п. 4 Приведение к главным осям

Как и в предыдущем пункте, считаем $F = \mathbb{R}$

Пусть V – евклидово пр-во, скалярное произведение в к-ром обозначим $g/g\ (x, y)$

Предположим, что на V задана нек-рая произвол. билинейная ф-ия g при помощи матрицы

Грама $G = (g_{ij})$, где $g_{ij} = g(e_i, e_j)$, $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный относительно скалярного произведения (x, y) базис V.

Теорема 6 (о приведении к главным осям)

Существует ортонормированный базис $e_1', \dots, e_n'$ евклидова пр-ва V, в к-ром матрица Грама G скалярного произведения g является диагональной.

Иными словами, после нек-рого ортогонального преобразования квадратичная ф-ия

$$q(x) = g(x, x)$$

может быть записана в виде

$$q(x) = \lambda_1 (x_1')^2 + \dots + \lambda_n (x_n')^2$$

т.е, как говорят, приведена к главным осям.

Доказательство

Зададим в евклидовом пр-ве V самосопряж. оператор $\varphi: V \to V$ при помощи матрицы G в базисе $e_1, \dots, e_n$

Поскольку базис $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный, а матрица G симметрична, так заданный оператор φ будет самосопряженным

Легко видеть, что

$$q(x) = (\varphi(x), x)$$

для всех $x \in V$ (проверяется непосредственным вычислением в координатах относительно базиса $e_1, \dots, e_n$)

Согласно Теореме 10 § 14 в нек-ром ортонормированном базисе $e_1', \dots, e_n'$ матрица оператора φ будет диагональной:

$$A_\varphi' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Напомним, что $A_\varphi = G$. Имеем:

$$(\varphi(x), x) = (\varphi(x_1' e_1' + \dots + x_n' e_n'), x_1' e_1' + \dots + x_n' e_n') =$$
$$= (\lambda_1 x_1' e_1' + \dots + \lambda_n x_n' e_n', x_1' e_1' + \dots + x_n' e_n') =$$

$A'_\varphi = T^{-1} A_\varphi T = T^t G T$, так как T — ортогональное преобразование (лучше — ортогональная матрица)

$= \lambda_1 (x_1')^2 + \ldots + \lambda_n (x_n')^2$

След-но, $q(x)$ имеет нужный вид.

Пример

Пусть $V = \mathbb{R}^2$ — евклидово пр-во со стандартным скалярным произв. (x, y)

Положим $q(x) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$, где $x = (x_1, x_2)$

Каков вид кривой $q(x) = 1$?

В координатах: $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = 1$.

Д/выяснения этого вопроса необходимо следовать док-ву Теоремы 6.

Рассмотрим нек-рое приложение Теоремы 6:

1. Приведение пары квадратичных форм, одна из к-рых положительно определена к сумме квадратов невырожденным преобразованием.

   Пусть V — вещественное векторное пр-во, на к-ром заданы 2 квадратичные ф-ии $q_1(x)$ и $q_2(x)$, при этом $q_1(x)$ положительно определена, т.е. $q_1(x) > 0$ д/всех $x \in V$, $x \neq 0$.

   Требуется найти такое невырожденное преобразование при к-ром квадратичная форма $q_1(x)$ запишется как

   $(x_1')^2 + \ldots + (x_n')^2$

   а квадратичная форма q_2 как

   $\lambda_1 (x_1')^2 + \ldots + \lambda_n (x_n')^2$

   Это возможно сделать на основе Теоремы 6, т.к. в пр-ве V можно ввести евклидову структуру при помощи квадратичной формы $q_1(x)$ (положить $(x, y) = g_1(x, y)$), где g_1 — билинейная ф-ия, полярная к квадратичной ф-ии q_1).

2. Нахождение угла м/у 2-мя подпр-вами в евклидовом пр-ве.

   Пусть V — евклидово пр-во со скалярным произведением (x, y), L_1, L_2 — подпр-ва V.

Будем считать, что $L_1 \cap L_2 = \{0\}$, что не ограничивает общности рассуждений (см. определение угла м/у подпр-вами в п. 3 §11)

По определению угол φ м/у L_1 и L_2 находится по ф-ле

$$\cos\varphi = \max_{\substack{0 \neq a \in L_1 \\ 0 \neq b \in L_2}} \frac{(a, b)}{|a||b|}$$

Задача вычисления этого максимума может быть сведена к задаче одновременного приведения пары квадратичных форм к сумме квадратов, а именно, потребуется решать задачу об отыскании величины вида

$$\max_{0 \neq x \in V} \frac{q_2(x)}{q_1(x)} = M$$

Имеем после соответствующего невырожд. преобразования:

$$M = \max_{0 \neq x \in V} \frac{q_2(x)}{q_1(x)} = \max_{(0, .., 0) \neq (x_1', .., x_n')} \frac{\lambda_1 (x_1')^2 + .. + \lambda_n (x_n')^2}{(x_1')^2 + .. + (x_n')^2} =$$

$$= \max\{\lambda_1, .., \lambda_n\}$$