Билет 1

Первообразная и неопределенный интеграл. Основные свойства интеграла. Таблица основных неопределенных интегралов. Формула замены переменной(с доказательством). Формула интегрирования по частям.

Определение 1. Первообразная .Функция F называется первообразной функции f на промежутке Δ , если F дифференцируема на Δ и в каждой точке x ∈ Δ

$$F'(x) = f(x).$$

Определение 2. Неопределенный интеграл. Пусть функция f(x) задана на промежутке Δ . Совокупность всех ее первообразных на этом промежутке называется неопределенным интегралом от функции f и обозначается:

$$\int f(x)dx.$$

Основные свойства интеграла:

1.Если функция F(x) дифференцируема на Δ , то

$$\int dF(x) = F(x) + C \quad \text{или} \quad \int F'(x)dx = F(x) + C.$$

2.Пусть функция f(x) имеет первообразную на Δ . Тогда для любого x ∈ Δ имеет место равенство:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

3. Если функции f1 , f2 имеют первообразные на Δ , то функция f1 + f2 имеет первообразную на Δ , причем:

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

4. Если функция f(x) имеет первообразную на Δ , k ∈ R, то функция kf(x) также имеет на Δ первообразную, и при k не равной 0:

$$\int kf(x)dx = \{kF(x) + C\}, \quad k\int f(x)dx = k\{F(x) + C\}.$$

Таблица основных неопределенных интегралов.

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a \neq 1, \quad a > 0, \quad \int e^x dx = e^x + C;$

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C;$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C;$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C;$

8. $\int \mathrm{sh} x dx = \mathrm{ch} x + C;$

9. $\int \mathrm{ch} x dx = \mathrm{sh} x + C;$

10. $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{tgh} x + C;$

11. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = \mathrm{ctgh} x + C;$

12. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C;$

13. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad |x| < a;$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, \quad (|x| > |a|$ для $\sqrt{x^2 - a^2})$.

Формула замены переменной(с доказательством).

Пусть функции f(x) и φ(t) заданы соответственно на промежутках Δx и Δt , причем φ (Δt) = Δx, т.е. имеет смысл сложная функция f (φ(t)), t ∈ Δt . Пусть, кроме того, функция φ(t) дифференцируема и строго монотонна на Δt . Тогда у функции φ(t) существует обратная однозначная функция φ −1 (x), определенная на промежутке Δx.

Теорема 1. Существование на промежутке Δx интеграла:

$$\int f(x)dx$$

и существование на промежутке Δt интеграла

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt$$

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

равносильны, и имеет место формула:

Доказательство: Пусть функция F(x) называется первообразной функции f(x) на Δx, т.е. F'(x) = f(x), x ∈ Δ. Тогда функция $F(\varphi(t))$ первообразная функции $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$, т.к.

$$\left(F'(\varphi(t))\right)' = F'_x\Big|_{x=\varphi(t)} \varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$$

Формула интегрирования по частям.

Теорема 2. Если функции u(x), υ(x) дифференцируемы на некотором промежутке Δ и на этом промежутке существует $\int v du$, то на нем существует интеграл $\int u dv$, причем

$$\int u(x) dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x) du(x).$$