Билет №5

Определение несобственных интегралов. Формула Ньютона-Лейбница и формула замены переменной для несобственных интегралов.

Пусть функция f(x) определена на конечном или бесконечном полуинтервале [a, b),

$-\infty < a < b \le +\infty$, и для любого $\eta \in [a, b)$ интегрируема по Риману на отрезке [a, η].

- Если существует конечный предел функции F(η) = $\int_{\alpha}^{\eta} f(x)\,dx$ при η → b − 0, то этот предел называется несобственным интегралом функции f(x) на промежутке [a,b) :

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\eta \to b} \int_a^{\eta} f(x)\,dx \qquad (1)$$

Если предел (1) существует, то говорят, что несобственный интеграл сходится, в противном случае — расходится. Если несобственный интеграл сходится, то говорят, что функция f(x) интегрируема в несобственном смысле на промежутке [a, b). Возможны два случая: b – конечное число, b = +∞

Если b – конечно и функция f интегрируема по Риману на [a, b], то по свойству непрерывности интеграла с переменным верхним пределом существует:

$$\lim_{\eta \to b} \int_a^{\eta} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Таким образом, определенный ранее интеграл Римана является частным случаем несобственного интеграла. Если b – конечно, то Определение (1) содержательно только если функция f не ограничена в любой окрестности точки b.

Геометрический смысл несобственного интеграла от неотрицательной функции f состоит в том, что он равен площади криволинейной трапеции.

- Если функция f определена на полуинтервале (a, b], −∞ ≤ a < b < +∞ и для любой точки $\xi \in (a, b]$ интегрируема по Риману на отрезке [ξ, b], то несобственный интегралопределяется как предел:

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \to \alpha} \int_{\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \qquad (2)$$

Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция f(x) определена на полуинтервале [a, b) и интегрируема по Риману на любом отрезке [a, η], a ≤ η < b.

- Если f непрерывна на полуинтервале [a, b) и F – какая-либо ее первообразная, то:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b-0) - F(a) \qquad (1)$$

В равенстве (1) либо обе части имеют смысл, и тогда они равны, либо они одновременно не имеют смысла, то есть стоящие в них пределы не существуют. С учетом определений :

$$\int_\alpha^b f(x)\,d_{x=\lim\limits_{\eta\to b} \int_\alpha^\eta f(x)\,dx}; \quad F(b-0) - F(a) = \lim_{\eta\to b} F(\eta) - F(a)$$

Замена переменной в несобственном интеграле.

- Если функция f(x) непрерывна на полуинтервале Δx = [a, b), функция u(t) непрерывно дифференцируема на полуинтервале Δt = [α, β), −∞ < α < β ≤ +∞,u(Δt) ⊂ Δx, a=u(a),$b=\lim\limits_{t\to\beta} u(t)$, то:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(u(t))\,u'(t)\,dt \ (5)$$

причем из существования интеграла, стоящего слева в (5), следует существование интеграла, стоящего справа.

Замечание

Если функция u такова, что обратная функция u^ −1 однозначна и удовлетворяет условиям, аналогичным условиям, наложенным на u и, следовательно, в интеграле в правой части (5) можно сделать замену t = ^ −1 (x), то оба интеграла сходятся или расходятся одновременно.

Примеры:

1) $\int_\alpha^b \frac{dx}{(x-a)^p} = |t = x-a, x = t+a| = \int_0^{b-a} \frac{dt}{t^P}$ - — сходится при p < 1 и расходится при p ≥ 1.
2) $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \left|x = \frac{1}{t}\right| = \int_1^0 \frac{-\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin \vee_0^1 = \frac{\pi}{2}$