## п. 3 Собственные значения и собственные векторы

Пусть $\varphi$ - линейный оператор, матрица которого в нек-ром базисе $b_1, \ldots, b_n$ ($n = \dim V$) имеет диагональный вид:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Действие этого оператора на векторы следующее:

$$\varphi(b_1) = \lambda_1 b_1, \ \varphi(b_2) = \lambda_2 b_2, \ldots, \varphi(b_n) = \lambda_n b_n$$

**Опр.** Спектром линейного оператора $\varphi$ называется мн-во всех его собственных значений.

Спектр называется простым, если он состоит из $n$ различных значений $(n = \dim V)$

**Теорема 7** (о диагонализируемости линейного оператора с простым спектром)

Если $\varphi : V \to V$ линейный оператор с простым спектром, то $\varphi$ - диагонализируемый оператор.

**Лемма**

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - попарно различные собственные значения линейного оператора $\varphi : V \to V$, а $x_1, \dots, x_k$ - соответствующие им собственные векторы

Тогда $x_1, \dots, x_k$ линейно независимы.

**Доказательство**

Пусть

$$l_1 x_1 + \dots + l_k x_k$$

Предположим, что утверждение леммы для числа векторов $< k$. Имеем:

$$0 = l_1 \varphi(x_1) + l_2 \varphi(x_2) + \dots + l_k \varphi(x_k) =$$
$$= l_1 \lambda_1 x_1 + l_2 \lambda_2 x_2 + \dots + l_k \lambda_k x_k$$

След-но, умножив первое рав-во на $-\lambda_1$, добавив ко второму, имеем:

$$l_2 (\lambda_2 - \lambda_1) x_2 + \dots + l_k (\lambda_k - \lambda_1) x_k = 0$$

По предположению $x_2, \dots, x_k$ линейно независимы, поэтому отсюда следует, что

$$l_2 (\lambda_2 - \lambda_1) = \dots = l_k (\lambda_k - \lambda_1) = 0$$

Т.к. $\lambda_2 \neq \lambda_1, \dots, \lambda_k \neq \lambda_1$, то $l_2 = \dots = l_k = 0$
Также $l_1 x_1 = 0$, значит $l_1 = 0$.

**Доказательство теоремы 7**

Спектр оператора содержит $n$ различных собств