Método Elementos Finitos 2D - Triângulos

fonte: Capitulo 6 do livro ***'Numerical Techniques in Electromagnetics-Sadiku-2000'.***

6.1 Método de Elementos Finitos bidimensional

Para calcular a distribuição do potencial elétrico $\phi(x, y)$ num espaço bidimensional, a região de interesse pode ser subdividida num número finito de elemento como visto na figura 6.1.1

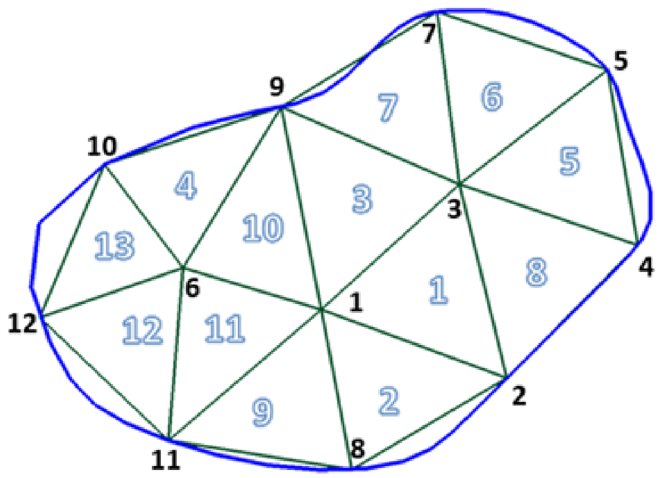

Figura 6.1.1 – Região de interesse (azul) subdividida em elementos finitos triangulares - adaptado de (SADIKU, 2000).

Por conveniência, a distribuição de potencial pode ser considerada contínua na fronteira dos elementos, sendo assim, a solução para toda a região pode ser aproximada pela equação 6.1,

$$\phi(x, y) \simeq \sum_{e=1}^{N} w_e \phi_e(x, y) \tag{6.1}$$

onde N é o número de elementos, w_e vale 1 quando (x, y) estiver contido no i-ésimo elemento e vale 0 caso contrário, $\phi_e(x, y)$ é o potencial elétrico dentro do i-ésimo elemento da malha. A função de interpolação linear de $\phi_e(x, y)$ pode ser determinada aproximadamente pela equação 6.2.

$$\phi_e(x, y) = a + bx + cy \tag{6.2}$$

A equação 6.2 pode ser representada em sua forma vetorial, mais conveniente para o desenvolvimento das equações de elementos finitos.

$$\phi(x, y) = [1 \quad x \quad y] \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} \tag{6.3}$$

As constantes *a, b* e *c* devem ser determinadas. O potencial ϕ_e, em geral, é diferente de zero dentro do elemento 'e' e zero fora dele. A variação de potencial dentro do elemento triangular é suposta linear na equação **6.2**, isso implica que o campo elétrico é uniforme dentro do elemento, ou seja,

$$\mathbf{E}_e = -\nabla \phi_e \tag{6.4}$$

$$\nabla \phi_e = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \tag{6.5}$$

ou,

$$\frac{\partial \phi_e}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(a + bx + cy) = b, \qquad \frac{\partial \phi_e}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(a + bx + cy) = c$$

Sejam $\hat{n}_x = (1, 0)$ e $\hat{n}_y = (0, 1)$, vetores unitários nos sentidos x e y, então, por meio da equação **6.4** podemos representar o campo elétrico E_e do elemento finito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_e &= -(b[1,0] + c[0,1]) \\ &= (-[b,0] - [0,c]) \\ &= (-b, -c) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbf{E}_e = -\nabla \phi_e = -(b\hat{a}_x + c\hat{a}_y) \tag{6.6}$$

6.2 Equações para elementos finitos bidimensionais

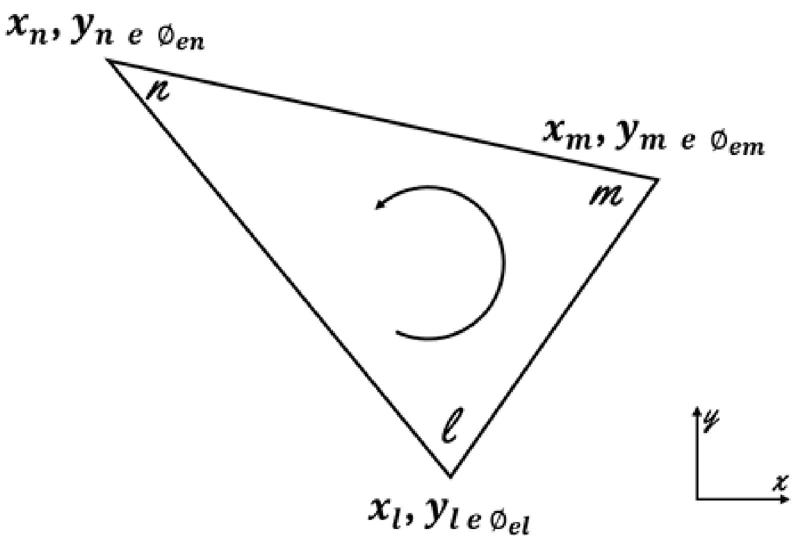

Figura 6.2.1 – Elemento triangular.

Para determinar as equações necessárias ao cálculo dos potenciais elétricos $\phi_e(x, y)$ de uma região bidimensional pelo MEF, pode-se considerar o elemento triangular da figura **6.2.1**, onde os potenciais elétricos ϕ_{el}, ϕ_{em} e ϕ_{en}, localizados nos nós l, m e n, são obtidos por meio da equação **6.3**.

$$\begin{Bmatrix} \phi_{el} \\ \phi_{em} \\ \phi_{en} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_l & y_l \\ 1 & x_m & y_m \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} \tag{6.7}$$

ou,

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_l & y_l \\ 1 & x_m & y_m \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \phi_{el} \\ \phi_{em} \\ \phi_{en} \end{Bmatrix} = [\mathbf{M}]^{-1}\{\phi_{ei}\} \tag{6.8}$$

Desta maneira, os coeficientes a, b e c podem ser determinados por meio da equação **6.8**. Para isso, precisamos calcular a inversa da matriz $[M]$ por meio de:

$$[\mathbf{M}]^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{M})} \operatorname{Adj}(\mathbf{M}) \tag{6.9}$$

Para calcular a matriz adjunta $\operatorname{Adj}[\mathbf{M}]$, precisamos transpor a matriz $[\mathbf{M}]$, e em seguida, determinar os cofatores da nova matriz $[\mathbf{M}]^T$.

$$[\mathbf{M}]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_l & x_m & x_n \\ y_l & y_m & y_n \end{bmatrix}$$

Os cofatores de uma matriz 3×3 são calculados por meio da seguinte equação

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

onde M_{ij} é um **menor** da matriz $[\mathbf{M}]^T$, de um dado elemento de índices i e j.

Cálculo dos **menores** (M_{ij}) de cada elemento da matriz $[\mathbf{M}]^T$:

$$|M_{11}| = \det \begin{bmatrix} x_m & x_n \\ y_m & y_n \end{bmatrix} = x_m y_n - x_n y_m, \qquad |M_{12}| = \det \begin{bmatrix} x_l & x_n \\ y_l & y_n \end{bmatrix} = x_l y_n - x_n y_l,$$

$$|M_{13}| = \det \begin{bmatrix} x_l & x_m \\ y_l & y_m \end{bmatrix} = x_l y_m - x_m y_l, \qquad |M_{21}| = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y_m & y_n \end{bmatrix} = y_n - y_m,$$

$$|M_{22}| = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y_l & y_n \end{bmatrix} = y_n - y_l, \qquad |M_{23}| = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y_l & y_m \end{bmatrix} = y_m - y_l,$$

$$|M_{31}| = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_m & x_n \end{bmatrix} = x_n - x_m, \qquad |M_{32}| = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_l & x_n \end{bmatrix} = x_n - x_l,$$

$$|M_{33}| = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_l & x_m \end{bmatrix} = x_m - x_l$$

Cálculo dos **cofatores** (C_{ij}) de cada elemento da matriz $[\mathbf{M}]^T$.

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}, \qquad C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12},$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13}, \qquad C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21},$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = M_{22}, \qquad C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23},$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31}, \qquad C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32},$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = M_{33}.$$

A matriz adjunta de $[\mathbf{M}]$ será:

$$\mathrm{Adj}[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Adj}[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} (x_m y_n - x_n y_m) & (x_n y_l - x_l y_n) & (x_l y_m - x_m y_l) \\ (y_m - y_n) & (y_n - y_l) & (y_l - y_m) \\ (x_n - x_m) & (x_l - x_n) & (x_m - x_l) \end{bmatrix} \tag{6.10}$$

Em seguida, calculamos o determinante da matriz $[M]$ que, neste caso, é igual a duas vezes a área do elemento finito triangular.

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & x_l & y_l \\ 1 & x_m & y_m \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix}, \qquad \det[M] = \begin{vmatrix} 1 & x_l & y_l \\ 1 & x_m & y_m \\ 1 & x_n & y_n \end{vmatrix} = 2A$$

$$\det[M] = \begin{vmatrix} 1 & x_l & y_l & 1 & x_l \\ 1 & x_m & y_m & 1 & x_m \\ 1 & x_n & y_n & 1 & x_n \end{vmatrix} = x_m y_n + x_l y_m + y_l x_n - x_m y_l - x_n y_m - y_n x_l$$

$$\det[M] = (x_l y_m - x_m y_l) + (x_n y_l - x_l y_n) + (x_m y_n - x_m y_m) = 2A$$

Portanto,

$$\det[M] = [(x_m - x_l)(y_n - y_l) - (x_n - x_l)(y_m - y_l)] = 2A \tag{6.11}$$

e consequentemente,

$$A = \tfrac{1}{2}[(x_m - x_l)(y_n - y_l) - (x_n - x_l)(y_m - y_l)] \tag{6.12}$$

Substituindo as equações **6.10** e **6.11** na equação **6.3** temos:

Obs.:

$$\phi(x,y) = [1 \;\; x \;\; y] \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_l & y_l \\ 1 & x_m & y_m \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \phi_{el} \\ \phi_{em} \\ \phi_{en} \end{Bmatrix} = [\mathbf{M}]^{-1}\{\phi_{ei}\}$$

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (x_m y_n - x_n y_m) & (x_m y_l - x_l y_n) & (x_l y_m - x_m y_l) \\ (y_m - y_n) & (y_n - y_l) & (y_l - y_m) \\ (x_n - x_m) & (x_l - x_n) & (x_m - x_l) \end{bmatrix}}_{[M]^{-1}} \begin{Bmatrix} \phi_{el} \\ \phi_{em} \\ \phi_{en} \end{Bmatrix}$$

$$\phi(x,y) = [1 \quad x \quad y] \underbrace{\frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (x_m y_n - x_n y_m) & (x_m y_l - x_l y_n) & (x_l y_m - x_m y_l) \\ (y_m - y_n) & (y_n - y_l) & (y_l - y_m) \\ (x_n - x_m) & (x_l - x_n) & (x_m - x_l) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{el} \\ \phi_{em} \\ \phi_{en} \end{Bmatrix}}_{=\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix}} \tag{6.13}$$

ou,

$$\phi_e = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i(x,y)\, \phi_{ei} \tag{6.14}$$

onde A é área do elemento dada pela equação **6.12**, e será positivo se for numerado no sentido anti-horário, e α_i correspondem as equações de forma dos elementos triangulares.

$$\alpha_l = \frac{1}{2A}[(x_m y_n - x_n y_m) + (y_m - y_n)x + (x_n - x_m)y] \tag{6.15}$$

$$\alpha_m = \frac{1}{2A}[(x_m y_l - x_l y_n) + (y_n - y_l)x + (x_l - x_n)y] \tag{6.16}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2A}[(x_l y_m - x_m y_l) + (y_l - y_m)x + (x_m - x_l)y] \tag{6.17}$$

A figura **6.2.2** apresenta as funções de forma α_l, α_m e α_n para um elemento finito triangular.

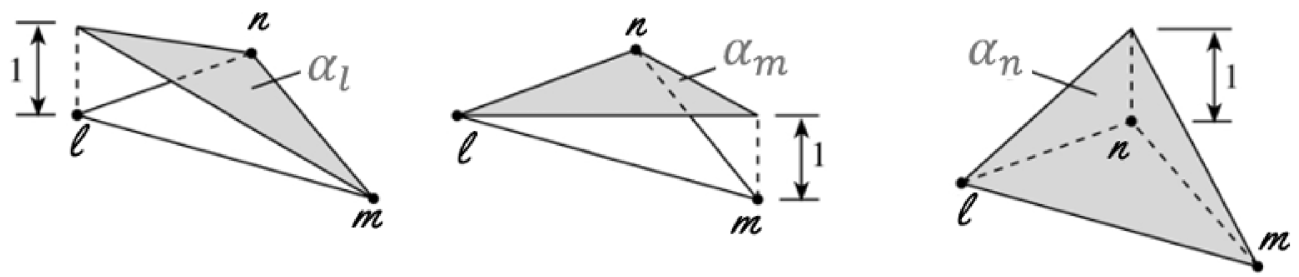

Figura 6.2.2 – Funções de forma do elemento triangular – adaptado de ([SADIKU, 2000]).

A função de forma tem as seguintes propriedades:

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \qquad \sum_{i=1}^{3} \alpha_i(x, y) = 1 \tag{6.18}$$

6.3 Funcional isotrópico

No modelo matemático as propriedades elétricas estão representadas pela condutividade σ e a permitividade relativa ϵ. Na fronteira do meio injeta-se uma corrente elétrica, que gera em seu interior, uma distribuição de potencial e um fluxo de corrente, sendo este último mais conhecido como densidade de corrente, que se escreve da forma:

$$J = \sigma E + \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

que é a corrente induzida no interior do campo elétrico E.

A constante ϵ_0 representa a permitividade do espaço livre que será desconsiderada para simplificar o modelo.

Considerando que:

$$E = -\nabla\phi \qquad e \qquad \nabla \cdot J = 0$$

obtemos a equação,

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla V) = 0$$

denominada equação de Poisson.

Sabe-se que a energia por unidade associada ao elemento e é dada pela equação **6.19**, que representa o funcional referente à equação de Laplace $\nabla^2\phi = 0$.

$$\pi_i = \tfrac{1}{2} \iint_S \sigma |E|^2 dS = \tfrac{1}{2} \iint_S \sigma |\nabla\phi_i|^2 dS \tag{6.19}$$

(Fisicamente, o funcional π_e é a energia por unidade de comprimento associada ao elemento e.) Podemos calcular o gradiente do potencial no elemento por meio da equação **6.14**,

$$\nabla\phi_e = \sum_{i=1}^{3} \phi_{ei} \nabla\alpha_i \tag{6.20}$$

Substituindo a equação **6.20** na **6.19** temos:

- Expandindo o termo quadrático, temos:

$$|\nabla\phi_e|^2 = \nabla\phi_e \cdot \nabla\phi_e = \left(\sum_{i=1}^{3} \phi_{ei} \nabla\alpha_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{3} \phi_{ej} \nabla\alpha_j\right) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \phi_{ei}\phi_{ej} (\nabla\alpha_i \cdot \nabla\alpha_j).$$

- Substitua isso em π_e:

$$\pi_e = \tfrac{1}{2} \iint_S \sigma \left[\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \phi_{ei}\phi_{ej} (\nabla\alpha_i \cdot \nabla\alpha_j)\right] dS.$$

- Trocar soma e integral:

$$\pi_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sigma\phi_{ei}\left[\iint_S \nabla\alpha_i\nabla\alpha_j\, dS\right]\phi_{ej} \tag{6.21}$$

onde σ é a condutividade elétrica da região.

Por conveniência, substituindo os termos entre colchetes por,

$$Y_{ij}^{(e)} = \iint_S \nabla\alpha_i\nabla\alpha_j\, dS \tag{6.22}$$

podemos reescrever a equação 6.21 na forma matricial,

$$\pi_e = \frac{1}{2}\sigma[\phi_e]^T[Y^{(e)}][\phi_e] \tag{6.23}$$

onde T indica matriz transposta de $[\phi_e]$, vetor com os potenciais em cada vértice do elemento triangular.

$$[\phi_e] = \begin{Bmatrix} \phi_{el} \\ \phi_{em} \\ \phi_{en} \end{Bmatrix} \tag{6.24}$$

A matriz $[Y^{(e)}]$ apresentada na equação 6.25 é conhecida como **matriz local dos coeficientes dos elementos**, também é conhecida como **matriz de rigidez**, uma vez que a origem do MEF provém da área de conhecimento de análises estruturais.

$$[Y^{(e)}] = \begin{bmatrix} Y_{ll}^{(e)} & Y_{lm}^{(e)} & Y_{ln}^{(e)} \\ Y_{ml}^{(e)} & Y_{mm}^{(e)} & Y_{mn}^{(e)} \\ Y_{nl}^{(e)} & Y_{nm}^{(e)} & Y_{nn}^{(e)} \end{bmatrix} \tag{6.25}$$

6.3.1 Cálculo de cada termo da matriz $[Y^{(e)}]$

6.3.1.1 Cálculo de $Y_{lm}^{(e)}$

Os coeficientes da matriz $[Y^{(e)}]$ podem ser obtidos pela equação 6.22, por exemplo:

$$\boxed{Y_{lm}^{(e)} = \iint_S \nabla\alpha_l\nabla\alpha_m dS}$$

Para calcular o gradiente de α_i, precisamos determinar as derivadas parciais da função em relação a 'x' e 'y', então:

$$\alpha_l(x,y) = \frac{1}{2A}\left[(x_m y_n - x_n y_m) + (y_m - y_n)x + (x_n - x_m)y\right]$$

$$\frac{\partial\alpha_l}{\partial x} = \frac{1}{2A}\frac{\partial}{\partial x}\left[(x_m y_n - x_n y_m) + (y_m - y_n)x + (x_n - x_m)y\right]$$

$$\boxed{\frac{\partial\alpha_l}{\partial x} = \frac{1}{2A}(y_m - y_n)}$$

analogamente,

$$\frac{\partial\alpha_l}{\partial y} = \frac{1}{2A}\frac{\partial}{\partial y}\left[(x_m y_n - x_n y_m) + (y_m - y_n)x + (x_n - x_m)y\right]$$

$$\boxed{\frac{\partial\alpha_l}{\partial y} = \frac{1}{2A}(x_n - x_m)}$$

Portanto,

$$\boxed{\nabla\alpha_l = \left(\frac{\partial\alpha_l}{\partial x}, \frac{\partial\alpha_l}{\partial y}\right) = \left(\frac{1}{2A}(y_m - y_n), \frac{1}{2A}(x_n - x_m)\right)}$$

Por meio do mesmo procedimento demonstrado anteriormente podemos determinar o $\nabla\alpha_m$.

$$\alpha_m(x,y) = \frac{1}{2A}[(x_m y_l - x_l y_n) + (y_n - y_l)x + (x_l - x_n)y]$$

$$\frac{\partial\alpha_m}{\partial x} = \frac{1}{2A}\frac{\partial}{\partial x}[(x_m y_l - x_l y_n) + (y_n - y_l)x + (x_l - x_n)y]$$

$$\boxed{\frac{\partial\alpha_m}{\partial x} = \frac{1}{2A}(y_n - y_l)}$$

$$\frac{\partial\alpha_m}{\partial y} = \frac{1}{2A}\frac{\partial}{\partial y}[(x_m y_l - x_l y_n) + (y_n - y_l)x + (x_l - x_n)y]$$

$$\boxed{\frac{\partial\alpha_m}{\partial x} = \frac{1}{2A}(x_l - x_n)}$$

portanto,

$$\boxed{\nabla\alpha_m = \left(\frac{\partial\alpha_m}{\partial x}, \frac{\partial\alpha_m}{\partial y}\right) = \left(\frac{1}{2A}(y_n - y_l), \frac{1}{2A}(x_l - x_n)\right)}$$

Multiplicando os dois gradientes, temos:

$$\nabla\alpha_l\nabla\alpha_m = \left(\frac{1}{2A}(y_m - y_n)\right)\left(\frac{1}{2A}(y_n - y_l)\right) + \left(\frac{1}{2A}(x_n - x_m)\right)\left(\frac{1}{2A}(x_l - x_n)\right)$$

Com esses dados podemos calcular o coeficiente $Y_{lm}^{(e)}$ do exemplo.

$$Y_{lm}^{(e)} = \iint_S \nabla\alpha_l\nabla\alpha_m\, dS = \frac{1}{4A^2}\Big[(y_m - y_n)(y_n - y_l) + (x_n - x_m)(x_l - x_n)\Big]\iint_S dS$$

Obs.: Sabendo que $\iint_S dS = A$

$$\boxed{Y_{lm}^{(e)} = \frac{1}{4A}\Big[(y_m - y_n)(y_n - y_l) + (x_n - x_m)(x_l - x_n)\Big]} \tag{6.26}$$

Por meio dos procedimentos aplicados no exemplo anterior, podemos calcular os demais coeficientes da matriz $[Y^{(e)}]$ que são apresentados a seguir.

6.3.1.2 Cálculo de $Y_{ln}^{(e)}$

$$\boxed{Y_{ln}^{(e)} = \iint_S \nabla\alpha_l\nabla\alpha_n dS}$$

Como calculado anteriormente;

$$\boxed{\nabla\alpha_l = \left(\frac{\partial\alpha_l}{\partial x}, \frac{\partial\alpha_l}{\partial y}\right) = \left(\frac{1}{2A}(y_m - y_n), \frac{1}{2A}(x_n - x_m)\right)}$$

e,

$$\alpha_n = \frac{1}{2A}[(x_l y_m - x_m y_l) + (y_l - y_m)x + (x_m - x_l)y]$$

$$\frac{\partial\alpha_n}{\partial x} = \frac{1}{2A}\frac{\partial}{\partial x}[(x_l y_m - x_m y_l) + (y_l - y_m)x + (x_m - x_l)y]$$

$$\boxed{\frac{\partial \alpha_n}{\partial x} = \frac{1}{2A}(y_l - y_m)}$$

e,

$$\frac{\partial \alpha_n}{\partial y} = \frac{1}{2A}\frac{\partial}{\partial y}[(x_l y_m - x_m y_l) + (y_l - y_m)x + (x_m - x_l)y]$$

$$\boxed{\frac{\partial \alpha_n}{\partial y} = (x_m - x_l)}$$

então:

$$\boxed{\nabla \alpha_n = \left(\frac{\partial \alpha_n}{\partial x}, \frac{\partial \alpha_n}{\partial y}\right) = \left(\frac{1}{2A}(y_l - y_m), \frac{1}{2A}(x_m - x_l)\right)}$$

Multiplicando os dois gradientes, temos:

$$\nabla \alpha_l \nabla \alpha_n = \left(\frac{1}{2A}(y_m - y_n)\right)\left(\frac{1}{2A}(y_l - y_m)\right) + \left(\frac{1}{2A}(x_n - x_m)\right)\left(\frac{1}{2A}(x_m - x_l)\right)$$

$$Y_{ln}^{(e)} = \iint_S \nabla \alpha_l \nabla \alpha_n \, dS = \frac{1}{4A^2}\Big[(y_m - y_n)(y_l - y_m) + (x_n - x_m)(x_m - x_l)\Big] \iint_S dS$$

portanto:

$$\boxed{Y_{ln}^{(e)} = \frac{1}{4A}\Big[(y_m - y_n)(y_l - y_m) + (x_n - x_m)(x_m - x_l)\Big];} \tag{6.27}$$

6.3.1.3 Cálculo de $Y_{ll}^{(e)}$

$$\boxed{Y_{ll}^{(e)} = \iint_S \nabla \alpha_l \nabla \alpha_l dS}$$

Como calculado anteriormente:

$$\boxed{\nabla \alpha_l = \left(\frac{\partial \alpha_l}{\partial x}, \frac{\partial \alpha_l}{\partial y}\right) = \left(\frac{1}{2A}(y_m - y_n), \frac{1}{2A}(x_n - x_m)\right)}$$

então:

$$\nabla \alpha_l \nabla \alpha_l = \left(\frac{1}{2A}(y_m - y_n)\right)\left(\frac{1}{2A}(y_m - y_n)\right) + \left(\frac{1}{2A}(x_n - x_m)\right)\left(\frac{1}{2A}(x_n - x_m)\right)$$

$$Y_{ll}^{(e)} = \iint_S \nabla \alpha_l \nabla \alpha_l \, dS = \frac{1}{4A^2}\Big[(y_m - y_n)(y_m - y_n) + (x_n - x_m)(x_n - x_m)\Big] \iint_S dS$$

portanto:

$$\boxed{Y_{ll}^{(e)} = \frac{1}{4A}\Big[(y_m - y_n)^2 + (x_n - x_m)^2\Big];} \tag{6.28}$$

6.3.1.4 Cálculo de $Y_{mm}^{(e)}$

$$\boxed{Y_{mm}^{(e)} = \iint_S \nabla \alpha_m \nabla \alpha_m dS}$$

Como calculado anteriormente:

$$\boxed{\nabla\alpha_m = \left(\frac{\partial\alpha_m}{\partial x}, \frac{\partial\alpha_m}{\partial y}\right) = \left(\frac{1}{2A}(y_n - y_l), \frac{1}{2A}(x_l - x_n)\right)}$$

então:

$$\nabla\alpha_m\nabla\alpha_m = \left(\frac{1}{2A}(y_n - y_l)\right)\left(\frac{1}{2A}(y_n - y_l)\right) + \left(\frac{1}{2A}(x_l - x_n)\right)\left(\frac{1}{2A}(x_l - x_n)\right)$$

$$Y_{mm}^{(e)} = \iint_S \nabla\alpha_m\nabla\alpha_m\, dS = \frac{1}{4A^2}\Big[(y_n - y_l)(y_n - y_l) + (x_l - x_n)(x_l - x_n)\Big]\iint_S dS$$

portanto:

$$\boxed{Y_{mm}^{(e)} = \frac{1}{4A}\Big[(y_n - y_l)^2 + (x_l - x_n)^2\Big];} \tag{6.29}$$

6.3.1.5 Cálculo de $Y_{mn}^{(e)}$

$$\boxed{Y_{mn}^{(e)} = \iint_S \nabla\alpha_m\nabla\alpha_n dS}$$

Como calculado anteriormente:

$$\boxed{\nabla\alpha_m = \left(\frac{\partial\alpha_m}{\partial x}, \frac{\partial\alpha_m}{\partial y}\right) = \left(\frac{1}{2A}(y_n - y_l), \frac{1}{2A}(x_l - x_n)\right)}$$

$$\boxed{\nabla\alpha_n = \left(\frac{\partial\alpha_n}{\partial x}, \frac{\partial\alpha_n}{\partial y}\right) = \left(\frac{1}{2A}(y_l - y_m), \frac{1}{2A}(x_m - x_l)\right)}$$

então:

$$\nabla\alpha_m\nabla\alpha_n = \left(\frac{1}{2A}(y_n - y_l)\right)\left(\frac{1}{2A}(y_l - y_m)\right) + \left(\frac{1}{2A}(x_l - x_n)\right)\left(\frac{1}{2A}(x_m - x_l)\right)$$

$$Y_{mn}^{(e)} = \iint_S \nabla\alpha_m\nabla\alpha_n\, dS = \frac{1}{4A^2}\Big[(y_n - y_l)(y_l - y_m) + (x_l - x_n)(x_m - x_l)\Big]\iint_S dS$$

portanto:

$$\boxed{Y_{mn}^{(e)} = \frac{1}{4A}\Big[(y_n - y_l)(y_l - y_m) + (x_l - x_n)(x_m - x_l)\Big]} \tag{6.30}$$

6.3.1.6 Cálculo de $Y_{nn}^{(e)}$

$$\boxed{Y_{nn}^{(e)} = \iint_S \nabla\alpha_n\nabla\alpha_n dS}$$

Como calculado anteriormente:

$$\boxed{\nabla\alpha_n = \left(\frac{\partial\alpha_n}{\partial x}, \frac{\partial\alpha_n}{\partial y}\right) = \left(\frac{1}{2A}(y_l - y_m), \frac{1}{2A}(x_m - x_l)\right)}$$

então:

$$\nabla\alpha_n\nabla\alpha_n = \left(\frac{1}{2A}(y_l - y_m)\right)\left(\frac{1}{2A}(y_l - y_m)\right) + \left(\frac{1}{2A}(x_m - x_l)\right)\left(\frac{1}{2A}(x_m - x_l)\right)$$

$$Y_{nn}^{(e)} = \iint_S \nabla\alpha_n\nabla\alpha_n\, dS = \frac{1}{4A^2}\Big[(y_l - y_m)(y_l - y_m) + (x_m - x_l)(x_m - x_l)\Big]\iint_S dS$$

portanto:

$$\boxed{Y_{nn}^{(e)} = \frac{1}{4A}\left[(y_l - y_m)^2 + (x_m - x_l)^2\right]} \tag{6.31}$$

Como a matriz $[Y^{(e)}]$ é simétrica temos: $Y_{ml}^{(e)} = Y_{lm}^{(e)}$; $Y_{nl}^{(e)} = Y_{ln}^{(e)}$; $Y_{nm}^{(e)} = Y_{mn}^{(e)}$.

6.3.1.7 Resumo

Coeficientes das equações:

$$\boxed{Y_{ll}^{(e)} = \frac{1}{4A}\left[(y_m - y_n)^2 + (x_n - x_m)^2\right];}$$

$$\boxed{Y_{mm}^{(e)} = \frac{1}{4A}\left[(y_n - y_l)^2 + (x_l - x_n)^2\right];}$$

$$\boxed{Y_{nn}^{(e)} = \frac{1}{4A}\left[(y_l - y_m)^2 + (x_m - x_l)^2\right];}$$

$$\boxed{Y_{lm}^{(e)} = \frac{1}{4A}\left[(y_m - y_n)(y_n - y_l) + (x_n - x_m)(x_l - x_n)\right];}$$

$$\boxed{Y_{ln}^{(e)} = \frac{1}{4A}\left[(y_m - y_n)(y_l - y_m) + (x_n - x_m)(x_m - x_l)\right];}$$

$$\boxed{Y_{mn}^{(e)} = \frac{1}{4A}\left[(y_n - y_l)(y_l - y_m) + (x_l - x_n)(x_m - x_l)\right].}$$

Como a matriz $[Y^{(e)}]$ é simétrica temos: $Y_{ml}^{(e)} = Y_{lm}^{(e)}$; $Y_{nl}^{(e)} = Y_{ln}^{(e)}$; $Y_{nm}^{(e)} = Y_{mn}^{(e)}$.

6.4 Montar a Matriz Global bidimensional

O próximo passo é montar uma matriz global a partir de cada elemento finito triangular discretizado da região de interesse – cada elemento é uma matriz local. Uma vez conhecidas as matrizes locais, define-se uma matriz quadrada global de ordem $M_{n\times n}$, onde n é o número total de nós. A montagem da matriz global é feita por meio do método da superposição.

Definindo o variacional como a energia associada à montagem dos elementos como

$$\pi = \sum_{i=1}^{N} \pi_e = \tfrac{1}{2}\sigma[\phi]^T[Y][\phi]$$

onde $\{\phi\}$ é um vetor de ordem $n \times 1$ e $[Y]$ uma matriz $n \times n$, sendo n o número de nós.

$$\phi = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_n \end{Bmatrix}, \qquad [Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \cdots & Y_{nn} \end{bmatrix} \tag{6.32}$$

Dessa maneira, a matriz global é determinada por meio das matrizes locais de coeficientes individuais, equações de 6.26 à 6.31.

O método da superposição usado no processo de montagem da matriz global é melhor compreendido por meio de um exemplo. A figura 6.3.1 apresenta uma malha de elementos finitos com dois elementos triangulares. A numeração dos nós *1, 2, 3 e 4* é chamada de numeração global. A numeração local corresponde a *l-m-n* do elemento da figura 6.2.1. Por exemplo, para o elemento 2 na figura 6.3.1, a numeração global *1-3-4* corresponde à numeração local *l-m-n* do elemento na figura 6.2.1. Lembrando que a numeração local deve estar na sequência anti-horária, pois a área do triângulo deve ter valor positivo.

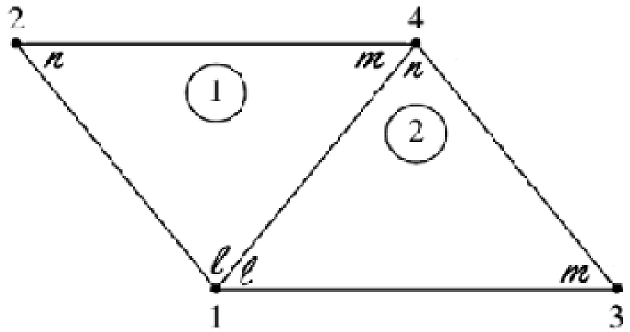

Figura 6.3.1 – Montagem de dois elementos – adaptado de (SADIKU, 2000).

Assumindo a numeração específica da figura 6.3.1, espera-se que a matriz de coeficientes

globais tenha a forma de uma matriz 4×4, uma vez que esta malha tem quatro nós.

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{bmatrix} \tag{6.33}$$

A contribuição para a posição i, j em cada termo da matriz global $[Y]$ é a soma de todos os elementos contendo nós i e j. Por exemplo, os elementos (1) e (2) têm o nó 1 em comum, portanto

$$Y_{11} = Y_{ll}^{(1)} + Y_{ll}^{(2)}$$

Seguindo o mesmo raciocínio determinamos os demais componentes da matriz global.

$$Y_{12} = Y_{21} = Y_{ln}^{(1)}, \qquad Y_{13} = Y_{31} = Y_{lm}^{(2)}, \qquad Y_{14} = Y_{41} = Y_{lm}^{(1)} + Y_{ln}^{(2)},$$

$$Y_{22} = Y_{nn}^{(1)}, \qquad Y_{23} = Y_{32} = 0, \qquad Y_{24} = Y_{42} = Y_{nm}^{(1)},$$

$$Y_{33} = Y_{mm}^{(2)}, \qquad Y_{34} = Y_{43} = Y_{mn}^{(2)}, \qquad Y_{44} = Y_{mm}^{(1)} + Y_{nn}^{(2)}.$$

Em seguida, montamos os coeficientes na matriz global.

$$[Y] = \begin{bmatrix} (Y_{ll}^{(1)} + Y_{ll}^{(2)}) & Y_{ln}^{(1)} & Y_{lm}^{(2)} & (Y_{lm}^{(1)} + Y_{ln}^{(2)}) \\ Y_{ln}^{(1)} & Y_{nn}^{(1)} & 0 & Y_{nm}^{(1)} \\ Y_{lm}^{(2)} & 0 & Y_{mm}^{(2)} & Y_{mn}^{(2)} \\ (Y_{lm}^{(1)} + Y_{ln}^{(2)}) & Y_{nm}^{(1)} & Y_{mn}^{(2)} & (Y_{mm}^{(1)} + Y_{nn}^{(2)}) \end{bmatrix} \tag{6.34}$$