Projeto e Análise de Algoritmos

Caminhos Mínimos Utilizando Algoritmos de Dijkstra, Bellman-Ford, Floyd-Warshall, com detecção de Ciclos de Custo Negativo

---

Conrado C. Bicalho, Danilo S. Souza, Rodolfo L. M. Guimarães, Thiago Schons

18 de maio de 2016

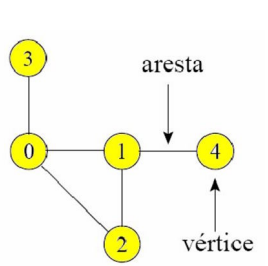
{*conradobh, danilo.gdc, rodolfolabiapari, thiagoschons2*}*@gmail.com*
Departamento de Computação – Universidade Federal de Ouro Preto
35.400-000 – Ouro Preto - MG – Brasil

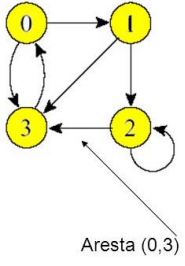
Introdução

UFOP

Teoria dos Grafos

- Estrutura $G = (V, E)$ onde [2]:
  - V é um conjunto discreto e não vazio de vértices;
  - E é uma família de elementos não vazios definidos em função dos elementos em V. Cada aresta tem um ou dois nós associados a ela e faz o papel de interligar suas extremidades.
- No grafo orientado cada aresta orientada está associada a um par ordenado de nós (u, v).





- Tais arcos também podem ser ponderados sendo sua função peso $w(u, v) : E \rightarrow \mathbb{R}$ [2].

Definição do Problema

UFOP

Definição do Problema de Caminhos Mínimos de Única Origem [1]

- Grafo $G = (V, E)$ sem laços e valorado por uma função peso $w : E \to \mathbb{R}$, sendo o peso $p = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ onde o somatório dos pesos de suas arestas

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$$

- Assim, o peso do caminho mais curto de u até v é

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \min\{w(p) : u \xrightarrow{p} v\} & \text{se existe um caminho de } u \text{ até } v, \\ \infty & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

- Propriedade de que:
  - Um caminho mais curto entre dois vértices pode conter outros caminhos mais curtos em seu interior.

Caminhos mais Curtos de Todos para Todos

- Deseja-se encontrar o caminho mais curto entre todos os pares de vértices $u, v \in V$.
- Este problema também pode ser resolvido utilizando um algoritmo de caminho mínimo um para todos $|V|$ vezes, uma para cada vértice de origem:
  - Mas existem algoritmos específicos para a resolução deste.
- Sua estrutura de dados é lidada como uma matriz de adjacência:
  - É exibido os valores de todos para todos de acordo com sua linha e colina.

UFOP

Caminhos mais Curtos de Todos para Todos

- Supondo que existem $|V|$ vértices e enumerados de forma crescente e contínua, uma matriz de entrada seria W $n \times n$ representando os peso das arestas do grafo orientado de n vértices. Isto é, $W = (w_{ij})$ onde

$$w_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j, \\ \text{o peso da aresta orientada } (i,j) & \text{se } i \neq j \text{ e } (i,j) \in E, \\ \infty & \text{se } i \neq j \text{ e } (i,j) \notin E. \end{cases}$$

$$\forall \delta(u,v) = \begin{cases} \min\{w(p) : u \xrightarrow{p} v\} & \text{se existe um caminho de } u \text{ até } v, \\ \infty & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

Prova

Subestrutura Ótima de um Caminho Mais Curto [1]

- **Lema:**
  - Dado um grafo orientado ponderado $G = (V, E)$ com função peso $w : E \to \mathbb{R}$, seja $p = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ um caminho mais curto.
  - Para quaisquer i e j tais que $1 \leq i \leq j \leq k$, seja $p_{ij} = \langle v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j \rangle$ o subcaminho.
  - Então, p_{ij} é um caminho mais curto de v_i e v_j.

Subestrutura Ótima de um Caminho Mais Curto [1]

- **Lema:**
  - Dado um grafo orientado ponderado $G = (V, E)$ com função peso $w : E \to \mathbb{R}$, seja $p = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ um caminho mais curto.
  - Para quaisquer i e j tais que $1 \leq i \leq j \leq k$, seja $p_{ij} = \langle v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j \rangle$ o subcaminho.
  - Então, p_{ij} é um caminho mais curto de v_i e v_j.

- **Prova:**
  - Quando decompõe o caminho p em $v_1 \xrightarrow{p_{1i}} v_i \xrightarrow{p_{ij}} v_j \xrightarrow{p_{jk}} v_k$, teremos $w(p) = w(p_{1i}) + w(p_{ij}) + w(p_{jk})$.
  - Supondo que existisse um caminho p'_{ij} de v_i até v_j com peso $w(p'_{ij}) < w(p_{ij})$.
  - Então, $v_1 \xrightarrow{p_{1i}} v_i \xrightarrow{p'_{ij}} v_j \xrightarrow{p_{jk}} v_k$ é um caminho de v_1 até v_k cujo peso $w(p) = w(p_{1i}) + w(p'_{ij}) + w(p_{jk})$ é menor que $w(p)$, o que **contradiz a hipótese de que p é um caminho mais curto de v_1 até v_k.**

Itens Importantes

Arestas de Peso Negativo

- Em algumas instâncias do problema, pode haver arestas cujo pesos são negativos.

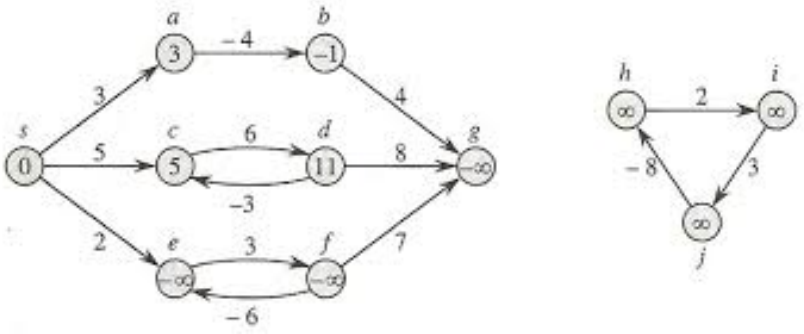
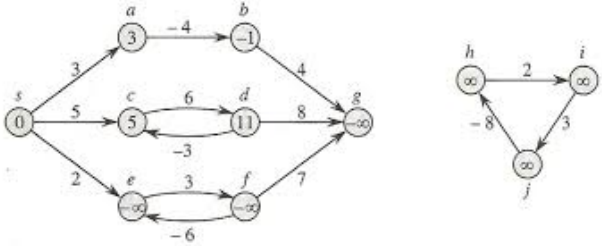


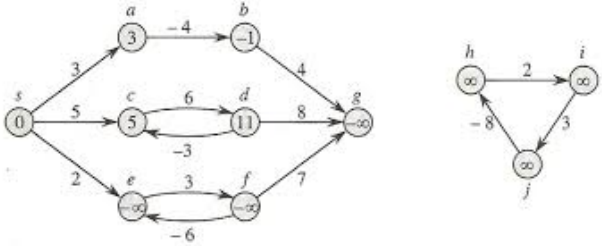
Figura 1: Exemplo simples de um grafo com arestas de peso negativo. Fonte: [1].

Arestas de Peso Negativo



- Um grafo $G = (V, E)$ que não contenha nenhum ciclo de peso negativo acessível a partir da origem s:
  - $\forall v \in V$, o peso do caminho mais curto $\delta(s, v)$ permanece **bem definido**, mesmo tendo um valor negativo.

Arestas de Peso Negativo



- Um grafo $G = (V, E)$ que não contenha nenhum ciclo de peso negativo acessível a partir da origem s:
  - $\forall v \in V$, o peso do caminho mais curto $\delta(s, v)$ permanece **bem definido**, mesmo tendo um valor negativo.
  - Mas, caso exista um ciclo de peso negativo acessível, os pesos dos caminhos **não serão bem definidos**:
    - Existindo o ciclo negativo no caminho de s até v, então $\delta(s, v) = -\infty$ [1].

Algoritmos

UFOP

Ambiente de Hardware e Software Utilizado

Tabela 1: Tabela com as informações de ambiente de execução do trabalho realizado.

Item	Descrição
Processador	1 Processador Intel Core i7 - 2,9 GHz
Núcleos	4 Núcleos
Cache L2 (por Núcleo)	256 KB
Cache L3	4 MB
Memória RAM	10 GB DDR3
Arquitetura	Arquitetura de von Neumann
Sistema Operacional	OS X 10.11.4 (15E65)
Versão do Kernel	Darwin 15.4.0
Compilador	Apple LLVM version 7.3.0 (clang-703.0.31)

UFOP

Algoritmo Bellman-Ford

Algorithm 1 Bellman-Ford

```
1:  procedure BELLMAN-FORD(G, w, s)
2:      INICIALIZA-UNICA-FONTE(G, s);
3:      for i ← 1, |V[G]| − 1 do
4:          for cada aresta (u, v) ∈ E[G] do
5:              RELAXA(u, v, w);
6:          end for
7:      end for
8:      for cada aresta (u, v) ∈ E[G] do
9:          if d[v] > d[u] + w(u, v) then
10:             return FALSE;
11:         end if
12:     end for
13:     return TRUE;
14: end procedure
```

Algorithm 2 Bellman-Ford

```
1:  procedure BELLMAN-FORD(G, w, s)
2:      INICIALIZA-UNICA-FONTE(G, s);
3:      for i ← 1, |V[G]| − 1 do                                  ▷ O(V)
4:          for cada aresta (u, v) ∈ E[G] do
5:              RELAXA(u, v, w);
6:          end for
7:      end for
8:      for cada aresta (u, v) ∈ E[G] do
9:          if d[v] > d[u] + w(u, v) then
10:             return FALSE;
11:         end if
12:     end for
13:     return TRUE;
14: end procedure
```

Algoritmo Bellman-Ford

Algorithm 3 Bellman-Ford

```
1:  procedure BELLMAN-FORD(G, w, s)
2:      INICIALIZA-UNICA-FONTE(G, s);
3:      for i ← 1, |V[G]| − 1 do                          ▷ O(V)
4:          for cada aresta (u, v) ∈ E[G] do              ▷ O(E)
5:              RELAXA(u, v, w);
6:          end for
7:      end for
8:      for cada aresta (u, v) ∈ E[G] do
9:          if d[v] > d[u] + w(u, v) then
10:             return FALSE;
11:         end if
12:     end for
13:     return TRUE;
14: end procedure
```

Algoritmo Bellman-Ford

Algorithm 4 Bellman-Ford

```
1:  procedure BELLMAN-FORD(G, w, s)
2:      INICIALIZA-UNICA-FONTE(G, s);
3:      for i ← 1, |V[G]| − 1 do                          ▷ O(V)
4:          for cada aresta (u, v) ∈ E[G] do              ▷ O(E)
5:              RELAXA(u, v, w);                          ▷ O(1)
6:          end for
7:      end for
8:      for cada aresta (u, v) ∈ E[G] do
9:          if d[v] > d[u] + w(u, v) then
10:             return FALSE;
11:         end if
12:     end for
13:     return TRUE;
14: end procedure
```

Algoritmo Bellman-Ford

Algorithm 5 Bellman-Ford

```
1:  procedure BELLMAN-FORD(G, w, s)
2:      INICIALIZA-UNICA-FONTE(G, s);
3:      for i ← 1, |V[G]| − 1 do                          ▷ O(V)
4:          for cada aresta (u, v) ∈ E[G] do              ▷ O(E)
5:              RELAXA(u, v, w);                          ▷ O(1)
6:          end for
7:      end for
8:      for cada aresta (u, v) ∈ E[G] do                  ▷ O(E)
9:          if d[v] > d[u] + w(u, v) then
10:             return FALSE;
11:         end if
12:     end for
13:     return TRUE;
14: end procedure
```

Algoritmo Bellman-Ford

Algorithm 6 Bellman-Ford

```
1:  procedure BELLMAN-FORD(G, w, s)
2:      INICIALIZA-UNICA-FONTE(G, s);
3:      for i ← 1, |V[G]| − 1 do                          ▷ O(V)
4:          for cada aresta (u, v) ∈ E[G] do              ▷ O(E)
5:              RELAXA(u, v, w);                          ▷ O(1)
6:          end for
7:      end for
8:      for cada aresta (u, v) ∈ E[G] do                  ▷ O(E)
9:          if d[v] > d[u] + w(u, v) then                 ▷ O(1)
10:             return FALSE;
11:         end if
12:     end for
13:     return TRUE;
14: end procedure
```

Algoritmo de Dijkstra

Algoritmo de Dijkstra

Algorithm 7 Dijkstra

```
1:  procedure DIJKSTRA(G, w, s)
2:      INICIALIZA-UNICA-FONTE(G, s);
3:      S ← ∅;
4:      Q ← V[G];
5:      while Q ≠ ∅ do
6:          u ← RETIRA-MINIMO(Q);
7:          S ← S ∪ {u};
8:          for cada vértice vizinho v ∈ Adj[u] do
9:              RELAXA(u, v, w);
10:         end for
11:     end while
12: end procedure
```

Algoritmo de Dijkstra

Algorithm 8 Dijkstra

```
1:  procedure DIJKSTRA(G, w, s)
2:      INICIALIZA-UNICA-FONTE(G, s);                    ▷ O(E)
3:      S ← ∅;
4:      Q ← V[G];
5:      while Q ≠ ∅ do
6:          u ← RETIRA-MINIMO(Q);
7:          S ← S ∪ {u};
8:          for cada vértice vizinho v ∈ Adj[u] do
9:              RELAXA(u, v, w);
10:         end for
11:     end while
12: end procedure
```

Algoritmo de Dijkstra

Algorithm 9 Dijkstra

```
1:  procedure DIJKSTRA(G, w, s)
2:      INICIALIZA-UNICA-FONTE(G, s);                    ▷ O(E)
3:      S ← ∅;
4:      Q ← V[G];
5:      while Q ≠ ∅ do                                   ▷ O(V)
6:          u ← RETIRA-MINIMO(Q);
7:          S ← S ∪ {u};
8:          for cada vértice vizinho v ∈ Adj[u] do
9:              RELAXA(u, v, w);
10:         end for
11:     end while
12: end procedure
```

Algoritmo de Dijkstra

Algorithm 10 Dijkstra

```
1:  procedure DIJKSTRA(G, w, s)
2:      INICIALIZA-UNICA-FONTE(G, s);                    ▷ O(E)
3:      S ← ∅;
4:      Q ← V[G];
5:      while Q ≠ ∅ do                                   ▷ O(V)
6:          u ← RETIRA-MINIMO(Q);                        ▷ O(1)
7:          S ← S ∪ {u};
8:          for cada vértice vizinho v ∈ Adj[u] do
9:              RELAXA(u, v, w);
10:         end for
11:     end while
12: end procedure
```

Algoritmo de Dijkstra

Algorithm 11 Dijkstra

```
1:  procedure DIJKSTRA(G, w, s)
2:      INICIALIZA-UNICA-FONTE(G, s);                          ▷ O(E)
3:      S ← ∅;
4:      Q ← V[G];
5:      while Q ≠ ∅ do                                         ▷ O(V)
6:          u ← RETIRA-MINIMO(Q);                              ▷ O(1)
7:          S ← S ∪ {u};
8:          for cada vértice vizinho v ∈ Adj[u] do             ▷ O(log V)
9:              RELAXA(u, v, w);
10:         end for
11:     end while
12: end procedure
```

Algoritmo de Dijkstra

Algorithm 12 Dijkstra

1: **procedure** DIJKSTRA(G, w, s)
2: INICIALIZA-UNICA-FONTE(G, s); ▷ $\mathcal{O}(E)$
3: $S \leftarrow \emptyset$;
4: $Q \leftarrow V[G]$;
5: **while** $Q \neq \emptyset$ **do** ▷ $\mathcal{O}(V)$
6: $u \leftarrow$ RETIRA-MINIMO(Q); ▷ $\mathcal{O}(1)$
7: $S \leftarrow S \cup \{u\}$;
8: **for** cada vértice vizinho $v \in Adj[u]$ **do** ▷ $\mathcal{O}(\log V)$
9: RELAXA(u, v, w); ▷ $\mathcal{O}(1)$
10: **end for**
11: **end while**
12: **end procedure**

Algoritmo Floyd Warshall

Algoritmo Floyd Warshall

Algorithm 13 Floyd-Warshall

```
1:  procedure FLOYD-WARSHALL(W)
2:      n ← linhas[W];
3:      D ← W;
4:      for k ← 1, n do
5:          for i ← 1, n do
6:              for j ← 1, n do
7:                  d_ij^k ← min(d_ij^{k-1}, d_ik^{k-1} + d_kj^{k-1});
8:              end for
9:          end for
10:     end for
11:     return D;
12: end procedure
```

Algoritmo Floyd Warshall

Algorithm 14 Floyd-Warshall

1: **procedure** FLOYD-WARSHALL(W)
2: $n \leftarrow linhas[W]$;
3: $D \leftarrow W$;
4: **for** $k \leftarrow 1, n$ **do** ▷ $\mathcal{O}(V)$
5: **for** $i \leftarrow 1, n$ **do**
6: **for** $j \leftarrow 1, n$ **do**
7: $d_{ij}^{k} \leftarrow min(d_{ij}^{k-1}, d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1})$;
8: **end for**
9: **end for**
10: **end for**
11: **return** D;
12: **end procedure**

Algoritmo Floyd Warshall

Algorithm 15 Floyd-Warshall

```
1:  procedure FLOYD-WARSHALL(W)
2:      n ← linhas[W];
3:      D ← W;
4:      for k ← 1, n do                                   ▷ O(V)
5:          for i ← 1, n do                               ▷ O(V)
6:              for j ← 1, n do
7:                  d_ij^k ← min(d_ij^{k-1}, d_ik^{k-1} + d_kj^{k-1});
8:              end for
9:          end for
10:     end for
11:     return D;
12: end procedure
```

Algoritmo Floyd Warshall

Algorithm 16 Floyd-Warshall

```
1:  procedure FLOYD-WARSHALL(W)
2:      n ← linhas[W];
3:      D ← W;
4:      for k ← 1, n do                                   ▷ O(V)
5:          for i ← 1, n do                               ▷ O(V)
6:              for j ← 1, n do                           ▷ O(V)
7:                  d_ij^k ← min(d_ij^{k-1}, d_ik^{k-1} + d_kj^{k-1});
8:              end for
9:          end for
10:     end for
11:     return D;
12: end procedure
```

Algoritmo Floyd Warshall

Algorithm 17 Floyd-Warshall

```
1:  procedure FLOYD-WARSHALL(W)
2:      n ← linhas[W];
3:      D ← W;
4:      for k ← 1, n do                                   ▷ O(V)
5:          for i ← 1, n do                               ▷ O(V)
6:              for j ← 1, n do                           ▷ O(V)
7:                  d_ij^k ← min(d_ij^{k-1}, d_ik^{k-1} + d_kj^{k-1});   ▷ O(1)
8:              end for
9:          end for
10:     end for
11:     return D;
12: end procedure
```

Experimentos

Experimentos

- Realizou-se teste de todos para todos.
- Utilizou-se de 4 instâncias:
  - *rome99.gr*, *rg300_4730.gr*, *rg300_768_floyd.gr*, *rg300_768_floyd-n.gr*.
- Para cada instância foi executado 20 vezes no mesmo ambiente de testes e colhido o tempo de execução.
- Todos os resultados estão disponíveis no relatório deste trabalho.

UFOP

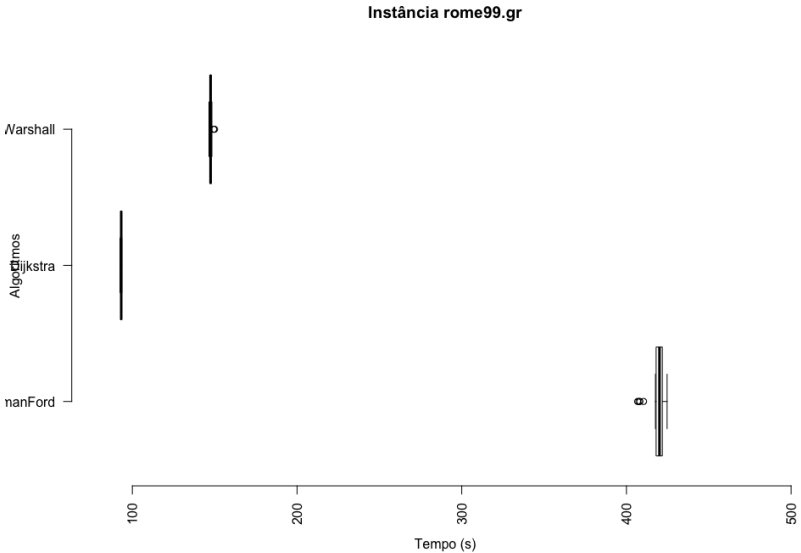
Valores de Tempos de Execução

Tabela 2: Tabela com os valores de tempo médio de cada algoritmo nas quatro instâncias com o objetivo de obter caminhos mínimos de todos para todos.

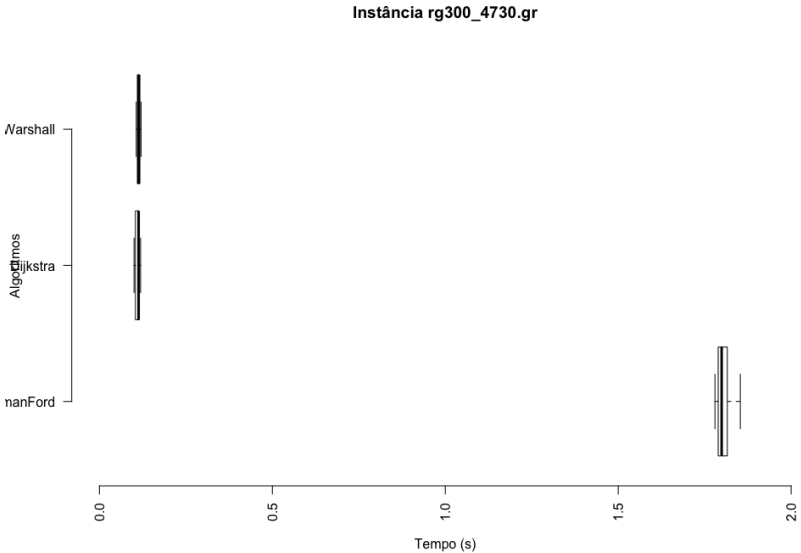
Instância	Bellman-Ford (s)	Dijkstra (s)	Ford-Warshall (s)
rome99.gr	420.0757	93.59347	149.3292
rg300_4730.gr	1.788467	0.11464	0.118966
rg300_768_floyd.gr	0.294253	0.094997	0.116002
rg300_768_floyd-n.gr	0.289948	Não se aplica.	0.098479

UFOP

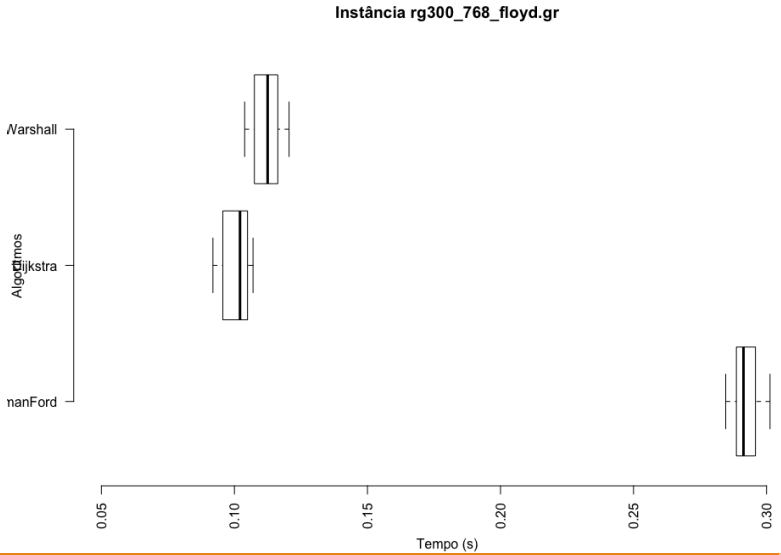
- A Figura 2 exibe um gráfico comparando os resultados de cada algoritmo sobre a instância *rome99.gr*.



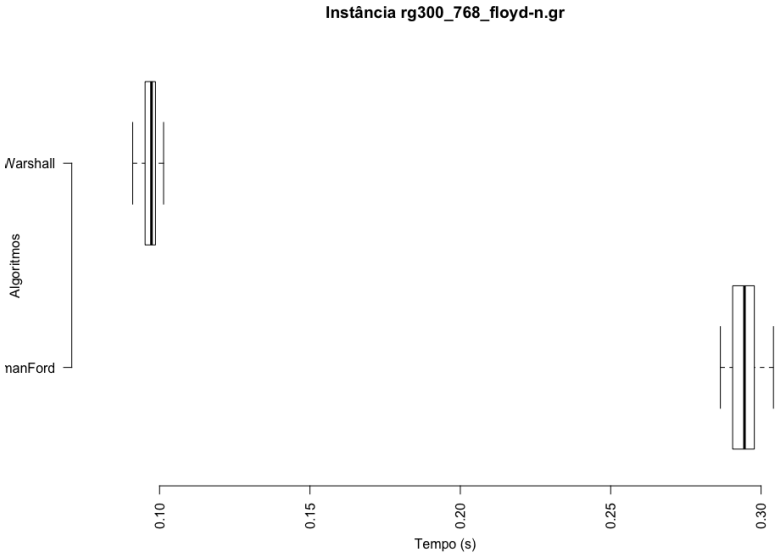
- A Figura 3 exibe um gráfico comparando os resultados de cada algoritmo sobre a instância *rg300_4730.gr*.



- A Figura 4 exibe um gráfico comparando os resultados de cada algoritmo sobre a instância *rg300_768_floyd.gr*.



- A Figura 5 exibe um gráfico comparando os resultados de cada algoritmo sobre a instância *rg300_768_floyd-n.gr*.



Conclusão

Conclusão

- O problema de caminhos mínimos também está relacionado a programação linear:
  - É possível reduzir um caso especial de programação linear ao fato de encontrar caminhos mais curtos a partir de uma única origem.
  - Tal problema pode ser resolvido com algoritmo de Bellman-Ford, sendo assim resolvendo também o problema de programação linear [1].

- Realizou-se 20 iterações de teste por ser uma média razoável para análise e também devido ao tempo computacional elevado pelo tamanho das instâncias utilizadas assim como a complexidade dos algoritmos.

Conclusão

- Em termos de implementação:
  - Todos os códigos possuem grande facilidade de implementação:
  - Principalmente o Algoritmo Floyd-Warshall.

- Sobre a análise assintótica:
  - Houve uma grande disputa entre o Bellman-Ford e Dijkstra.
  - O Algoritmo de Floyd-Warshall ficou fora dessa disputa por ser de complexidade de tempo $\mathcal{O}(n^3)$
  - E o Bellman tem complexidade $\mathcal{O}(n^2)$ e o Dijkstra $\mathcal{O}(E + V \log V)$ no pior caso.
  - O Algoritmo Dijkstra teve sucesso em todas as execuções devida sua complexidade assintótica de tempo ser menor que todos os outros $\mathcal{O}(E + V \log V) < \mathcal{O}(n^2)$.

Bibliografia

UFOP

T. H. Cormen.
Algoritmos: teoria e prática.
Elsevier, 2002.

P. O. B. Netto.
Grafos: teoria, modelos, algoritmos.
Edgard Blücher, 2003.

Projeto e Análise de Algoritmos

Caminhos Mínimos Utilizando Algoritmos de Dijkstra, Bellman-Ford, Floyd-Warshall, com detecção de Ciclos de Custo Negativo

Conrado C. Bicalho, Danilo S. Souza, Rodolfo L. M. Guimarães, Thiago Schons

18 de maio de 2016

{*conradobh, danilo.gdc, rodolfolabiapari, thiagoschons2*}*@gmail.com*
Departamento de Computação – Universidade Federal de Ouro Preto
35.400-000 – Ouro Preto - MG – Brasil

UFOP

Considerações de Projeto e Análise

- Alguns algoritmos implementados tratam o 'infinito' como: o maior peso encontradas das arestas multiplicado por ele mesmo.
- A estrutura utilizada no Algoritmo de Dijkstra foi projetada pelos integrantes dos grupos.
- Nenhum algoritmo faz teste de verificação de entradas inválidas.
- Foi executado em todos os algoritmos analisadores de código estáticos e dinâmicos. Executou-se primeiramente o Clang Static Analyzer e em seguida o Valgrind. Com exceção do Algoritmo de Bellman Ford, todos retornaram sucesso nas análises.

UFOP

Relaxamento [1]

- Técnica onde para cada vértice $v \in V$, mantém-se um atributo $d[v]$, que é o limite superior sobre o peso do caminho mais curto entre s e v.
- Funciona da seguinte maneira:
  - Inicialização. Faz a estima de distância $d(v) = \infty$.
  - Relaxamento. Relaxar uma aresta (u, v) consiste em testar alguma forma de melhorar o caminho mais curto para v encontrado até agora por outros caminhos intermediários que utilizem u.

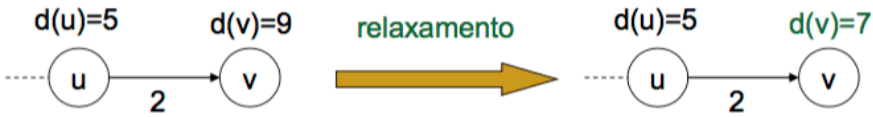


Figura 6: Exemplo de um relaxamento de uma aresta. Fonte: `http://wiki.icmc.usp.br/images/b/b4/7._1GrafosCaminhosLA(Graca).pdf`

Variações deste Problema

- Variações descritas até agora:
  - Caminho mais curto de uma única origem; e
  - De todos para todos.
- Mas além destes, é possível obter outras variantes deste problema sem perder sua essência. Seriam as outras variantes:
  - Caminho mais curto de destino único; e
  - Par único.

Aplicações

- Problemas de única origem:
  - Problemas relacionados com sequências de decisões;
  - Escolhas de itinerários ao longo de uma viagem;
  - Traçado de uma estratégia em um problema de investimentos;
  - Trata-se de decisões envolvendo alguma forma de custo a ser minimizado.

- Problema de todos para todos:
  - Elaboração de uma tabela de distância entre todos os pares de cidades de um certa região para um atlas rodoviário.

UFOP