

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA INFORMAÇÃO



Edson Rodrigues

## **Método de Elementos Finitos**

Santo André– Brasil

2025

# 1 Método de Elementos Finitos

## Introdução

Muitos problemas de engenharia de geometria complexa não têm solução analítica conhecida como ocorre para geometrias mais simples como cilindro, cone, cubo, etc.. Dessa maneira, para a solução desses problemas é necessário a utilização de métodos numéricos como o método de elementos finitos (MEF).

O MEF é um método numérico para efetuar a aproximação de problemas governados por equações diferenciais em equações polinomiais mais simples, tornando possível a solução de problemas de geometria complexa e adequação para algoritmos computacionais. O MEF envolve quatro etapas principais.

### **Discretização espacial da região de interesse:**

- Nessa etapa a região de interesse é subdividida em **elementos finitos**, como por exemplo, um seguimento de reta em problemas 1D, triângulos ou quadriláteros para 2D, tetraedros para 3D.

### **Seleção da função de interpolação:**

- Nessa etapa é efetuada a adequação das equações diferenciais que governam o problema em equações mais simples para gerar uma solução aproximada do problema para cada elemento finito.

### **Montagem de sistema global:**

- Nessa etapa cada elemento finito é interconectado num sistema global de equações que representa uma aproximação da região de interesse.

### **Resolução do sistema global de equações:**

- Nessa etapa é calculada a contribuição de cada elemento finito para o sistema global.

## 1.1 MEF 2D para elementos triangulares.

### Passo 1- Discretização espacial da região de interesse.

A primeira etapa para a solução numérica pelo MEF é subdividir a região de interesse em elementos regulares de solução analítica conhecida. Os elementos podem ser: seguimentos de reta; triângulos; quadriláteros; tetraedros, conforme a dimensão da geometria do problema.

A figura 1.1.1 apresenta em azul uma geometria complexa subdividida numa malha

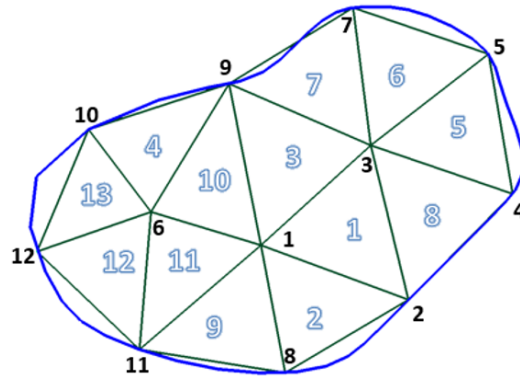


Figura 1.1.1 – Exemplo de malha de elementos finitos triangulares.

de elementos finitos triangulares. Os números em preto correspondem aos pontos, ou nós, da malha, enquanto que os números em azul identificam cada elemento. Um sistema de coordenadas  $(x, y, z)$  identifica cada elemento da geometria.

Note que a região compreendida pelos elementos não engloba totalmente a região de interesse da linha azul, o que torna o resultado do MEF uma aproximação do resultado real. Entretanto, pode-se aumentar a densidade da malha diminuindo o tamanho dos elementos, e dessa maneira aproximar a área em estudo da área da linha azul, aumentando a precisão, porém, com custo computacional mais elevado.

## Passo 2 - Seleção da função de interpolação.

Supondo que estamos interessado em determinar o potencial  $\phi(x, y)$  em cada ponto da região da figura 1.1.1 em estudo, podemos considerar que a distribuição de potencial é contínua na fronteira do elemento, dessa maneira:

$$\phi(x, y) \simeq \sum_{e=1}^N \phi_e(x, y) \quad (1.1)$$

onde  $N$  é o número de elementos e  $\phi_e(x, y)$  é a contribuição de potencial de cada elemento da malha. A função  $\phi_e(x, y)$ , é qualquer função linear capaz de efetuar a interpolação dos três nós do elemento triangular. A função  $\phi_e(x, y)$  de aproximação mais utilizada para esse fim é:

$$\phi_e(x, y) = a + bx + cy \quad (1.2)$$

que na forma vetorial fica como:

$$\phi_e(x, y) = [1 \ x \ y] \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} \quad (1.3)$$

Uma característica importante é que o potencial  $\phi_e$  pode assumir valores diferentes de zero dentro do elemento, entretanto, fora do elemento  $e$  o valor deve ser sempre zero. Outra característica é que a função  $\phi_e(x, y)$  deve ser da classe  $C^1$ , ou seja, deve ter a primeira derivada.

## Equações governantes do MEF para elementos triangulares

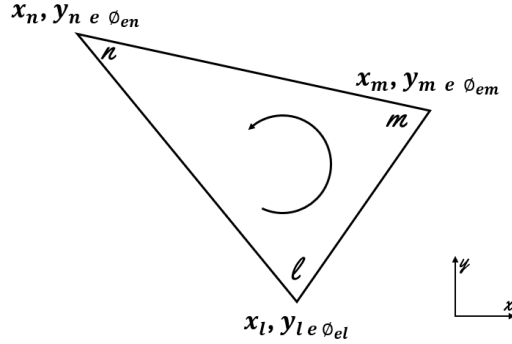


Figura 1.1.2 – Elemento triangular (MATTHEW, 2000).

O MEF é fortemente dependente das coordenadas nodais dos elementos. Dessa forma, é conveniente adequar as equações governantes desses elementos em função de suas coordenadas. A identificação de cada nó pode ser efetuada por letras ou números. Aqui, optou-se pela identificação dos nós por letras para diferenciar a identificação **local** da identificação **global** de cada elemento. No MEF cada nó da malha têm duas identificações conhecidas como local e global. A identificação local é proveniente de um matriz local que relaciona todos os nós de um único elemento, que no caso do triângulo da figura 1.1.2 são os nós  $l$ ,  $m$ , e  $n$ . Entretanto, cada nó do elemento é identificado numa sequência numérica que relaciona todos os elementos na malha (veja figura 1.1.1 - números em preto).

Partindo da equação 1.3, pode-se determinar os potenciais elétricos  $\phi_l$ ,  $\phi_m$  e  $\phi_n$  localizados nos nós  $l$ ,  $m$  e  $n$  do elemento triangular da figura 1.1.2, por meio da seguinte formulação:

$$\begin{Bmatrix} \phi_l \\ \phi_m \\ \phi_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_l & y_l \\ 1 & x_m & y_m \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} \quad (1.4)$$

Rearranjando a equação 1.4, pode-se determinar os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  da equação de interpolação.

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_l & y_l \\ 1 & x_m & y_m \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \phi_l \\ \phi_m \\ \phi_n \end{Bmatrix} = [M]^{-1} \{\phi_i\} \quad (1.5)$$

Para isso, precisamos calcular a inversa da matriz  $[M]$ . O procedimento para a inversão da matriz  $[M]$  é apresentado no Apêndice A, equação A.5 Substituindo a matriz inversa de  $[M]$  na equação 1.5 temos:

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \underbrace{\begin{bmatrix} (x_m y_n - x_n y_m) & (x_m y_l - x_l y_n) & (x_l y_m - x_m y_l) \\ (y_m - y_n) & (y_n - y_l) & (y_l - y_m) \\ (x_n - x_m) & (x_l - x_n) & (x_m - x_l) \end{bmatrix}}_{[M]^{-1}} \begin{Bmatrix} \phi_l \\ \phi_m \\ \phi_n \end{Bmatrix} \quad (1.6)$$

onde  $A$  é área do elemento dada pela equação A.5, e será positivo se for numerado no sentido anti-horário.

Substituindo a equação 1.6 na equação 1.3, temos:

$$\phi_e(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \frac{1}{2A} \underbrace{\begin{bmatrix} (x_m y_n - x_n y_m) & (x_m y_l - x_l y_n) & (x_l y_m - x_m y_l) \\ (y_m - y_n) & (y_n - y_l) & (y_l - y_m) \\ (x_n - x_m) & (x_l - x_n) & (x_m - x_l) \end{bmatrix}}_{= \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix}} \begin{Bmatrix} \phi_l \\ \phi_m \\ \phi_n \end{Bmatrix} \quad (1.7)$$

Representado a expressão destaca pelo símbolo da chave pela variável  $\alpha$  para facilitar a notação obtém-se:

$$\phi_e(x, y) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x, y) \phi_i \quad (1.8)$$

As variáveis  $\alpha_i$  correspondem as equações de forma dos elementos triangulares, onde:

$$\alpha_l = \frac{1}{2A} [(x_m y_n - x_n y_m) + (y_m - y_n)x + (x_n - x_m)y] \quad (1.9)$$

$$\alpha_m = \frac{1}{2A} [(x_m y_l - x_l y_n) + (y_n - y_l)x + (x_l - x_n)y] \quad (1.10)$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2A} [(x_l y_m - x_m y_l) + (y_l - y_m)x + (x_m - x_l)y] \quad (1.11)$$

A função de forma tem as seguintes propriedades:

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x, y) = 1 \quad (1.12)$$

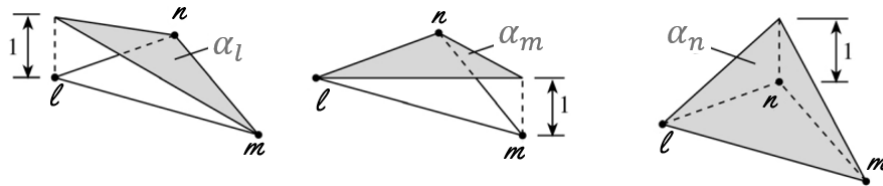


Figura 1.1.3 – Funções de forma do elemento triangular.

A figura 1.1.3 apresenta graficamente o comportamentos das funções de forma  $\alpha_l$ ,  $\alpha_m$  e  $\alpha_n$  para um elemento finito triangular.

## 1.2 Montagem da Matriz local

As Equações de Maxwell descrevem o campo eletromagnético dentro de um objeto:

- Lei de Gauss

$$\nabla \cdot D = \rho_c \quad (1.13)$$

- Lei de Gauss para o magnetismo

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (1.14)$$

- Lei da Indução de Faraday

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (1.15)$$

- Lei de Ampere

$$\nabla \times H = \mathbf{J} + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (1.16)$$

- Equação da continuidade

$$\nabla \cdot J = 0 \quad (1.17)$$

onde:

- $D$  é o campo de deslocamento elétrico,
- $\rho_c$  é a densidade de carga livre,
- $B$  é a densidade de fluxo magnético,
- $E$  é o campo elétrico,
- $H$  é o campo magnético, -  $\mathbf{J}$  é a densidade de corrente,
- $\nabla$  é o gradiente.  $\nabla \phi(x, y, z) = \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right]$ ,
- $\nabla \cdot$  é o divergente.  $\nabla \cdot \phi(x, y) = \left[ \frac{\partial \phi_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y(x, y)}{\partial y} \right]$ ,
- $\nabla \times$  é o rotacional.  $\nabla \times \phi(x, y, z) = \left[ \left( \frac{\partial \phi_z}{\partial y} - \frac{\partial \phi_y}{\partial z} \right), \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial z} - \frac{\partial \phi_z}{\partial x} \right), \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial x} - \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) \right]$ .

Para problemas envolvendo corrente alternada de frequência baixa, pode-se desprezar a dependência do tempo e utilizar uma aproximação quasi-estática para as equações:

Para problemas envolvendo corrente alternada de frequência baixa, pode-se desprezar a dependência do tempo e utilizar uma aproximação quasi-estática para as equações:

$$\nabla \times E = 0 \quad (1.18)$$

$$\nabla \times H = \mathbf{J} \quad (1.19)$$

Em meios lineares isotrópicos, temos também as seguintes relações constitutivas:

$$D = \varepsilon E \quad (1.20)$$

$$B = \mu H \quad (1.21)$$

$$\mathbf{J} = \sigma E \quad (1.22)$$

onde:

- $\varepsilon$  é a permissividade do meio,
- $\sigma$  é a condutividade do meio,
- $\mu$  é a permeabilidade magnética do meio.

Na eletrostática a Lei da Indução de Faraday não tem variação no tempo, portanto  $\nabla \times E = 0$ . Do cálculo, sabe-se que o rotacional de um gradiente é nulo, dessa maneira pode-se assumir que:

$$\nabla \times \nabla \phi = 0$$

assim conclui-se que

$$E = -\nabla \phi \quad (1.23)$$

Substituindo a equação 1.23 na 1.20, temos:

$$D = \varepsilon(-\nabla \phi)$$

Substituindo  $D$  na equação 1.13, obtemos a equação de Poisson:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\varepsilon(-\nabla \phi)) &= \rho_c \\ \nabla \cdot (\varepsilon(-\nabla \phi)) &= \rho_c \\ \nabla^2 \phi &= -\frac{\rho_c}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Quando não há cargas livres no domínio  $\rho_c = 0$ , a equação 1.24 passa a ser denominada equação de Laplace: equação de Laplace:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1.25)$$

ou,

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi(x,y,z)}{\partial z^2} \quad (1.26)$$

A equação 1.25 é a equação diferencial que rege o problema eletrostático. Da equação 1.22 sabe-se que  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ , portanto:

$$\mathbf{J} = \sigma(-\nabla\phi)$$

Substituindo  $\mathbf{J}$  na equação 1.17, temos:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) = 0 \quad (1.27)$$

A equação 1.27 é conhecida como equação generalizada de Laplace.

Para um meio de condutividade isotrópica do meio, pode-se representar a equação 1.27 num modo geral em 3D, como:

$$\nabla \cdot \sigma \nabla \phi = \nabla \cdot \sigma \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \sigma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \sigma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0 \quad (1.28)$$

Para um meio de condutividade anisotrópica onde a anisotropia, bem como, a geometria estão em conformidade com os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  do sistema de referência de coordenadas, temos:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma \nabla \phi &= \nabla \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{Bmatrix} = 0 \\ \nabla \cdot \sigma \nabla \phi &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \sigma_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \sigma_{zz} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.29)$$

Para um meio de condutividade anisotrópica geral, temos:

$$\nabla \cdot \sigma \nabla \phi = \nabla \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{Bmatrix} = 0$$

portanto,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \sigma_{xy} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \sigma_{xz} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left( \sigma_{yx} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \sigma_{yz} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left( \sigma_{zx} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \sigma_{zy} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \sigma_{zz} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (1.30)$$

onde:



$$\sigma_{xx} = \sigma_n \cos^2 \theta + \sigma_t \sin^2 \theta$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_n \sin^2 \theta + \sigma_t \cos^2 \theta$$

$$\sigma_{yx} = \sigma_{xy} = \sigma_n \sin \theta \cos \theta - \sigma_t \sin \theta \cos \theta$$

\*\*\* VERIFICAR EIXO Z \*\*\*

## Desenvolvimento das funções de forma.

Para determinar o sistema de equações necessárias para utilização do MEF é preciso efetuar minimização de um funcional que represente a equação diferencial que governa o problema. Os métodos frequentemente mencionados na literatura para encontrar essas equações são: o método variacional e método dos resíduos ponderados de Galerkin, respectivamente (ROBERTO, 2019).

Por meio do método variacional, para resolver a equação diferencial de Laplace 1.30, utiliza-se a minimização de um funcional baseado na energia do sistema, que corresponde a solução da equação original, dado por.

$$\pi = \frac{1}{2} \int_S \varepsilon |E|^2 dS = \frac{1}{2} \int_S \varepsilon |\nabla \phi|^2 dS \quad (1.31)$$

Considerando um meio puramente resistivo e desconsiderando os efeitos de capacitância, pode-se reescrever a equação 1.31 em função da condutividade, assim:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_S \sigma |E|^2 dS = \frac{1}{2} \int_S \sigma |\nabla \phi|^2 dS \quad (1.32)$$

O procedimento para encontrar o funcional que resolve a equação de Laplace é apresentado n Apêndice B;

Para um único elemento da malha de elementos finitos o funcional fica como:

$$\pi_e = \frac{1}{2} \int_S \sigma |\nabla \phi_e|^2 dS \quad (1.33)$$

Da equação 1.8 obtemos que:

$$\nabla \phi_e = \sum_{i=1}^3 \phi_i \nabla \alpha_i \quad (1.34)$$

Substituindo a equação 1.34 na 1.33 temos: Primeiramente, expandindo o termo  $|\nabla \phi_e|^2$

$$|\nabla \phi_e|^2 = \nabla \phi_e \cdot \nabla \phi_e$$

$$|\nabla \phi_e|^2 = \left( \sum_{i=1}^3 \phi_{ei} \nabla \alpha_i \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^3 \phi_{ej} \nabla \alpha_j \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \phi_{ei} \phi_{ej} (\nabla \alpha_i \cdot \nabla \alpha_j).$$

Substituindo e em  $\pi_e$ :

$$\pi_e = \frac{1}{2} \int_S \sigma \left[ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \phi_{ei} \phi_{ej} (\nabla \alpha_i \cdot \nabla \alpha_j) \right] dS.$$

ou,

$$\pi_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma \phi_{ei} \left[ \int_S \nabla \alpha_i \nabla \alpha_j dS \right] \phi_{ej} \quad (1.35)$$

Nomeando os termos entre colchetes por  $Y_{ij}^{(e)}$ , temos:

$$Y_{ij}^{(e)} = \int_S \nabla \alpha_i \nabla \alpha_j dS \quad (1.36)$$

podemos reescrever a equação 1.36 na forma matricial,

$$\pi_e = \frac{1}{2} \sigma \{ \phi_e \}^T [Y^{(e)}] \{ \phi_e \} \quad (1.37)$$

onde  $T$  indica a transposta do vetor  $\phi_e$  com os potenciais do elemento triangular.

$$\{ \phi_e \} = \begin{Bmatrix} \phi_{el} \\ \phi_{em} \\ \phi_{en} \end{Bmatrix}$$

Resolvendo cada termos da matriz  $[Y^{(e)}]$  por meio da equação 1.36 encontra-se os coeficientes da matriz para os elementos triangulares, que pode ser representada como:

$$[Y^{(e)}] = \begin{bmatrix} Y_{ll}^{(e)} & Y_{lm}^{(e)} & Y_{ln}^{(e)} \\ Y_{ml}^{(e)} & Y_{mm}^{(e)} & Y_{mn}^{(e)} \\ Y_{nl}^{(e)} & Y_{nm}^{(e)} & Y_{nn}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

A matriz  $[Y^{(e)}]$  apresentada na equação 1.38 é conhecida como **matriz local dos coeficientes** dos elementos triangulares.

As equações de cada termo da matriz  $[Y^{(e)}]$  são apresentadas a seguir:

$$Y_{ll}^{(e)} = \frac{1}{4A} \left[ (y_m - y_n)^2 + (x_n - x_m)^2 \right];$$

$$Y_{mm}^{(e)} = \frac{1}{4A} \left[ (y_n - y_l)^2 + (x_l - x_n)^2 \right];$$

$$Y_{nn}^{(e)} = \frac{1}{4A} \left[ (y_l - y_m)^2 + (x_m - x_l)^2 \right];$$

$$Y_{lm}^{(e)} = \frac{1}{4A} \left[ (y_m - y_n)(y_n - y_l) + (x_n - x_m)(x_l - x_n) \right];$$

$$Y_{ln}^{(e)} = \frac{1}{4A} \left[ (y_m - y_n)(y_l - y_m) + (x_n - x_m)(x_m - x_l) \right];$$

$$Y_{mn}^{(e)} = \frac{1}{4A} \left[ (y_n - y_l)(y_l - y_m) + (x_l - x_n)(x_m - x_l) \right].$$

Onde  $A$  é a área do elemento dada pela equação A1.4. Como a matriz  $[Y^{(e)}]$  é simétrica temos:  $Y_{ml}^{(e)} = Y_{lm}^{(e)}; Y_{nl}^{(e)} = Y_{ln}^{(e)}; Y_{nm}^{(e)} = Y_{mn}^{(e)}$ .

O desenvolvimento dos cálculos para cada termo da matriz  $[Y^{(e)}]$  estão detalhados no Apêndice C.

### 1.3 Passo 3 - Montagem da matriz global

Uma vez definida a matriz local de coeficientes, reorganizamos cada elemento numa matriz global. A matriz global resultante será uma matriz quadrada  $[Y]_{N \times N}$ , onde  $N$  é o número de nós da malha de elementos finito, ou seja:

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \cdots & Y_{nn} \end{bmatrix}$$

Dessa maneira, cada termo da matriz global terá uma contribuição de cada elemento que está conectado àquele determinado nó.

Um dos métodos de montagem da matriz global é método da superposição que é melhor compreendido por meio de um exemplo. A figura 1.3.1 apresenta uma malha de elementos finitos com 4 elementos triangulares e cinco nós. A numeração dos nós 1, 2, 3, 4 e 5 em vermelho é chamada de numeração global. A numeração local, em preto, corresponde as letra  $l, m$  e  $n$  do elemento cada elemento. Os elementos são identificados pelos números em verde. Cada nó, em azul, corresponde a um valor de potencial  $\phi_i$ .

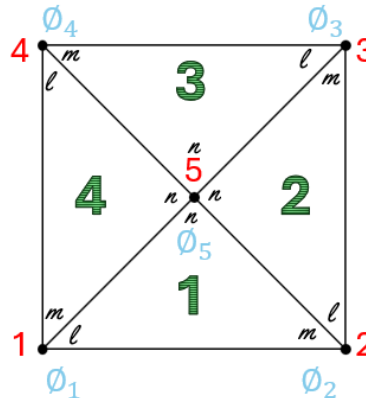


Figura 1.3.1 – Malha de elementos finitos.

Elemento	nó $l$	nó $m$	nó $n$
1	1	2	5
2	2	3	5
3	3	4	5
4	4	1	5

Tabela 1.3.1 – Matriz de conectividade

A tabela 1.3.1 apresenta a conectividade dos elementos entre a matriz local e global.

A partir da matriz de conectividade posiciona cada termo da matriz local na matriz global como demonstrado a seguir.

Por exemplo, o elemento 1 é composto pelos nós 1, 2 e 5 da matriz global que corresponde as potenciais  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  e  $\phi_5$ , assim temos:

$$Y_{ij}^{(1)} = \begin{bmatrix} Y_{ll}^{(1)} & Y_{lm}^{(1)} & Y_{ln}^{(1)} \\ Y_{ml}^{(1)} & Y_{mm}^{(1)} & Y_{mn}^{(1)} \\ Y_{nl}^{(1)} & Y_{nm}^{(1)} & Y_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_5 \end{Bmatrix}$$

Para o elemento 2, temos:

$$Y_{ij}^{(2)} = \begin{bmatrix} Y_{ll}^{(2)} & Y_{lm}^{(2)} & Y_{ln}^{(2)} \\ Y_{ml}^{(2)} & Y_{mm}^{(2)} & Y_{mn}^{(2)} \\ Y_{nl}^{(2)} & Y_{nm}^{(2)} & Y_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_5 \end{Bmatrix}$$

Para o elemento 3, temos:

$$Y_{ij}^{(3)} = \begin{bmatrix} Y_{ll}^{(3)} & Y_{lm}^{(3)} & Y_{ln}^{(3)} \\ Y_{ml}^{(3)} & Y_{mm}^{(3)} & Y_{mn}^{(3)} \\ Y_{nl}^{(3)} & Y_{nm}^{(3)} & Y_{nn}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{Bmatrix}$$

Para o elemento 4, temos:

$$Y_{ij}^{(4)} = \begin{bmatrix} Y_{ll}^{(4)} & Y_{lm}^{(4)} & Y_{ln}^{(4)} \\ Y_{ml}^{(4)} & Y_{mm}^{(4)} & Y_{mn}^{(4)} \\ Y_{nl}^{(4)} & Y_{nm}^{(4)} & Y_{nn}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_4 \\ \phi_1 \\ \phi_5 \end{Bmatrix}$$

A matriz global terá dimensão  $N \times N$ , onde  $N = 5$  é o número de nós da malha de elementos finitos, assim:

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & Y_{15} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & Y_{25} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & Y_{35} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} & Y_{45} \\ Y_{51} & Y_{52} & Y_{53} & Y_{54} & Y_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{Bmatrix}$$

O método da sobreposição consiste em colocar cada matriz local na matriz global somando cada nó pertencente a um determinado termo da matriz global. Começando com o elemento 1, temos:

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{ll}^{(1)} & Y_{lm}^{(1)} & 0 & 0 & Y_{ln}^{(1)} \\ Y_{ml}^{(1)} & Y_{mm}^{(1)} & 0 & 0 & Y_{mn}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_{nl}^{(1)} & Y_{nm}^{(1)} & 0 & 0 & Y_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{Bmatrix}$$

Acrescentando o elemento 2, a matriz global fica como:

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{ll}^{(1)} & Y_{lm}^{(1)} & 0 & 0 & Y_{ln}^{(1)} \\ Y_{ml}^{(1)} & (Y_{mm}^{(1)} + Y_{mm}^{(2)}) & Y_{lm}^{(2)} & 0 & (Y_{mn}^{(1)} + Y_{mn}^{(2)}) \\ 0 & Y_{ml}^{(2)} & Y_{mm}^{(2)} & 0 & Y_{mn}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_{nl}^{(1)} & (Y_{nm}^{(1)} + Y_{nm}^{(2)}) & Y_{nn}^{(2)} & 0 & (Y_{nn}^{(1)} + Y_{nn}^{(2)}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{Bmatrix}$$

Acrescentando o elemento 3, temos:

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{ll}^{(1)} & Y_{lm}^{(1)} & 0 & 0 & Y_{ln}^{(1)} \\ Y_{ml}^{(1)} & (Y_{mm}^{(1)} + Y_{mm}^{(2)}) & Y_{lm}^{(2)} & 0 & (Y_{mn}^{(1)} + Y_{mn}^{(2)}) \\ 0 & Y_{ml}^{(2)} & (Y_{mm}^{(2)} + Y_{mm}^{(3)}) & Y_{lm}^{(3)} & (Y_{mn}^{(2)} + Y_{mn}^{(3)}) \\ 0 & 0 & Y_{ml}^{(3)} & Y_{mm}^{(3)} & Y_{nn}^{(3)} \\ Y_{nl}^{(1)} & (Y_{nm}^{(1)} + Y_{nm}^{(2)}) & Y_{nm}^{(2)} + Y_{nm}^{(3)} & Y_{nn}^{(3)} & (Y_{nn}^{(1)} + Y_{nn}^{(2)} + Y_{nn}^{(3)}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{Bmatrix}$$

Acrescentando o elemento 4, temos:

$$[Y] = \begin{bmatrix} (Y_{ll}^{(1)} + Y_{ll}^{(4)}) & Y_{lm}^{(1)} & 0 & Y_{ml}^{(4)} & (Y_{ln}^{(1)} + Y_{ln}^{(4)}) \\ Y_{ml}^{(1)} & (Y_{mm}^{(1)} + Y_{mm}^{(2)}) & Y_{lm}^{(2)} & 0 & (Y_{mn}^{(1)} + Y_{mn}^{(2)}) \\ 0 & Y_{ml}^{(2)} & (Y_{mm}^{(2)} + Y_{mm}^{(3)}) & Y_{lm}^{(3)} & (Y_{mn}^{(2)} + Y_{mn}^{(3)}) \\ Y_{lm}^{(4)} & 0 & Y_{ml}^{(3)} & (Y_{mm}^{(3)} + Y_{mm}^{(4)}) & (Y_{mn}^{(3)} + Y_{mn}^{(4)}) \\ (Y_{nl}^{(1)} + Y_{nl}^{(4)}) & (Y_{nm}^{(1)} + Y_{nm}^{(2)}) & Y_{nm}^{(2)} + Y_{nm}^{(3)} & (Y_{nn}^{(3)} + Y_{nn}^{(4)}) & (Y_{nn}^{(1)} + Y_{nn}^{(2)} + Y_{nn}^{(3)} + Y_{nn}^{(4)}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{Bmatrix}$$

# A Apêndice

## Cálculo da inversa de uma matriz $3 \times 3$

Pode-se calcular a inversa da matriz  $[M]$  por meio de:

$$[M]^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \text{Adj}(M) \quad (\text{A.1})$$

Para calcular a matriz adjunta  $\text{Adj}[M]$ , precisamos transpor a matriz  $[M]$ , e em seguida, determinar os cofatores da nova matriz  $[M]^T$ .

$$[M]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_l & x_m & x_n \\ y_l & y_m & y_n \end{bmatrix}$$

Os cofatores de uma matriz  $3 \times 3$  são calculados por meio da seguinte equação:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

onde  $M_{ij}$  é um **menor** da matriz  $[M]^T$  de um dado elemento de índices  $i$  e  $j$ .

Cálculo dos menores ( $M_{ij}$ ) de cada elemento da matriz  $[M]^T$ :

$$|M_{11}| = \det \begin{bmatrix} x_m & x_n \\ y_m & y_n \end{bmatrix} = x_m y_n - x_n y_m, \quad |M_{12}| = \det \begin{bmatrix} x_l & x_n \\ y_l & y_n \end{bmatrix} = x_l y_n - x_n y_l,$$

$$|M_{13}| = \det \begin{bmatrix} x_l & x_m \\ y_l & y_m \end{bmatrix} = x_l y_m - x_m y_l, \quad |M_{21}| = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y_m & y_n \end{bmatrix} = y_n - y_m,$$

$$|M_{22}| = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y_l & y_n \end{bmatrix} = y_n - y_l, \quad |M_{23}| = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y_l & y_m \end{bmatrix} = y_m - y_l,$$

$$|M_{31}| = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_m & x_n \end{bmatrix} = x_n - x_m, \quad |M_{32}| = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_l & x_n \end{bmatrix} = x_n - x_l,$$

$$|M_{33}| = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_l & x_m \end{bmatrix} = x_m - x_l$$

Cálculo dos **cofatores** ( $C_{ij}$ ) de cada elemento da matriz  $[M]^T$ .

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}, \quad C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12},$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13}, \quad C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21},$$

$$\begin{aligned}
C_{22} &= (-1)^{2+2} M_{22} = M_{22}, & C_{23} &= (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}, \\
C_{31} &= (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31}, & C_{32} &= (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32}, \\
C_{33} &= (-1)^{3+3} M_{33} = M_{33}.
\end{aligned}$$

A matriz adjunta de  $[\mathbf{M}]$  será:

$$\begin{aligned}
\text{Adj}[\mathbf{M}] &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \\
\text{Adj}[\mathbf{M}] &= \begin{bmatrix} (x_m y_n - x_n y_m) & (x_n y_l - x_l y_n) & (x_l y_m - x_m y_l) \\ (y_m - y_n) & (y_n - y_l) & (y_l - y_m) \\ (x_n - x_m) & (x_l - x_n) & (x_m - x_l) \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})
\end{aligned}$$

Em seguida, calculamos o determinante da matriz  $[M]$  que, neste caso, é igual a duas vezes a área do elemento finito triangular.

$$\begin{aligned}
[M] &= \begin{bmatrix} 1 & x_l & y_l \\ 1 & x_m & y_m \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix}, & \det[M] &= \begin{vmatrix} 1 & x_l & y_l \\ 1 & x_m & y_m \\ 1 & x_n & y_n \end{vmatrix} = 2A \\
\det[M] &= \begin{vmatrix} 1 & x_l & y_l & 1 & x_l \\ 1 & x_m & y_m & 1 & x_m \\ 1 & x_n & y_n & 1 & x_n \end{vmatrix} = x_m y_n + x_l y_m + y_l x_n - x_m y_l - x_n y_m - y_n x_l \\
\det[M] &= (x_l y_m - x_m y_l) + (x_n y_l - x_l y_n) + (x_m y_n - x_n y_m) = 2A
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\det[M] = [(x_m - x_l)(y_n - y_l) - (x_n - x_l)(y_m - y_l)] = 2A \quad (\text{A.3})$$

e consequentemente,

$$A = \frac{1}{2} [(x_m - x_l)(y_n - y_l) - (x_n - x_l)(y_m - y_l)] \quad (\text{A.4})$$

Portanto, a inversa na matriz  $[M]$  fica como:

$$[M]^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (x_m y_n - x_n y_m) & (x_m y_l - x_l y_n) & (x_l y_m - x_m y_l) \\ (y_m - y_n) & (y_n - y_l) & (y_l - y_m) \\ (x_n - x_m) & (x_l - x_n) & (x_m - x_l) \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

## B Apêndice

### Determinação do funcional de energia potencial

Sabe-se que a quantidade de trabalho necessária para mover uma carga da posição 1 para a posição 2 em um campo elétrico é

$$\Delta W = q(\phi_2 - \phi_1), \quad (\text{B.1})$$

ou

$$\Delta W = q\phi(\mathbf{x}). \quad (\text{B.2})$$

A lei de Coulomb afirma que o campo elétrico e o potencial criados entre duas cargas puntiformes podem ser relacionados

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (\text{B.3})$$

onde  $r$  é a distância a partir da carga. Partindo da lei de Coulomb, verifica-se que o trabalho necessário para mover uma carga  $Q_1$  até uma distância  $R$  de carga  $Q_2$  e vice-versa, podem ser relacionados por:

$$\Delta W = Q_1 \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R} = Q_1\phi_1, \quad (\text{B.4})$$

e

$$\Delta W = Q_2 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R} = Q_2\phi_2 \quad (\text{B.5})$$

onde  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são os potenciais nas posições de  $Q_1$  e  $Q_2$  respectivamente. Dessa maneira, o trabalho total entre as cargas pode ser encontrado pela média das contribuições de cada carga, assim:

$$\Delta W = \frac{Q_1\phi_1 + Q_2\phi_2}{2}. \quad (\text{B.6})$$

Para uma quantidade  $N$  de cargas o trabalho pode ser representado pelo somatório de cada contribuição, ou seja:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i \phi(\mathbf{x}_i). \quad (\text{B.7})$$



A Equação B.7 representa a energia potencial da distribuição de carga ou energia de campo (HUMPHRIES, 2010), assim, substituindo a variável de trabalho  $W$  pela variável de energia  $\pi$ , temos:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) dV. \quad (\text{B.8})$$

A densidade de carga está relacionada ao campo pela Equação por:

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}. \quad (\text{B.9})$$

Substituindo a equação B.9 na B.8, a energia de campo como fica como:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}) \phi dV. \quad (\text{B.10})$$

Aplicando a identidade vetorial

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}.$$

ou,

$$\nabla \cdot (uv) = u \nabla \cdot v + v \cdot \nabla u$$

assim:

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{E}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla \phi, \quad (\text{B.11})$$

Isolando o termo  $\phi \nabla \cdot \mathbf{E}$ ,

$$\phi \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (\phi \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot \nabla \phi. \quad (\text{B.12})$$

Substituindo na equação B.10, temos:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_0 \nabla \cdot (\phi \mathbf{E}) dV - \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \nabla \phi) dV. \quad (\text{B.13})$$

A aplicação do **teorema da divergência** (ou teorema de Gauss) (VILCHES; CORRÊA, 2011) para converter o primeiro termo no lado direito da equação B.13,

#### Teorema da divergência ou teorema de Gauss

$$\int_V \nabla \cdot (f \nabla g) dV = \int_S (f \nabla g) \cdot \vec{n} dS.$$

fornece a seguinte relação:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_S \varepsilon \phi \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS - \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV. \quad (\text{B.14})$$

Considerando a superfície da primeira integral como a superfície de uma esfera de raio infinito, portanto o potencial tenderá a zero, o resultado da integral será zero e desaparece da equação, dessa maneira:

$$\pi = \int_S \frac{\varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}}{2} dV. \quad (\text{B.15})$$

A partir das relações constitutivas de Maxwell  $E = -\nabla \phi$ , portanto:

$$\pi = \iiint \frac{\varepsilon (-\nabla \phi) \cdot (-\nabla \phi)}{2} dV.$$

ou,

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon |\nabla \phi|^2 dV. \quad (\text{B.16})$$

A equação B.16 é um funcional da energia potencial em 3D. Para problemas de elementos finitos em 2D a equação B.16, fica como:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_S \varepsilon |\nabla \phi|^2 dS. \quad (\text{B.17})$$

A equações B.16 e B.17 são os funcionais utilizados no método variacional para encontrar uma função que minimiza a energia potencial para problemas 3D e 2D, respectivamente.

## C Apêndice

### Cálculo de cada termo da matriz $[Y^{(e)}]$

#### Cálculo de $Y_{lm}^{(e)}$

Os coeficientes da matriz  $[Y^{(e)}]$  podem ser obtidos pela equação 1.36, por exemplo:

$$Y_{lm}^{(e)} = \int \nabla \alpha_l \nabla \alpha_m dS$$

Para calcular o gradiente de  $\alpha_i$ , precisamos determinar as derivadas parciais da função em relação a 'x' e 'y', então:

$$\alpha_l(x, y) = \frac{1}{2A} [(x_m y_n - x_n y_m) + (y_m - y_n)x + (x_n - x_m)y]$$

$$\frac{\partial \alpha_l}{\partial x} = \frac{1}{2A} \frac{\partial}{\partial x} [(x_m y_n - x_n y_m) + (y_m - y_n)x + (x_n - x_m)y]$$

$$\frac{\partial \alpha_l}{\partial x} = \frac{1}{2A} (y_m - y_n)$$

analogamente,

$$\frac{\partial \alpha_l}{\partial y} = \frac{1}{2A} \frac{\partial}{\partial y} [(x_m y_n - x_n y_m) + (y_m - y_n)x + (x_n - x_m)y]$$

$$\frac{\partial \alpha_l}{\partial y} = \frac{1}{2A} (x_n - x_m)$$

Portanto,

$$\nabla \alpha_l = \left( \frac{\partial \alpha_l}{\partial x}, \frac{\partial \alpha_l}{\partial y} \right) = \left( \frac{1}{2A} (y_m - y_n), \frac{1}{2A} (x_n - x_m) \right)$$

Por meio do mesmo procedimento demonstrado anteriormente podemos determinar o  $\nabla \alpha_m$ .

$$\alpha_m(x, y) = \frac{1}{2A} [(x_m y_l - x_l y_n) + (y_n - y_l)x + (x_l - x_n)y]$$

$$\frac{\partial \alpha_m}{\partial x} = \frac{1}{2A} \frac{\partial}{\partial x} [(x_m y_l - x_l y_n) + (y_n - y_l)x + (x_l - x_n)y]$$

$$\frac{\partial \alpha_m}{\partial x} = \frac{1}{2A} (y_n - y_l)$$

$$\frac{\partial \alpha_m}{\partial y} = \frac{1}{2A} \frac{\partial}{\partial y} [(x_m y_l - x_l y_n) + (y_n - y_l)x + (x_l - x_n)y]$$

$$\frac{\partial \alpha_m}{\partial y} = \frac{1}{2A} (x_l - x_n)$$

portanto,

$$\nabla \alpha_m = \left( \frac{\partial \alpha_m}{\partial x}, \frac{\partial \alpha_m}{\partial y} \right) = \left( \frac{1}{2A}(y_n - y_l), \frac{1}{2A}(x_l - x_n) \right)$$

Multiplicando os dois gradientes, temos:

$$\nabla \alpha_l \nabla \alpha_m = \left( \frac{1}{2A}(y_m - y_n) \right) \left( \frac{1}{2A}(y_n - y_l) \right) + \left( \frac{1}{2A}(x_n - x_m) \right) \left( \frac{1}{2A}(x_l - x_n) \right)$$

Com esses dados podemos calcular o coeficiente  $Y_{lm}^{(e)}$  do exemplo.

$$Y_{lm}^{(e)} = \int \nabla \alpha_l \nabla \alpha_m dS = \frac{1}{4A^2} \left[ (y_m - y_n)(y_n - y_l) + (x_n - x_m)(x_l - x_n) \right] \int dS$$

Obs.: Sabendo que  $\int dS = A$

$$Y_{lm}^{(e)} = \frac{1}{4A} \left[ (y_m - y_n)(y_n - y_l) + (x_n - x_m)(x_l - x_n) \right] \quad (C.1)$$

Por meio dos procedimentos aplicados no exemplo anterior, podemos calcular os demais

Cálculo de  $Y_{ln}^{(e)}$

$$Y_{ln}^{(e)} = \int \nabla \alpha_l \nabla \alpha_n dS$$

Como calculado anteriormente;

$$\nabla \alpha_l = \left( \frac{\partial \alpha_l}{\partial x}, \frac{\partial \alpha_l}{\partial y} \right) = \left( \frac{1}{2A}(y_m - y_n), \frac{1}{2A}(x_n - x_m) \right)$$

e,

$$\alpha_n = \frac{1}{2A} [(x_l y_m - x_m y_l) + (y_l - y_m)x + (x_m - x_l)y]$$

$$\frac{\partial \alpha_n}{\partial x} = \frac{1}{2A} \frac{\partial}{\partial x} [(x_l y_m - x_m y_l) + (y_l - y_m)x + (x_m - x_l)y]$$

$$\frac{\partial \alpha_n}{\partial x} = \frac{1}{2A}(y_l - y_m)$$

e,

$$\frac{\partial \alpha_n}{\partial y} = \frac{1}{2A} \frac{\partial}{\partial y} [(x_l y_m - x_m y_l) + (y_l - y_m)x + (x_m - x_l)y]$$

$$\frac{\partial \alpha_n}{\partial y} = (x_m - x_l)$$

então:

$$\nabla \alpha_n = \left( \frac{\partial \alpha_n}{\partial x}, \frac{\partial \alpha_n}{\partial y} \right) = \left( \frac{1}{2A}(y_l - y_m), \frac{1}{2A}(x_m - x_l) \right)$$

Multiplicando os dois gradientes, temos:

$$\nabla \alpha_l \nabla \alpha_n = \left( \frac{1}{2A}(y_m - y_n) \right) \left( \frac{1}{2A}(y_l - y_m) \right) + \left( \frac{1}{2A}(x_n - x_m) \right) \left( \frac{1}{2A}(x_m - x_l) \right)$$

$$Y_{ln}^{(e)} = \int \nabla \alpha_l \nabla \alpha_n dS = \frac{1}{4A^2} \left[ (y_m - y_n)(y_l - y_m) + (x_n - x_m)(x_m - x_l) \right] \int dS$$

portanto:

$$Y_{ln}^{(e)} = \frac{1}{4A} \left[ (y_m - y_n)(y_l - y_m) + (x_n - x_m)(x_m - x_l) \right] \quad (C.2)$$

Cálculo de  $Y_{ll}^{(e)}$

$$Y_{ll}^{(e)} = \iint_S \nabla \alpha_l \nabla \alpha_l dS$$

Como calculado anteriormente:

$$\nabla \alpha_l = \left( \frac{\partial \alpha_l}{\partial x}, \frac{\partial \alpha_l}{\partial y} \right) = \left( \frac{1}{2A}(y_m - y_n), \frac{1}{2A}(x_n - x_m) \right)$$

então:

$$\nabla \alpha_l \nabla \alpha_l = \left( \frac{1}{2A}(y_m - y_n) \right) \left( \frac{1}{2A}(y_m - y_n) \right) + \left( \frac{1}{2A}(x_n - x_m) \right) \left( \frac{1}{2A}(x_n - x_m) \right)$$

$$Y_{ll}^{(e)} = \int \nabla \alpha_l \nabla \alpha_l dS = \frac{1}{4A^2} \left[ (y_m - y_n)(y_m - y_n) + (x_n - x_m)(x_n - x_m) \right] \int dS$$

portanto:

$$Y_{ll}^{(e)} = \frac{1}{4A} \left[ (y_m - y_n)^2 + (x_n - x_m)^2 \right] \quad (C.3)$$

Cálculo de  $Y_{mm}^{(e)}$

$$Y_{mm}^{(e)} = \int \nabla \alpha_m \nabla \alpha_m dS$$

Como calculado anteriormente:

$$\nabla \alpha_m = \left( \frac{\partial \alpha_m}{\partial x}, \frac{\partial \alpha_m}{\partial y} \right) = \left( \frac{1}{2A}(y_n - y_l), \frac{1}{2A}(x_l - x_n) \right)$$

então:

$$\nabla\alpha_m\nabla\alpha_m = \left(\frac{1}{2A}(y_n - y_l)\right)\left(\frac{1}{2A}(y_n - y_l)\right) + \left(\frac{1}{2A}(x_l - x_n)\right)\left(\frac{1}{2A}(x_l - x_n)\right)$$

$$Y_{mm}^{(e)} = \int \nabla\alpha_m\nabla\alpha_m dS = \frac{1}{4A^2} \left[ (y_n - y_l)(y_n - y_l) + (x_l - x_n)(x_l - x_n) \right] \int dS$$

portanto:

$$Y_{mm}^{(e)} = \frac{1}{4A} \left[ (y_n - y_l)^2 + (x_l - x_n)^2 \right] \quad (\text{C.4})$$

Cálculo de  $Y_{mn}^{(e)}$

$$Y_{mn}^{(e)} = \iint_S \nabla\alpha_m\nabla\alpha_n dS$$

Como calculado anteriormente:

$$\nabla\alpha_m = \left( \frac{\partial\alpha_m}{\partial x}, \frac{\partial\alpha_m}{\partial y} \right) = \left( \frac{1}{2A}(y_n - y_l), \frac{1}{2A}(x_l - x_n) \right)$$

$$\nabla\alpha_n = \left( \frac{\partial\alpha_n}{\partial x}, \frac{\partial\alpha_n}{\partial y} \right) = \left( \frac{1}{2A}(y_l - y_m), \frac{1}{2A}(x_m - x_l) \right)$$

então:

$$\nabla\alpha_m\nabla\alpha_n = \left(\frac{1}{2A}(y_n - y_l)\right)\left(\frac{1}{2A}(y_l - y_m)\right) + \left(\frac{1}{2A}(x_l - x_n)\right)\left(\frac{1}{2A}(x_m - x_l)\right)$$

$$Y_{mn}^{(e)} = \int \nabla\alpha_m\nabla\alpha_n dS = \frac{1}{4A^2} \left[ (y_n - y_l)(y_l - y_m) + (x_l - x_n)(x_m - x_l) \right] \int dS$$

portanto:

$$Y_{mn}^{(e)} = \frac{1}{4A} \left[ (y_n - y_l)(y_l - y_m) + (x_l - x_n)(x_m - x_l) \right] \quad (\text{C.5})$$

Cálculo de  $Y_{nn}^{(e)}$

$$Y_{nn}^{(e)} = \int \nabla\alpha_n\nabla\alpha_n dS$$

Como calculado anteriormente:

$$\nabla\alpha_n = \left( \frac{\partial\alpha_n}{\partial x}, \frac{\partial\alpha_n}{\partial y} \right) = \left( \frac{1}{2A}(y_l - y_m), \frac{1}{2A}(x_m - x_l) \right)$$

então:

$$\nabla\alpha_n\nabla\alpha_n = \left(\frac{1}{2A}(y_l - y_m)\right)\left(\frac{1}{2A}(y_l - y_m)\right) + \left(\frac{1}{2A}(x_m - x_l)\right)\left(\frac{1}{2A}(x_m - x_l)\right)$$

$$Y_{nn}^{(e)} = \int \nabla \alpha_n \nabla \alpha_n dS = \frac{1}{4A^2} \left[ (y_l - y_m)(y_l - y_m) + (x_m - x_l)(x_m - x_l) \right] \int dS$$

portanto:

$$\boxed{Y_{nn}^{(e)} = \frac{1}{4A} \left[ (y_l - y_m)^2 + (x_m - x_l)^2 \right]} \quad (\text{C.6})$$

Como a matriz  $[Y^{(e)}]$  é simétrica temos:  $Y_{ml}^{(e)} = Y_{lm}^{(e)} ; Y_{nl}^{(e)} = Y_{ln}^{(e)} ; Y_{nm}^{(e)} = Y_{mn}^{(e)}$ .

## Resumo

Coefficientes das equações:

$$\boxed{Y_{ll}^{(e)} = \frac{1}{4A} \left[ (y_m - y_n)^2 + (x_n - x_m)^2 \right];}$$

$$\boxed{Y_{mm}^{(e)} = \frac{1}{4A} \left[ (y_n - y_l)^2 + (x_l - x_n)^2 \right];}$$

$$\boxed{Y_{nn}^{(e)} = \frac{1}{4A} \left[ (y_l - y_m)^2 + (x_m - x_l)^2 \right];}$$

$$\boxed{Y_{lm}^{(e)} = \frac{1}{4A} \left[ (y_m - y_n)(y_n - y_l) + (x_n - x_m)(x_l - x_n) \right];}$$

$$\boxed{Y_{ln}^{(e)} = \frac{1}{4A} \left[ (y_m - y_n)(y_l - y_m) + (x_n - x_m)(x_m - x_l) \right];}$$

$$\boxed{Y_{mn}^{(e)} = \frac{1}{4A} \left[ (y_n - y_l)(y_l - y_m) + (x_l - x_n)(x_m - x_l) \right].}$$

Como a matriz  $[Y^{(e)}]$  é simétrica temos:  $Y_{ml}^{(e)} = Y_{lm}^{(e)} ; Y_{nl}^{(e)} = Y_{ln}^{(e)} ; Y_{nm}^{(e)} = Y_{mn}^{(e)}$ .

# Referências

HUMPHRIES, S. Finite-element methods for electromagnetics. *New Mexico, January*, 2010. Citado na página 16.

MATTHEW, N. S. *Numerical techniques in electromagnetics*. [S.l.]: CRC Press, 2000. Citado na página 3.

ROBERTO, J. *Electromagnetics through the Finite Element Method: A Simplified Approach Using Maxwell's Equations*. [S.l.]: CRC PRESS, 2019. Citado na página 8.

VILCHES, M. A.; CORRÊA, M. L. Cálculo. *Departamento de Análise, IME, UERJ*, 2011. Citado na página 16.