

Lab 3 – Sistemas Lineares (*Big Bang*)

Material necessário:

- Celular com câmera
- 3 bolas

Experiência:

Para decifrar os enigmas do início do universo, matemáticos utilizam dados de observações atuais para prever como era anteriormente. Extrapolando essa técnica, seria possível determinar o início do universo - *Big Bang*.

Este experimento visa determinar o momento exato e a posição de início de um universo ligeiramente simplificado (composto por 3 partículas). O modelo do universo simulado irá gerar um sistema de equações lineares que poderá ser resolvido utilizando as técnicas vistas em sala de aula.

Um componente do grupo deverá segurar 3 bolas de forma empilhada enquanto o outro filma de cima. A câmera deve permanecer parada e as 3 bolas devem ser soltas simultaneamente.

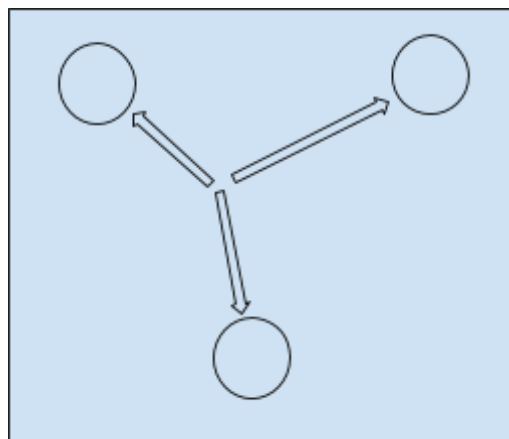


Figura 1: Universo simulado.

As bolas irão quicar em uma posição em comum antes de se afastarem.

O grupo deve capturar 3 quadros e seus respectivos tempos com precisão de milissegundos:

Quadro 0: Momento que as bolas tocam juntas no chão (*Big Bang*);

Quadro 1: Dois ou três quadros antes de uma das bolas sair da imagem;

Quadro 2: Último quadro antes de uma das bolas sair da imagem;

Para cada imagem deve descobrir as posições x e y de cada partícula (bola). Lembre que na primeira imagem as posições de x e y de todas as bolas devem supostamente ser iguais. Plote a primeira imagem com todas as posições coletadas.

O movimento de cada uma das partículas pode ser modelado, aproximadamente, por uma equação de movimento retilíneo uniforme (planar):

$$p = p_0 + V \cdot (t - t_0)$$

em que p é a posição da bola no tempo t , V é a velocidade da partícula e p_0 é a posição inicial no tempo t_0 .

Decompondo o sistema nas componentes x e y, teremos:

$$x_i = x_0 + \text{sen}(\theta_i) \cdot V_i \cdot (t - t_0)$$

$$y_i = y_0 + \text{cos}(\theta_i) \cdot V_i \cdot (t - t_0)$$

em que x_i e y_i são a posição, V_i é a velocidade e θ_i o ângulo formado pela i-ésima partícula em relação ao eixo x.

O sistema formado para as três partículas será:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\cos(\theta_1) & V_1 \text{sen}(\theta_1) \cos(\theta_1) \\ \text{sen}(\theta_2) & -\cos(\theta_2) & 0 \\ \text{sen}(\theta_3) & 0 & -V_3 \text{sen}(\theta_3) \cos(\theta_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(\theta_1)y_{1f} + V_1 \text{sen}(\theta_1) \cos(\theta_1)t_f \\ \text{sen}(\theta_2)x_{2f} - \cos(\theta_2)y_{2f} \\ \text{sen}(\theta_3)x_{3f} - V_3 \text{sen}(\theta_3) \cos(\theta_3)t_f \end{pmatrix}$$

em que x_{if} e y_{if} são a posição e t_f o tempo da i-ésima partícula no quadro 2.

Utilize os quadros 1 e 2 para encontrar a velocidade e o ângulo (utilize a função atan() do Scilab com 2 argumentos) de cada partícula.

Implemente o método de resolução por LU e resolva o sistema. Compare os valores obtidos com o quadro zero - Big Bang (use o erro relativo).

Justifique, utilizando as técnicas vistas em sala de aula, se a convergência para os métodos iterativos é garantida. Independente da convergência ser garantida, utilize o método de Gauss-Seidel para encontrar a solução do sistema. Comente o resultado.

Programa:

Os algoritmos abaixo implementam os métodos de Resolução Retroativa, Eliminação de Gauss, e Jacobi, respectivamente.

Algoritmo de resolução retroativa:

Entrada: matriz de coeficientes triangular superior A e vetor de termos independentes b

Saída: solução x do sistema

```
[L,c] = tamanho(A); // no scilab: size(A)
para i=L:-1:1
    soma = 0;
    para j=i+1:c
        soma = soma + x(j)*A(i,j);
    fim_para
    x(i) = (b(i) - soma)/A(i,i);
fim_para
```

Teste do código:

A=[2 3 -1; 0 -2 -1; 0 0 5];

b=[5; -7; 15]

Chamada: x=ResolucaoRetroativa(A,b)

Saída: x=[1 2 3]^t

Algoritmo do método de Gauss:

Entrada: matriz de coeficientes A e vetor de termos independentes b

Saída: solução x do sistema

```
[L,c] = tamanho(A);
Aa = [A , b]; //matriz aumentada
para i=1 ate L-1
    pivo=Aa(i,i);
    para j=i+1 ate c
        m = Aa(j,i)/pivo;
        Aa(j,:) = Aa(j,:) - m* Aa(i,:);
    fim_para
fim_para
x = ResolucaoRetroativa(Aa(1:L,c), Aa(:,c+1));
```

Teste do código:

A=[2 3 -1; 4 4 -3; 2 -3 1];

b=[5; 3; -1]

Chamada: x=Gauss(A,b)

Saída: x=[1 2 3]^t

Algoritmo do método de Jacobi:

Entrada: matriz de coeficientes A, vetor de termos independentes b, solução inicial x0, tolerancia T e número máximo de iterações N.

Saída: solução xn do sistema

```
[L,c] = tamanho(A);
cont = 0;
xa = xn = x0;
faça
    xa=xn;
    para i=1 ate L
        soma=0
        para j= 1 ate L, j<>i
            soma = soma + A(i,j)*xa(j)
        fim_se
        xn(i)=(b(i)-soma)/A(i,i);
    fim_para
    cont = cont +1;
Enquanto max(abs(xn-xa)) > T & cont < N
```

Teste do código:

A= [-4 0 -0.5 1; 2 3 3 4; 0 1 -2 0; 0 0 1 -1];

b= [0; 20; 0; -1];

Chamada:

[x,iter]=Jacobi(A,b,zeros(4,1),10⁻³,300)

Saída:

iter = 275;

x=[0.3964404
2.3383478
1.1690189
2.1698738];