Curso de Métodos Numéricos I

Lista 2: Data da entrega: 27-Maio-2010

Resolva as questões abaixo:

1. As reflexões de Householder são matrizes da forma

$$H = I - 2\,\frac{v\,v^T}{\|v\|^2}$$

e são usadas para gerar matrizes na forma de Hessemberg: matriz com elementos todos nulos abaixo da diagonal imediatamente abaixo da diagonal principal:

$$A \longrightarrow \widetilde{A} = \begin{bmatrix} * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & * & * \end{bmatrix} \;;$$

da seguinte maneira:

   (a) Faça: $z = [1\ 0\ \cdots\ 0]^T$, $\sigma = \|x\|$, $v = x + \sigma\, z$;

   (b) Então: $H\,x = -\sigma\,z = [-\sigma\ 0 \cdots\ 0]^T$.

   (c) Construa matrizes U e calcule o produto: $U_k^{-1}\,A_k\,U_k$; sendo a primeira matriz U_1 desta sucessão construída como:

$$x_1 = [a_{21}\ a_{31} \cdots a_{n1}]^T \;, \qquad U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & H_1 & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \;;$$

Onde H_1 é matriz de dimensões $(n-1)\times(n-1)$. O processo segue para U_2, U_3, etc. Calcule a forma de Hessemberg da seguinte matriz de Hilbert (mostre todos os passos intermetiários):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix}$$

2. O algoritmo QR sem deslocamento pode ser sumarizado como

   (a) Use as reflexões de Householder para obter uma forma de Hessemberg para a matriz A (denotada por A_0) – rotações de Givens também podem ser usadas;

   (b) A matriz A_0 é fatorada pelo processo de Gram-Schmidt em $Q_0\,R_0$.

   (c) Reverter os fatores e obter: $A_1 = R_0\,Q_0$.

   (d) O processo continua: $A_k = Q_k\,R_k \implies A_{k+1} = R_k\,Q_k$.

   (e) O processo deverá convergir. Os autovalores de uma matriz triangular estão sobre a diagonal principal da matriz. Assim, a convergência é testada: $\|(r_{ii})_{k+1} - (r_{ii})_k\| \,/\, \|r_{ii})_{k+1}\| < \varepsilon$!

Mostre por indução que $(Q_0\, Q_1 \cdots Q_k)\,(R_k \cdots R_1\, R_0)$ é a fatorização QR de A^{k+1}.

(A identidade acima faz a conecção do algorítmo QR com o método da potência e leva a uma explicação sobre a convergência do algorítmo QR, se $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|$, então estes autovalores gradualmente irão aparecer em ordem decres cente sobre a diagonal de A_k).

3. Calcule a integral:
$$\int_0^1 \frac{\text{sen}x}{x}\, dx$$
pelos seguintes métodos:
   (a) Regra do trapézio com $h = 0,5$ e $h = 0,25$.
   (b) Regra de Simpson 1/3 com $h = 0,5$ e $h = 0,25$.
   (c) Quadratura gaussiana com 4 e 8 pontos.

4. Calcule a integral:[1]
$$\int_{0,1}^{0,7} \int_{-0,2}^{0,6} e^x\, \text{sen}y\, dy\, dx$$
   (a) Regra do trapézio com $h = 0,5$ e $h = 0,25$.
   (b) Regra de Simpson 1/3 com $h = 0,5$ e $h = 0,25$.
   (c) Quadratura gaussiana com 4 e 8 pontos.

5. (Livro texto: problema 5.1-2) Use o método da máxima descida para determinar o mínimo e o máximo da função (com precisão de 10^{-6}):
$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^3}{3} + x_2^2\, x_1 + 3\ .$$

6. Se $N = 2^m$, mostre que o número de operações com a transformada discreta de Fourier é N^2 e $N \log N$ para a transformada rápida de Fourier.

7. (Livro texto: problema 6.5-4) Se $f(x)$ é uma função 2π periódica, então as funções $g_m(x) = f(mx)$ também é, para qualquer inteiro m. Qual é a relação entre os coeficientes da expansão de Fourier das funções $f(x)$ e $g_m(x)$?

8. (Livro texto: problema 6.5-8) Se $f(x)$ Use a FFT para calcular aproximadamente os coeficientes de Fourier para $f(x) = \text{sen}(3x)$ e $f(x) = \text{sen}(\pi x)$, usando $N = 156$. Porque os coeficientes de Fourier para $f(x) = \text{sen}(\pi x)$ falham em decair rapidamente quando j aumenta?

9. Dado o circuito abaixo, cujo interruptor **s** está aberto para $t < 0$ e o capacitor sem carga neste intervalo de tempo. O circuito é de corrente contínua, pois e_0 =constante. Resolva a equação do circuito pelo método da transformada de Laplace
$$A\,\frac{dX}{dt} + B\,X = E; \qquad X(0) = \frac{e_0}{2\,R}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

[1] C. F. Gerald, P. O. Wheatley (1989): *Applied Numerical Analysis*, Addison-Wesley, 4th Edition (exercício 72, Cap. 4, pág. 343).

onde o vetor de estados e os coeficientes matriciais são dados por

$$
\begin{aligned}
X(t) &= \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ q(t) \end{bmatrix}; \qquad E = \begin{bmatrix} e_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \\
A &= \begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} R & 0 & C^{-1} \\ 0 & R & -C^{-1} \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Considerando os seguintes valores numéricos para as grandezas envolvidas ($\mathrm{t_{max}} = 0.008$ s): $C = 0.01$ farad, $e_0 = 100$ volts, $L = 0.02$ henry, $R = 10$ ohms; obtenha a solução numérica, considerando:

(a) Método de Euler,

(b) Método de Adams-Basforth de passo 2,

(c) Método de Runge-Kutta (4a. ordem).

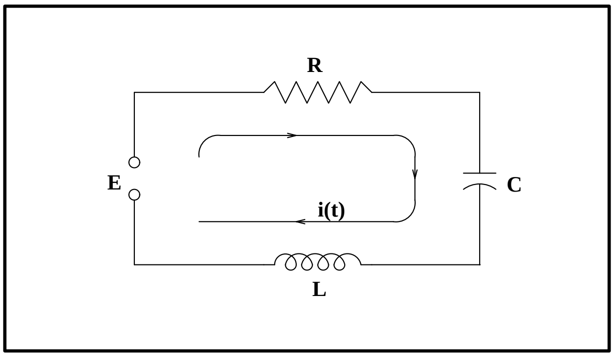

Figure 1: Representação de circuito elétrico.

10. Resolver o problema de contorno abaixo (1-D) pelo método das diferenças finitas centradas

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \; ; \qquad y(0) = 0 \; , \quad y(1) = 1 \; ;$$

cuja a solução exata é dada por: $y(x) = \mathrm{sen}(x)/\mathrm{sen}(1)$. Faça um gráfico: erro $\times$ Δx. Qual seria o procedimento para determinar a melhor resolução da malha espacial (Δx)?