en el ejemplo, se usa la siguiente notación:

\(\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2}= \infty \)

Esto no quiere decir que estemos considerando a \(\infty \) como un número. Tampoco significa que el límite existe. Simplemente expresa la forma particular en que el límite no existe: \(f(x) \) puede hacerse tan grande como queramos, tomando a \(x \) suficientemente cerca de \(0 \).

Límites infinitos

Sea \(f \) una función definida por ambos lados de \(a \), excepto posiblemente en la misma \(a \). Entonces:

$$\lim\limits_{x \to a}f(x) = \infty$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden ser arbitrariamente grandes (tan grandes como queramos), tomando x suficientemente cerca de a, pero no igual a a.

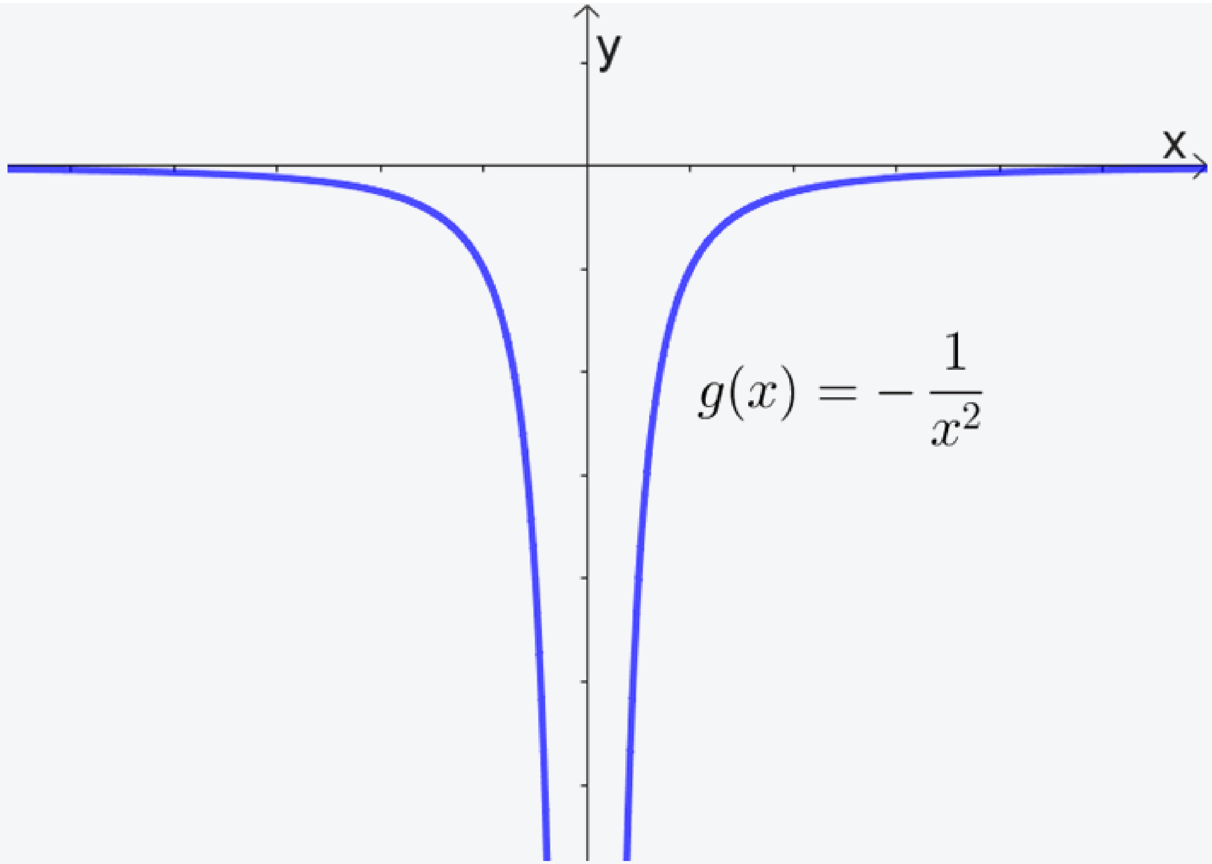
Un tipo similar de límite, para las funciones que se convierten en negativos muy grandes (en valor absoluto), conforme x se aproxima a a, se define a continuación:

Sea f una función definida por ambos lados de a, excepto posiblemente en la misma a. Entonces:

$$\lim\limits_{x \to a}f(x) = -\infty$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden ser negativos arbitrariamente grandes (en valor absoluto), tomando x suficientemente cerca de a, pero no igual a a.

Esta definición se ilustra gráficamente mediante la función $g(x)=- \frac{1}{x^2}$ la cual decrece infinitamente cuando x se acerca al valor 0 por ambos lados:

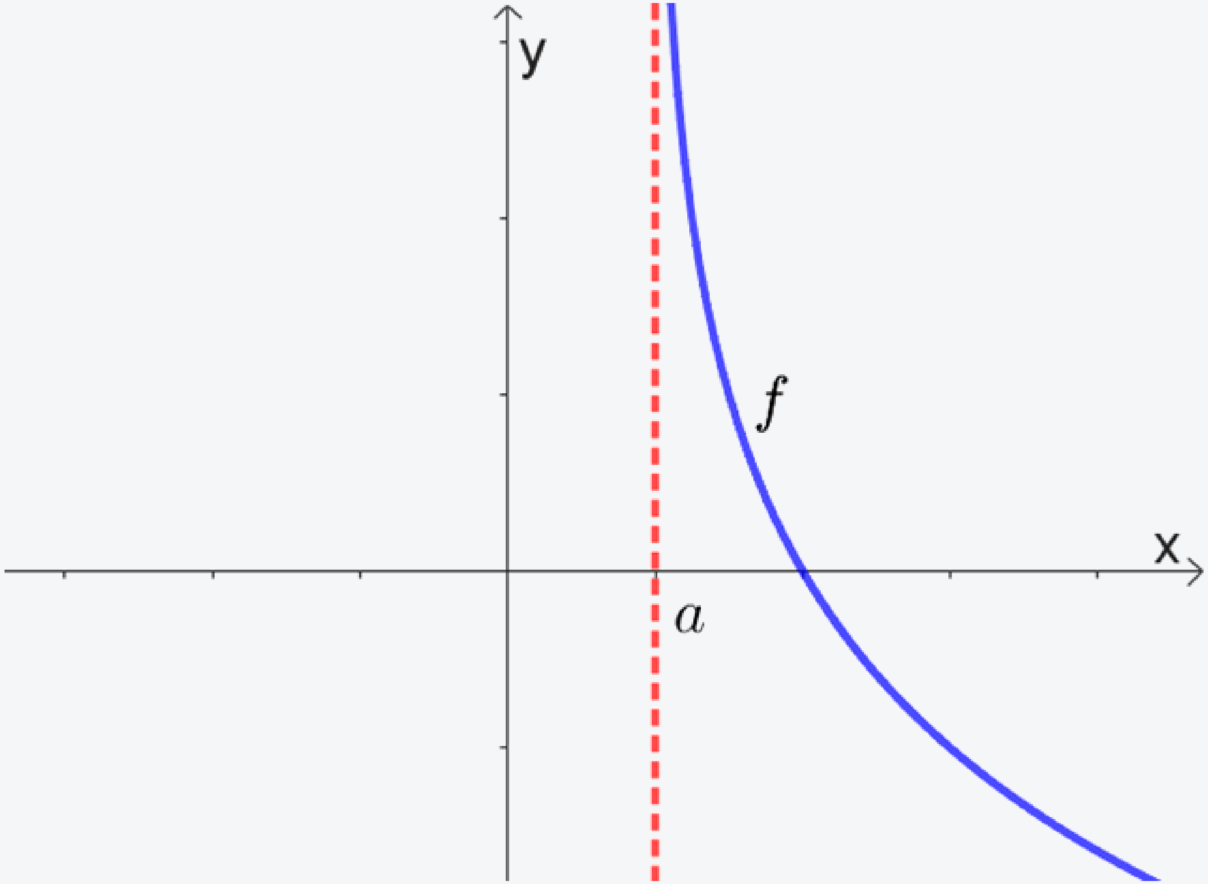


Definiciones similares pueden darse a los límites laterales infinitos:

$\lim\limits_{x \to a^-}f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x \to a^+}f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to a^-}f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to a^+}f(x) = -\infty$

recordando que "\(x \rightarrow a^- \)" significa que se consideran solo los valores de \(x \) que son menores que \(a \), y del mismo modo "\(x \rightarrow a^+ \)" significa que se consideran solo \(x>a \). A continuación se ilustra uno de estos casos:



\(\lim\limits_{x \to a^+}f(x) = \infty \)

Asíntota vertical

La recta \(x=a \) se llama asíntota vertical de la curva \(y=f(x) \) si al menos una de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

$\lim\limits_{x \to a}f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x \to a^-}f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x \to a^+}f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to a}f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to a^-}f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to a^+}f(x) = -\infty$

Por ejemplo, la recta $x=0$ es una asíntota vertical de la curva $y= \frac{1}{x^2}$ debido a que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2}= \infty$.

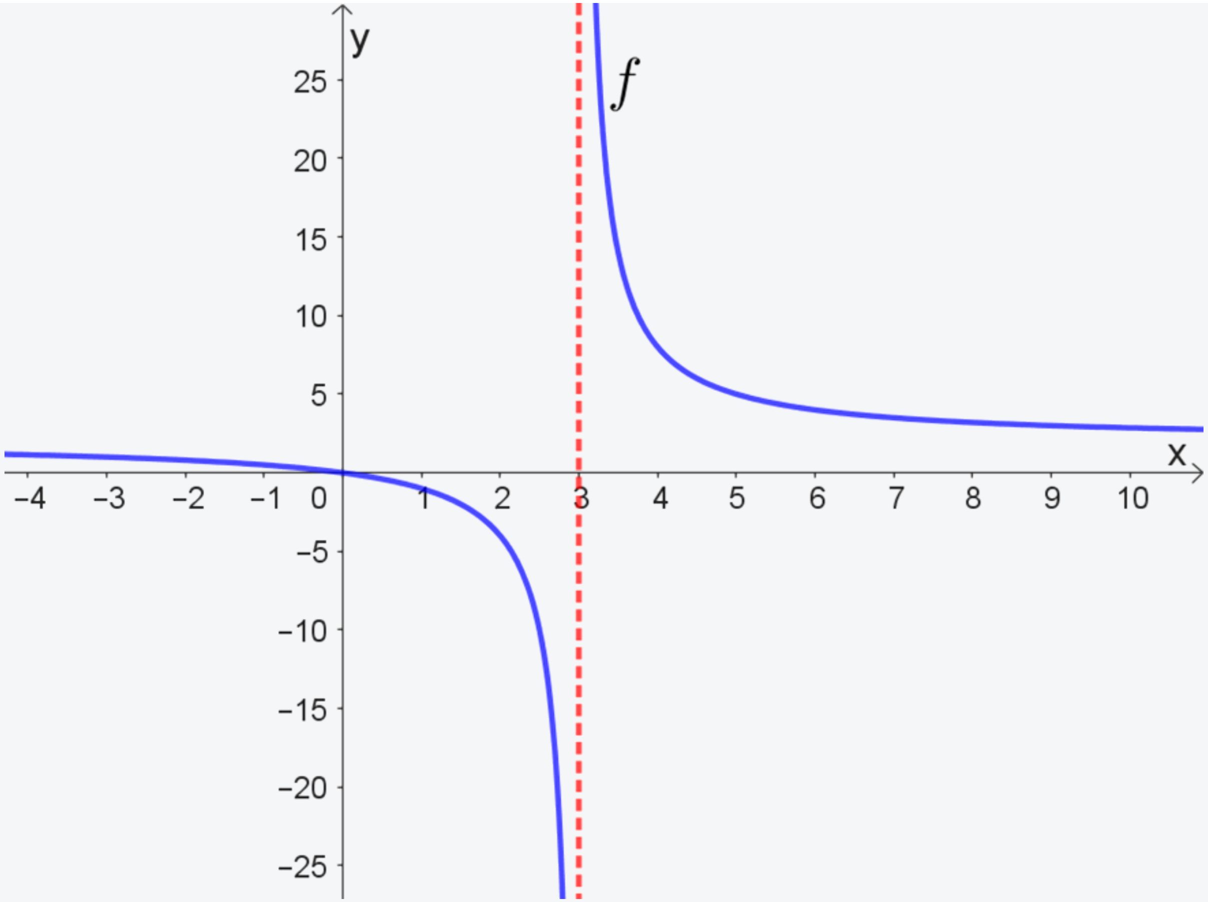
4.1. Ejemplos

Vamos a encontrar los siguientes límites utilizando el software para graficar las funciones:

(a) $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3}$ y $\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{2x}{x-3}$

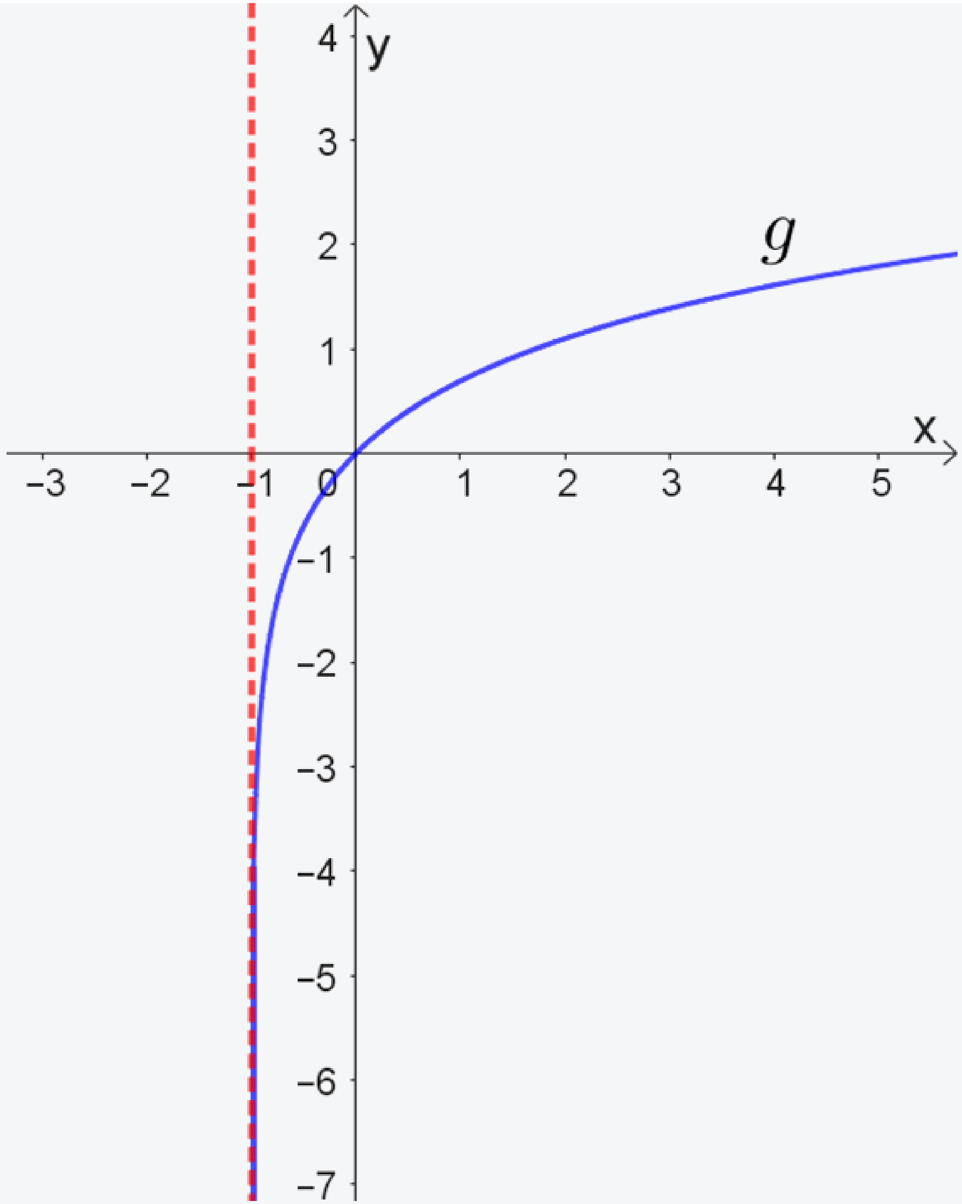
(b) $\lim\limits_{x \to -1^+} \ln (x+1)$

Para la función $f(x)= \frac{2x}{x-3}$ del apartado (a), la gráfica es:



Puede verse que \(\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3}= \infty \) y \(\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{2x}{x-3}= -\infty \). Además, la recta \(x=3 \) es una asíntota vertical.

Por su parte, la gráfica de la función \(g(x)=ln(x+1) \) del apartado (b) es:



Con ella podemos determinar que \(\lim\limits_{x \to -1^+} ln (x+1)=- \infty \) y la asíntota vertical es la recta \(x=-1 \).

4.2. Un último ejemplo

Existen funciones que, por ejemplo, tienden al infinito cuando la variable independiente toma valores cada vez más grandes. Un ejemplo de este tipo de funciones es $f(x)=2^x$.

¿Qué sucede cuando x toma valores cada vez más grandes?

Si hacés las cuentas o la gráfica, verás que la función cada vez se hace más y más grande. Por lo cual, indicamos:

$$\lim\limits_{x \to \infty }2^x= \infty$$