Матан. Подготовка к экзамену.

q

June 19, 2021

Contents

1 Даты

1.1 Консультация

2021-06-24 Thu

1.2 Экзамен

2021-06-25 Fri

2 Темы

2.1 Первообразная и неопределенный интеграл (определения). Свойства интеграла. Таблица основных неопределенных интегралов. Формула замены переменной в неопределенном интеграле (с доказательством). Формула интегрирования по частям.

2.1.1 Опр. 1.

Функция F называется первообразной функции f на промежутке Δ , если F дифференцируема на Δ и в каждой точке $x \in \Delta$

$$F'(x) = f(x) \tag{1}$$

Очевидно, что первообразная *F(x)* непрерывна на Δ.

2.1.2 Опр. 2.

Пусть функция *f(x)* задана на промежутке Δ. Совокупность всех ее первообразных на этом промежутке называется ***неопределенным интегралом от функции*** **f** и обозначается

$$\int f(x)dx \tag{2}$$

Если *F(x)* — какая-либо первообразная функции *f(x)* на Δ, то пишут

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{3}$$

C — произвольная постоянная.

2.1.3 Основные свойства интеграла

1. Если функция *F(x)* дифференцируема на Δ, то

$$\int dF(x) = F(x) + C \text{ или } \int F'(x)dx = F(x) + C \tag{4}$$

2. Пусть функция *f(x)* имеет первообразную на Δ. Тогда для любого $x \in \Delta$ имеет место равенство:

$$d\int f(x) = f(x)dx \tag{5}$$

3. Если функции f_1, f_2 имеют первообразные на Δ, то функция $f_1 + f_2$ имеет первообразную на Δ, причем:

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx \tag{6}$$

4. Если функция *f(x)* имеет первообразную на Δ, $k \in$, то функция *kf(x)* также имеет на Δ первообразную, и при $k \neq 0$:

$$\int kf(x)dx = \{kF(x) + C\},\ k\int f(x)dx = k\{F(x) + C\}$$

Т.к. C – произвольная постоянная и $k \neq 0$, то множества $kF(x) + C$ и $kF(x) + C$ совпадают.

2.1.4 След. 1 (Линейность интеграла)

Если f$_1$ и f$_2$ имеют первообразные на Δ, λ_1, $\lambda_2 \in$, $\lambda_1^2+\lambda_2^2 > 0$, то функция $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ имеет первообразную на Δ, причем

$$\int(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))dx = \lambda_1 \int f_1(x)dx + \lambda_2 \int f_2(x))dx \tag{7}$$

Доказательство вытекает из свойств 3 и 4.

2.1.5 Формула замены переменной

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(t)$ заданы соответственно на промежутках Δ_x и Δ_t, причем $\varphi(\Delta_t) = \Delta_x$, т.е. имеет смысл сложная функция $f(\varphi(t))$, $t \in \Delta_t$. Пусть, кроме того, функция $\varphi(t)$ дифференцируема и строго монотонна на Δ_t. Тогда у функции (t) существует обратная однозначная функция $\varphi^{-1}(x)$, определенная на промежутке Δ_x.

Теорема 1. Существование на промежутке Δ_x интеграла

$$\int f(x)dx \tag{8}$$

и существование на промежутке Δ_t интеграла

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \tag{9}$$

равносильны, и имеет место формула

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \tag{10}$$

Формула (10) называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле: переменная x заменяется переменной t по формуле $x = \varphi(t)$.

Доказательство. Докажем, что существование первообразной у функции f(x) на Δ_x равносильно существованию первообразной у функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на Δ_t . Пусть у функции f(x) на Δ_x существует первообразная F(x), т.е.

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x),\, x \in \Delta_t \tag{11}$$

Имеет смысл сложная функция F (φ(t)), она является первообразной функции $f(varphi(t))\varphi'(t)$ на Δ_t. Действительно, d dtF ((t)) = d F(x) dx ¯ ¯ ¯ ¯ x=(t) d (t) dt = f ((t)) 0 (t). (14) Обратно. Пусть функция f ((t)) 0 (t) имеет первообразную (t), тогда d (t) dt = f ((t)) 0 (t). (15) Покажем, что (1 (x)) является на x первообразной функции f(x). В самом деле, d dx ¡ 1 (x) ¢ = d (t) dt ¯ ¯ ¯ ¯ t=1(x) d 1 (x) dx = (f ((t)) 0 (t))| t=1(x) × × d1 (x) dx = f(x). Итак, интегралы (10) и (11) одновременно существуют или нет. При этом Z f(x)dx = F(x) + C, (16) Z f ((t)) 0 (t)dt = F ((t)) + C, а так как F ((t))| t=1(x) = F(x), имеет равенство (12).

2.2 Определенный интеграл Римана (определение). Ограниченность интегрируемых функций (с доказательством). Верхние и нижние суммы Дарбу (определения). Верхний и нижний интегралы Дарбу (определения). Критерий Дарбу. Интегрируемость непрерывных функций. Интегрируемость монотонных функций.

2.3 Свойства определенного интеграла (сформулировать все, доказать непрерывность интеграла по верхнему пределу). Интегральная теорема о среднем.

2.4 Теорема о дифференцировании интеграла по верхнему пределу (с доказательством). Теорема о существовании первообразной (с доказательством). Формула Ньютона-Лейбница (с доказательством). Формула замены переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям.

2.5 Определение несобственных интегралов. Формула Ньютона-Лейбница и формула замены переменной для несобственных интегралов.

2.6 Несобственные интегралы от неотрицательных функций (лемма и признак сравнения). Критерий Коши сходимости интеграла (с доказательством). Абсолютно сходящиеся интегралы (определение и теорема о сходимости абсолютно сходящегося интеграла).

2.7 Определение числового ряда. Необходимый признак сходимости ряда (с доказательством). Критерий Коши сходимости ряда (с доказательством). Ряды с неотрицательными членами (признак сравнения, интегральный признак Коши, радикальный признак Коши, признак Даламбера).

2.8 Знакопеременные ряды (признак Лейбница). Абсолютно сходящиеся ряды (определение). Критерий Коши абсолютной сходимости ряда. Условно сходящиеся ряды (определение). Теорема Римана.

2.9 Функциональные последовательности и ряды (определения, в том числе, ограниченная последовательность, сходящаяся последовательность, сходящийся ряд, абсолютно сходящийся ряд). Равномерная сходимость функциональной последовательности и функционального ряда (определение и пример). Критерии Коши равномерной сходимости функциональной последовательности (ряда). Признак Вейерштрасса.

2.10 Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы (с доказательством), интегрирование, дифференцирование).

2.11 Степенные ряды (определение). Первая теорема Абеля (с доказательством). Радиус и круг (интервал) сходимости