

1 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS 2D

Muitos problemas de engenharia de geometria complexa não têm solução analítica conhecida como ocorre para geometrias mais simples como cilindro, cone e cubo. Dessa maneira, para a solução desses problemas é necessário a utilização de métodos numéricos como o método de elementos finitos (MEF).

1.1 Passo 1 - Discretização espacial da região de interesse

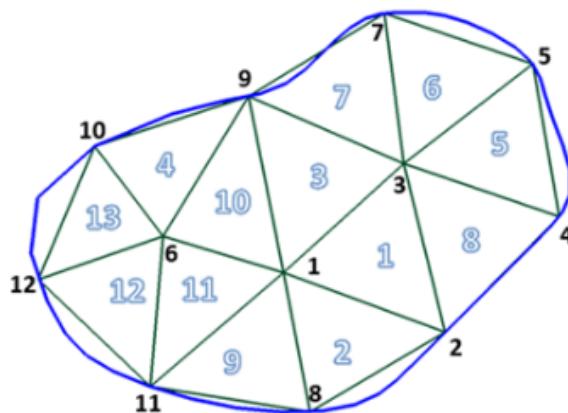


Figura 1 – Malha de elementos finitos usada na simulação EIT.

A primeira etapa para a solução numérica pelo MEF é subdividir a região de interesse em elementos regulares de solução analítica conhecida. Os elementos podem ser: segmentos de reta; triângulos; quadriláteros; tetraedros, conforme a dimensão da geometria do problema.

A figura 1 apresenta em azul uma geometria complexa subdividida numa malha de elementos finitos triangulares. Os números em preto correspondem aos pontos, ou nós, da malha, enquanto que os números em azul identificam cada elemento. Um sistema de numeração (x, y, z) identifica as coordenadas de cada elemento da geometria.

Note que a região compreendida pelos elementos não engloba totalmente a região de interesse da linha azul, o que torna o resultado do MEF uma aproximação do resultado real. Entretanto, pode-se aumentar a densidade da malha diminuindo o tamanho dos elementos, e dessa maneira aproximar a área em estudo da área da linha azul, aumentando a precisão, porém, com custo computacional mais elevado.

1.2 Passo 2 - Seleção da função de interpolação

Supondo que estamos interessado em determinar o potencial $\phi(x, y)$ em cada ponto da região da figura 1 em estudo, podemos considerar que a distribuição de potencial é contínua na fronteira do elemento, dessa maneira:

$$\phi(x, y) \simeq \sum_{e=1}^N \phi_e(x, y) \quad (1.1)$$

onde N é o número de elementos e $\phi_e(x, y)$ é a contribuição de potencial de cada elemento da malha. A função $\phi_e(x, y)$, é qualquer função linear capaz de efetuar a interpolação dos três nós do elemento triangular. A função $\phi_e(x, y)$ de aproximação mais utilizada para esse fim é:

$$\phi_e(x, y) = a + bx + cy \quad (1.2)$$

que na forma vetorial fica como:

$$\phi_e(x, y) = [1 \ x \ y] \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} \quad (1.3)$$

Uma característica importante é que o potencial ϕ_e pode assumir valores diferentes de zero dentro do elemento, entretanto, fora do elemento e o valor deve ser sempre zero. Outra característica é que a função $\phi_e(x, y)$ deve ser da classe C^1 , ou seja, deve ter a primeira derivada.

Dessa maneira, a variação do potencial ϕ_e dentro do elemento triangular é linear, portanto o campo elétrico é uniforme dentro do elemento, ou seja:

$$\mathbf{E}_e = -\nabla \phi_e \quad (1.4)$$

$$\nabla \phi_e = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \quad (1.5)$$

ou,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_e}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(a + bx + cy) = b, \\ \frac{\partial \phi_e}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(a + bx + cy) = c \\ E &= -(b, c) \end{aligned}$$

Equações governantes elementos triangulares

O MEF é fortemente dependente das coordenadas nodais dos elementos. Dessa forma, é conveniente adequar as equações governantes desses elementos em função de suas coordenadas. A identificação de cada nó pode ser efetuada por letras ou números. Aqui, optou-se pela identificação dos nós por letras para diferenciar a identificação **local** da

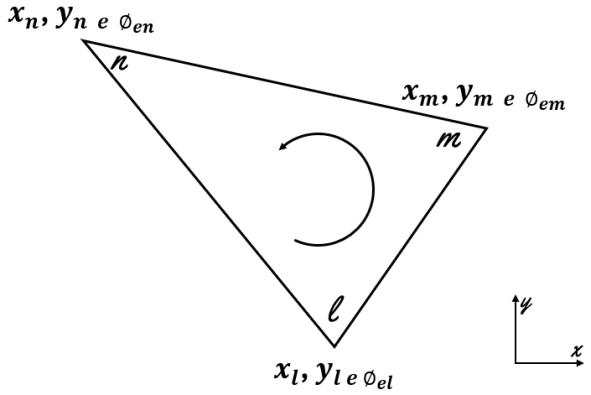


Figura 2 – Elemento triangular.

global de cada elemento. No MEF cada nó da malha têm duas identificações conhecidas como local e global. A identificação local é proveniente de um matriz local que relaciona todos os nós de um único elemento, que no caso do triângulo da figura 2.2 são os nós l , m , e n . Entretanto, cada nó do elemento é identificado numa sequência numérica que relaciona todos os elementos na malha.

Partindo da equação 1.3, pode-se determinar os potenciais elétricos ϕ_l , ϕ_m e ϕ_n localizados nos nós l , m e n , do elemento triangular da figura 2, por meio da seguinte formulação:

$$\begin{Bmatrix} \phi_l \\ \phi_m \\ \phi_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_l & y_l \\ 1 & x_m & y_m \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} \quad (1.6)$$

Rearranjando a equação 1.6, pode-se determinar os coeficientes a , b e c da equação de interpolação:

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_l & y_l \\ 1 & x_m & y_m \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \phi_l \\ \phi_m \\ \phi_n \end{Bmatrix} = [\mathbf{M}]^{-1} \{\phi_i\} \quad (1.7)$$

Para isso, precisamos calcular a inversa da matriz $[M]$. O procedimento para a inversão da matriz $[M]$ é apresentado no Apêndice 1, equação [A1.xxx](#). Substituindo a matriz inversa de $[M]$ na equação 1.7, temos:

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (x_m y_n - x_n y_m) & (x_n y_l - x_l y_n) & (x_l y_m - x_m y_l) \\ (y_m - y_n) & (y_n - y_l) & (y_l - y_m) \\ (x_n - x_m) & (x_l - x_n) & (x_m - x_l) \end{bmatrix}}_{[M]^{-1}} \begin{Bmatrix} \phi_l \\ \phi_m \\ \phi_n \end{Bmatrix} \quad (1.8)$$

onde A é área do elemento dada pela equação [A1.xxx](#), e será positivo se for numerado no sentido anti-horário.

Substituindo a equação 1.8 na equação 1.3, temos:

$$\phi_e(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \frac{1}{2A} \underbrace{\begin{bmatrix} (x_m y_n - x_n y_m) & (x_n y_l - x_l y_n) & (x_l y_m - x_m y_l) \\ (y_m - y_n) & (y_n - y_l) & (y_l - y_m) \\ (x_n - x_m) & (x_l - x_n) & (x_m - x_l) \end{bmatrix}}_{= \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix}} \begin{Bmatrix} \phi_l \\ \phi_m \\ \phi_n \end{Bmatrix} \quad (1.9)$$

Para simplificar a notação substituímos os elementos da matriz por:

$$\alpha_l = (x_m y_n - x_n y_m) \quad \beta_l = (y_m - y_n) \quad \gamma_l = (x_n - x_m)$$

$$\alpha_m = (x_n y_l - x_l y_n) \quad \beta_m = (y_n - y_l) \quad \gamma_m = (x_l - x_n)$$

$$\alpha_n = (x_l y_m - x_m y_l) \quad \beta_n = (y_l - y_m) \quad \gamma_n = (x_m - x_l)$$

assim,

$$\phi_e(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_l & \alpha_m & \alpha_n \\ \beta_l & \beta_m & \beta_n \\ \gamma_l & \gamma_m & \gamma_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_l \\ \phi_m \\ \phi_n \end{Bmatrix}$$

$$\phi_e(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_l \phi_l + \alpha_m \phi_m + \alpha_n \phi_n \\ \beta_l \phi_l + \beta_m \phi_m + \beta_n \phi_n \\ \gamma_l \phi_l + \gamma_m \phi_m + \gamma_n \phi_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \phi_e(x, y) = \frac{1}{2A} & \left[(1)(\alpha_l \phi_l + \alpha_m \phi_m + \alpha_n \phi_n) \right. \\ & + x(\beta_l \phi_l + \beta_m \phi_m + \beta_n \phi_n) \\ & \left. + y(\gamma_l \phi_l + \gamma_m \phi_m + \gamma_n \phi_n) \right] \end{aligned}$$

Agrupando os termos ϕ_l , ϕ_m e ϕ_n , temos:

$$\begin{aligned} \phi_e(x, y) = \frac{1}{2A} & \left[\phi_l (\alpha_l + x\beta_l + y\gamma_l) \right. \\ & + \phi_m (\alpha_m + x\beta_m + y\gamma_m) \\ & \left. + \phi_n (\alpha_n + x\beta_n + y\gamma_n) \right] \end{aligned} \quad (1.10)$$

Note que podemos substituir convenientemente os termos entre parênteses da equação 1.10 por:

$$N_i = \frac{1}{2A} [\alpha_i + x\beta_i + y\gamma_i]$$

assim,

$$N_l = \frac{1}{2A} [\alpha_l + x\beta_l + y\gamma_l]$$

$$N_m = \frac{1}{2A} [\alpha_m + x\beta_m + y\gamma_m]$$

$$N_n = \frac{1}{2A}[\alpha_n + x\beta_n + y\gamma_n]$$

Substituindo N_i na equação 1.10 obtém-se

$$\phi_e(x, y) = \sum_{i=1}^3 N_i(x, y) \phi_i \quad (1.11)$$

A função de forma tem as seguintes propriedades:

$$N_i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad \sum_{i=1}^3 N_i(x, y) = 1$$

Dessa maneira, a equação 1.10 fica como:

$$\phi_e(x, y) = \frac{1}{2A} [\phi_l N_l + \phi_m N_m + \phi_n N_n] \quad (1.12)$$

ou

$$\phi_e(x, y) = \frac{1}{2A} [\mathbf{N}] \{\boldsymbol{\phi}\} \quad (1.13)$$

Observe que $[\mathbf{N}]$ sem as simplificações fica como:

$$\begin{aligned} \phi_e(x, y) = \frac{1}{2A} & \left[[(x_m y_n - x_n y_m) + (y_m - y_n) + (x_n - x_m)] \right. \\ & x[(x_n y_l - x_l y_n) + (y_n - y_l) + (x_l - x_n)] \\ & \left. y[(x_l y_m - x_m y_l) + (y_l - y_m) + (x_m - x_l)] \right]_{1 \times 3} \begin{Bmatrix} \phi_l \\ \phi_m \\ \phi_n \end{Bmatrix}_{3 \times 1} \end{aligned} \quad (1.14)$$

A figura 3 apresenta graficamente o comportamento das funções de forma α_l , α_m e α_n para um elemento finito triangular.

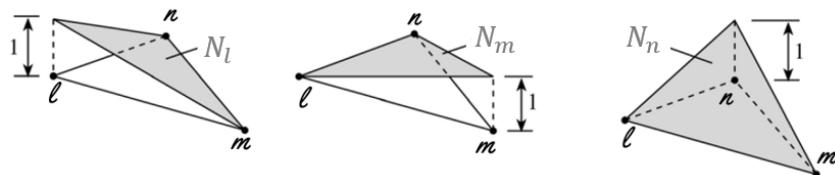


Figura 3 – Funções de forma do elemento triangular.

Gradiente da função do potencial $\phi(x, y)$

Para efetuar o desenvolvimento do funcional que governa o processo de iteração numérica para resolver o problema direto pelo MEF, precisamos determinar o gradiente da função $\phi(x, y)$, assim, seja:

$$\nabla \phi = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{array} \right\}$$

Dessa maneira, vamos determinar o gradiente da função potencial descrita pela equação 1.12, portanto:

$$\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{2A} \left[\frac{\partial N_l}{\partial x} + \frac{\partial N_m}{\partial x} + \frac{\partial N_n}{\partial x} \right]$$

ou seja:

***** CONTINUAR *****

Formulação da equação de Laplace

As Equações de Maxwell descrevem o campo eletromagnético dentro de um objeto:

- Lei de Gauss

$$\nabla \cdot D = \rho_c \quad (1.15)$$

- Lei de Gauss para o magnetismo

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (1.16)$$

- Lei da Indução de Faraday

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (1.17)$$

- Lei de Ampere

$$\nabla \times H = \mathbf{J} + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (1.18)$$

- Equação da continuidade

$$\nabla \cdot J = 0 \quad (1.19)$$

onde:

- D é o campo de deslocamento elétrico

- ρ_c é a densidade de carga livre

- B é a densidade de fluxo magnético

- E é o campo elétrico

- H é o campo magnético

- \mathbf{J} é a densidade de corrente

- ∇ é o gradiente. $\nabla \phi(x, y, z) = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x}; \frac{\partial \phi}{\partial y}; \frac{\partial \phi}{\partial z} \right]$

- $\nabla \cdot$ é o divergente. $\nabla \cdot \phi(x, y) = \left[\frac{\partial \phi_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y(x, y)}{\partial y} \right]$ (fonte/sorvedouro)

- $\nabla \times$ é o rotacional. $\nabla \times \phi(x, y, z) = \left[\left(\frac{\partial \phi_z}{\partial y} - \frac{\partial \phi_y}{\partial z} \right); \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial z} - \frac{\partial \phi_z}{\partial x} \right); \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial x} - \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) \right]$ (vorticidade)

Para problemas envolvendo corrente alternada de frequência baixa, pode-se desconsiderar a dependência do tempo e utilizar uma aproximação quasi-estática para a equações:

$$\nabla \times E = 0 \quad (1.20)$$

$$\nabla \times H = \mathbf{J} \quad (1.21)$$

Em meios lineares isotrópicos, temos também:

$$D = \varepsilon E \quad (1.22)$$

$$B = \mu H \quad (1.23)$$

$$\mathbf{J} = \sigma E \quad (1.24)$$

onde:

- ε é a permissividade do meio
- σ é a condutividade do meio
- μ é a permeabilidade magnética do meio

Na eletrostática a Lei da Indução de Faraday não tem variação no tempo, portanto $\nabla \times E = 0$. Do cálculo, sabe-se que o rotacional de um gradiente é nulo, dessa maneira pode-se assumir que:

$$\nabla \times \nabla \phi = 0 \quad (1.25)$$

assim conclui-se que

$$E = -\nabla \phi \quad (1.26)$$

Substituindo a equação 1.24 na 1.21, temos:

$$D = \varepsilon(-\nabla \phi) \quad (1.27)$$

Substituindo D na equação 1.15, obtemos a equação de Poisson:

$$\nabla \cdot (\varepsilon(-\nabla \phi)) = \rho_c \quad (1.28)$$

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho_c}{\varepsilon} \quad (1.29)$$

Quando não há cargas livres no domínio $\rho_c = 0$, a equação 1.24 passa a ser denominada equação de Laplace:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1.30)$$

ou,

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi_{(x,y,z)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_{(x,y,z)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_{(x,y,z)}}{\partial z^2} = 0 \quad (1.31)$$

A equação 1.31 é a equação diferencial que rege o problema eletrostático. Da equação 1.24 sabe-se que $\mathbf{J} = \sigma E$, portanto:

$$\mathbf{J} = \sigma(-\nabla \phi) \quad (1.32)$$

Substituindo J na equação 1.19, temos:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) = 0 \quad (1.33)$$

A equação 1.33 é conhecida como equação generalizada de Laplace.

Para um meio de condutividade isotrópica do meio, onde $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$, pode-se representar a equação 1.33, num modo geral em 3D, como:

$$\nabla \cdot \sigma \nabla \phi = \nabla \cdot \sigma \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0 \quad (1.34)$$

Para um meio de condutividade anisotrópica onde a anisotropia, bem como, a geometria estão em conformidade com os eixos x , y e z do sistema de referência de coordenadas, temos:

$$\nabla \cdot \sigma \nabla \phi = \nabla \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{Bmatrix} = 0 \quad (1.35)$$

$$\nabla \cdot \sigma \nabla \phi = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma_{zz} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0 \quad (1.36)$$

Para um meio de condutividade anisotrópica geral, temos:

$$\nabla \cdot \sigma \nabla \phi = \nabla \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{Bmatrix} = 0 \quad (1.37)$$

portanto,

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \sigma_{xy} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \sigma_{xz} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad (1.38)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_{yx} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \sigma_{yz} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad (1.39)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma_{zx} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \sigma_{zy} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \sigma_{zz} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0 \quad (1.40)$$

obs:

$$\sigma_{xx} = \sigma_n \cos^2 \theta + \sigma_t \sin^2 \theta \quad (1.41)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_n \sin^2 \theta + \sigma_t \cos^2 \theta \quad (1.42)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \sigma_n \sin \theta \cos \theta - \sigma_t \sin \theta \cos \theta \quad (1.43)$$

VERIFICAR EIXO Z

Formulação do Funcional

Para determinar o sistema de equações necessárias para utilização do MEF é preciso efetuar minimização de um funcional que represente a equação diferencial que governa o problema. Os métodos frequentemente mencionados na literatura para encontrar essas equações são: o método variacional e método dos resíduos ponderados de Galerkin, respectivamente.

Por meio do método variacional, para resolver a equação diferencial de Laplace, utiliza-se a minimização de um funcional baseado na energia do sistema, que corresponde a solução da equação original, dado por.

$$\pi = \frac{1}{2} \int_S \varepsilon |E|^2 dS = \frac{1}{2} \int_S \varepsilon |\nabla \phi|^2 dS \quad (1.44)$$

Considerando um meio puramente resistivo e desconsiderando os efeitos de capacitors, pode-se reescrever a equação 1.44 em função da condutividade, que assim:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_S \sigma |E|^2 dS = \frac{1}{2} \int_S \sigma |\nabla \phi|^2 dS \quad (1.45)$$

Para um único elemento da malha de elementos finitos o funcional fica como:

$$\pi_e = \frac{1}{2} \int_S \sigma |\nabla \phi|^2 dS \quad (1.46)$$

Da equação 1.11 obtemos que:

$$\nabla \phi = \sum_{i=1}^3 \phi_i \nabla N_i \quad (1.47)$$

Substituindo a equação 1.47 na 1.46 temos: Expandindo o termo quadrático, temos:

$$|\nabla \phi|^2 = \nabla \phi \cdot \nabla \phi = \left(\sum_{i=1}^3 \phi_i \nabla N_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 \phi_j \nabla N_j \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \phi_i \phi_j (\nabla N_i \cdot \nabla N_j)$$

Substituindo e na equação 1.46:

$$\pi_e = \frac{1}{2} \int_S \sigma \left[\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \phi_i \phi_j (\nabla N_i \cdot \nabla N_j) \right] dS \quad (1.48)$$

ou,

$$\pi_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \phi_i \left[\int_S \nabla N_i \nabla N_j dS \right] \phi_j \quad (1.49)$$

Nomeando os termos entre colchetes por $Y_{ij}^{(e)}$, temos:

$$Y_{ij}^{(e)} = \int_S \nabla N_i \nabla N_j dS \quad (1.50)$$

podemos reescrever a equação 1.49 na forma matricial,

$$\pi_e = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\sigma}] \{\phi_e\}^T [Y^{(e)}] \{\phi_e\} \quad (1.51)$$

onde T indica a transposta do vetor ϕ_e com os potenciais do elemento triangular e $[\sigma]$ é o tensor de condutividade anisotrópica.

A matriz $[Y^{(e)}]$ apresentada na equação 1.52 é como **matriz local dos coeficientes dos elementos** triangulares que pode ser representada como:

$$[Y^{(e)}] = \begin{bmatrix} Y_{ll}^{(e)} & Y_{lm}^{(e)} & Y_{ln}^{(e)} \\ Y_{ml}^{(e)} & Y_{mm}^{(e)} & Y_{mn}^{(e)} \\ Y_{nl}^{(e)} & Y_{nm}^{(e)} & Y_{nn}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (1.52)$$

As equações de cada termo da matriz $[Y^{(e)}]$ são apresentadas a seguir:

$$Y_{ll}^{(e)} = \frac{1}{4A} [(y_m - y_n)^2 + (x_n - x_m)^2];$$

$$Y_{mm}^{(e)} = \frac{1}{4A} [(y_n - y_l)^2 + (x_l - x_n)^2];$$

$$Y_{nn}^{(e)} = \frac{1}{4A} [(y_l - y_m)^2 + (x_m - x_l)^2];$$

$$Y_{lm}^{(e)} = \frac{1}{4A} [(y_m - y_n)(y_n - y_l) + (x_n - x_m)(x_l - x_n)];$$

$$Y_{ln}^{(e)} = \frac{1}{4A} [(y_m - y_n)(y_l - y_m) + (x_n - x_m)(x_m - x_l)];$$

$$Y_{ml}^{(e)} = \frac{1}{4A} [(y_n - y_l)(y_l - y_m) + (x_l - x_n)(x_m - x_l)].$$

Onde A é a área do elemento dada pela equação XXXXX. Como a matriz $[Y^{(e)}]$ é simétrica temos: $Y_{ml}^{(e)} = Y_{lm}^{(e)}$; $Y_{nl}^{(e)} = Y_{ln}^{(e)}$; $Y_{nm}^{(e)} = Y_{mn}^{(e)}$. O desenvolvimento dos cálculos para cada termo da matriz $[Y^{(e)}]$ estão detalhados no Apêndice B.

Retomando a equação 1.51, temos

$$\begin{aligned} \pi_e &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_l \\ \phi_m \\ \phi_n \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} Y_{ll}^{(e)} & Y_{lm}^{(e)} & Y_{ln}^{(e)} \\ Y_{ml}^{(e)} & Y_{mm}^{(e)} & Y_{mn}^{(e)} \\ Y_{nl}^{(e)} & Y_{nm}^{(e)} & Y_{nn}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_l \\ \phi_m \\ \phi_n \end{Bmatrix} \\ \pi_e &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_l & \phi_m & \phi_n \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{ll}^{(e)}\phi_l + Y_{lm}^{(e)}\phi_m + Y_{ln}^{(e)}\phi_n \\ Y_{ml}^{(e)}\phi_l + Y_{mm}^{(e)}\phi_m + Y_{mn}^{(e)}\phi_m \\ Y_{nl}^{(e)}\phi_l + Y_{nm}^{(e)}\phi_m + Y_{nn}^{(e)}\phi_n \end{bmatrix} \\ \pi_e &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_l(Y_{ll}^{(e)}\phi_l + Y_{lm}^{(e)}\phi_m + Y_{ln}^{(e)}\phi_n) \\ \phi_m(Y_{ml}^{(e)}\phi_l + Y_{mm}^{(e)}\phi_m + Y_{mn}^{(e)}\phi_m) \\ \phi_n(Y_{nl}^{(e)}\phi_l + Y_{nm}^{(e)}\phi_m + Y_{nn}^{(e)}\phi_n) \end{bmatrix} \\ \pi_e &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (Y_{ll}^{(e)}\phi_l^2 + Y_{lm}^{(e)}\phi_l\phi_m + Y_{ln}^{(e)}\phi_l\phi_n) \\ (Y_{ml}^{(e)}\phi_l\phi_m + Y_{mm}^{(e)}\phi_m^2 + Y_{mn}^{(e)}\phi_m\phi_n) \\ (Y_{nl}^{(e)}\phi_l\phi_n + Y_{nm}^{(e)}\phi_m\phi_n + Y_{nn}^{(e)}\phi_n)^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como todos os termos da matriz $[Y^{(e)}]$ são multiplicados por $(\frac{1}{4A})$ podemos tirá-lo da matriz e substituindo os termos da matriz $[\{\phi_e\}^T [Y^{(e)}] \{\phi_e\}]$ por ξ_i , temos:

$$\pi_e = \frac{1}{2} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_l \\ \xi_m \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

$$\pi_e = \frac{1}{8} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx}\xi_l + \sigma_{xy}\xi_m + \sigma_{xz}\xi_n \\ \sigma_{yx}\xi_l + \sigma_{yy}\xi_l + \sigma_{yz}\xi_l \\ \sigma_{zx}\xi_l + \sigma_{zy}\xi_l + \sigma_{zz}\xi_l \end{array} \right\} = \frac{1}{8}\{\Pi\}$$

dessa maneira, expandindo o primeiro termo do vetor $\{\Pi\}$, temos

$$\begin{aligned} \{\Pi\}_l &= \sigma_{xx}[Y_{ll}^* \phi_l^2 + Y_{lm}^* \phi_l \phi_m + Y_{ln}^* \phi_l \phi_n] \\ &\quad + \sigma_{xy}[Y_{ml}^* \phi_l \phi_m + Y_{mm}^* \phi_m^2 + Y_{mn\phi_m}^* \phi_m \phi_m] \\ &\quad + \sigma_{yy}[Y_{nl}^* \phi_l \phi_n + Y_{nm}^* \phi_m + Y_{nn}^* \phi_n^2] \\ \{\Pi\}_l &= \sigma_{xx}\{[\beta_l^2 + \gamma_l^2]\phi_l^2 + Y_{lm}^* \phi_l \phi_m + Y_{ln}^* \phi_l \phi_n\} \\ &\quad + \sigma_{xy}[Y_{ml}^* \phi_l \phi_m + Y_{mm}^* \phi_m^2 + Y_{mn\phi_m}^* \phi_m \phi_m] \\ &\quad + \sigma_{yy}[Y_{nl}^* \phi_l \phi_n + Y_{nm}^* \phi_m + Y_{nn}^* \phi_n^2] \end{aligned}$$



Figura 4 – Burro.

APÊNDICE A – DA TERMO DA MATRIZ

APÊNDICE B – CÁLCULO DE CADA TERMO DA MATRIZ

$$N_l = \frac{1}{2A}[\alpha_l + x\beta_l + y\gamma_l]$$

$$N_m = \frac{1}{2A}[\alpha_m + x\beta_m + y\gamma_m]$$

$$N_n = \frac{1}{2A}[\alpha_n + x\beta_n + y\gamma_n]$$

$$\alpha_l = (x_my_n - x_ny_m) \quad \beta_l = (y_m - y_n) \quad \gamma_l = (x_n - x_m)$$

$$\alpha_m = (x_ny_l - x_ly_n) \quad \beta_m = (y_n - y_l) \quad \gamma_m = (x_l - x_n)$$

$$\alpha_n = (x_ly_m - x_my_l) \quad \beta_n = (y_l - y_m) \quad \gamma_n = (x_m - x_l)$$

B.1 Cálculo de $Y_{lm}^{(e)}$

Os coeficientes da matriz $[Y^{(e)}]$ podem ser obtidos pela equação 1.50, por exemplo:

$$\boxed{Y_{lm}^{(e)} = \int \nabla N_l \nabla N_m dS} \quad (\text{B.1})$$

Para calcular o gradiente de N_i , precisamos determinar as derivadas parciais da função em relação a 'x' e 'y', então:

$$N_l(x, y) = \frac{1}{2A} \left[(x_my_n - x_ny_m) + (y_m - y_n)x + (x_n - x_m)y \right]$$

$$\frac{\partial N_l}{\partial x} = \frac{1}{2A} \frac{\partial}{\partial x} \left[(x_my_n - x_ny_m) + (y_m - y_n)x + (x_n - x_m)y \right]$$

$$\boxed{\frac{\partial N_l}{\partial x} = \frac{1}{2A}(y_m - y_n)} \quad (\text{B.2})$$

analogamente,