

# 1 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS 2D

Muitos problemas de engenharia de geometria complexa não têm solução analítica conhecida como ocorre para geometrias mais simples como cilindro, cone e cubo. Dessa maneira, para a solução desses problemas é necessário a utilização de métodos numéricos como o método de elementos finitos (MEF).

## 1.1 Passo 1 - Discretização espacial da região de interesse

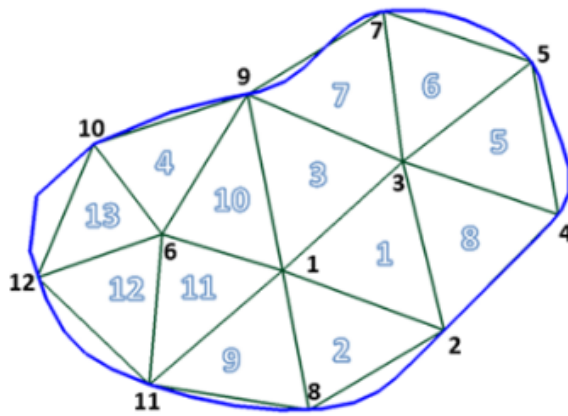


Figura 1 – Malha de elementos finitos usada na simulação EIT.

A primeira etapa para a solução numérica pelo MEF é subdividir a região de interesse em elementos regulares de solução analítica conhecida. Os elementos podem ser: segmentos de reta; triângulos; quadriláteros; tetraedros, conforme a dimensão da geometria do problema.

A figura 1 apresenta em azul uma geometria complexa subdividida numa malha de elementos finitos triangulares. Os números em preto correspondem aos pontos, ou nós, da malha, enquanto que os números em azul identificam cada elemento. Um sistema de numeração  $(x, y, z)$  identifica as coordenadas de cada elemento da geometria.

Note que a região compreendida pelos elementos não engloba totalmente a região de interesse da linha azul, o que torna o resultado do MEF uma aproximação do resultado real. Entretanto, pode-se aumentar a densidade da malha diminuindo o tamanho dos elementos, e dessa maneira aproximar a área em estudo da área da linha azul, aumentando a precisão, porém, com custo computacional mais elevado.

## 1.2 Passo 2 - Seleção da função de interpolação

Supondo que estamos interessado em determinar o potencial  $\phi(x, y)$  em cada ponto da região da figura 1 em estudo, podemos considerar que a distribuição de potencial é contínua na fronteira do elemento, dessa maneira:

$$\phi(x, y) \simeq \sum_{e=1}^N \phi_e(x, y) \quad (1.1)$$

onde  $N$  é o número de elementos e  $\phi_e(x, y)$  é a contribuição de potencial de cada elemento da malha. A função  $\phi_e(x, y)$ , é qualquer função linear capaz de efetuar a interpolação dos três nós do elemento triangular. A função  $\phi_e(x, y)$  de aproximação mais utilizada para esse fim é:

$$\phi_e(x, y) = a + bx + cy \quad (1.2)$$

que na forma vetorial fica como:

$$\phi_e(x, y) = [1 \ x \ y] \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} \quad (1.3)$$

Uma característica importante é que o potencial  $\phi_e$  pode assumir valores diferentes de zero dentro do elemento, entretanto, fora do elemento  $e$  o valor deve ser sempre zero. Outra característica é que a função  $\phi_e(x, y)$  deve ser da classe  $C^1$ , ou seja, deve ter a primeira derivada.

Dessa maneira, a variação do potencial  $\phi_e$  dentro do elemento triangular é linear, portanto o campo elétrico é uniforme dentro do elemento, ou seja:

$$\mathbf{E}_e = -\nabla \phi_e \quad (1.4)$$

$$\nabla \phi_e = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \quad (1.5)$$

ou,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_e}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(a + bx + cy) = b, \\ \frac{\partial \phi_e}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(a + bx + cy) = c \\ E &= -(b, c) \end{aligned}$$

### Equações governantes elementos triangulares

O MEF é fortemente dependente das coordenadas nodais dos elementos. Dessa forma, é conveniente adequar as equações governantes desses elementos em função de suas coordenadas. A identificação de cada nó pode ser efetuada por letras ou números. Aqui, optou-se pela identificação dos nós por letras para diferenciar a identificação **local** da

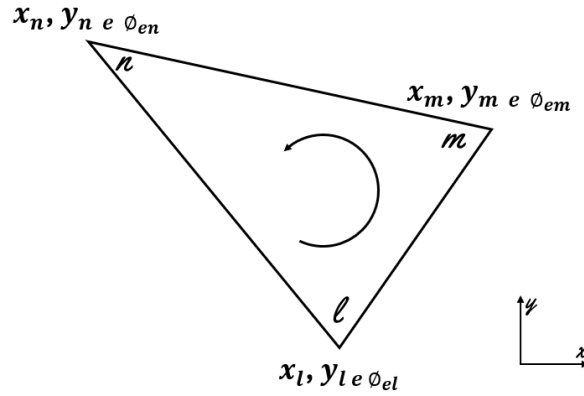


Figura 2 – Elemento triangular.

**global** de cada elemento. No MEF cada nó da malha têm duas identificações conhecidas como local e global. A identificação local é proveniente de um matriz local que relaciona todos os nós de um único elemento, que no caso do triângulo da figura 2.2 são os nós  $l$ ,  $m$ , e  $n$ . Entretanto, cada nó do elemento é identificado numa sequência numérica que relaciona todos os elementos na malha.

Partindo da equação 1.3, pode-se determinar os potenciais elétricos  $\phi_l, \phi_m$  e  $\phi_n$  localizados nos nós  $l, m$  e  $n$ , do elemento triangular da figura 2, por meio da seguinte formulação:

$$\begin{Bmatrix} \phi_l \\ \phi_m \\ \phi_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_l & y_l \\ 1 & x_m & y_m \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} \quad (1.6)$$

Rearranjando a equação 1.6, pode-se determinar os coeficientes  $a, b$  e  $c$  da equação de interpolação.

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_l & y_l \\ 1 & x_m & y_m \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \phi_l \\ \phi_m \\ \phi_n \end{Bmatrix} = [\mathbf{M}]^{-1} \{\phi_i\} \quad (1.7)$$

Para isso, precisamos calcular a inversa da matriz  $[\mathbf{M}]$ . O procedimento para a inversão da matriz  $[\mathbf{M}]$  é apresentado no Apêndice 1, equação A1.xxx. Substituindo a matriz inversa de  $[\mathbf{M}]$  na equação 1.7, temos:

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \underbrace{\begin{bmatrix} (x_m y_n - x_n y_m) & (x_n y_l - x_l y_n) & (x_l y_m - x_m y_l) \\ (y_m - y_n) & (y_n - y_l) & (y_l - y_m) \\ (x_n - x_m) & (x_l - x_n) & (x_m - x_l) \end{bmatrix}}_{[\mathbf{M}]^{-1}} \begin{Bmatrix} \phi_l \\ \phi_m \\ \phi_n \end{Bmatrix} \quad (1.8)$$

onde  $A$  é área do elemento dada pela equação A1.xxx, e será positivo se for numerado no sentido anti-horário.

Substituindo a equação 1.8 na equação 1.3, temos:

$$\phi_e(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \underbrace{\frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (x_m y_n - x_n y_m) & (x_n y_l - x_l y_n) & (x_l y_m - x_m y_l) \\ (y_m - y_n) & (y_n - y_l) & (y_l - y_m) \\ (x_n - x_m) & (x_l - x_n) & (x_m - x_l) \end{bmatrix}}_{= \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix}} \begin{Bmatrix} \phi_l \\ \phi_m \\ \phi_n \end{Bmatrix} \quad (1.9)$$

Para simplificar a notação substituímos os elementos da matriz por:

$$\alpha_l = (x_m y_n - x_n y_m) \quad \beta_l = (y_m - y_n) \quad \gamma_l = (x_n - x_m)$$

$$\alpha_m = (x_n y_l - x_l y_n) \quad \beta_m = (y_n - y_l) \quad \gamma_m = (x_l - x_n)$$

$$\alpha_n = (x_l y_m - x_m y_l) \quad \beta_n = (y_l - y_m) \quad \gamma_n = (x_m - x_l)$$

assim,

$$\phi_e(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_l & \alpha_m & \alpha_n \\ \beta_l & \beta_m & \beta_n \\ \gamma_l & \gamma_m & \gamma_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_l \\ \phi_m \\ \phi_n \end{Bmatrix}$$

$$\phi_e(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_l \phi_l + \alpha_m \phi_m + \alpha_n \phi_n \\ \beta_l \phi_l + \beta_m \phi_m + \beta_n \phi_n \\ \gamma_l \phi_l + \gamma_m \phi_m + \gamma_n \phi_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \phi_e(x, y) = \frac{1}{2A} & \left[ (1)(\alpha_l \phi_l + \alpha_m \phi_m + \alpha_n \phi_n) \right. \\ & + x(\beta_l \phi_l + \beta_m \phi_m + \beta_n \phi_n) \\ & \left. + y(\gamma_l \phi_l + \gamma_m \phi_m + \gamma_n \phi_n) \right] \end{aligned}$$

Agrupando os termos  $\phi_l$ ,  $\phi_m$  e  $\phi_n$ , temos:

$$\begin{aligned} \phi_e(x, y) = \frac{1}{2A} & \left[ \phi_l (\alpha_l + x\beta_l + y\gamma_l) \right. \\ & + \phi_m (\alpha_m + x\beta_m + y\gamma_m) \\ & \left. + \phi_n (\alpha_n + x\beta_n + y\gamma_n) \right] \end{aligned} \quad (1.10)$$

Note que podemos substituir convenientemente os termos entre parênteses da equação 1.10 por:

$$N_i = \frac{1}{2A} [\alpha_i + x\beta_i + y\gamma_i]$$

onde  $k = l, m, n$ . Portando:

$$\phi_e(x, y) = \frac{1}{2A} (N_l \phi_l + N_m \phi_m + N_n \phi_n) \quad (1.11)$$

Podemos representar a equação 1.11 na forma matricial, como:

$$\phi_e(x, y) = [N]\{\phi\} \quad (1.12)$$

onde,

$$N = \frac{1}{2A}[N_l + N_m + N_n]$$

Função gradiente.

O vetor gradiente do potencial elétrico  $E = \nabla\phi$  é dado por:

$$\{\nabla\phi\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (1.13)$$

Como a função  $\phi(x, y)$  é descrita com a equação 1.11

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2A}(N_l\phi_l + N_m\phi_m + N_n\phi_n)$$

então:

$$\frac{\partial\phi(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{2A} \left( \frac{\partial N_l}{\partial x}\phi_l + \frac{\partial N_m}{\partial x}\phi_m + \frac{\partial N_n}{\partial x}\phi_n \right) \quad (1.14)$$

e

$$\frac{\partial\phi(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{2A} \left( \frac{\partial N_l}{\partial y}\phi_l + \frac{\partial N_m}{\partial y}\phi_m + \frac{\partial N_n}{\partial y}\phi_n \right) \quad (1.15)$$

Podemos representar  $\nabla\phi$  na forma matricial como:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{array} \right\} = \frac{1}{2A} \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial N_l}{\partial x} & \frac{\partial N_m}{\partial x} & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ \frac{\partial N_l}{\partial y} & \frac{\partial N_m}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial y} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \phi_l \\ \phi_m \\ \phi_n \end{array} \right\} \quad (1.16)$$

Podemos notar na 1.16 que os termos de que dependem  $x$  e  $y$  são equivalentes aos  $\beta's$  e  $\gamma's$ , assim, a equação 1.16 pode ser reescrita como:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{array} \right\} = \frac{1}{2A} \left[ \begin{array}{ccc} \beta_l & \beta_m & \beta_n \\ \gamma_l & \gamma_m & \gamma_n \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \phi_l \\ \phi_m \\ \phi_n \end{array} \right\} \quad (1.17)$$

Convenientemente, podemos expressar a equação 1.17 na forma compacta,

$$\{\nabla\phi\} = [B]\{\phi\} \quad (1.18)$$

Da equação da lei de Ohm na forma diferencial, sabemos que:

$$J_x = \sigma_{xx} \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad (1.19)$$

e

$$J_y = \sigma_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (1.20)$$

Definindo a matriz

$$[D] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

temos:

$$\begin{Bmatrix} J_x \\ J_y \end{Bmatrix} = [D] \{\nabla \phi\} = [D][B] \{\phi\} \quad (1.22)$$

O funcional que governa o problema eletrostático pode ser dado por:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V \left[ \sigma_{xx} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \sigma_{yy} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dV - \int_{S_2} J^* \nabla \phi dS \quad (1.23)$$

Usando as equações 1.12, 1.13 e 1.21, obtemos:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V \{\nabla \phi\}^T [D] \{\nabla \phi\} dV - \int_{S_2} J^* [N] \{\phi\} dS \quad (1.24)$$

⋮

EDITAR DESENVOLVIMENTO

⋮

### 1.3 Cálculo da matriz de rigidez local

Seja:

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_l & \beta_m & \beta_n \\ \gamma_l & \gamma_m & \gamma_n \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

$d$  = espessura constante

$$[k] = \int_S \frac{d}{4A^2} \begin{bmatrix} \beta_l & \gamma_l \\ \beta_m & \gamma_m \\ \beta_n & \gamma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_l & \beta_m & \beta_n \\ \gamma_l & \gamma_m & \gamma_n \end{bmatrix} dS$$

$$\zeta = \begin{bmatrix} \beta_l & \gamma_l \\ \beta_m & \gamma_m \\ \beta_n & \gamma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_l & \beta_m & \beta_n \\ \gamma_l & \gamma_m & \gamma_n \end{bmatrix}$$

$$\zeta = \begin{bmatrix} \beta_l & \gamma_l \\ \beta_m & \gamma_m \\ \beta_n & \gamma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\sigma_{xx}\beta_l + \sigma_{xy}\gamma_l) & (\sigma_{xx}\beta_m + \sigma_{xy}\gamma_m) & (\sigma_{xx}\beta_n + \sigma_{xy}\gamma_n) \\ (\sigma_{yx}\beta_l + \sigma_{yy}\gamma_l) & (\sigma_{yx}\beta_m + \sigma_{yy}\gamma_m) & (\sigma_{yx}\beta_n + \sigma_{yy}\gamma_n) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_l(\sigma_{xx}\beta_l + \sigma_{xy}\gamma_l) + \gamma_l(\sigma_{yx}\beta_l + \sigma_{yy}\gamma_l) & \beta_l(\sigma_{xx}\beta_m + \sigma_{xy}\gamma_m) + \gamma_l(\sigma_{yx}\beta_m + \sigma_{yy}\gamma_m) & \beta_l(\sigma_{xx}\beta_n + \sigma_{xy}\gamma_n) + \gamma_l(\sigma_{yx}\beta_n + \sigma_{yy}\gamma_n) \\ \beta_m(\sigma_{xx}\beta_l + \sigma_{xy}\gamma_l) + \gamma_m(\sigma_{yx}\beta_l + \sigma_{yy}\gamma_l) & \beta_m(\sigma_{xx}\beta_m + \sigma_{xy}\gamma_m) + \gamma_m(\sigma_{yx}\beta_m + \sigma_{yy}\gamma_m) & \beta_m(\sigma_{xx}\beta_n + \sigma_{xy}\gamma_n) + \gamma_m(\sigma_{yx}\beta_n + \sigma_{yy}\gamma_n) \\ \beta_n(\sigma_{xx}\beta_l + \sigma_{xy}\gamma_l) + \gamma_n(\sigma_{yx}\beta_l + \sigma_{yy}\gamma_l) & \beta_n(\sigma_{xx}\beta_m + \sigma_{xy}\gamma_m) + \gamma_n(\sigma_{yx}\beta_m + \sigma_{yy}\gamma_m) & \beta_n(\sigma_{xx}\beta_n + \sigma_{xy}\gamma_n) + \gamma_n(\sigma_{yx}\beta_n + \sigma_{yy}\gamma_n) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (\beta_l^2\sigma_{xx} + 2\beta_l\gamma_l\sigma_{xy} + \gamma_l^2\sigma_{yy}) & \beta_l(\sigma_{xx}\beta_m + \sigma_{xy}\gamma_m) + \gamma_l(\sigma_{yx}\beta_m + \sigma_{yy}\gamma_m) & \beta_l(\sigma_{xx}\beta_n + \sigma_{xy}\gamma_n) + \gamma_l(\sigma_{yx}\beta_n + \sigma_{yy}\gamma_n) \\ \beta_m(\sigma_{xx}\beta_l + \sigma_{xy}\gamma_l) + \gamma_m(\sigma_{yx}\beta_l + \sigma_{yy}\gamma_l) & (\beta_m^2\sigma_{xx} + 2\beta_m\gamma_m\sigma_{xy} + \gamma_m^2\sigma_{yy}) & \beta_m(\sigma_{xx}\beta_n + \sigma_{xy}\gamma_n) + \gamma_m(\sigma_{yx}\beta_n + \sigma_{yy}\gamma_n) \\ \beta_n(\sigma_{xx}\beta_l + \sigma_{xy}\gamma_l) + \gamma_n(\sigma_{yx}\beta_l + \sigma_{yy}\gamma_l) & \beta_n(\sigma_{xx}\beta_m + \sigma_{xy}\gamma_m) + \gamma_n(\sigma_{yx}\beta_m + \sigma_{yy}\gamma_m) & (\beta_n^2\sigma_{xx} + 2\gamma_n\beta_n\sigma_{xy} + \gamma_n^2\sigma_{yy}) \end{bmatrix}$$

$$[k] = \int_S \frac{d}{4A^2} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{23} \end{bmatrix} dS$$

$$[k] = \frac{d}{4A} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{23} \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = \beta_l^2\sigma_{xx} + 2\beta_l\gamma_l\sigma_{xy} + \gamma_l^2\sigma_{yy},$$

$$C_{12} = \beta_l(\sigma_{xx}\beta_m + \sigma_{xy}\gamma_m) + \gamma_l(\sigma_{yx}\beta_m + \sigma_{yy}\gamma_m),$$

$$C_{13} = \beta_l(\sigma_{xx}\beta_n + \sigma_{xy}\gamma_n) + \gamma_l(\sigma_{yx}\beta_n + \sigma_{yy}\gamma_n),$$

$$C_{21} = \beta_m(\sigma_{xx}\beta_l + \sigma_{xy}\gamma_l) + \gamma_m(\sigma_{yx}\beta_l + \sigma_{yy}\gamma_l)$$

$$C_{22} = \beta_m^2\sigma_{xx} + 2\beta_m\gamma_m\sigma_{xy} + \gamma_m^2\sigma_{yy},$$

$$C_{23} = \beta_m(\sigma_{xx}\beta_n + \sigma_{xy}\gamma_n) + \gamma_m(\sigma_{yx}\beta_n + \sigma_{yy}\gamma_n),$$

$$C_{31} = \beta_n(\sigma_{xx}\beta_l + \sigma_{xy}\gamma_l) + \gamma_n(\sigma_{yx}\beta_l + \sigma_{yy}\gamma_l),$$

$$C_{32} = \beta_n(\sigma_{xx}\beta_m + \sigma_{xy}\gamma_m) + \gamma_n(\sigma_{yx}\beta_m + \sigma_{yy}\gamma_m),$$

$$C_{33} = \beta_n^2\sigma_{xx} + 2\gamma_n\beta_n\sigma_{xy} + \gamma_n^2\sigma_{yy}.$$

$$C_{21} = C_{12}, C_{31} = C_{13} \text{ e } C_{32} = C_{23}.$$

$$\beta_l = (y_m - y_n) \quad \gamma_l = (x_n - x_m)$$

$$\beta_m = (y_n - y_l) \quad \gamma_m = (x_l - x_n)$$

$$\beta_n = (y_l - y_m) \quad \gamma_n = (x_m - x_l)$$



Figura 3 – Burro.



# APÊNDICE A – DA TERMO DA MATRIZ

# APÊNDICE B – CÁLCULO DE CADA TERMO DA MATRIZ

$$N_l = \frac{1}{2A}[\alpha_l + x\beta_l + y\gamma_l]$$

$$N_m = \frac{1}{2A}[\alpha_m + x\beta_m + y\gamma_m]$$

$$N_n = \frac{1}{2A}[\alpha_n + x\beta_n + y\gamma_n]$$

$$\alpha_l = (x_my_n - x_ny_m) \quad \beta_l = (y_m - y_n) \quad \gamma_l = (x_n - x_m)$$

$$\alpha_m = (x_ny_l - x_ly_n) \quad \beta_m = (y_n - y_l) \quad \gamma_m = (x_l - x_n)$$

$$\alpha_n = (x_ly_m - x_my_l) \quad \beta_n = (y_l - y_m) \quad \gamma_n = (x_m - x_l)$$

## B.1 Cálculo de $Y_{lm}^{(e)}$