Вопрос № 8. (Тема 13) Знакопеременные ряды (признак Лейбница). Абсолютно сходящиеся ряды (определение). Критерий Коши абсолютной сходимости ряда. Условно сходящиеся ряды (определение). Теорема Римана.

- *Теорема 1 (Признак Лейбница). Если последовательность* $\{u_n\}$ *убывает (*$\{u_n\} \geq \{u_{n+1}\}$, n *= 1, 2, . . .) и* $\lim_{n\to\infty} u_n$ *= 0, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} u_n$ *сходится, причем, если s — сумма ряда, а* s_n *— его частичная сумма, то для любых* n *= 1, 2, . . . выполняется неравенство* $|s_n - s| \leq u_{n+1}$ *(2)*

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} u_n$ *знакочередующийся. Из условий* $\{u_n\} \geq \{u_{n+1}\}$, $\lim_{n\to\infty} u_n$ *следует, что* $u_n \geq 0$.

- *Опр-е 1Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$

- *Теорема 2 (Критерий Коши абсолютной сходимости ряда)*

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится абсолютно* $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon)\colon \forall\ n > N, \forall$ целого $p \geq 0$ $(\sum_{k=1}^{p} |u_{n+k}| < \varepsilon)$

Теорема 3 Если ряд абсолютно сходится, то он сходится. Данное утверждение следует из неравенства: $\left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}\right| \leq \sum_{k=1}^{p} |u_{n+k}|$

- *Опр-е 2 Сходящийся, но не абсолютно, ряд называется условно сходящимся.*

- *Теорема Римана. Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ $u_n \in R$ *сходится условно, то* $\forall\ S \in R$ *можно так переставить члены этого ряда, что сумма получившегося ряда будет равна S.*

Теорема Римана показывает, что свойства коммутативности сложения для конечных сумм не переносится на ряды. Если ряд сходится условно, то сумма зависит от порядка слагаемых.