Curso de Métodos Numéricos I

Lista 1: Data da entrega: 29-Abril-2010

Resolva as questões abaixo:

1. A seqüência $\{1/n^p\}_{n=1}^{\infty}$ converge para zero, se a seqüência $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge um número α e se existe uma constante positiva K tal que

$$|\alpha_n - \alpha| \leq K \left| \frac{1}{n^p} \right| \quad \text{para } n \text{ grande ;}$$

então dizemos que $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge para α com uma taxa de convergência $O(n^{-p})$, indicando-se da seguinte maneira: $\alpha_n = \alpha + O(n^{-p})$.

Da mesma forma, se $\lim_{h\to 0} G(h) = 0$ e $\lim_{h\to 0} F(h) = L$ e se existe uma constante positiva K tal que

$$|F(h) - L| \leq K\,|G(h)| \quad \text{para } h \text{ suficientemente pequeno ;}$$

então dizemos que: $F(h) = L + O(G(h))$. Encontre a taxa de convergência de:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \text{sen}(1/n)$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \text{sen}(1/n^2)$;

(c) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1-\cos h}{h}$; (d) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1-\exp(\text{h})}{h}$.

2. Considere os seguintes operadores:

$$\begin{aligned}
\Delta y_k &= y_{k+1} - y_k \quad \text{(diferença descendente)} \\
\nabla y_k &= y_k - y_{k-1} \quad \text{(diferença ascendente)} \\
E y_k &= y_{k+1} \quad \text{(operador de deslocamento)} \\
L_1 L_2 &= \mathbf{1} \implies L_1 = L_2^{-1} \quad (L^{-1}\text{: operador inverso, } \mathbf{1}\text{: operador unitário)} \\
\delta &= E^{1/2} - E^{-1/2} \quad \text{(diferença central)} \\
\mu &= (E^{1/2} + E^{-1/2})/2 \quad \text{(operador da média)}
\end{aligned}$$

Demonstre as seguintes propriedades:

(a) $E = \mathbf{1} + \Delta$; (b) $E\Delta = \Delta E$; (c) $\Delta^2 = E^2 - 2E + \mathbf{1}$;
(d) $\nabla E = E\nabla = \Delta$; (e) $E^{-1} = \mathbf{1} - \nabla$; (f) $\mu^2 = \mathbf{1} + \frac{1}{4}\delta^2$.

3. Demonstre as assertivas abaixo usando indução finita:

(a) Soma de inteiros positivos:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

(b) Soma finita de números ímpares:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

(c) Diferença dividida para pontos igualmente espaçados (ver livro texto: *Elementary Numerical Analysis*, S.D. Conte, C. de Boor - Seção 2.6):

$$f[x_k, \ldots, x_{k+m}] = \frac{1}{m!h^m} \Delta^m f_k \ ; \quad \Delta^m f_k = \begin{cases} f_k & (m = 0) \\ \Delta^{m-1} f_{k+1} - \Delta^{m-1} f_k & (m > 0) \end{cases}$$

(d) Potência de matriz:

$$A_k^m = \begin{cases} \mu_k^{m-2} A_k^2 \ , & \text{para } m \text{ número par } (m = 2p) \\ \mu_k^{m-1} A_k \ , & \text{para } m \text{ número ímpar } (m = 2p-1) \end{cases}$$

onde A_k e μ_k são expressos por:

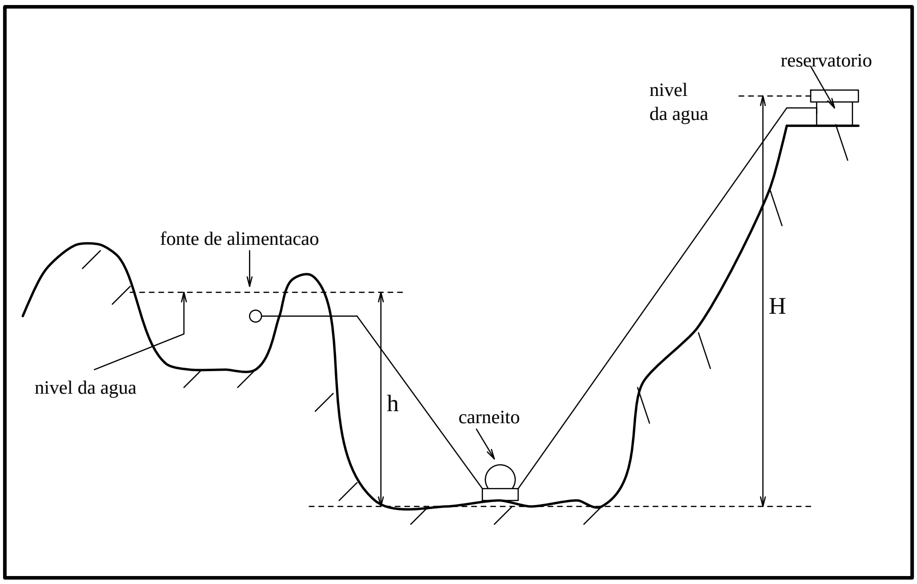
$$\begin{aligned} A_k &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \alpha_k \\ 0 & R_F & 0 \end{bmatrix} \\ \mu_k^2 &= R_F \alpha_k - 1 \ ; \quad \alpha_k = \frac{2}{\Delta x}[\cos(2\pi(k-1)/N_x) - 1] \end{aligned}$$

em que R_F, Δx, N_x são constantes. A matriz acima surge da discretização em diferenças finitas de um modelo meteorológico de área limitada do tipo água-rasa[1].

4. (Ver livro texto exercício 2.2-1) Prove que:

$$f[x_0,\ x_1, \ldots,\ x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{w'(x_i)} \ , \qquad \text{onde :} \quad w(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \ .$$

5. Imagine-se como consultor de uma fazenda. O fazendeiro quer construir um novo estábulo, deste modo, escolhe-se o local do empreendimento o mais próximo a uma nascente, para que, perto do estábulo, se pudesse ter também um reservatório de água. Junto a nascente é construído uma barragem e em sua base é instalado um *carneiro*[2], para que a água pudesse chegar ao reservatório.



Notando que:
(a) Vazão da fonte de alimentação: $Q = 30\ l/\text{min}$;

[1]Ver: H.F. de Campos Velho, J.C.R. Claeyssen (1997): *Computers & Mathematics with Applications*, **33**(9), 1-13. H.F. de Campos Velho, J.C.R. Claeyssen (1997): *Revista Brasileira de Meteorologia*, **12**(2), 41-50.

[2]*Carneiro* é um tipo de bomba d'água muito utilizada no meio rural.

(b) Altura da queda: $h = 6$ m;
(c) Altura de recalque[3]: $H = 46$ m.

Desta forma a questão é: quantas vacas leiteiras poderiam ocupar o estábulo, sabendo-se que o consumo diário médio de cada vaca, somado a água gasta para o asseio do estábulo, é de 120 l.

obs 1: Para calcular a vazão de recalque (quantidade de água elevada) usa-se a fórmula:

$$q = Q \left(\frac{h}{H}\right) R$$

onde q é a vazão de recalque, Q é a vazão da fonte de alimentação, h é a altura de queda (do nível da água do reservatório até o nível do carneiro), H é a altura de recalque e R é o rendimento do carneiro.

obs 2: Para determinar o valor da vazão de recalque é necessário conhecer o rendimento do carneiro, mas: $R = R(H/h)$. Utilize a tabela abaixo para o cálculo do rendimento:

H/h	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0
R	0.6728	0.6476	0.6214	0.5940	0.5653	0.5350	0.5029

Indique o método utilizado e justifique sua resposta.

6. (Ver livro texto exercício 2.6-8) Deduza a fórmula de diferença atrasada de Newton:

$$p_n(x_0 + sh) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, \Delta^i f_{-i} \binom{-s}{i} \,.$$

7. Considere a tabela a abaixo ($i = 0,\ 1, \ldots, 6$):

x_i	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
$f(x_i)$	1.00000	1.02470	1.04881	1.07238	1.09544	1.11803	1.14017

O problema da **interpolação inversa** é aproximar, ou calcular, $\bar{x}$ conhecendo-se o valor de $f(\bar{x})$. Use os dados da tabela acima para determinar $\bar{x}$ sabendo que $f(\bar{x}) = 1{,}05$.

8. Um pesquisador do INPE está trabalhando na solução do seguinte sistema de equações diferenciais parciais:

$$\begin{aligned}
\zeta_t + R_o\,(u\zeta)_x + \delta + R_\beta\, v' &= 0;\\
\delta_t + R_o\,(u\delta)_x - \zeta + R_\beta\, u' + \Phi_{xx} &= 0;\\
\Phi_t + R_o\,(u\Phi)_x - R_o u_0 v' + R_F\, \delta &= 0.
\end{aligned}$$

Este é um sistema usado para simular um processo físico importante[4]. Aplicando operadores de diferença finita na variável espacial x (no qual: $[\zeta \quad \delta] = (\partial/\partial x)\,[v \quad u]$), transforma-se o sistema acima num sistema de equações diferenciais ordinárias, ou seja:

$$\mathbf{M}\,\frac{d\mathbf{X}}{dt} + \mathbf{A}\,\mathbf{X} + R_o\, N(\mathbf{X}) = 0;$$

[3] Altura entre o carneiro e o nível da água no reservatório.
[4] Ver: LYNCH, P., 1984: *DYNAMO - A One Dimensional Primitive Equation Model*, Tech. Note No. 44, Irish Meteorological Service, Dublin.

onde $\mathbf{X} = [X_1 \quad X_2 \quad \ldots \quad X_{N_x}]^T$, $X_i = [v_{i-1/2} \quad u_{i-1/2} \quad \Phi_i]^T$ com $i = 0, \ldots, N_x$. O vetor $\mathbf{X}$ é chamado de vetor de estado; N_x é o número de pontos usado na malha de discretização; e, $N(\mathbf{X})$ é uma função matricial que agrupa os termos não lineares.

Uma solução para o sistema acima pode ser tentada pelo método da transformada de Laplace (TL). Assim aplicando-se a TL, o sistema acima torna-se:

$$\mathbf{X}_{n+1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \mathbf{H}^{-1}(\lambda)[\mathbf{Z}_n \; - \; R_o\, N(\mathbf{X}_n)\, \lambda^{-1}]\, e^{\lambda \Delta t}\, d\lambda$$

onde $\mathbf{H}(\lambda) = \lambda\, \mathbf{M} + \mathbf{A}$, é a matriz de transferência e o subíndice n denota o tempo discretizado, isto é: $\mathbf{X}_n = \mathbf{X}(n\,\Delta t)$. O contorno Γ é um círculo de raio γ e considera-se os termos não lineares variando lentamente no tempo. Por último: $\mathbf{Z} = \mathbf{M}\,\mathbf{X}$.

A integral de contorno aparecendo na equação *transformada* pode ser calculada a partir de uma regra de quadratura, em que o círculo é aproximado por um polígono regular inscrito de lados $\Delta\lambda_k$, ou seja

$$\oint_\Gamma F(\lambda)\, d\lambda \simeq \frac{1}{\sigma} \sum_{k=1}^{N_\lambda} F(\lambda_k)\, \Delta\lambda_k$$

onde os pontos λ_k são pontos centrais do lado do polígono; e $\sigma = \tan(\pi/N_\lambda)/(\pi/N_\lambda)$, é um fator de correção de polígono. Desta forma uma das principais dificuladades desta técnica reside no cálculo das N_λ inversas $\mathbf{H}(\lambda)$.

O pesquisador em questão, sabendo do seu treinamento em métodos numéricos, o requisitou para escrever uma rotina capaz de calcular as N_λ inversas requeridas pelo problema.

A matriz de transferência $\mathbf{H}(\lambda)$ (uma matriz quase tri-diagonal por blocos[5]) é dada por

$$\mathbf{H}(\lambda) = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & & & L_3 \\ L_3 & L_1 & L_2 & & \\ & L_3 & L_1 & L_2 & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & L_3 & L_1 & L_2 \\ L_2 & & & L_3 & L_1 \end{bmatrix} \qquad L_1 = \begin{bmatrix} \left(-\frac{\lambda}{\Delta x} + \frac{1}{2}R_\beta\right) & -\frac{1}{\Delta x} & 0 \\ \frac{1}{\Delta x} & \left(-\frac{\lambda}{\Delta x} + \frac{1}{2}R_\beta\right) & -\frac{2}{\Delta x^2} \\ 0 & -\frac{R_F}{\Delta x} & \lambda \end{bmatrix};$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} \left(\frac{\lambda}{\Delta x} + \frac{1}{2}R_\beta\right) & \frac{1}{\Delta x} & 0 \\ -\frac{1}{\Delta x} & \left(\frac{\lambda}{\Delta x} + \frac{1}{2}R_\beta\right) & \frac{1}{\Delta x^2} \\ 0 & -\frac{R_F}{\Delta x} & 0 \end{bmatrix}; \qquad L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta x^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

sendo os parâmetros adimensionais:

$$R_o = 0.10; \qquad R_\beta = 10; \qquad R_F = 0.16;$$

e os parâmetros de discretização:

$$N_x = 5; \qquad \Delta x = 0.5; \qquad N_\lambda = 4.$$

Desta forma obtém-se os seguintes valores para λ_k (com $\gamma = 1$):

[5] A matriz $\mathbf{H}(\lambda)$ tem uma estrutura denominada *Bloco-Circulante* do tipo $(N_x, 3)$, imposta pelas condições de contorno adotadas (periódicas).

k	λ_k
0	$1.00000 + 0.00000$ i
1	$0.70711 + 0.70711$ i
2	$0.00000 + 1.00000$ i
3	$-0.70711 + 0.70711$ i
4	$-1.00000 + 0.00000$ i

9. Considere a seguinte equação de Poisson uni-dimensional e as seguintes condições de contorno

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + 2 = 0 \ , \qquad x \in (0,\ 1) \ ; \qquad\qquad \text{condições de contorno: } \ \phi(0) = \phi(1) = 0 \ .$$

Condirerando a aproximação de diferença finita central:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} \approx \frac{\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}}{\Delta x^2}$$

sendo $N_x\,\Delta x = 1$, $\Phi_i = \Phi(x_i)$, $x_i = x_0 + i\,\Delta x$. Aplicando o operador de diferenças finitas, a equação diferencial de 2a. ordem acima pode ser re-escrita como um sistema de equações algébricas lineares: $A\,\Phi = b$, isto é:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & 1 & -2 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \vdots \\ \Phi_{N_x-2} \\ \Phi_{N_x-1} \end{bmatrix} = -2\,\Delta x^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolva o sistema acima, comparando com o resultado com a solução analítica, com $N_x = 64$ pelos seguintes métodos:

(a) Método direto da eliminação Gaussina ou decomposição LU (justifique sua escolha).

(b) Método iterativo de Jacobi.

(c) Método iterativo de Gauss-Seidel.

(d) Método iterativo de Gauss-Seidel com sobre relaxação – qual o ω ótimo?

Para os métodos iterativos considere o valor $\varepsilon = 10^{-5}$ para o critério de parada. Faça um gráfico do erro em função do número de iterações. Qual o método iterativo mais eficiente?

10. Um engenheiro do grupo de ciências térmicas do INPE, está tentando resolver o seguinte problema de transferência de calor estacionária numa placa plana (20cm × 10cm):

```
REGIAO CONSIDERADA:

                          (I)
               1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11
             1 *  .  .  .  .  .  .  .  .  .  *
             2 .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .
       (II)  3 .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .   (III)
             4 .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .
             5 .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .
             6 *  .  .  .  .  *  .  .  .  .  *
                     (IV)              (V)
```

```
CONDICOES DE CONTORNO:

SUPERFICIE (I)  : Conveccao (TG,HG)
SUPERFICIE (II) : Placa isolada (fluxo nulo de calor)
SUPERFICIE (III): Placa isolada
SUPERFICIE (IV) : Placa isolada
SUPERFICIE (V)  : Conveccao (TL,HL)
```

Matematicamente o problema é modelado da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad 0 < x < 0.2 \;\text{ e }\; 0 < y < 0.1$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{array}{rcll}
-k\,\partial T(x,0)/\partial y &=& h_g\,(T_g - T(x,0)) & [0 < x < 0.2]: \quad \text{superf. I} \\
-k\,\partial T(0,y)/\partial x &=& 0 & [0 < y < 0.1]: \quad \text{superf. II} \\
-k\,\partial T(0.1,y)/\partial x &=& 0 & [0 < y < 0.1]: \quad \text{superf. III} \\
-k\,\partial T(x,0.1)/\partial x &=& 0 & [0 < x < 0.1]: \quad \text{superf. IV} \\
-k\,\partial T(x,0.1)/\partial y &=& h_g\,(T_g - T(x,0)) & [0.1 < x < 0.2]: \quad \text{superf. V}
\end{array}$$

Este é um problema de certa dificuldade para se determinar uma solução analítica. A opção do engenheiro é então, conseguir uma solução aproximada, discretizando a equação diferencial parcial acima. O engenheiro usa o *método dos volumes finitos*[6] para determiná-la. Aplicando os operadores de discretização chega-se ao seguinte problema:

$$A\,T = C$$

onde A é a matriz resultante da discretização, C é um vetor de termos constantes (condições de contorno) e T é a temperatura aproximada, dada conforme o campo mostrado abaixo

$$\begin{array}{ccccccccccc}
T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & T_6 & T_7 & T_8 & T_9 & T_{10} & T_{11} \\
T_{12} & T_{13} & T_{14} & T_{15} & T_{16} & T_{17} & T_{18} & T_{19} & T_{20} & T_{21} & T_{22} \\
T_{23} & T_{24} & T_{25} & T_{26} & T_{27} & T_{28} & T_{29} & T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \\
T_{34} & T_{35} & T_{36} & T_{37} & T_{38} & T_{39} & T_{40} & T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \\
T_{45} & T_{46} & T_{47} & T_{48} & T_{49} & T_{50} & T_{51} & T_{52} & T_{53} & T_{54} & T_{55} \\
T_{56} & T_{57} & T_{58} & T_{59} & T_{60} & T_{61} & T_{62} & T_{63} & T_{64} & T_{65} & T_{66}
\end{array}$$

desta forma o problema é: resolver o sistema de 66 equações com 66 temperaturas desconhecidas (é óbvio que A é uma matriz de ordem 66×66).

Como o sistema é relativamente grande ($N > 50$); e a matriz gerada pela discretização é **esparsa** o método de Gauss-Seidel parece ser o mais indicado. Para ajudar o engenheiro entra em ação a equipe de Métodos Numéricos da CAP, que deve fornecer ao engenheiro uma rotina com este método de solução de sistemas de equações lineares.

O engenheiro fornece os seguintes dados:

$$P_1 = k(\Delta x/\Delta y) \qquad P_2 = k(\Delta x/\Delta y) \qquad P_g = h_g\,\Delta x \qquad P_L = h_L\,\Delta x$$

Use $T_g = 2000.0$ e $H_g = 1000.0$; $T_L = 60.0$ e $H_L = 8000.0$; a condutividade térmica do sólido é $k = 5.0$. Para parâmetros do código use como tolerância $\epsilon = 0.01$; e como número máximo de iterações $N_{max} = 500$.

Os parâmetros de discretização são: $\Delta x = 0.02$ e $\Delta y = 0.02$. **Todos os parâmetros usados estão em unidades consistentes.**

[6]Consulte: M.N. Özişik, 1985: *Heat Transfer: A Basic Approach*, Ed McGraw-Hill.

```
C**********************************************************************
C*                                                                    *
C*                          CODIGO    ALGTC01                         *
C*....................................................................*
C*                                                                    *
C*   Programa para resolver equacao do calor bidimensional, sem fontes,  *
C* de condutividade constante, em estado estacionario, o que equivale a  *
C* resolver o seguinte  sistema  matricial:                           *
C*                                                                    *
C*                        A.T = C                                     *
C*                                                                    *
C* onde A matriz dos coeficientes, T vetor incognita, C vetor constante. *
C*                                                                    *
C**********************************************************************
C
       P1  = RK*(DX/DY)
       P2  = RK*(DY/DX)
       PG  = HG*DX
       PL  = HL*DX
C
C    MONTAGEM DA MATRIZ DOS COEFICIENTES
C
C 2. ACOPLAMENTO DAS CONDICOES DE CONTORNO
C 2.1 SUPERFICIE (I)
         DO 30 J = 2,10
            A(J,J-1)  = - P2/2.0
            A(J,J)    = P1+P2+PG
            A(J,J+1)  = - P2/2.0
            A(J,J+11) = - P1
 30      CONTINUE
C
C 2.2 SUPERFICIE (II)
      DO 40 J = 12,45,11
         A(J,J-11) = - P1/2.0
         A(J,J)    =  P1+P2
         A(J,J+1)  = - P2
         A(J,J+11) = - P1/2.0
 40   CONTINUE
C
C 2.3 SUPERFICIE (III)
      DO 50 J = 22,55,11
         A(J,J-11) = - P1/2.0
         A(J,J-1)  = - P2
         A(J,J)    = P1+P2
         A(J,J+11) = - P1/2.0
 50   CONTINUE
C
C 2.4 SUPERFICIE (IV)
      DO 60 J = 57,60
         A(J,J-11) = - P1
         A(J,J-1)  = - P2/2.0
         A(J,J)    = P1+P2
         A(J,J+1)  = - P2/2.0
 60   CONTINUE
C
C 2.5 SUPERFICIE (V)
```

```
      DO 70 J = 62,65
         A(J,J-11) = - P1
         A(J,J-1)  = - P2/2.0
         A(J,J)    = P1+P2+PL
         A(J,J+1)  = - P2/2.0
 70   CONTINUE
C
C 2.6 VERTICES DO CONTORNO (pontos 1,11,56,61,66)
      A(1,1)  = (P1+P2+PG)/2.0
      A(1,2)  = - P2/2.0
      A(1,12) = - P1/2.0
C
      A(11,10) = - P2/2.0
      A(11,11) = (P1+P2+PG)/2.0
      A(11,22) = - P1/2.0
C
      A(56,45) = - P1/2.0
      A(56,56) = (P1+P2)/2.0
      A(56,57) = - P2/2.0
C
      A(61,50) = - P1
      A(61,60) = - P2/2.0
      A(61,61) = P1+P2+(PL/2.0)
      A(61,62) = - P2/2.0
C
      A(66,55) = - P1/2.0
      A(66,65) = - P2/2.0
      A(66,66) = (P1+P2+PL)/2.0
C
C**** FIM DO ACOPLAMENTO DAS CONDICOES DE CONTORNO
C
C 3. PONTOS INTERIORES DA MALHA
      DO 80 J = 13,54
         IF(((J-1)/11)*11.EQ.(J-1)) GOTO 80
         IF((J/11)*11.EQ.J)         GOTO 80
         A(J,J-11) = - P1
         A(J,J-1)  = - P2
         A(J,J)    = (P1+P2)*2.0
         A(J,J+1)  = - P2
         A(J,J+11) = - P1
 80   CONTINUE
C
C**** FIM DA MONTAGEM DA MATRIZ DOS COEFICIENTES
C
C  MONTAGEM DO VETOR CONSTANTE
      DO 100 J = 2,10
         C(J) = PG * TG
         IF(J.GT.5) GOTO 100
         C(N-J+1) = PL * TL
 100  CONTINUE
      C(1) = (PG*TG)/2.0
      C(11) = C(1)
      C(61) = (PL*TL)/2.0
      C(66) = C(61)
C
C**** FIM DA MONTAGEM DO VETOR CONSTANTE
```