§ 15. Билинейные и квадратичные функции

п. 1 Билинейные и квадратичные функции

Пусть V — векторное пр-во над полем F

Опр. Функция $g: V \times V \to F$ называется билинейной, если она линейна по каждому аргументу (при фиксированном другом):

$$g(k_1 x_1 + k_2 x_2, y) = k_1 g(x_1, y) + k_2 g(x_2, y)$$
$$g(x, l_1 y_1 + l_2 y_2) = l_1 g(x, y_1) + l_2 g(x, y_2)$$

Будем рассматривать только симметричные билинейные ф-ии, т.е.

$$g(x, y) = g(y, x) \qquad x, y \in V$$

Такие билинейные ф-ии наз. скалярными произведениями. Пр-во V, на к-ром задано такое скалярное произведение наз пр-вом с ортогональной геометрией

Опр. Векторы $x, y \in V$, где V — пр-во с ортогональной геометрией, называются ортогональными, если $g(x, y) = 0$

Типичный пример пр-ва с ортогональной геометрией — евклидово пр-во над полем $\mathbb{R}$, скалярное произведение g в к-ром характеризуется доп условием положительности:

$$g(x, x) > 0$$

для всех $x \neq 0$.

Опр Функция $q: V \to F$ называется квадратичной, если

$$q(x) = g(x, x)$$

где g — нек-рая симметричная билинейная ф-ия (скалярное произведение) наз. поляризацией q.

Замечание

Если характеристика поля F ($\mathrm{char}\, F$) отлична от 2 (т.е $1+1\neq 0$), то существует единственная поляризация данной квадратичной ф-ии, а именно

$$g(x,y) = \frac{1}{2}\big(q(x+y) - q(x) - q(y)\big)$$

(вспомним тождество: $xy = \frac{1}{2}\left((x+y)^2 - x^2 - y^2\right)$)

Действительно, если

$$g_1(x,x) = g_2(x,x)$$

для всех $x\in V$, где g_1, g_2 — скалярные произведения, то:

$$\tilde{g}(x,x) = 0$$

для всех $x \in V$, где $\tilde{g} = g_1 - g_2$

Но тогда

$$\tilde{g}(x,y) = 0$$

для любых $x,y\in V$, что следует из рав-ва

$$0 = \tilde{g}(x+y, x+y) = \tilde{g}(x,x) + 2\tilde{g}(x,y) + \tilde{g}(y,y) = 2\tilde{g}(x,y)$$

Таким образом,

$$\tilde{g} \equiv 0$$

т.е. $g_1 = g_2$

Пусть $e_1,\dots,e_n$ — нек-рый базис V, g — скалярное произведение в V, $(x_1,\dots,x_n)^t$, $(y_1,\dots,y_n)^t$ — столбцы координат векторов $x,y\in V$.

Имеем:

$$g(x,y) = g(x_1e_1+\dots+x_ne_n,\ y_1e_1+\dots+y_ne_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\, x_i y_j$$

где $g_{ij} = (e_i, e_j)$. $(i,j = 1,\dots,n)$.

Или:

$$g(x,y) = (x_1 \ldots x_n)\, G \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

где $G = (g_{ij})$ — матрица Грама скалярного произведения g в базисе $e_1, \ldots, e_n$.

В частности,

$$g(x,x) = q(x) = (x_1 \ldots x_n)\, G \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i x_j$$

<u>Опр.</u> Выражения $\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j$ и $\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i x_j$ называются, соответственно, билинейной и квадратичной формами. (от переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ в первом случае и $x_1, \ldots, x_n$ во втором).

Пусть $e_1', \ldots, e_n'$ — другой базис V и T — матрица перехода к нему. Тогда:

$$(e_1' \ldots e_n') = (e_1 \ldots e_n)\, T$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} \qquad (x_1 \ldots x_n) = (x_1' \ldots x_n')\, T^t$$

$$g(x,y) = (x_1 \ldots x_n)\, G \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1' \ldots x_n')\, T^t G T \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$$

$$= (x_1' \ldots x_n')\, G' \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$$

где $G' = T^t G T$ — матрица Грама в новом базисе $e_1', \ldots, e_n'$.

<u>Опр.</u> Рангом скалярного произведения g наз. $\operatorname{rank}(G)$, где G — матрица Грама в нек-ром базисе пр-ва V. g наз. невырожденным, если его ранг равен $n = \dim V$.

<u>ЗАМЕЧАНИЕ</u>

Определения ранга и невырожденности скалярного произведения корректны, т.е. не зависят от выбора базиса.

Это следует из ф-лы $G' = T^t G T$ и утверждения о том, что при умножении на невырожденную матрицу ранг матрицы не меняется.

Опр. Ядром скалярного произведения g называется подпр-во
$$\ker g = \{ x \in V \mid g(x,y) = 0 \quad \forall y \in V \}.$$

Теорема 1

$$\dim \operatorname{Ker} g + \operatorname{rank} g = n$$

Доказательство

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — нек-рый базис V. Тогда
$$\operatorname{Ker} g = \{ x \in V \mid g(x, e_j) = 0, \; j = 1, \dots, n \}$$
В координатах $\operatorname{Ker} g$ задается ОСЛУ:
$$\sum_{i=1}^{n} g_{ij} x_i = 0; \quad j = 1, \dots, n$$

Очевидно, число свободных неизвестных этой системы есть $\dim \operatorname{Ker} g$, а число главных неизвестных есть $\operatorname{rank} g = \operatorname{rank} G$

Отсюда и следует утверждение теоремы.

Следствие

Скалярное произведение g невырожденно $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} g = \{0\}$

.2 Ортогональные базисы

Опр. Ортогональным дополнением к подпр-ву пр-ва V относительно g наз. подпр-во
$$L^{\perp} = \{ x \in V \mid g(x,y) = 0 \quad \forall y \in L \}$$
В частности, $\operatorname{Ker} g = V^{\perp}$.

Опр. Подпр-во L пр-ва V называется невырожденным отн. скалярного произведения g, если сужение g на L является невырожденным скалярным произведением на L.

Опр. Подпр-во L пр-ва V наз. изотропным, если сужение g на L является тождественно нулевым, т.е.
$$g(x,y) = 0$$
для любых $x, y \in L$.

Замечание

Ясно, что $\operatorname{Ker} g$ – изотропное подпр-во

Даже если скалярное произведение g невырожденно на V (т.е. $\operatorname{Ker} g = \{0\}$), относительно g могут существовать нетривиальные изотропные подпр-ва (например, одномерные).

В евклидовом пр-ве (скалярное произведение g положительно) всякое подпр-во невырожденно. и поэтому нетривиальных изотропных подпр-в нет

Лемма

1. Если L невырожденно отн. скалярного произведения g, то
$$V = L \oplus L^{\perp}$$
2. Если L и $L^{\perp}$ невырождены отн скалярного произв. g, то
$$(L^{\perp})^{\perp} = L$$

Доказательство

1. Пусть $x \in L \cap L^{\perp}$. Тогда
$$g(x,y) = 0$$
для всех $y \in L$, т.е. вектор $x \in \operatorname{Ker} \tilde{g}$, где $\tilde{g}$ – сужение скалярного произведения g на подпр-во L.

Т.к. L невырожденно отн. g, то $\operatorname{Ker} \tilde{g} = \{0\}$ и $x = 0$.

Таким образом, $L + L^{\perp} = L \oplus L^{\perp}$.

Пусть $e_1, \dots, e_k$ – некоторый базис подпр-ва L. Дополним его до базиса $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ пр-ва V. Тогда:
$$L^{\perp} = \{x \in V \mid g(x, e_j),\ j = 1, \dots, k\}$$
или, в координатах
$$\sum_{i=1}^{n} g_{ij} x_i = 0 \quad j = 1, \dots, k \qquad (*)$$
Ранг этой ОСЛУ равен k, что следует из невырожденности скал произв-ия g на L.

След-но,

$$\dim L^{\perp} = n-k = n-\dim L$$

т.е.

$$\dim L^{\perp} + \dim L = n = \dim V$$

Отсюда $V = L \oplus L^{\perp}$.

2. Ясно, что $L \subset (L^{\perp})^{\perp}$ (непосредственно следует из определения).

Т.к. по условию $L^{\perp}$ невырожденно, то

$$\dim (L^{\perp})^{\perp} = n - \dim L^{\perp}$$

поскольку и L невырожденно, то

$$\dim L^{\perp} = n - \dim L.$$

Значит,

$$\dim (L^{\perp})^{\perp} = \dim L.$$

Поэтому $(L^{\perp})^{\perp} = L$. См. на обороте

Теорема 2

Пусть $\mathrm{char}\, F \neq 2$ и g - скалярное произведение на V.

Тогда в V существует ортогональный базис $e_1, \dots, e_n$ относительно g, т.е.

$$g(e_i, e_j) = 0 \quad \text{при } i \neq j$$

Доказательство

Индукция по $n \geq 1$

Покажем, что существует такой вектор $e \in V$, что $e \neq 0$ и $g(e,e) \neq 0$. Действительно, пусть $g(x,x) = 0$ для всех $x \in V$.

Но в таком случае $g(x,y) = 0$ для всех $x, y \in V$ (см. рассуждения после опр квадратичной функции), т.е. g тождественно нулевое скалярное произведение и утверждение теоремы тривиально.

Положим $L = \langle e \rangle$. Ясно, что L невырожденно относительно g. По лемме п. 1

<u>Замечание</u> Из доказанного следует, в частности, что

$$\dim L + \dim L^{\perp} = \dim V.$$

Это равенство будет выполняться для <u>любого</u> подпространства L, но при условии невырожденности скалярного произведения на <u>всём</u> пространстве V (ранг системы (*) по-прежнему будет равен k, так как иначе первые k столбцов матрицы (g_{ij}) оказались бы линейно зависимыми). При том же условии будет справедливым и соотношение $(L^{\perp})^{\perp} = L$ (при <u>любом</u> L).

См. стр. 12 в книге: Артин Э. Геометрическая алгебра. М.: Наука, 1969.

имеем

$$V = L \oplus L^{\perp} = \langle e \rangle \oplus V'$$

где $\dim V' = n-1$

К подпр-ву V' применимо предположение индукции, т.е. в нем есть ортогональный базис

Выбрав в V' ортогональный базис и добавив к нему вектор e получим ортогональный базис.

Q: Как практически находить ортогональный базис?

A В евклидовом случае можно применить к произвольному базису процесс ортогонализации Грамма-Шмидта. Иначе:

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ - базис V, причем все подпр-ва $L_m = \langle e_1, \ldots, e_m \rangle$ $(m = 1, \ldots, n)$ являются невырожденными относительно скалярного произведения g.

Будем искать ортогональный базис $e_1', \ldots, e_n'$ в „треугольном виде"

$$e_1' = t_{11} e_1$$

$$e_2' = t_{12} e_1 + t_{22} e_2$$

$$\ldots$$

$$e_n' = t_{1n} e_1 + t_{2n} e_2 + \ldots + t_{nn} e_n$$

Положим $t_{11} = \frac{1}{g_{11}} = \frac{1}{g(e_1, e_1)}$ и пусть $e_1', \ldots, e_{m-1}'$ уже найдены.

Требуется найти e_m', исходя из условия

$$g(e_m', e_j') = 0 \quad (j = 1, \ldots, m-1) \quad (*)$$

Если потребовать, чтобы выполнялось условие

$$g(e_m', e_j) = 0 \quad (j = 1, \ldots, m-1)$$

то условие $(*)$ также будет выполнено

Имеем:

$$\sum_{i=1}^{m} t_{im} g_{ij} = 0 \quad (j = 1, \ldots, m-1)$$

Добавим еще одно условие:

$$g(e_m', e_m) = 1$$

и уравнение

$$\sum_{i=1}^{m} t_{im} g_{im} = 1$$

Полученная СЛУ с неизвестными $t_{1m}, t_{2m}, \dots, t_{mm}$ имеет единственное решение, т.к. по предположению L_m невырожденно, а значит

$$\Delta_m = \det (g_{ij})_{i,j=1}^{m} \neq 0$$

Легко видеть, что

$$t_m = \frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_m} = \boxed{g(e_m', e_m') = g(e_m', t_{1m}e_1 + \dots + t_{mm}e_m) = t_m = \frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_m}}$$

В рез-те получим базис $e_1', \dots, e_n'$, в к-ром матрица Грама скалярного произведения g имеет вид:

$$G' = \begin{pmatrix} \Delta_0/\Delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Delta_{n-1}/\Delta_n \end{pmatrix}, \quad \Delta_0 = 1$$

Таким образом, при сделанных предположениях билинейная форма

$$g(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j$$

может быть приведена к виду

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} x_i' y_i'$$

при помощи треугольного преобразования с матрицей T

$G' = T^t G T$, где

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Этот рез-тат, сформулированный в терминах квадратичной формы носит название теоремы Якоби

Теорема 3 (Якоби)

Если $\Delta_1 \neq 0, \ldots, \Delta_n \neq 0$, то квадратичная форма

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i x_j$$

$$\Delta_m = \det (g_{ij})_{i,j=1}^{m}$$

треугольным невырожденным преобразованием приводится к виду

$$q(x) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_m} (x'_m)^2$$

В общем случае можно применить метод Лагранжа (метод выделения полного квадрата). Считаем, что $\operatorname{char} F \neq 2$.

Пусть дана квадратичная форма

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i x_j$$

Возможны 2 ситуации:

1. Существует ненулевой диагональный эл-нт

Пусть, например, $g_{11} \neq 0$. Имеем:

$$q(x) = g_{11} x_1^2 + x_1 (2 g_{12} x_2 + \ldots + 2 g_{1n} x_n) + q'(x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= g_{11} \left(x_1 + \frac{g_{12}}{g_{11}} x_2 + \ldots + \frac{g_{1n}}{g_{11}} x_n\right)^2 + q''(x_2, \ldots, x_n)$$

где q', q'' – квадратичные формы от переменных $x_2, \ldots, x_n$

Полагая

$$y_1 = x_1 + \frac{g_{12}}{g_{11}} x_2 + \ldots + \frac{g_{1n}}{g_{11}} x_n$$

$$y_2 = x_2, \ldots, y_n = x_n$$

получим

$$q(x) = g_{11} y_1^2 + q''(y_2, \ldots, y_n)$$

2. Все диагональные эл-ты равны нулю

Можно считать, что $g_{12} \neq 0$. Имеем:

$$q(x) = 2 g_{12} x_1 x_2 + x_1 l_1(x_3, \ldots, x_n) +$$
$$+ x_2 l_2(x_3, \ldots, n)$$

где l_1, l_2 – линейные формы относительно указанных переменных.

После замены

$$x_1 = y_1 + y_2 \qquad x_3 = y_3 \qquad \ldots \qquad x_{n-1} = y_{n-1}$$
$$x_2 = y_1 - y_2 \qquad x_4 = y_4 \qquad \qquad x_n = y_n$$

будем иметь

$$q(x) = 2 g_{12} (y_1^2 - y_2^2) + q'(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

где квадратичная форма q' не содержит ни y_1^2, ни y_2^2.

Таким образом, в новых переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$ имеем ситуацию п. 1