Implementação de um método para encontrar raízes de um polinômio

Rodolfo Uchida

April 24, 2018

Instituto de Matemática e Estatística da USP
Departamento de Matemática Aplicada,
*Rodolfo Uchida (rodolfouchida@ime.usp.br)

Resumo: O objetivo deste trabalho é a implementação de um algoritmo que seja capaz de isolar todos os intervalos na reta real onde as raízes de um polinômio se encontram, a partir deste resultado encontrar as raízes via método de Newton Raphson.

1. Introdução

A classe de funções consideradas neste trabalho são polinômios de ordem n, um polinômio com coeficientes no corpo dos reais de ordem K é representado como:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k$$

pelo teorema fundamental da álgebra sabemos que tais polinômios possuem k raízes que podem ser reais ou complexas, o escopo deste trabalho é encontrar as raízes reais, quando existirem, de um polinômio. Nas seções abaixo descrevemos a metodologia utilizada para isolar os intervalos onde estão as raízes reais e o método para encontrar o valor aproximado.

2. Isolando as raízes de polinômio

O problema de isolar as raízes de um polinômio foi resolvido em 1829 por Charles Sturm [1], para um polinômio $p(x)$ consideramos a seguinte sequência de $p_0(x), p_1(x), ..., p_m(x)$ dada por:

$$
\begin{aligned}
p_0(x) &:= p(x) \\
p_1(x) &:= p'(x) \\
p_2(x) &:= -rem(p_0(x), p_1(x)) \\
&\vdots \\
0 &= -rem(p_{m-1}(x), p_m(x))
\end{aligned}
$$

onde $rem(p_i(x), p_j(x))$ é o polinômio resto da divisão de $p_i(x)$ por $p_j(x)$. A cadeia termina pois $deg(p_{i+i}) < deg(p_i)$ para $0 \leq i < m$. O teorema de Sturm afirma que o número de raízes reais, sem contar a multiplicidade, de um polinômio em um intervalo $[a, b]$ é igual a diferença entre o número de mudanças de sinais da cadeia calculada nos extremos do intervalo. Portanto para verificar se há raízes em um intervalo $[a, b]$ basta calcular o número de mudanças de sinais de $(p_0(a), p_1(a), ..., p_m(a))$ e $(p_0(b), p_1(b), ..., p_m(b))$ e calcular a diferença.

3. Determinando o intervalo máximo de busca

Para aplicarmos o método de Sturm em um polinômio devemos considerar um intervalo máximo $[-R, +R]$ onde $R > 0$ para a busca de todas as raízes, tal intervalo será dividido em subintervalos de comprimento h para aplicarmos o método de Sturm. A escolha de um valor baixo de h (h=0.2, 0.1) foi feita pois um valor alto de h implica em maior tempo de convergência do algoritmo de Newton-Raphson, o polinômio pode conter um ponto de derivada nula perto da raiz e ainda podem existir raízes próximas entre si.
O valor do raio de busca $R > 0$ foi determinado utilizando o limite de Cauchy [2] para a magnitude das raízes, tal limite para um polinômio $P(x)$ mônico é dado por:

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$$

$$R := 1 + max_{i=0,...,n-1}|a_i| > |\overline{x}|$$

onde $\overline{x}$ é tal que $P(\overline{x}) = 0$, para implementação do método foi utilizada a abordagem mais conservadora:

$$R := 2 + max_{i=0,...,n-1}|a_i| > |\overline{x}|$$

pois podem ocorrer comportamentos anormais nos extremos do intervalo.

4. Encontrando as raízes

O algoritmo utilizado para encontrar as raízes foi baseado no método de Newton Raphson [3], para um polinômio $P(x)$ com uma raiz no intervalo $[a, b]$ a sequência abaixo converge para raiz:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}$$

dado que $P'(x) \neq 0$ para x no intervalo $[a, b]$, por esta razão foi escolhido um intervalo pequeno (h = 0.1, 0,2) para isolar as raízes.
O algoritmo implementado realiza no máximo 200 iterações e os critérios de parada utilizados são:

$$|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$$

$$|P(x)| < \epsilon$$

para $\epsilon > 0$.

5. Testes

Foram realizados testes com alguns polinômios e analisamos os resultados do método, o critério de parada foi escolhido com $\epsilon = 0.0001$:

p(x)	raízes econtradas
$(2x-3)(x-4)^2(x^2+1)$	4, 1.5
x^{20}	-0.00296
$(x-1)^4(x-3)^3(x-8)$	8, 3, 1

O método encontrou alguns problemas para encontrar raízes próximas entre si, mesmo com o comprimento do intervalo para aplicação do método de Newnton sendo igual a 0.1:

p(x)	raízes encontradas
$(x-1)^3(x-1.5)^2(x-2)$	null
$(x-1)^3(x-2)^2(x-3)$	2, 1
$(x-1.5)^4(x-2)^3(x-8)$	8, 1.3

o problema pode ser explicado pela comportamento da curva próxima as raízes, o algoritmo tem ponto de partida próximo a raiz porém encontra um ponto de repulsão e sofre deslocamento, a partir disso começa a convergir para a raiz que está na próxima vizinhança.

6. Conclusão

A combinação dos métodos de Sturm e Newton Raphson fornece uma boa alternativa para encontrar raízes de polinômios, os métodos podem ser facilmente estendidos para encontrar a multiplicidade das raízes bem como raízes complexas. A convergência dos métodos em todos os exemplos foram instantâneas, o método de maior custo computacional é calcular os polinômios da cadeia de Sturm em todos os intervalos no raio de busca da raízes, o processo tem alto custo pois o raio de busca pela abordagem de Cauchy é conservador. O teorema garante que a raiz está no raio R mas em muitos casos, principalmente em polinômios mônicos com coeficientes altos, o raio calculado tem valor muito alto comparado com a magnitude das raízes, portanto outras abordagens para definir o raio poderiam ser aplicadas.

Referências

1. Van Der Waerden, B. L (2003), Algebra Volume 1, Springer Verlag NY, p. 242-245.

2. Cauchy, A.L. (1829), Exercises de mathématique, in Oeuvres Vol. 9, p. 122

3. Isaacson & Keller (2012) ,Analysis of Numerical Methods, Dover Books on Mathematics.