КАНСПЕКТЫ

матанблин

01:49

28 декабря 2020 г.

Ваши вопросы следующие:

Множество — одно из первичных понятий математикии, не требуещего своего определения. Это совокупность, собрание каких-либо объектов произвольной природы, мыслимых как единое целое. С множествами можно производить определенные операции по неким правилам, например, $\cap$ *пересекать*, $\cup$ *объединять*, $\setminus$ *вычитать*, $\triangle$ вычислять *симметрическую разность*, *дополнять* и вычислять *декартово прямое произведение*.

Пусть даны множества $A = \{с,\ т,\ у,\ д,\ е,\ н\}$, $B = \{у,\ ч,\ е,\ н,\ и\}$, тогда:

- пересечение $A \cap B = \{x \mid x \in A\ \wedge\ x \in B\} = \{у,\ е,\ н\}$
- объединение $A \cup B = \{x \mid x \in A\ \vee\ x \in B\} = \{с,\ т,\ у,\ ч,\ д,\ е,\ н,\ и\}$
- разность $A \setminus B = \{x \mid x \in A\ \wedge\ x \notin B\} = \{с,\ т,\ д\}$, $B \setminus A = \{x \mid x \in B\ \wedge\ x \notin A\} = \{ч,\ и\}$
- симметрическая разность $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \varnothing$ — ($\varnothing$ только для данных A и B !)
- дополнение $C_U A = U \setminus A \equiv \{x \in U \mid x \notin A\} = \{а,\ б,\ в,\ г,\ ж,\ з,\ \ldots,\ м,\ о,\ п,\ р,\ ф,\ \ldots,\ я\}$, где U — универсальное множество (в данном случае — русский алфавит)

Декартово (прямое) произведение двух множеств — множество, элементами которого являются все возможные упорядоченные пары элементов исходных множеств.

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$$

Например:

$$X = \{1, 2\},\ Y = \{3, 4\}$$
$$X \times Y = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$$

Свойство бесконечности (поглощение единицы)

$$|\mathbb{N}| + 1 = |\mathbb{N}|$$

Комплексное число ($\mathbb{C}$) — выражение вида

$$x + iy, \text{ где } x, y \in \mathbb{R}, \text{ а } i \text{ — мнимая единица.}$$

Комплексные числа можно *складывать*, *вычитать*, *умножать*, *делить*, но нельзя *сравнивать*! Комплексное число отлично от нуля!

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ — модуль комплексного числа}$$

Функция — всякое однозначное отображение из одного множества в другое.

Последовательность — всякая функция из множества $\mathbb{N}$ чисел в $\mathbb{R}$ или в $\mathbb{C}$.

Предел последовательности (по Коши) — число A называется пределом последовательности $\{x_n\}$ при $n \to \infty$, если $\forall\ \varepsilon > 0$ найдется зависящий от него натуральный индекс n такой, что для всех последующих элементов последовательности с большим индексом выполняется неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$.

$$\forall\ \varepsilon > 0 \ \ \exists \ \ N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}; \ \ \forall\ n > N \ \ |f_n - A| < \varepsilon$$

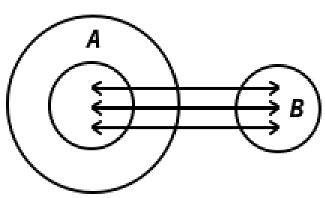
Метрическое пространство — непустое множество, в котором определены функции метрики:

1. $\rho(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = y, \ \rho(x, y) \geq 0$ — расстояние равно 0
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ — симметричность
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ — неравенство треугольника

Например:

- $\rho(x, y) = |y - x|$ — метрика
- $\rho(x, y) = |x \cdot y|$ — не метрика
- $\rho(x) = x^2$ — некорректный пример

Мощность множества больше

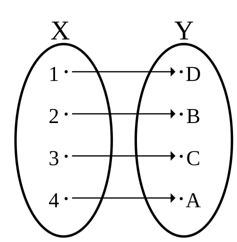


$|A| > |B| \Leftrightarrow$ для B существует биекция только с некоторым подмножеством множества A, но не со всем множеством A.

Например: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|, \quad |\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$

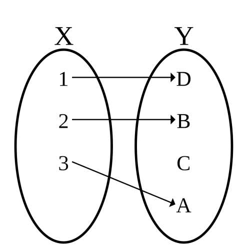
Биекция

— это такая функция отображения из множества X в множество Y, при которой для каждого образа существует лишь **один** прообраз.

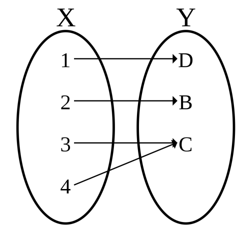


Инъекция

— это такая функция отображения из множества X в множество Y, при которой для каждого образа существует **не более одного** прообраза.

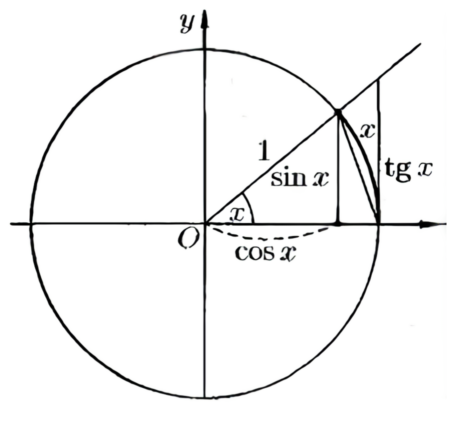


Сюръекция



— это такая функция отображения из множества X в множество Y, при которой для каждого образа существует **не менее одного** прообраза.

Первый замечательный предел



$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

следствия:

$$\sin(x)\sim x\sim \arcsin(x)\sim \mathrm{tg}(x)\sim \mathrm{arctg}(x)$$

$$\cos(x)\sim 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=1$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$$

Следствия:

1. $\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$
2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{k}{x})^x=e^k$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x\ln a}=1$ для $a>0,\ a\neq 1$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha x}=1$

Неравенство Бернулли

$$(1+\alpha)^n\geqslant 1+n\alpha\ ,\ \text{где } \alpha\geqslant -1, n\in\mathbb{N}$$

Неравенство Коши

$$\sqrt[n]{a_1,...,a_n}\leqslant\frac{a_1+...+a_n}{n}\ ,\ \text{где } a_1,...,a_n>0$$

Арифметическое пространство — такое метрическое пространство, в котором в качестве множества точек рассматривается множество строк длины n и ещё n действительных ($\mathbb{R}$) чисел, а расстояние берётся евклидово.

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n) \mid x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$$

$$(\mathbb{R}^n,\ \rho(\vec{x}, \vec{y})) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$$

Предел функции (по Коши) — число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует зависящеее от него положительное число $\delta > 0$ такое, что для любого x из области определения функции $D(f)$ из неравенства $0 < |x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \ \Leftrightarrow\ \forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\ \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :$$

$$\forall\, x \in D(f) \text{ из неравенства } 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - A| < \varepsilon$$

Предел функции (по Гейне) — число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любой последовательности аргументов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ выполняются 3 свойства:

$$\left.\begin{array}{l} \{x_n\} \subset D(f) \\ x_n \to x_0, \\ x_0 \notin \{x_n\}_{n=1}^{\infty}. \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$$

Производная функции $f(x)$ в точке x — это предел отношения приращения функции к приращению её аргумента, когда последний стремится к нулю, при условии, что этот предел существует и конечен.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Формула Лейбница

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k-0}^{n} C_n^k \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k)} \text{ , где } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Вычисление производной через логарифмы

$$y' = (\frac{\sqrt[4]{2x+3} \cdot \sqrt[5]{3x+4}}{(3x+5)^8})$$

$$\boxed{\ln a^n = n \ln a}$$

$$\ln y = \frac{1}{4} \ln(2x + 3) + \frac{1}{5} \ln(3x + 4) - 8 \ln(3x + 5)$$

$$\boxed{y' = y \cdot (\ln y)'}$$

$$\frac{y'}{y} = (\ln y)' = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{2x+3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{3x+4} - 8 \cdot \frac{3}{3x+5}$$

$$\Rightarrow \; y' = (\frac{1}{4x+6} + \frac{3}{15x+20} - \frac{24}{3x+5}) \cdot \frac{\sqrt[4]{2x+3} \cdot \sqrt[5]{3x+4}}{(3x+5)^8}$$

для $(x^x)'$:

$$(x^x)' = (y)' = y(\ln y)' = x^x(\ln x^x)' = x^x(x \ln x)' = x^x(1 + \ln x)$$

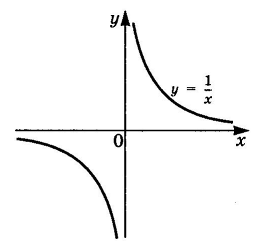
для $(x^{x^x})'$:

$$(x^{x^x})' = (y)' = x^{x^x}(x^x \ln x)' = x^{x^x}(x^x(1 + \ln x) \cdot \ln x + x^{x-1})$$

Точка разрыва 1-го рода — точка, в которой нарушено условие непрерывности функции, в которой существуют и конечны оба односторонних предела 1-го рода.

Точка разрыва 2-го рода

— точка, в которой хотя бы один из двух односторонних пределов 1-го рода не существует либо равен ∞.



Устранимый разрыв — если существуют левый и правый пределы функции $f(x)$ в точке, и они равны, но не совпадают со значанием функции в точке a, или точка a не определена, то точка a называется точкой устранимого разрыва.

Первообразная функции — функция, производная которой равна заданной функции.

Неопределенный интеграл — множество всех тех функций, производная которых равна заданной функции.

Дифференциал функции — часть её приращения, главная и линейная по приращению аргумента, который стремится к нулю.

$$d(f(x)) = f(x)'dx$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{d(f(x))}{dx}$$

дифференциал 2-го порядка:

$$d^2(y) = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = [((f'(x))'dx + f'(x)(dx)']dx =$$
$$= (f''(x)dx)dx = f''(x) \cdot (dx)^2$$

$$\Rightarrow d^2(y) = f''(x) \cdot (dx)^2$$

дифференциал n-го порядка:

$$d^n(y) = f^{(n)}(x) \cdot (dx)^n$$

Обобщенная теорема о среднем

Пусть функции $f(x), g(x)$ определена на отрезке $[A, B]$, дифференцируемы $(n+1)$ раз на (A, B), точка $a \in (A, B)$, $g^{(n+1)}(x) \neq 0 \quad \forall\ x \in (A, B)$. Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (x, a)$ или (a, x), такая что

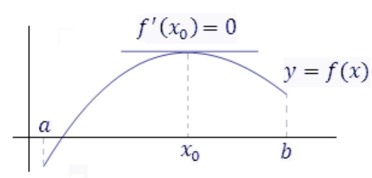
$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{g^{(n+1)}(c)} = \frac{R_{n,a}(x, f)}{R_{n,a}(x, g)} = \frac{f(x) - f(a) - f'(a) \cdot (x-a) - ... - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n}{g(x) - g(a) - g'(a) \cdot (x-a) - ... - \frac{g^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n}$$

Следствия:

1. $n = 0,$ — *Теорема Коши о среднем*
2. $n = 0,\ g(x) \equiv x,$ — *Теорема Лагранжа*
3. $n = 0,\ g(x) \equiv x,\ f(x) = f(b),\ x = b,$ — *Теорема Ролля*
4. $g(x) = (x-a)^{n-1}$ — *формула Тейлора с остатком Лагранжа*

Теорема Ферма

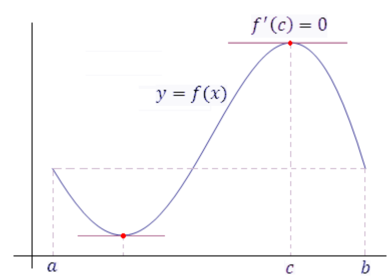
— если функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и достигает в ней экстремум, а также имеет в точке x_0 производную — конечную или бесконечную, определенного знака, то эта производная равна нулю.



Теорема Ролля

Пусть функция $f(x)$:

1. непрерывна на отрезке $[a, b]$
2. дифференцируема на интервале (a, b)
3. имеет на концах отрезка равные значения $f(a) = f(b)$



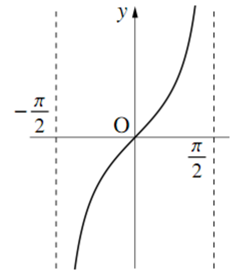
тогда $\exists$ хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = 0$.

Контр-пример:

$$\operatorname{tg} x = \begin{cases} \operatorname{tg} x, \text{ если } |x| < \frac{\pi}{2}; \\ x, \text{ если } x = \pm\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$a = \frac{\pi}{2};\ b = \frac{\pi}{2}$$

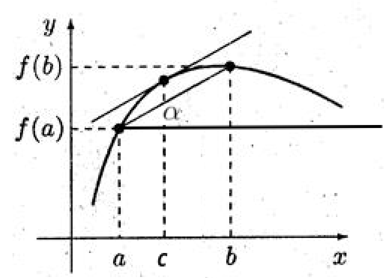
$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0$$



Теорема Лагранжа

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема в каждой точке интервала (a, b), тогда найдется хотя бы одна точка $c \in (a, b)$, такая что

$$f'(c) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Геометрический смысл: в точке c касательная параллельна хорде (секущей).

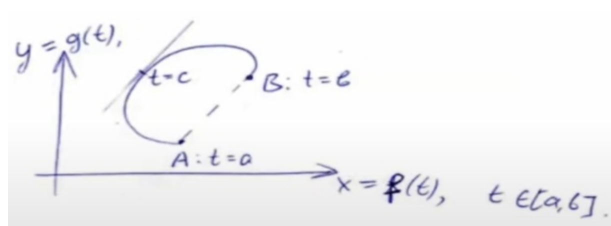
Теорема Коши о среднем

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы на интервале (a, b), причем $g'(x) \neq 0$ для любого $x \in (a, b)$. Тогда найдется хотя бы одна точка $c \in (a, b)$, такая что

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Геометрический смысл:

$\forall\ c \in (a, b)$: касательная в c параллельна хорде AB



Формула Тейлора

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема $(k + 1)$ раз в точке a и непрерывна на отрезке $[a, x]$ или $[x, a]$. Тогда

$$f(x) = \underbrace{\boxed{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\cdot(x-a)^k}}_{\text{многочлен Тейлора } k\text{-го порядка}} + \underbrace{\boxed{R_{k,a}(x,f)}}_{\text{остаточное слагаемое}}$$

Остаток Пеано

$$R_{k,a}(x,f) = \bar{o}((x-a)^k) = (x-a)^k \cdot h_k(x), \text{ где } h_k(x) \xrightarrow[(x\to a)]{} 0$$

— достаточно существования у функции $f(x)$ k производных в точке $x = a$.

Остаток Лагранжа

$$\exists\ C = C_L \in (a,x) \text{ или } (x,a): \quad R_{k,a}(x,f) = \frac{f^{(k+1)}(C_L)}{(k+1)!}\cdot(x-a)^{k+1}$$

Остаток Коши

$$\exists\ C = C_K \in (a,x) \text{ или } (x,a): \quad R_{k,a}(x) = \frac{f^{(k+1)}(C)}{k!}\cdot \boxed{(x-C)^k\cdot(x-a)}$$

$$\|$$

$$(x-a)^{k+1}\cdot\Theta^k$$

$$\boxed{\Theta = \frac{x-c}{x-a}} \quad (\Rightarrow 0 \leqslant \Theta < 1)$$

$$\Theta = \frac{C-x}{a-x}$$

$$\Theta(x-a) = (x-c)$$

$$C = x + \Theta(a-x)$$

$$0 \leqslant \Theta < 1$$

Остаток Шлемильха-Роша

$$R_{k,a}(x,f) = (\frac{x-a}{x-c})^p \cdot \frac{(x-c)^{k+1}}{p\cdot n!}\cdot f^{(k+1)}(c)$$

Частные случаи:

1. $p = n+1 \ \Rightarrow$ остаток превращается в *остаток Лагранжа*
2. $p = 1 \ \Rightarrow$ получаем *остаток Коши*

Из каждого из остатков Коши и Лагранжа следует Пеано:

$$\frac{\frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}\cdot(x-a)^{k+1}}{(x-a)^k} = \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}\cdot(x-a) \xrightarrow[(x\to a)]{} 0$$

Стандартные разложения в формулу Тейлора

при $x \to 0$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \overline{o}(x^7);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \overline{o}(x^6);$$

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \overline{o}(x^5);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \overline{o}(x^6);$$

$$\mathrm{sh}\ (x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \overline{o}(x^7);$$

$$\mathrm{ch}\ (x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \overline{o}(x^6);$$