КАНСПЕКТЫ

матанблин

Ваши вопросы следующие:

Что еще добавить?

- мощности множеств, рац > нат и т.д.
- словами предел последовательности
- мб написать точки разрыва как в Кудрявцеве стр. 202-204
- Коши <=> Гейне
- ну и всякое, что было после интегралов: Ферма, Ла Гранж, Ролля и т.д.

Множество — одно из первичных понятий математикии, не требуещего своего определения. Это совокупность, собрание каких-либо объектов произвольной природы, мыслимых как единое целое. С множествами можно производить определенные операции по неким правилам, например, $\cap$ *пересекать*, $\cup$ *объединять*, $\setminus$ *вычитать*, $\triangle$ вычислять *симметрическую разность*, *дополнять* и вычислять *декартово прямое произведение*.

Пусть даны множества $A = \{с,\ т,\ у,\ д,\ е,\ н\}$, $B = \{у,\ ч,\ е,\ н,\ и\}$, тогда:

- пересечение $A \cap B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\} = \{у,\ е,\ н\}$
- объединение $A \cup B = \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\} = \{с,\ т,\ у,\ ч,\ д,\ е,\ н,\ и\}$
- разность $A \setminus B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\} = \{с,\ т,\ д\}$, $B \setminus A = \{x \mid x \in B \ \wedge \ x \notin A\} = \{ч,\ и\}$
- симметрическая разность $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \varnothing$ — ($\varnothing$ только для данных A и B !)
- дополнение $C_U A = U \setminus A \equiv \{x \in U \mid x \notin A\} = \{а,\ б,\ в,\ г,\ ж,\ з,\ \ldots,\ м,\ о,\ п,\ р,\ ф,\ \ldots,\ я\}$, где U — универсальное множество (в данном случае — русский алфавит)

Декартово (прямое) произведение двух множеств — множество, элементами которого являются все возможные упорядоченные пары элементов исходных множеств.

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$$

Например:

$$X = \{1, 2\},\ Y = \{3, 4\}$$
$$X \times Y = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$$

Свойство бесконечности (поглощение единицы)

$$|\mathbb{N}| + 1 = |\mathbb{N}|$$

Комплексное число ($\mathbb{C}$) — выражение вида

$$x + iy, \text{ где } x, y \in \mathbb{R}, \text{ а } i \text{ — мнимая единица.}$$

Комплексные числа можно *складывать*, *вычитать*, *умножать*, *делить*, но нельзя *сравнивать*! Комплексное число отлично от нуля!

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ — модуль комплексного числа}$$

Функция — всякое однозначное отображение из одного множества в другое.

Последовательность — функция из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{R}$ или в $\mathbb{C}$.

Метрическое пространство — непустое множество, в котором определены функции метрики:

1. $\rho(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y,\; \rho(x, y) \geq 0$ — расстояние равно 0
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ — симметричность
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ — неравенство треугольника

Например:

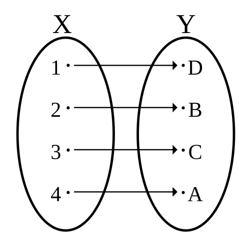
- $\rho(x, y) = |y - x|$ — метрика
- $\rho(x, y) = |x \cdot y|$ — не метрика
- $\rho(x) = x^2$ — некорректный пример

Предел последовательности (по Коши)

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists \;\; N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}; \;\; \forall\, n > N \;\; |f_n - A| < \varepsilon$$

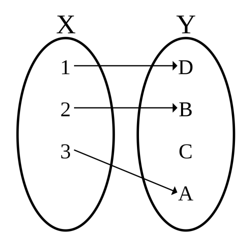
Биекция

— это такая функция отображения из множества X в множество Y, при которой для каждого образа существует лишь **один** прообраз.



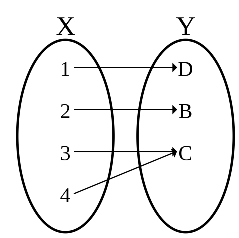
Инъекция

— это такая функция отображения из множества X в множество Y, при которой для каждого образа существует **не более одного** прообраза.



Сюръекция

— это такая функция отображения из множества X в множество Y, при которой для каждого образа существует **не менее одного** прообраза.

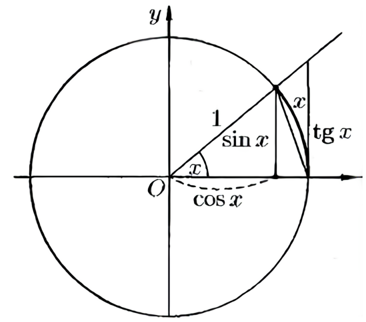


Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

следствия:

$$\sin(x)\sim x\sim \arcsin(x)\sim \operatorname{tg}(x)\sim \operatorname{arctg}(x)$$
$$\cos(x)\sim 1$$



Второй замечательный предел

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$$

Следствия:

1. $\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$
2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{k}{x})^x=e^k$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x\ln a}=1$ для $a>0,\ a\neq 1$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha x}=1$

Неравенство Бернулли

$$(1+\alpha)^n\geqslant 1+n\alpha\ ,\ \text{где } \alpha\geqslant -1, n\in\mathbb{N}$$

Неравенство Коши

$$\sqrt[n]{a_1,...,a_n}\geqslant\frac{a_1+...+a_n}{n}\ ,\ \text{где } a_1,...,a_n>0$$

Арифметическое пространство — такое метрическое пространство, в котором в качестве множества точек рассматривается множество строк длины n из $\mathbb{R}$, а расстояние берётся евклидово.

$$\mathbb{R}^n=\{(x_1,...,x_n)\mid x_1,...,x_n\in\mathbb{R}\}$$
$$(\mathbb{R}^n,\ \rho(\vec{x},\vec{y}))=\sqrt{(x_1-y_1)^2+...+(x_n-y_n)^2}$$

Предел функции (по Коши) — число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует зависящее от него положительное число $\delta > 0$ такое, что для любого x из области определения функции $D(f)$ из неравенства $0 < |x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \ \Leftrightarrow \ \forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists \ \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :$$
$$\forall\, x \in D(f) \text{ из неравенства } 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - A| < \varepsilon$$

Предел функции (по Гейне) — число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любой последовательности аргументов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ выполняются 3 свойства:

$$\left.\begin{array}{l} \{x_n\} \subset D(f) \\ x_n \to x_0, \\ x_0 \notin \{x_n\}_{n=1}^{\infty}. \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$$

Производной функции $f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению её аргумента, когда последний стремится к нулю, при условии, что этот предел существует и конечен.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Формула Лейбница

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k-0}^{n} C_n^k \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k)} \text{ , где } \ C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Вычисление производной через логарифмы

$$y' = (\frac{\sqrt[4]{2x+3} \cdot \sqrt[5]{3x+4}}{(3x+5)^8})$$

$$\boxed{\ln a^n = n \ln a}$$

$$\ln y = \frac{1}{4}\ln(2x+3) + \frac{1}{5}\ln(3x+4) - 8\ln(3x+5)$$

$$\boxed{y' = y \cdot (\ln y)'}$$

$$\frac{y'}{y} = (\ln y)' = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{2x+3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{3x+4} - 8 \cdot \frac{3}{3x+5}$$

$$\Rightarrow \ y' = (\frac{1}{4x+6} + \frac{3}{15x+20} - \frac{24}{3x+5}) \cdot \frac{\sqrt[4]{2x+3} \cdot \sqrt[5]{3x+4}}{(3x+5)^8}$$

для $(x^x)'$:

$$(x^x)' = (y)' = y(\ln y)' = x^x(\ln x^x)' = x^x(x \ln x)' = x^x(1 + \ln x)$$

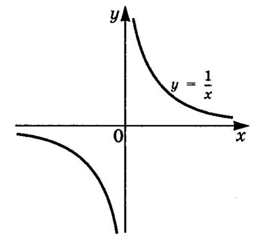
для $(x^{x^x})'$:

$$(x^{x^x})' = (y)' = x^{x^x}(x^x \ln x)' = x^{x^x}(x^x(1 + \ln x) \cdot \ln x + x^{x-1})$$

Точка разрыва 1-го рода — точка, в которой нарушено условие непрерывности функции, в которой существуют и конечны оба односторонних предела 1-го рода.

Точка разрыва 2-го рода

— точка, в которой хотя бы один из двух односторонних пределов 1-го рода не существует либо равен ∞.



Устранимый разрыв — если существуют левый и правый пределы функции $f(x)$ в точке, и они равны, но не совпадают со значанием функции в точке a, или точка a не определена, то точка a называется точкой устранимого разрыва.

Неопределенный интеграл — множество всех тех функций, производная которых равна заданной функции.

Дифференциал функции — часть её приращения, главная и линейная по приращению аргумента, который стремится к нулю.

$$d(f(x)) = f(x)'dx$$
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{d(f(x))}{dx}$$

дифференциал 2-го порядка:

$$d^2(y) = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = [((f'(x))'dx + f'(x)(dx)']dx =$$
$$= (f''(x)dx)dx = f''(x) \cdot (dx)^2$$

$$\Rightarrow d^2(y) = f''(x) \cdot (dx)^2$$

дифференциал n-го порядка:

$$d^n(y) = f^{(n)}(x) \cdot (dx)^n$$