

Лекции по Линейной Алгебре

Дима Трушин

2024 — 2025

Содержание

1 Системы линейных уравнений	2
1.1 Системы линейных уравнений и связанная с ними терминология	2
1.2 Матрицы связанные со СЛУ	2
1.3 Элементарные преобразования	3
1.4 Алгоритм Гаусса	4
1.5 Описание множества решений	5
1.6 Наблюдения из алгоритма	6
2 Матрицы	7
2.1 Определение матриц	7
2.2 Операции над матрицами	7
2.3 Специальные виды матриц	8
2.4 Свойства операций	8
2.5 Связь с системами линейных уравнений	10
2.6 Дефекты матричных операций	10
2.7 Деление	11
2.8 Матрицы элементарных преобразований	13
2.9 Невырожденные матрицы	14

1 Системы линейных уравнений

1.1 Системы линейных уравнений и связанная с ними терминология

Наша задача научиться решать Системы Линейных Уравнений (СЛУ), то есть находить все их решения или доказывать, что решений нет. Общий вид СЛУ и ее однородная версия (ОСЛУ):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Коэффициенты Где живут коэффициенты a_{ij} и b_j ? Варианты:

- Вещественные числа \mathbb{R}
- Комплексные числа \mathbb{C}
- Рациональные числа \mathbb{Q}

Для решения СЛУ **НЕ** имеет значения откуда берутся коэффициенты, так как решения будут лежать там же. Главное, чтобы для коэффициентов были определены операции сложения, вычитания, умножения и деления.¹ Потому мы будем работать с числами из \mathbb{R} . А вот целые числа \mathbb{Z} уже не подходят, так как в них нельзя делить.

Решение Решением системы линейных уравнений называется набор чисел (c_1, \dots, c_n) , $c_i \in \mathbb{R}$ такой, что при подстановке c_i вместо x_i , все уравнения системы превращаются в верные равенства. Введем обозначение $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \{(c_1, \dots, c_n) \mid c_i \in \mathbb{R}\}$. То есть элемент \mathbb{R}^n – это набор из n вещественных чисел. Потому любое решение $c = (c_1, \dots, c_n)$ является элементом \mathbb{R}^n .

1.2 Матрицы связанные со СЛУ

Для каждой СЛУ введем следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Названия:

- A – матрица системы
- b – вектор правой части
- $(A|b)$ – расширенная матрица системы
- x – вектор решений

Будем кратко записывать СЛУ и ее однородную версию так: $Ax = b$ и $Ax = 0$. Также для краткости будем обозначать системы буквами Σ .

При решении системы линейных уравнений приходится много раз переписывать кучу данных. Для того чтобы сократить эти записи, целесообразно сократить количество записываемой на бумаге информации. Расширенная матрица системы $(A|b)$ является необходимым минимумом такой информации. Потому сейчас к такой записи можно относиться как к удобному способу компактно записать систему.

Количество решений Случай одного уравнения и одной неизвестной $ax = b$, где $a, b \in \mathbb{R}$:

- При $a \neq 0$ – одно решение $x = b/a$.
- При $a = 0$, $b \neq 0$ – нет решений.
- При $a = 0$, $b = 0$ – любое число является решением, т.е. бесконечное число решений.

¹Позже мы введем понятие поля и допустимыми будут коэффициенты из произвольного поля.

Что значит решить систему Обычно принято говорить следующие слова: решить систему значит описать множество ее решений, то есть либо доказать, что система не имеет решений вовсе, либо описать все наборы, которые являются решениями. Если система не имеет решений, она называется *несовместной*, в противном случае – *совместной*. Однако, в этой фразе не понятно, что имеется в виду. Действительно, если я запишу систему

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases}$$

То я могу описать множество решений словами: это все наборы (x, y, z) подходящие под систему. Это звучит как жульничество, тем не менее в этом описании есть содержательная мысль, давайте я ее озвучу явно. Приведенная выше система позволяет нам быстро решать такую задачу: проверить лежит ли данный набор среди решений. То есть мы эффективно умеем тестировать вопрос на принадлежность множеству решений. Однако, такое описание не позволяет решать другую важную задачу: генерировать все решения по одному разу. То есть, глядя на эту систему, вы вряд ли сходу предъявите набор отличный от $(0, 0, 0)$ в качестве решения. Более того, тут даже не понятно, есть ли какие-то другие наборы или нет. Потому мы хотим найти другое описание множества решений, которое бы позволяло быстро решать обе задачи: и задачу принадлежности и задачу генерации. Оказывается, что это тоже делается с помощью систем, только в очень специальном виде.

Эквивалентные системы Пусть даны две системы линейных уравнений с одинаковым числом неизвестных (но быть может разным числом уравнений) Σ_1 и Σ_2 . Будем говорить, что эти системы эквивалентны и писать $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$, если множества решений этих систем совпадают. Если $E_i \subseteq \mathbb{R}^n$ – множество решений i -ой системы, то системы эквивалентны, если $E_1 = E_2$.

Вот полезный пример эквивалентных систем:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x = 1 \\ 2y = 1 \end{cases}$$

Как решать систему Пусть нам надо решить систему Σ . Идея состоит в том, чтобы постепенно менять ее на эквивалентную до тех пор, пока она не упростится до такого состояния, что все ее решения легко описать.

$$\Sigma = \Sigma_1 \mapsto \Sigma_2 \mapsto \dots \mapsto \Sigma_n \leftarrow \text{легко решается}$$

Теперь надо объяснить две вещи: (1) какого сорта преобразования над системами мы будем делать и (2) к какому замечательному виду мы их приводим и как в нем выглядят все решения. Ответам на эти два вопроса и будет посвящена оставшаяся часть лекции.

1.3 Элементарные преобразования

Мы разделим все преобразования на три типа²:

$$\begin{aligned} \text{I тип: } & \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{i1} & \dots & a_{in} & b_i \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} & b_j \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{i1} & \dots & a_{in} & b_i \\ a_{j1} + \lambda a_{i1} & \dots & a_{jn} + \lambda a_{in} & b_j + \lambda b_i \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \quad i \neq j \\ \text{II тип: } & \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{i1} & \dots & a_{in} & b_i \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} & b_j \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} & b_j \\ a_{i1} & \dots & a_{in} & b_i \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \\ \text{III тип: } & \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{i1} & \dots & a_{in} & b_i \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \lambda a_{i1} & \dots & \lambda a_{in} & \lambda b_i \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \quad \lambda \neq 0 \end{aligned}$$

Поясним словами, что делают преобразования:

1. Прибавляем к j -ой строке i -ю, умноженную на константу $\lambda \in \mathbb{R}$.

²Стоит отметить, что нумерация типов преобразования не является общепринятой и отличается от учебника к учебнику.

2. Меняем местами i -ю и j -ю строки.
3. Умножаем i -ю строку на ненулевую константу $\lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$.

1.4 Алгоритм Гаусса

Этот метод заключается в приведении СЛУ к некоторому «ступенчатому виду», где множество решений очевидно.³ Разберем типичный ход алгоритма Гаусса на примере 3 уравнений и 4 неизвестных.⁴

Прямой ход алгоритма Гаусса Идея прямого хода алгоритма в следующем. Мы смотрим на левый верхний элемент в матрице и пытаемся с помощью него обнулить все элементы под ним. Как только обнулили, забываем про первую строку и столбец и повторяем процедуру с оставшейся подматрицей.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{2-я строка} \\ \text{3-я строка} \end{array} \quad \begin{array}{l} - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot \text{1-я строка} \\ - \frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot \text{1-я строка} \end{array} \\ & \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{3-я строка} \\ \text{3-я строка} \end{array} \quad \begin{array}{l} - \frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot \text{1-я строка} \\ - \frac{a_{32}}{a_{22}} \cdot \text{2-я строка} \end{array} \\ & \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{3-я строка} \\ \text{3-я строка} \end{array} \quad \begin{array}{l} - \frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot \text{1-я строка} \\ - \frac{a_{32}}{a_{22}} \cdot \text{2-я строка} \end{array} \\ & \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & b_3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

В рассуждениях выше, мы пользовались тем, что угловые элементы a_{11} и a_{22} не нули. Но вообще говоря так могло не получиться. Например на третьем шаге могла быть одна из следующих ситуаций (здесь мы смотрим на элемент a_{22}):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \end{array} \right) \quad \text{или} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & b_3 \end{array} \right)$$

В первом случае $a_{22} = 0$, но при этом есть какой-то ненулевой элемент под ним. В такой ситуации надо переставить вторую строчку с другой строкой, где второй элемент не ноль. В примере надо переставить вторую и третью строчку местами. Во втором случае $a_{22} = 0$ и все элементы под ним. В такой ситуации надо пропустить второй столбец и перейти к третьему и мы смотрим на элемент a_{23} . После чего повторяем алгоритм Гаусса с подматрицей.

В результате прямого хода алгоритма из-за обнуления коэффициентов могут возникнуть следующие случаи⁵

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \underline{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & \underline{a_{22}} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{a_{34}} & b_3 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} \underline{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & 0 & \underline{a_{23}} & a_{24} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{a_{34}} & b_3 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} \underline{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & \underline{a_{22}} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{b_3} \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} \underline{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & \underline{a_{22}} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Главные и неглавные переменные Подчеркнутые элементы считаются не равными нулю. Это первые ненулевые коэффициенты в строке, они называются лидерами. В ступенчатом виде все переменные делятся на главные и свободные. Соответствующие лидерам переменные называются главными. Остальные переменные называются свободными.

³Данный метод является самым быстрым возможным как для написания программ, так и для ручного вычисления. При вычислениях руками, однако, полезно местами пользоваться «локальными оптимизациями», то есть если вы видите, что какая-то хитрая комбинация строк сильно упростит вид системы, то сделайте ее.

⁴При переходе от одной матрицы к другой я новым коэффициентам даю старые имена, чтобы не захламлять текст новыми обозначениями.

⁵Это не полный список всех случаев.

Обратный ход алгоритма Гаусса Задача обратного хода алгоритма в том, чтобы сделать все лидирующие коэффициенты единицами, а все коэффициенты над ними обнулить. Обратный ход осуществляется снизу вверх. Разберем типичный обратный ход алгоритма Гаусса. Подчеркнутые элементы считаются не равными нулю.

$$\begin{pmatrix} \underline{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & | & b_1 \\ 0 & \underline{a_{22}} & a_{23} & a_{24} & | & b_2 \\ 0 & 0 & \underline{a_{33}} & a_{34} & | & b_3 \end{pmatrix} \quad \text{разделить } i\text{-ю строку на } a_{ii}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & | & b_1 \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & | & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & | & b_3 \end{pmatrix} \quad \text{2-я строка} - a_{23} \cdot \text{3-я строка}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & | & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_{24} & | & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & | & b_3 \end{pmatrix} \quad \text{1-я строка} - a_{13} \cdot \text{3-я строка}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 & a_{14} & | & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_{24} & | & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & | & b_3 \end{pmatrix} \quad \text{1-я строка} - a_{12} \cdot \text{2-я строка}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{14} & | & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_{24} & | & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & | & b_3 \end{pmatrix}$$

В специальных случаях приведенных выше, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} & 0 & | & b_1 \\ 0 & 1 & a_{23} & 0 & | & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & b_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 & 0 & | & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & b_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} & a_{14} & | & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} & a_{14} & | & b_1 \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & | & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Полученный в результате обратного хода вид расширенной матрицы называется улучшенным ступенчатым видом, т.е. это ступенчатый вид, где все лидирующие коэффициенты – единицы, и все коэффициенты над ними равны нулю.

1.5 Описание множества решений

Удобный формализм Пока мы подробно не говорили о матрицах, введем некие удобные обозначения, которые упростят запись решений СЛУ.

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ и } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n. \text{ Тогда } a + b = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ и } \lambda a = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ для любого } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Получение решений В системе ниже, выберем переменную x_4 как параметр

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{14} & | & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_{24} & | & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & | & b_3 \end{pmatrix}$$

Тогда решения имеют вид⁶

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - x_4 \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix}$$

⁶Операция умножения матрицы на число покомпонентная (умножаем каждый элемент на число). Сумма и разность двух матриц покомпонентная (складываем или вычитаем числа на одних и тех же позициях).

Специальные случаи:

$$\begin{array}{l}
 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & a_{13} & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & a_{23} & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_3 \end{array} \right) \text{ Решения: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12} & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_3 \end{array} \right) \text{ Решения: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & a_{13} & a_{14} & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ Решения: Нет решений, т.к. последнее уравнение } 0 = 1 \\
 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ Решения: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} - x_4 \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{pmatrix}
 \end{array}$$

1.6 Наблюдения из алгоритма

Количество решений в ступенчатом виде Если во время прямого хода алгоритма Гаусса в расширенной матрице системы вам встретилась строка вида $(0 \dots 0 \mid b)$, где b – произвольное ненулевое число, то данная система решений не имеет. В этом случае нет необходимости переходить к обратному ходу. Если же таких строк не встретилось, то система обязательно имеет решения. При этом, если есть свободные переменные, то решений бесконечное число, а если их нет, то решение единственное.

Широкие системы Пусть вам дана однородная система из m уравнений с n неизвестными и $m < n$, тогда утверждается, что она обязательно имеет хотя бы одно ненулевое решение, то есть такое решение, где хотя бы одна переменная отличная от нуля. Действительно, так как у однородной системы всегда есть решение, то нам достаточно доказать, что у системы в улучшенном ступенчатом виде есть свободные переменные. Если это так, то придавая свободным переменным ненулевые значения, мы получим ненулевое решение. Чтобы понять, что есть свободные переменные, давайте оценим сверху количество главных. Главных переменных не больше чем строк, а строк строго меньше, чем всех переменных, вот и все.

Технические рекомендации Работая с целочисленными матрицами, старайтесь во время прямого хода алгоритма Гаусса не выходить за рамки целых чисел.

- Используйте элементарные преобразования I типа только с целым параметром.
- Полезно не злоупотреблять умножением на ненулевое целое, умножайте только на ± 1 . Иначе придется работать с большими числами.

На этапе обратного хода алгоритма Гаусса избавиться от деления уже не возможно.

2 Матрицы

2.1 Определение матриц

Матрица – это прямоугольная таблица чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ где } a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Множество всех матриц с m строками и n столбцами обозначается $M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Множество квадратных матриц размера n будем обозначать $M_n(\mathbb{R})$. Матрицы с одним столбцом или одной строкой называются векторами (вектор-столбцами и вектор-строками соответственно). Множество всех векторов с n координатами обозначается через \mathbb{R}^n . Мы по умолчанию считаем, что наши вектора – вектор-столбцы.⁷

2.2 Операции над матрицами

Сложение Пусть $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Тогда сумма $A + B$ определяется покомпонентно, т.е. $C = A + B$, то $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ или

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Складывать можно только матрицы одинакового размера.⁸

Умножение на скаляр Если $\lambda \in \mathbb{R}$ и $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, то λA определяется так: $\lambda A = C$, где $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ или

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Умножение матриц Пусть $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ и $B \in M_{n \times k}(\mathbb{R})$, то произведение $AB \in M_{m \times k}(\mathbb{R})$ определяется так: $AB = C$, где $c_{ij} = \sum_{t=1}^n a_{it}b_{tj}$ или

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n a_{1t}b_{t1} & \dots & \sum_{t=1}^n a_{1t}b_{tk} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{t=1}^n a_{mt}b_{t1} & \dots & \sum_{t=1}^n a_{mt}b_{tk} \end{pmatrix}$$

Умножение матриц полезно как-то визуализировать у себя в голове. Предположим мы хотим посчитать коэффициент c_{ij} . Тогда надо из матрицы A взять i -ю строку (она имеет длину n), а из матрицы B взять j -ый столбец (он тоже имеет длину n). Тогда их надо скалярно перемножить и результат подставить в c_{ij} , как показано ниже на картинке.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad \dots \quad a_{in}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & \boxed{b_{1j}} & \dots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & \boxed{b_{nj}} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & \dots & & \dots & * \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \boxed{\sum_{t=1}^n a_{it}b_{tj}} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & & \dots & * \end{pmatrix}$$

⁷Важно, DirectX и OpenGL используют вектор-строки! Потому часть инженерной литературы на английском, связанной с трехмерной графикой, оперирует со строками. Это важно учитывать, так как нужно вносить поправки в соответствующие формулы.

⁸Можно по аналогии определить и вычитание матриц, но в этом нет необходимости. Например, потому что вычитание можно определить как $A + (-1)B$, где $(-1)B$ – умножение на скаляр. Либо можно определить аксиоматически, как это сделано ниже в следующем разделе.

При этом умножение строки на столбец можно себе представлять так: мы приставляем строку к столбцу, потом поэлементно перемножаем их, а затем складываем все произведения вместе.

$$\begin{array}{c}
 \boxed{a_{i1} \quad \dots \quad a_{in}} \cdot \boxed{\begin{array}{c} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{array}} \mapsto \begin{array}{c} \boxed{a_{i1} \quad \dots \quad a_{in}} \\ \boxed{b_{1j} \quad \dots \quad b_{nj}} \end{array} \mapsto \\
 \mapsto \boxed{\begin{array}{c} a_{i1} \\ \cdot \\ b_{1j} \end{array}} + \dots + \boxed{\begin{array}{c} a_{in} \\ \cdot \\ b_{nj} \end{array}} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj}
 \end{array}$$

Транспонирование Пусть A – матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Определим транспонированную матрицу $A^t = (a'_{ij})$ так: $a'_{ij} = a_{ji}$. Наглядно, транспонированная матрица для приведенных выше

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad (x_1 \quad x_2 \quad x_3)$$

След матрицы Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$, тогда определим след матрицы A , как сумму ее диагональных элементов: $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Давайте отметим следующие свойства следа:

1. Для любых матриц $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ верно $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$.
2. Для любой матрицы $A \in M_n(\mathbb{R})$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено $\text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr}(A)$.
3. Для любых матриц $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ и $B \in M_{nm}(\mathbb{R})$ выполнено $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Все эти свойства проверяются непосредственным вычислением по определению.

2.3 Специальные виды матриц

Ниже мы перечислим названия некоторых специальных классов матриц:

- $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ – диагональная матрица. Все ненулевые элементы стоят на главной диагонали, то есть в позиции, где номер строки равен номеру столбца.
- $A = \begin{pmatrix} \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$ – скалярная матрица. Диагональная матрица с одинаковыми элементами на диагонали.

2.4 Свойства операций

Все операции на матрицах обладают «естественными свойствами» и согласованы друг с другом. Вот перечень базовых свойств операций над матрицами:⁹

⁹Все эти свойства объединяет то, что они являются аксиомами в различных определениях для алгебраических структур. Позже мы столкнемся с такими структурами.

1. **Ассоциативность сложения** $(A + B) + C = A + (B + C)$ для любых $A, B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$
2. **Существование нейтрального элемента для сложения** Существует единственная матрица 0 обладающая следующим свойством $A + 0 = 0 + A = A$ для всех $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Такая матрица целиком заполнена нулями.
3. **Коммутативность сложения** $A + B = B + A$ для любых $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.
4. **Наличие обратного по сложению** Для любой матрицы $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ существует матрица $-A$ такая, что $A + (-A) = (-A) + A = 0$. Такая матрица единственная и состоит из элементов $-a_{ij}$.
5. **Ассоциативность умножения** Для любых матриц $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n \times k}(\mathbb{R})$ и $C \in M_{k \times t}(\mathbb{R})$ верно $(AB)C = A(BC)$.
6. **Существование нейтрального элемента для умножения** Для каждого k существует единственная матрица $E \in M_k(\mathbb{R})$ такая, что для любой $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ верно $EA = AE = A$. У такой матрицы $E_{ii} = 1$, а $E_{ij} = 0$. Когда нет путаницы, матрицу E обозначают через 1 .
7. **Дистрибутивность умножения относительно сложения** Для любых матриц $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ и $C \in M_{n \times k}(\mathbb{R})$ верно $(A + B)C = AC + BC$. Аналогично, для любых $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ и $B, C \in M_{n \times k}(\mathbb{R})$ верно $A(B + C) = AB + AC$.
8. **Умножение на числа ассоциативно** Для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и любой матрицы $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ верно $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$. Аналогично для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ и любых $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ и $B \in M_{n \times k}(\mathbb{R})$ верно $\lambda(AB) = (\lambda A)B$.
9. **Умножение на числа дистрибутивно относительно сложения матриц и сложения чисел** Для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ верно $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$. Аналогично, для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ и $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ верно $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
10. **Умножение на скаляр нетривиально** Если $1 \in \mathbb{R}$, то для любой матрицы $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ верно $1A = A$.
11. **Умножение на скаляр согласовано с умножением матриц** Для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ и любых $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ и $B \in M_{n \times k}(\mathbb{R})$ верно $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
12. **Транспонирование согласовано с суммой** Для любых матриц $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ верно $(A + B)^t = A^t + B^t$.
13. **Транспонирование согласовано с умножением на скаляр** Для любой матрицы $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ и любого $\lambda \in \mathbb{R}$ верно $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.
14. **Транспонирование согласовано с умножением** Для любых матриц $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ верно $(AB)^t = B^t A^t$.

К этим свойствам надо относиться так. Доказывая что-то про матрицы, можно лезть внутрь определений операций над ними, а можно пользоваться свойствами операций. Так вот, список выше – это минимальный набор свойств операций, из которых можно вытащить базовую информацию про эти операции и при этом не лезть внутрь определений.

Нулевые строки и столбцы Пусть в матрице $A \in M_{m \times k}(\mathbb{R})$ i -я строка полностью состоит из нулей и нам дана матрица $B \in M_{k \times n}(\mathbb{R})$. Тогда в произведении AB i -я строка тоже будет нулевой. Изобразим это ниже графически

$$AB = \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

Действительно, i -я строка произведения зависит от i -ой строки левого множителя (матрицы A) и всех столбцов B . Но умножая нулевую строку A на что угодно, получим нули в i -ой строке результата. Аналогичное

утверждение верно для столбцов в матрице B , а именно. Пусть в матрице $B \in M_{k \times n}(\mathbb{R})$ i -ый столбец полностью состоит из нулей и нам дана матрица $A \in M_{m \times k}(\mathbb{R})$. Тогда в произведении AB i -ый столбец тоже будет нулевой.

$$AB = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & 0 & * \\ * & * & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & 0 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & 0 & * \\ * & * & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & 0 & * \end{pmatrix}$$

2.5 Связь с системами линейных уравнений

Пусть нам дана система линейных уравнений соответствующая матрицам

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Мы кратко записывали такую систему $Ax = b$, а ее однородную версию через $Ax = 0$. Но теперь, когда мы знаем умножение матриц, видно, что Ax – это произведение матрицы A , на вектор неизвестных x .

Главный бонус от матриц и операций над ними заключается вот в чем. У нас исходно была большая и неуклюжая система линейных уравнений, в которой участвовали очень знакомые и простые для использования числа. Теперь же мы заменили много линейных уравнений с кучей неизвестных на одно линейное матричное уравнение $Ax = b$. Однако, теперь вместо приятных в использовании чисел у нас встретились более сложные объекты – матрицы. Потому к матрицам надо относиться как к более продвинутой версии чисел.

Линейная структура Пусть у нас дана система $Ax = b$ как выше. Тогда $y \in \mathbb{R}^n$ является решением этой системы, если выполнено матричное равенство $Ay = b$. Аналогично и для однородной системы. Теперь заметим следующее:

1. Если $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ – решения системы $Ax = 0$, то $y_1 + y_2$ тоже является решением системы $Ax = 0$. Действительно, надо показать, что $A(y_1 + y_2) = 0$. Но $A(y_1 + y_2) = Ay_1 + Ay_2 = 0 + 0 = 0$.
2. Если $y \in \mathbb{R}^n$ – решение системы $Ax = 0$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, то λy – тоже решение $Ax = 0$. Действительно, $A(\lambda y) = \lambda Ay = 0$.

Теперь сравним решения систем $Ax = b$ и $Ax = 0$. Прежде всего заметим, что однородная система всегда имеет решение $x = 0$. И вообще говоря, может так оказаться, что $Ax = b$ не имеет решений. Например, $(A|b) = (0|1)$. Однако, если $Ax = b$ совместна, то обе системы имеют «одинаковое число» решений.

Утверждение. Пусть система $Ax = b$ имеет хотя бы одно решение $z \in \mathbb{R}^n$ и пусть $E_b \subseteq \mathbb{R}^n$ – множество решений $Ax = b$ и $E_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ – множество решений $Ax = 0$. Тогда $E_b = z + E_0 = \{z + y \mid y \in E_0\}$.

Доказательство. Для доказательства $z + E_0 \subseteq E_b$ надо заметить, что если $y \in E_0$, то $z + y \in E_b$. Для обратного включения проверяется, что если $z' \in E_b$, то $z' - z \in E_0$. \square

2.6 Дефекты матричных операций

Матрицы как новые числа Рассмотрим множество квадратных матриц с введенными выше операциями: $(M_n(\mathbb{R}), +, -, \cdot, {}^t)$. Про это множество стоит думать как про новый вид чисел со своими операциями. Принципиальное отличие – нельзя делить на любую ненулевую матрицу, как это можно было делать с числами. Однако, это не единственное отличие.

Аномалии матричных операций Матричные операции обладают несколькими аномалиями по сравнению со свойствами операций над обычными числами.

1. Существование вычитания следует из «хорошести» операции сложения. Она позволяет определить вычитание без проблем. Однако, операция умножения уже хуже, чем на обычных числах, потому не получится просто так определить на матрицах операцию деления. Про деление и как его можно было бы обобщать мы поговорим ниже.

2. Давайте обсудим порядок матриц в произведении. Тут может быть несколько проблем. Может так оказаться, что матрицы можно перемножить в одном порядке, но нельзя в другом. Например, $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ и при этом $m \neq k$. В этом случае $AB \in M_{m,k}(\mathbb{R})$, однако, произведение BA просто не определено из-за отсутствия условия согласованности матриц. Если мы рассмотрим матрицы, которые можно перемножить в обоих порядках, то есть $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, то результаты будут $AB \in M_m(\mathbb{R})$ и $BA \in M_n(\mathbb{R})$. А значит при разных m и n это будут матрицы разного размера и не могут быть одинаковыми. Таким образом, чтобы AB могло совпасть с BA нам надо, чтобы матрицы A и B были квадратными. Но даже в этом случае умножение матриц НЕ коммутативно. Действительно, вот простой пример в малой размерности

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{но} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. В матрицах есть «делители нуля», т.е. существуют две ненулевые матрицы A и B такие, что $AB = 0$.¹⁰
Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

4. В матрицах есть «нильпотенты», то есть можно найти такую ненулевую матрицу A , что $A^n = 0$. Пример,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Замечание Пример с делителями нуля выше является частным случаем некоторого более общего явления. Если есть две диагональные матрицы, то они складываются и умножаются покомпонентно, то есть

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n + \mu_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \mu_n \end{pmatrix}$$

Чтобы получить правильную интуицию про такие матрицы, про них надо думать как про функции на конечном множестве. То есть матрица с диагональю из чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ это функция $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $f(k) = \lambda_k$. Тогда операции сложения и умножения функций превращаются в операции сложения и умножения диагональных матриц. И пример с делителями нуля выше, это пример двух индикаторов непересекающихся множеств. То есть если мы рассмотрим множество $\{1, 2\}$ и две функции

$$\chi_1(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x = 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \chi_2(x) = \begin{cases} 0, & x = 1 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

При этом для индикаторов подмножеств $A, B \subseteq X$ имеем $\chi_A \cdot \chi_B = \chi_{A \cap B}$. И так как χ_1 – индикатор $\{1\}$, а χ_2 – индикатор $\{2\}$, то $\chi_1 \cdot \chi_2 = 0$. Потому если вы можете пронаблюдать какой-то эффект на функциях, то скорее всего мы можете пронаблюдать его уже на диагональных матрицах. Это полезно иметь в виду.

2.7 Деление

Деление и некоммутативность Теперь мы хотим научиться делить матрицы друг на друга. Прежде чем это делать, обратим внимание, что умножение в матрицах у нас не коммутативно. Это значит умножать можно на матрицу слева или справа. А значит и делить надо уметь и слева и справа, то есть вместо одной операции деления, надо иметь целых две операции деления. Кроме того, надо будет установить, как эти операции связаны друг с другом, например, разделить сначала справа, а потом слева или наоборот сначала слева, а потом справа дают один и тот же результат или нет? Возникает куча сложностей работы с двумя операциями деления. Таким путем пойти можно, и есть тексты, которые делают именно так, но это не очень удобно. Вместо этого предлагается пойти другим путем, но для этого надо переосмыслить понятие деления.

¹⁰На самом деле, это очень «хорошая» аномалия, так как она связана с тем, что ОСЛУ имеют решения. Действительно, вопрос решения ОСЛУ $Ax = 0$ – это в точности вопрос существования правых делителей нуля для A в множестве \mathbb{R}^n .

Что значит деление в числах? Предположим, что у нас есть два числа $a, b \in \mathbb{R}$. Тогда деление $a/b = a \cdot b^{-1}$ – это просто умножение на обратный элемент, а обратный элемент b^{-1} определяется свойством $bb^{-1} = 1$. Данное наблюдение дает ключ к распространению деления и обращения на случай матриц. А именно, вместо деления, мы будем рассматривать обратные матрицы и умножение на них. И вот сразу преимущество такого подхода. Нам не надо вводить два вида деления: левое и правое. Вместо этого, намного проще изучать обратные матрицы и умножать на них слева и справа с помощью обычного умножения.

Односторонняя обратимость Пусть $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, будем говорить, что $B \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ является левым обратным к A , если $BA = E \in M_n(\mathbb{R})$. Аналогично, $B \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ – правый обратный к A , если $AB = E \in M_m(\mathbb{R})$. Надо иметь в виду, что вообще говоря левые и правые обратные между собой никак не связаны и их может быть много. Например, пусть $A = (1, 0) \in M_{1 \times 2}(\mathbb{R})$. Тогда у такой матрицы нет левого обратного, а любая матрица вида $(1, a)^t$ является правым обратным. Если для матрицы A существует левый обратный, то она называется обратимой слева. Аналогично, при существовании правого обратного – обратимой справа.

Обратимые матрицы Матрица $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ называется обратимой, если к ней существует левый и правый обратный.¹¹

Утверждение 1. Пусть матрица $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ обратима. Тогда

1. Левый обратный и правый обратный единственны и совпадают друг с другом.
2. Матрица A обязательно квадратная, то есть $m = n$.

Доказательство. (1) Пусть $L \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ – произвольный левый обратный к A , а $R \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ – произвольный правый обратный. Тогда рассмотрим выражение LAR , расставляя по разному скобки имеем:

$$R = ER = (LA)R = L(AR) = LE = L$$

Теперь, если L и L' – два разных левых обратных. Зафиксируем произвольный правый обратный R . Из выше сказанного следует, что $L = R$ и $L' = R$. Значит все левые обратные равны между собой. Аналогично для правых.

(2) Теперь покажем, что двусторонний обратный есть только у квадратных матриц. Пусть $B \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ – двусторонний обратный к A , то есть $AB = E_m \in M_m(\mathbb{R})$ и $BA = E_n \in M_n(\mathbb{R})$.¹² Тогда по свойствам следа получим

$$m = \text{tr}(E_m) = \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) = \text{tr}(E_n) = n$$

□

Значит, если матрица A обратима, то она как минимум квадратная и существует единственная матрица B , удовлетворяющая свойствам $AB = BA = E$. Такую матрицу B обозначают A^{-1} и называют обратной к матрице A .

Утверждение 2. Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ – обратимые матрицы. Тогда

1. AB тоже обратима и при этом $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. A^t также будет обратима и $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ и обозначается A^{-t} .

Доказательство. 1) Действительно, надо проверить, что для AB существует двусторонняя обратная. Заметим, что $B^{-1}A^{-1}$ является таковой:

$$ABB^{-1}A^{-1} = E \quad \text{и} \quad B^{-1}A^{-1}AB = E$$

В частности, последнее означает, что $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2) Пусть матрица A обратима, тогда

$$AA^{-1} = E \quad \text{и} \quad A^{-1}A = E$$

Транспонируем оба равенства, получим

$$(A^{-1})^t A^t = E \quad \text{и} \quad A^t (A^{-1})^t = E$$

Это означает, что A^t обратима и при этом $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

□

¹¹Ниже мы покажем, что из двусторонней обратимости следует, что матрица A обязана быть квадратной.

¹²Тут E_n означает единичную матрицу размера n .

Обратимые преобразования над СЛУ Пусть у нас есть $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ и $b \in \mathbb{R}^m$, которые задают систему линейных уравнений $Ax = b$, где $x \in \mathbb{R}^n$. Возьмем произвольную обратимую матрицу $C \in M_m(\mathbb{R})$. Тогда система $Ax = b$ эквивалентна системе $CAx = Cb$. Действительно, если для некоторого $y \in \mathbb{R}^n$ имеем $Ay = b$, то, умножая обе части на C слева, получим $CAy = Cb$, значит y решение второй системы. Наоборот, пусть $CAy = Cb$, тогда, умножая обе части на C^{-1} слева, получим $Ay = b$, значит y решение первой системы.

Сказанное выше значит, что мы можем менять СЛУ на эквивалентные с помощью умножения слева на любую обратимую матрицу. Мы уже знаем, что есть другая процедура преобразования СЛУ с таким же свойством – применение элементарных преобразований. Возникает резонный вопрос: какая процедура лучше? Оказывается, что между ними нет разницы в том смысле, что умножение на обратимую матрицу всегда совпадает с некоторой последовательностью элементарных преобразований и наоборот любое элементарное преобразование можно выразить с помощью умножения на обратимую матрицу. Этому свойству и будет посвящен остаток лекции.

2.8 Матрицы элементарных преобразований

Тип I Пусть $S_{ij}(\lambda) \in M_n(\mathbb{R})$ – матрица, полученная из единичной вписыванием в ячейку $i \ j$ числа λ (при этом $i \neq j$, то есть ячейка берется не на диагонали). Эта матрица имеет следующий вид:

$$i \quad \begin{matrix} & & j & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \lambda & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Тогда прямая проверка показывает, умножение $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ на $S_{ij}(\lambda)$ слева прибавляет j строку умноженную на λ к i строке матрицы A , а умножение $B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ на $S_{ij}(\lambda)$ справа прибавляет i столбец умноженный на λ к j столбцу матрицы B . Заметим, что $S_{ij}(\lambda)^{-1} = S_{ij}(-\lambda)$.

Тип II Пусть $T_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ – матрица, полученная из единичной перестановкой i и j ($i \neq j$) столбцов (или что то же самое – строк). Эта матрица имеет следующий вид

$$\begin{matrix} & i & & j & \\ i & \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & 1 \\ & & \ddots & \\ & 1 & & 0 \end{pmatrix} & \\ j & & & & 1 \end{matrix}$$

Тогда прямая проверка показывает, умножение $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ на T_{ij} слева переставляет i и j строки матрицы A , а умножение $B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ на T_{ij} справа переставляет i и j столбцы матрицы B . Заметим, что $T_{ij}^{-1} = T_{ij}$.

Тип III Пусть $D_i(\lambda) \in M_n(\mathbb{R})$ – матрица, полученная из единичной умножением i строки на $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$ (или что то же самое – столбца). Эта матрица имеет следующий вид

$$i \quad \begin{matrix} & & i & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Тогда прямая проверка показывает, умножение $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ на $D_i(\lambda)$ слева умножает i строку A на λ , а умножение $B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ на $D_i(\lambda)$ справа умножает i столбец матрицы B на λ . Заметим, что $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$.

2.9 Невырожденные матрицы

Начнем с полезного утверждения.

Утверждение 3. Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$ – произвольная квадратная матрица. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. Система $Ax = 0$ имеет только нулевое решение.
2. Система $A^t y = 0$ имеет только нулевое решение.
3. Матрица A представляется в виде $A = U_1 \cdot \dots \cdot U_k$, где U_i – матрицы элементарных преобразований.
4. Матрица A обратима.
5. Матрица A обратима слева, т.е. существует L такая, что $LA = E$.
6. Матрица A обратима справа, т.е. существует R такая, что $AR = E$.

Доказательство Утверждения 3. (1) \Rightarrow (3). Приведем A к улучшенному ступенчатому виду с помощью Гаусса. Так как $Ax = 0$ имеет только нулевое решение, то ступенчатый вид – это единичная матрица E . Пусть S_1, \dots, S_k – матрицы элементарных преобразований, которые мы совершили во время Гаусса. Это значит, что мы произвели следующие манипуляции

$$A \mapsto S_1 A \mapsto S_2 S_1 A \mapsto \dots \mapsto (S_k \dots S_1 A) = E$$

То есть $A = S_1^{-1} \dots S_k^{-1}$. Заметим, что S_i^{-1} – это матрица обратного элементарного преобразования к S_i . Обозначим $U_i = S_i^{-1}$ и получим требуемое.

(2) \Rightarrow (3). Проведем предыдущее рассуждение для матрицы A^t вместо A . Получим, что $A^t = U_1 \dots U_k$. Тогда $A = U_k^t \dots U_1^t$. Теперь осталось заметить, что U_i^t тоже является матрицей элементарного преобразования.

(3) \Rightarrow (4). Мы имеем $A = U_1 \dots U_k$, причем каждая из U_i обратима. Так как произведение обратимых обратимо, то A также обратима.

(4) \Rightarrow (5) и (4) \Rightarrow (6) очевидно, так это переход от более сильного условия к более слабому.

(5) \Rightarrow (1). Пусть A обратима слева и нам надо решить систему $Ax = 0$. Умножим ее слева на левый обратный к A , получим $x = 0$, что и требовалось.

(6) \Rightarrow (2). Пусть A обратима справа и нам надо решить систему $A^t y = 0$. Умножим эту систему слева на R^t , где R – правый обратный к A . Тогда $R^t A^t x = 0$. Но $R^t A^t x = (AR)^t x = Ex = x = 0$, что и требовалось. \square

В силу этого утверждения, мы не будем различать невырожденные и обратимые матрицы между собой.

Определение 4. Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$ – произвольная квадратная матрица. Будем говорить, что A невырождена¹³, если удовлетворяет любому из перечисленных в предыдущем утверждении условий.

¹³Классически невырожденные матрицы определяются совсем по-другому, однако, все эти определения между собой эквивалентны. Будьте готовы к тому, что в литературе вы увидите совсем другое определение.