Матан. Подготовка к экзамену.

q

June 19, 2021

Contents

1 Даты

1.1 Консультация

2021-06-24 Thu

1.2 Экзамен

2021-06-25 Fri

2 Темы

2.1 Первообразная и неопределенный интеграл (определения). Свойства интеграла. Таблица основных неопределенных интегралов. Формула замены переменной в неопределенном интеграле (с доказательством). Формула интегрирования по частям.

2.1.1 DONE Опр. 1.

Функция F называется первообразной функции f на промежутке Δ , если F дифференцируема на Δ и в каждой точке $x \in \Delta$

$$F'(x) = f(x) \tag{1}$$

Очевидно, что первообразная *F(x)* непрерывна на Δ.

2.1.2 DONE Опр. 2.

Пусть функция *f(x)* задана на промежутке Δ. Совокупность всех ее первообразных на этом промежутке называется ***неопределенным интегралом от функции*** **f** и обозначается

$$\int f(x)dx \tag{2}$$

Если *F(x)* — какая-либо первообразная функции *f(x)* на Δ, то пишут

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{3}$$

C — произвольная постоянная.

2.1.3 DONE Основные свойства интеграла

1. Если функция *F(x)* дифференцируема на Δ, то

$$\int dF(x) = F(x) + C \text{ или } \int F'(x)dx = F(x) + C \tag{4}$$

2. Пусть функция *f(x)* имеет первообразную на Δ. Тогда для любого $x \in \Delta$ имеет место равенство:

$$d\int f(x) = f(x)dx \tag{5}$$

3. Если функции *f₁*, *f₂* имеют первообразные на Δ, то функция $f_1 + f_2$ имеет первообразную на Δ, причем:

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx \tag{6}$$

4. Если функция *f(x)* имеет первообразную на Δ, $k \in$, то функция *kf(x)* также имеет на Δ первообразную, и при $k \neq 0$:

$$\int kf(x)dx = \{kF(x) + C\},\ k\int f(x)dx = k\{F(x) + C\}$$

Т.к. C – произвольная постоянная и $k \neq 0$, то множества $kF(x) + C$ и $kF(x) + C$ совпадают.

2.1.4 DONE След. 1 (Линейность интеграла)

Если f_1 и f_2 имеют первообразные на Δ, λ_1, $\lambda_2 \in$, $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$, то функция $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ имеет первообразную на Δ, причем

$$\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))dx = \lambda_1 \int f_1(x)dx + \lambda_2 \int f_2(x))dx \tag{7}$$

Доказательство вытекает из свойств 3 и 4.

2.1.5 TODO Формула замены переменной

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(t)$ заданы соответственно на промежутках Δ_x и Δ_t, причем $\varphi(\Delta_t) = \Delta_x$, т.е. имеет смысл сложная функция $f(\varphi(t))$, $t \in \Delta_t$. Пусть, кроме того, функция $\varphi(t)$ дифференцируема и строго монотонна на Δ_t. Тогда у функции $\varphi(t)$ существует обратная однозначная функция $\varphi^{-1}(x)$, определенная на промежутке Δ_x.

Теорема 1. Существование на промежутке Δ_x интеграла

$$\int f(x)dx \tag{8}$$

и существование на промежутке Δ_t интеграла

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \tag{9}$$

равносильны, и имеет место формула

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \tag{10}$$

Формула (10) называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле: переменная x заменяется переменной t по формуле $x = \varphi(t)$.

Доказательство. Докажем, что существование первообразной у функции f(x) на Δ_x равносильно существованию первообразной у функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на Δ_t . Пусть у функции f(x) на Δ_x существует первообразная F(x), т.е.

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x),\ x \in \Delta_t \tag{11}$$

Имеет смысл сложная функция F (φ(t)), она является первообразной функции $f(varphi(t))\varphi'(t)$ на Δ_{t}. Действительно, d dtF ((t)) = d F(x) dx ¯ ¯ ¯ ¯ x=(t) d (t) dt = f ((t)) 0 (t). (14) Обратно. Пусть функция f ((t)) 0 (t) имеет первообразную (t), тогда d (t) dt = f ((t)) 0 (t). (15) Покажем, что (1 (x)) является на x первообразной функции f(x). В самом деле, d dx ¡ 1 (x) ¢ = d (t) dt ¯ ¯ ¯ ¯ t=1(x) d 1 (x) dx = (f ((t)) 0 (t))| t=1(x) × × d1 (x) dx = f(x). Итак, интегралы (10) и (11) одновременно существуют или нет. При этом Z f(x)dx = F(x) + C, (16) Z f ((t)) 0 (t)dt = F ((t)) + C, а так как F ((t))| t=1(x) = F(x), имеет равенство (12).

2.2 **Определенный интеграл Римана (определение). Ограниченность интегрируемых функций (с доказательством). Верхние и нижние суммы Дарбу (определения). Верхний и нижний интегралы Дарбу (определения). Критерий Дарбу. Интегрируемость непрерывных функций. Интегрируемость монотонных функций.**

2.3 **Свойства определенного интеграла (сформулировать все, доказать непрерывность интеграла по верхнему пределу). Интегральная теорема о среднем.**

2.4 **Теорема о дифференцировании интеграла по верхнему пределу (с доказательством). Теорема о существовании первообразной (с доказательством). Формула Ньютона-Лейбница (с доказательством). Формула замены переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям.**

2.5 **Определение несобственных интегралов. Формула Ньютона-Лейбница и формула замены переменной для несобственных интегралов.**

2.6 **Несобственные интегралы от неотрицательных функций (лемма и признак сравнения). Критерий Коши сходимости интеграла (с доказательством). Абсолютно сходящиеся интегралы (определение и теорема о сходимости абсолютно сходящегося интеграла).**

2.7 **Определение числового ряда. Необходимый признак сходимости ряда (с доказательством). Критерий Коши сходимости ряда (с доказательством). Ряды с неотрицательными членами (признак сравнения, интегральный признак Коши, радикальный признак Коши, признак Даламбера).**

2.8 **Знакопеременные ряды (признак Лейбница). Абсолютно сходящиеся ряды (определение). Критерий Коши абсолютной сходимости ряда. Условно сходящиеся ряды (определение). Теорема Римана.**

2.9 **Функциональные последовательности и ряды (определения, в том числе, ограниченная последовательность, сходящаяся последовательность, сходящийся ряд, абсолютно сходящийся ряд). Равномерная сходимость функциональной последовательности и функционального ряда (определение и пример). Критерии Коши равномерной сходимости функциональной последовательности (ряда). Признак Вейерштрасса.**

2.10 **Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы (с доказательством), интегрирование, дифференцирование).**

2.11 **Степенные ряды (определение). Первая теорема Абеля (с доказательством). Радиус и круг (интервал) сходимости**

интеграл. Шпаргалка для первокурсника. Высшая математика

3.2 Ряды

Математический анализ, 35 урок, Числовые ряды Математический анализ, 36 урок, Достаточные признаки сходимости