§ 2. ПОДПРОСТРАНСТВА ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Подпространство. Пусть $\mathcal{V}$ — векторное пространство над полем $\mathcal{F}$ и $U \subset V$. Множество U называется *замкнутым* в $\mathcal{V}$, если оно замкнуто относительно главных операций $\mathcal{V}$, операций сложения и умножения на скаляры, т. е. для любых $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ из U и любого λ из F $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in U$ и $\lambda\boldsymbol{a} \in U$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Подпространством векторного пространства* $\mathcal{V}$ называется любая подалгебра пространства $\mathcal{V}$, рассматриваемого как алгебра.

Пусть $\mathcal{V} = \langle V, +, \{\omega_\lambda \mid \lambda \in F\}\rangle$ — векторное пространство над $\mathcal{F}$. Пусть $\mathcal{U}$ — подалгебра пространства $\mathcal{V}$ и U — его основное множество. Тогда U — непустое подмножество множества V, замкнутое в $\mathcal{V}$. Пусть $\oplus$ и ω'_λ — ограничения главных операций «$+$» и ω_λ пространства $\mathcal{V}$ множеством U, т. е.

$$\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \text{ для любых } \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \text{ из } U,$$

$$\omega'_\lambda \boldsymbol{a} = \omega_\lambda \boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{a} \text{ для любого } \boldsymbol{a} \text{ из } U;$$

тогда

(1) $\mathcal{U} = \langle U, \oplus, \{\omega'_\lambda \mid \lambda \in F\}\rangle$.

Однако вместо записи (1) обычно пишут

$$\mathcal{U} = \langle U, +, \{\omega_\lambda \mid \lambda \in F\}\rangle.$$

Отметим следующие свойства подпространств.

СВОЙСТВО 2.1. *Если $\mathcal{V}$ — векторное пространство над полем $\mathcal{F}$, то любое его подпространство является векторным пространством над $\mathcal{F}$.*

СВОЙСТВО 2.2. *Если $\mathcal{W}$ — подпространство векторного пространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}$ — подпространство векторного пространства $\mathcal{V}$, то $\mathcal{W}$ является подпространством пространства $\mathcal{V}$.*

Пересечением подпространств $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_m$ векторного пространства $\mathcal{V}$ называется подпространство $\mathcal{V}$ с основным множеством $U_1 \cap U_2 \cap, \ldots, \cap U_m$. Аналогично определится пересечение бесконечного множества подпространств пространства $\mathcal{V}$.

СВОЙСТВО 2.3. *Пересечение любого множества подпространств векторного пространства $\mathcal{V}$ является подпространством пространства $\mathcal{V}$.*

Свойства 2.2 и 2.3 следуют из теорем 3.1.7 и 3.1.9 соответственно.

Линейная оболочка множества векторов. Пусть $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ — конечное множество векторов векторного пространства $\mathscr{V}$. Вектор $\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\ldots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n$ называется *линейной комбинацией векторов* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ с коэффициентами из F.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество $\{\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\ldots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F\}$ всех линейных комбинаций векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ с коэффициентами из F называется *линейной оболочкой векторов* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ и обозначается через $L(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$.

Легко видеть, что линейная оболочка векторов замкнута в $\mathscr{V}$, т. е. замкнута относительно всех главных операций пространства $\mathscr{V}$ (сложения и умножений на скаляры).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Подпространство векторного пространства $\mathscr{V}$ с основным множеством $L(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ обозначается через $\mathscr{L}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ и называется *подпространством*, натянутым на векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, или подпространством, порожденным векторами $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Линейной оболочкой множества* M, $M \subset V$, называется совокупность $L(M)$ всех линейных комбинаций векторов из M с коэффициентами из F. *Линейной оболочкой пустого множества* называется множество $\{\boldsymbol{0}\}$.

Линейная оболочка множества M замкнута в $\mathscr{V}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Подпространство пространства $\mathscr{V}$ с основным множеством $L(M)$ обозначается через $\mathscr{L}(M)$ и называется *подпространством, натянутым на множество* M, или *подпространством, порожденным множеством* M.

Сумма подпространств. Пусть $\mathscr{U}_1, \ldots, \mathscr{U}_m$ — подпространства векторного пространства $\mathscr{V}$ и $U_1, \ldots, U_m$ — их основные множества. Множество

$$\{\boldsymbol{a}_1+\ldots+\boldsymbol{a}_m \mid \boldsymbol{a}_1 \in U_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in U_m\}$$

обозначается через $U_1+\ldots+U_m$. Легко проверить, что это множество замкнуто в пространстве $\mathscr{V}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Подпространство пространства $\mathscr{V}$ с основным множеством $U_1+\ldots+U_m$ называется *суммой подпространств* $\mathscr{U}_1, \ldots, \mathscr{U}_m$ и обозначается через $\mathscr{U}_1+\ldots+\mathscr{U}_m$.

Отметим следующие свойства суммы подпространств, легко вытекающие из ее определения.

СВОЙСТВО 2.4. Если $\mathscr{L}$ и $\mathscr{U}$ — подпространства векторного пространства $\mathscr{V}$, то $\mathscr{U}+\mathscr{L}=\mathscr{L}+\mathscr{U}$.

СВОЙСТВО 2.5. Если $\mathscr{L}$, $\mathscr{U}$, $\mathscr{W}$ — подпространства векторного пространства $\mathscr{V}$, то $\mathscr{L}+(\mathscr{U}+\mathscr{W})=(\mathscr{L}+\mathscr{U})+\mathscr{W}$.

СВОЙСТВО 2.6. Если $\mathscr{L}$ — подпространство пространства $\mathscr{U}$, то $\mathscr{L}+\mathscr{U}=\mathscr{U}$.

Пусть $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_m$ — подпространства векторного пространства $\mathscr{V}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Сумма $\mathscr{L}_1+\ldots+\mathscr{L}_m$ называется *прямой суммой подпространств* $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_m$ и обозначается через $\mathscr{L}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{L}_m$, если любой вектор $\boldsymbol{a}$ из $L_1+\ldots+L_m$ можно единственным образом представить в виде

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\ldots+\boldsymbol{a}_m, \text{ где } \boldsymbol{a}_1 \in L_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in L_m.$$

Другими словами, сумма $\mathscr{L}_1+\ldots+\mathscr{L}_m$ называется *прямой*, если для любых $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1$ из $L_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_m$ из L_m равенство $\boldsymbol{a}_1+\ldots+\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{b}_1+\ldots+\boldsymbol{b}_m$ влечет равенства $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{b}_m$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Сумма подпространств $\mathscr{L}$ и $\mathscr{U}$ векторного пространства является прямой тогда и только тогда, когда $L \cap U=\{\mathbf{0}\}$.*

Доказательство. Предположим, что $\mathscr{L}+\mathscr{U}=\mathscr{L}\oplus\mathscr{U}$. Тогда для любого элемента $\boldsymbol{c}$ из $L \cap U$ верно равенство $\boldsymbol{c}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{c}$, из которого следует равенство $\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$, так как сумма $\mathscr{L}+\mathscr{U}$ прямая. Следовательно, $L \cap U=\{\mathbf{0}\}$.

Предположим теперь, что $L \cap U=\{\mathbf{0}\}$. Для любых векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_1$ из L и $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_2$ из U равенство $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2$ влечет соотношения $\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{b}_2 \in L \cap U=\{\mathbf{0}\}$, поэтому $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{b}_2$. Следовательно, сумма $\mathscr{L}+\mathscr{U}$ является прямой. □

ТЕОРЕМА 2.2. *Сумма подпространств $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_m$ векторного пространства является прямой суммой, если для любых векторов $\boldsymbol{a}_1$ из $L_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ из L_m равенство*

(1) $\boldsymbol{a}_1+\ldots+\boldsymbol{a}_m=\mathbf{0}$

влечет равенства

(2) $\boldsymbol{a}_1=\mathbf{0}, \ldots, \boldsymbol{a}_m=\mathbf{0}$.

Доказательство. Предположим, что сумма $\mathscr{L}_1+\ldots+\mathscr{L}_m$ прямая. Тогда из равенства (1), которое можно записать в виде $\boldsymbol{a}_1+\ldots+\boldsymbol{a}_m=\mathbf{0}+\ldots+\mathbf{0}$, следуют равенства $\boldsymbol{a}_1=\mathbf{0}, \ldots, \boldsymbol{a}_m=\mathbf{0}$.

Предположим теперь, что для любых векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ соответственно из $L_1, \ldots, L_m$ равенство (1) влечет равенства (2). Каковы бы ни были векторы $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{c}_1$ из $L_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$, $\boldsymbol{c}_m$ из L_m, равенство

(3) $\boldsymbol{b}_1+\ldots+\boldsymbol{b}_m=\boldsymbol{c}_1+\ldots+\boldsymbol{c}_m$

влечет $(\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{c}_1)+\ldots+(\boldsymbol{b}_m-\boldsymbol{c}_m)=0$, из которого, по условию, следуют равенства

$$\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{c}_1=0,\ \ldots,\ \boldsymbol{b}_m-\boldsymbol{c}_m=\mathbf{0}.$$

Таким образом, из (3) следуют равенства

$$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{c}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{b}_m=\boldsymbol{c}_m.$$

Следовательно, сумма $\mathscr{L}_1+\ldots+\mathscr{L}_m$ является прямой. □

Линейные многообразия. Пусть $\mathscr{L}$ — подпространство векторного пространства $\mathscr{V}$ и L — его основное множество. На множестве V определим бинарное отношение $\sim$, считая, что $a\sim b$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\in L$. Назовем это бинарное отношение *отношением сравнения по* $\mathscr{L}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Отношение сравнения на множестве V по $\mathscr{L}$ является отношением эквивалентности на V.*

Доказательство. Отношение сравнения по $\mathscr{L}$, очевидно, рефлексивно. Отношение по $\mathscr{L}$ симметрично, так как из $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\in L$ следует $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\in L$. Отношение сравнения по $\mathscr{L}$ транзитивно, так как для любых $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}\in V$ из $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\in L$ и $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\in L$ следует, что $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\in L$. Следовательно, отношение сравнения по $\mathscr{L}$ является отношением эквивалентности на множестве V. □

Отношение эквивалентности $\sim$ на V определяет разбиение множества V на классы эквивалентности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathscr{L}$ — подпространство векторного пространства $\mathscr{V}$. Любой класс эквивалентности отношения сравнения по $\mathscr{L}$ называется *линейным многообразием пространства $\mathscr{V}$ с направлением $\mathscr{L}$.*

Пример. Множество всех решений совместной системы линейных уравнений с n переменными является линейным многообразием с направлением $\mathscr{L}$ n-мерного арифметического векторного пространства, где $\mathscr{L}$ — пространство решений соответствующей однородной системы уравнений.

Из приведенного выше определения вытекают свойства 2.7 и 2.8.

СВОЙСТВО 2.7. *Два вектора векторного пространства $\mathscr{V}$ принадлежат одному и тому же линейному многообразию с направлением $\mathscr{L}$ тогда и только тогда, когда их разность принадлежит L.*

СВОЙСТВО 2.8. *Любые два линейных многообразия векторного пространства $\mathscr{V}$ с направлением $\mathscr{L}$ либо совпадают, либо не пересекаются. Объединение всех линейных*