Тема 17. Многомерные пространства. Сходимость последовательностей в n-мерном пространстве

Определение 1. Множество всех упорядоченных наборов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ n действительных чисел, для которых определены линейные комбинации

$$\lambda x + \mu y := (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, ..., \lambda x_n + \mu y_n), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

и скалярное произведение

$$(x, y) := x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n, \tag{2}$$

называется *$n-$ мерным арифметическим евклидовым векторным пространством* и обозначается $\mathbb{R}^n$. Его элементы $x = (x_1, ..., x_n)$ называются *$n-$ мерными векторами,* а числа $x_1, x_2, ..., x_n$ – их координатами.

Длина $|x|$ n -мерного вектора x определяется равенством

$$|x| := \sqrt{(x, x)} \;\Rightarrow\; |x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}. \tag{3}$$

Свойства скалярного произведения:

1^o. Неравенство Коши-Шварца

$$|(x, y)| \le |x| \cdot |y|, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

2^o. Для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$|x + y| \le |x| + |y|. \tag{5}$$

3^o. Для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$||x| - |y|| \le |x - y|. \tag{6}$$

Для элементов $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$ можно ввести *понятие расстояния* между ними

$$\rho(x, y) := |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}. \tag{7}$$

Определение 2. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$. Совокупность всех таких точек $y \in \mathbb{R}^n$, что $\rho(x, y) < \varepsilon$, называется *$n-$ мерным открытым шаром* радиуса ε с центром в точке x или $\varepsilon-$ окрестностью точки x в пространстве $\mathbb{R}^n$ и обозначается

$$U(x, \varepsilon) := \{y \in \mathbb{R}^n : \ \rho(x, y) < \varepsilon\}.$$

В координатной записи это выглядит так:

$$U(x, \varepsilon) = \left\{ y = (y_1, ..., y_n) : \ \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2 < \varepsilon \right\}.$$

Множество $U(x, \varepsilon)$ называется *сферической окрестностью точки x.*

Определение 3. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $\delta_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. Множество

$$P(x, \delta_1, ..., \delta_n) := \{y = (y_1, ..., y_n) : |y_i - x_i| < \delta_i, \quad i = 1, ..., n\}$$

называется *прямоугольной окрестностью* точки x.

Рассмотрим последовательность $\left\{x^{(m)}\right\}$ точек пространства $\mathbb{R}^n$, т.е. отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ в пространство $\mathbb{R}^n$, где $x^{(m)} = f(m)$, $m \in \mathbb{N}$.

Определение 4. Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется *пределом последовательности* $x^{(m)} \in \mathbb{R}^n$, $m = 1, 2, ...$, если

$$\lim_{m \to \infty} \rho(x^{(m)}, x) = 0. \tag{8}$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = x$ и говорят, что последовательность $\left\{x^{(m)}\right\}$ сходится к точке x. Условие (8) означает, что

$$\forall \quad \varepsilon > 0 \ \exists \ m_0 : \ \forall \ m > m_0 \ x^{(m)} \in U(x, \varepsilon).$$

Теорема 1. Для того чтобы последовательность $x^{(m)} = \left(x_1^m, ..., x_n^{(m)}\right) \in \mathbb{R}^n$, $m = 1, 2, ...$, имела своим пределом точку $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \lim\limits_{m \to \infty} x_i^{(m)} = x_i$, $i = 1, 2, ..., n$.

Доказательство. Для любых чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ справедливо неравенство:

$$|a_i| \leq \sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2} \leq |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|, \ \ i = 1, 2, ..., n.$$

Это неравенство доказывается возведением в квадрат обеих его частей.

Применим его для $a_i = x_i^{(m)} - x_i$:

$$\left|x_i^{(m)} - x_i\right| \leq \rho\left(x^{(m)}, x\right) \leq \left|x_1^{(m)} - x_1\right| + ... + \left|x_n^{(m)} - x_n\right|, \ \ i = 1, ..., n.$$

Полученное неравенство доказывает теорему. □

Из Теоремы 1 и свойств пределов числовых последовательностей следует, что если последовательность точек имеет предел, то он единственный, и что всякая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу, что и вся последовательность.

Определение 5. Множество в $n-$ мерном пространстве называется *ограниченным,* если оно содержится в некотором $n-$ мерном шаре.

Определение 6. Последовательность точек пространства $\mathbb{R}^n$ называется *ограниченной,* если множество её значений ограничено.

Дополним пространство $\mathbb{R}^n$ бесконечно удаленной точкой, которая обозначается ∞.

Определение 7. *ε-окрестностью $U(\infty, \varepsilon)$ бесконечно удаленной точки* ∞, $\varepsilon > 0$, называется множество, состоящее из всех таких точек $x \in \mathbb{R}^n$, что $\rho(x, 0) > \frac{1}{\varepsilon}$, и из бесконечно удаленной точки ∞, т.е.

$$U(\infty, \varepsilon) = \left\{x : \ \rho(x, 0) > \frac{1}{\varepsilon}\right\} \cup \{\infty\},$$

где 0 – начало координат пространства $\mathbb{R}^n$.

Определение 8. Последовательность $\left\{x^{(m)}\right\}$ называется *последовательностью, стремящейся к бесконечности,* если

$$\lim_{m \to \infty} \rho\left(x^{(m)}, 0\right) = +\infty.$$

Замечание 1. В случае $n > 1$ бесконечный предел определен только для бесконечности без знака (∞).