§14 Линейные отображения и операторы

п. 1 Линейные отображения

Опр Пусть V и W – векторные пр-ва над полем F. Отображение $\varphi: V \to W$ называется линейным, если оно обладает свойствами линейности: аддитивностью и однородностью:

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \qquad \forall x, y \in V,\ k \in F$$
$$\varphi(kx) = k\varphi(x)$$

Пример

1. $V = W = \mathbb{R}^2 \quad \varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \varphi((x_1, x_2)) = (-2x_1 + x_2, -x_1)$

Это отображение линейно: если $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, то:

$$x + y = ((x_1 + y_1, x_2 + y_2))$$
$$\varphi(x) = (-2x_1 + x_2, -x_1)$$
$$\varphi(y) = (-2y_1 + y_2, -y_1)$$
$$\varphi(x+y) = (-2x - 2y_1 + x_2 + y_2, -x_2 - y_1) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

Аналогично, $\varphi(kx) = k\varphi(x)$

2. $V = W = \mathbb{R}^2 \quad \psi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \psi((x_1, x_2)) = (x_1^2, x_2^2)$

Отображение ψ не является линейным

3. $V = W = \mathbb{R}^2 \quad \varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \varphi(x)$ – вектор, получаемый из x поворотом на $90°$

Можно показать, что это отображение линейно

Линейными будут также преобразования симметрии относительно прямой, проходящей ч/з начало координат, преобразование центральной симметрии, где центр симметрии – начало координат, преобразование поворота на угол α вокруг начала координат

4. $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$, $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\varphi((x_1, x_2)) = (x_1 + x_2,\ x_1 - x_2,\ 0)$$

φ является линейным отображением

5. $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$, $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_2)$ – еще один пример линейного отображения

Q: Как можно задавать линейные отображения?

A. Выберем в пр-вах V и W по базису.

$a_1, \dots, a_n$ – базис V $\qquad n = \dim V$

$b_1, \dots, b_m$ – базис W $\qquad m = \dim W$

а также зададим произвольную матрицу $A \in M_{m \times n}(F)$

Определим отображение $\varphi : V \to W$ следующим образом если

$$x = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$$

то

$$\varphi(x) = y_1 b_1 + \dots + y_m b_m = y$$

где

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (*)$$

Не трудно проверить св-ва линейности (аддитивность и однородность) этого отображения

Эта конструкция линейного отображения является общей, т.е. любое отображение из V в W может быть так получено

Действительно, пусть $\varphi (V \to W$ – произвольное такое отображение. Фиксируем произвольные базисы $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_m$ пр-в V и W

Определим матрицу A следующим образом: ее столбцы – это столбцы координат образов базисных векторов $\varphi(a_j)$ $(j = 1, \dots, n)$ в базисе $b_1, \dots, b_m$ пр-ва W

Легко видеть, что исходное отображение φ действует по формуле $(*)$: $\varphi(x) = \varphi(x_1 a_1 + \dots + x_n a_n) = x_1 \varphi(a_1) + \dots + x_n \varphi(a_n) =$
$= x_1(a_{11} b_1 + \dots + a_{m1} b_m) + \dots + x_n(a_{1n} b_1 + \dots + a_{mn} b_m) = (x_1 a_{11} + \dots + x_n a_{1n}) b_1 + \dots = y_1 b_1 + \dots + y_m b_m$

Опр. Так построенная матрица A называется матрицей линейного отображения $\varphi: V \to W$ в выбранных базисах

Опр. В случае $W = V$ линейное отображение называется линейным оператором, заданным на V (или линейным преобразованием пр-ва V)

Итак, всякое линейное отображение может быть задано при помощи пары базисов и матрицы. Если линейное отображение — линейный оператор, то второй базис считаем совпадающим с первым и в таком случае говорим о матрице линейного оператора в данном базисе

Пусть $\varphi: V \to W$ линейное отображение

Q: Как связаны матрицы этого отображения в различных парах базисов пр-в V и W?

A: Пусть $a_1, \dots, a_n$ и $a_1', \dots, a_n'$ — два базиса пр-ва V ($n = \dim V$), $b_1, \dots, b_m$ и $b_1', \dots, b_m'$ — два базиса пр-ва W ($m = \dim W$)

Обозначим ч/з A и A' матрицы линейного отображения φ в указанных парах базисов

Пусть также C и D — матрицы перехода от $a_1, \dots, a_n$ к $a_1', \dots, a_n'$ и от $b_1, \dots, b_m$ к $b_1', \dots, b_m'$ соответственно.

Имеем:

$$(a_1' \dots a_n') = (a_1 \dots a_n) \cdot C$$

$$(b_1' \dots b_m') = (b_1 \dots b_m) \cdot D$$

$$(\varphi(a_1) \dots \varphi(a_n)) = (b_1 \dots b_m) A$$

$$(\varphi(a_1') \dots \varphi(a_n')) = (b_1' \dots b_m') A'$$

След-но,

$$(\varphi(a_1') \dots \varphi(a_n')) = (\varphi(a_1) \dots \varphi(a_n)) \cdot C$$

Таким образом,

$$(b_1' \dots b_m') A' = (b_1 \dots b_m) A \cdot C$$

или

$$(b_1 \dots b_m)\, D A' = (b_1 \dots b_m) A C$$