## п. 2 Линейная зависимость. Базис и ранг системы векторов

На общий случай без существенных изменений переносится определения пропорциональных векторов, линейной комбинации векторов, тривиальной и нетривиальной линейных комбинаций, линейной выражаемости, линейной зависимости и независимости.

Опр. Векторы $a_1, \dots, a_m \in V$ над линейно зависимыми, если существуют такие скаляры $k_1, \dots, k_m \in F$, ~~что~~ не все равные нулю, что

$$k_1 a_1 + \dots + k_m a_m = 0$$

Теорема 1 (признаки линейной зависимости)

Система векторов линейно зависима, если:

1. Содержит нулевой вектор.
2. Содержит линейно зависимую подсистему.

Теорема 2 (критерий линейной зависимости)

см Теорему 2 §3.

Теорема 3 (основная теорема о линейной зависимости)

см Теорему 3 §3.

Доказательство

аналогично, использует теорию СЛУ над произвольным полем в п. 4. §9

Следствие 1 (иная формулировка теоремы 3)

см Следствие 1 §3.

Следствие 2 теряет смысл.

Опр. Пусть $S: a_1, \dots, a_m$ – конечная система векторов пространства $V$

Базисом $S$ называется такая подсистема $B$, что:

1. $B$ линейно независима;
2. $S$ линейно выражается ч/з $B$

Теорема 4 (о существовании базиса конечной сист. вект.)

см Теорему 4 §3

Теорема 5 (о равномощности различных базисов данной системы векторов)

см Теорему 5 §3

Опр. Рангом системы S называется число векторов в любом ее базисе

Способ отыскания нек-рого базиса системы S, данный в §3 в общем случае не применим

Теорема 6 (о единственности разложения вектора по базису системы векторов)

см.

п. 3 Базис векторного пространства. Конечномерное векторное пространство

Опр. Пусть V - векторное пространство над полем F

Конечная система векторов B наз базисом V, если:

1. B линейно независима.

2. Любой вектор из V линейно выражается ч/з B.

Теорема 7 §3 для произвольного пр-ва не верна, т.к. существуют векторные пр-ва, не имеющие базиса:

Пусть V - векторное пр-во всех бесконечных финитных послед-ней из вещественных чисел

Покажем, что V не имеет базиса.

Пусть, напротив B: $b_1, \ldots, b_n$ - нек-рый базис V.

Тогда:

$$b_1 = (b_{11}, \ldots, b_{1m}, 0, 0, \ldots)$$

$$b_2 = (b_{21}, \ldots, b_{2m}, 0, 0, \ldots)$$

$$\ldots$$

$$b_n = (b_{n1}, \ldots, b_{nm}, 0, 0, \ldots)$$

где m - нек-рое натуральное число

Но в таком случае вектор

2) Пусть любые k лошадей 1 масти

1 2 3 4 5 6 7 8 ... k k+1

$\underbrace{2 \ \dots \ k+1}_{\text{один. масть}}$

$\underbrace{1 \ \dots \ k}_{\text{один. масть}}$ — утверждение не для всех k верно

при k = 1

1 2

# §3. Арифметическое n-мерное векторное пространство

## 1 Определения и примеры

__Опр.__ Арифметический ~~векторное n-мерное пространство~~ n-мерный вектор — упорядоченный набор из n действительных чисел $a=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$

__Пример.__

1. Любое решение СЛУ с n неизвестными есть n-мерный арифметический вектор.
2. Пусть дана матрица размера $m\times n$. Тогда её строки — n-мерные арифметические векторы, столбцы — m-мерные арифметич. векторы.

__Опр.__ $\alpha_i$ из арифметического n-мерного вектора $a=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ называется компонентой этого вектора.

__Опр__ Два вектора $a=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ и $b=(\beta_1,\dots,\beta_n)$ называются равными, если их соответствующие компоненты равны, т.е: $\alpha_i=\beta_i$ для всех $i=(1,\dots,n)$.

Это понятие верно только д/векторов одинаковой размерности.

__Опр.__ Суммой двух векторов $a=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ и $b=(\beta_1,\dots,\beta_n)$ называется вектор $c=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$, где $\gamma_i=\alpha_i+\beta_i$ для всех $i=(1,\dots,n)$.

__Опр.__ Произведением вектора $a=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ на число $k\in R$ называется вектор $d=(\delta_1,\dots,\delta_n)$, где $\delta_i=k\cdot\alpha_i$, $i=(1,\dots,n)$.

Опр. Нулевой вектор – вектор, всеми компонентами n-рого являются 0 ($0=(0,\dots,0)$)

Опр. Вектор, противоположный вектору $a = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ – это вектор $(-\alpha_1,\dots,-\alpha_n)$. Он обозначается $-a$.

Опр. Разностью м/у векторами $a$ и $b$ называется вектор $(a+(-b))$.

Свойства операции сложение:

1. Для любых $a$, $b$ имеем $a+b=b+a$. (коммутативность)
2. Для любых $a, b, c$ $(a+b)+c=a+(b+c)$ (ассоциативность)

Свойство нулевого вектора:

Для любого $a$ $a+0=a$

Свойство противоположного вектора

Для любого $a$ $a+(-a)=0$

Свойства операции умножения вектора на число:

Для любого вектора $a$ и числа $\alpha, \beta$ имеем $(\alpha\cdot\beta)a=\alpha\cdot\beta\cdot a$ (смешанная ассоциативность)

Для любого вектора $a$ $1\cdot a=a$ (нормировка)

Свойства дистрибутивности

1. Для любого $\alpha$ и векторов $a$ и $b$ справедливо $\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b$
2. Для любых чисел $\alpha, \beta$ и вектора $a$ имеем $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$

Доказательства этих свойств вытекают из их определений и из аналогичных св-в операций над числами

Опр. Совокупность всех n-мерных арифметических векторов, рассматриваемая вместе с определенными в ней операциями сложения векторов и умножения векторов на число называется арифметическим n-мерным векторным пространством

Обозначение: $\mathbb{R}^n$

## 2. Линейная зависимость векторов в $\mathbb{R}^N$

Опр. Вектор $b \in \mathbb{R}^n$ называется пропорциональным вектору $a \in \mathbb{R}^n$, если $b = ka$, где $k \in \mathbb{R}$

Опр. Пусть дана система векторов $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$. Линейной комбинацией с коэффициентами $k_1, \dots, k_m$ этой системы векторов называется вектор вида $a = k_1 a_1 + \dots + k_m a_m \in \mathbb{R}^n$. Линейная комбинация называется тривиальной, если $k_1 = \dots = k_m = 0$ (тривиальная линейная комбинация есть нулевой вектор)

Опр. Линейно зависимая система – система векторов $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$, для которой существуют такие коэффициенты $k_1, \dots, k_m$, не все равные нулю, что $k_1 a_1 + \dots + k_m a_m = 0$

Иными словами, существует нетривиальная линейная комбинация векторов системы, равная нулевому вектору

$R^2$ – „плоскость“ $R^3$ – „пространство“

Пример: $R^3$

$a_1 = (1, 0, -1)$

$a_2 = (2, -1, 0)$

$a_3 = (5, -2, -1)$

$a_1 + 2a_2 - a_3 = 0$

Действительно, $a_1 + 2a_2 - a_3 = (0, 0, 0)$

Эти векторы компланарны, т.е расположены в 1 плоскости

Опр. Линейно независимая система – система векторов $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$, к-рая не является линейно зависимой, по другому говоря, если из условия $k_1 a_1 + \dots + k_m a_m = 0$ следует, что $k_1 = \dots = k_m = 0$ (т.е. только тривиальная линейная комбинация этих векторов может быть равна нулевому вектору).

Типичная задача:

Для данной системы векторов выяснить, является ли она линейно зависимой, и если да, то предъявить нетривиальную комбинацию векторов системы, равную нулевому вектору

Пример $\mathbb{R}^3$

$a_1 = (1, 2, -1)$

$a_2 = (2, 1, 0)$

$a_3 = (1, 0, 0)$

Составляем линейную комбинацию этих векторов и приравниваем ее к нулевому вектору

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 = 0$$

Имеем

$$(k_1 + 2k_2 + k_3,\ 2k_1 + k_2,\ -k_1) = (0, 0, 0),$$

т.е.

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + k_3 = 0, \\ 2k_1 + k_2 = 0, \\ -k_1 = 0; \end{cases}$$

эта однородная СЛУ имеет только нулевое решение, значит система векторов $a_1, a_2, a_3$ линейно независима.

Теорема 1 (признаки линейной зависимости)

Система векторов из $\mathbb{R}^n$ линейно зависима, если:

1) она содержит нулевой вектор;

2) она содержит линейно зависимую подсистему векторов.

Доказательство

1) Пусть система имеет вид $0, a_2, \ldots, a_m$. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$1 \cdot 0 + 0 \cdot a_2 + \ldots + 0 \cdot a_m = 0$$

След-но, эта система линейно зависима.

2) Пусть система векторов имеет вид $a_1, \ldots, a_l, \ldots, a_m$, при этом система векторов $a_1, \ldots, a_l$ линейно зависима. Тогда существуют такие $k_1, \ldots, k_l$, не все равные нулю, что $k_1 a_1 + \ldots + k_l a_l = 0$. След-но, $k_1 a_1 + \ldots + k_l a_l + 0 a_{l+1} + \ldots + 0 a_m = 0$, т.е. нашлась нетривиальная линейная комбинация всех векторов системы, равная нулевому вектору.

Пример 1 показывает, что условия 1) и 2) являются лишь достаточными, но не необходимыми.

Теорема 2 (критерий линейной зависимости)

Система векторов является линейно зависимой тогда и только тогда, когда один из векторов системы линейно выражается через остальные.

Примечание

Считаем, что в системе имеется хотя бы 2 вектора.

Вектор линейно выражается ч/з другие векторы, значит является их линейной комбинацией

Доказательство

$\Rightarrow$ Пусть система векторов $a_1, \dots, a_m$ линейно зависима. Тогда $k_1 a_1 + \dots + k_m a_m = 0$ для некоторых $k_1, \dots, k_m$, причем среди последних есть ненулевые. Пусть $k_1 \neq 0$. Тогда $a_1 = -\frac{k_2}{k_1} a_2 + \dots + (-\frac{k_m}{k_1}) a_m$.

$\Leftarrow$ Пусть, например, вектор $a_1$ линейно выражается ч/з векторы $a_2, \dots, a_m$:

$$a_1 = l_2 a_2 + \dots + l_m a_m$$

Тогда:

$$a_1 + (-l_2) a_2 + \dots + (-l_m) a_m = 0$$

Получена нетривиальная линейная комбинация всех векторов, равная нулевому вектору.

3 Основная теорема о линейной зависимости и ее следствия

Пусть в $\mathbb{R}^n$ даны 2 системы векторов:

$$S: a_1, \dots, a_m \qquad (*)$$
$$T: b_1, \dots, b_s$$

Опр. Будем говорить, что система $T$ линейно выражается ч/з систему $S$, если всякий вектор системы $T$ линейно выражается ч/з векторы системы $S$

Лемма Если $T$ линейно выражается ч/з $S$, а $S$ линейно выражается ч/з $R$, то $T$ линейно выражается ч/з $R$ ($T, S, R$ — 3 сист. вект. в $\mathbb{R}^n$)

Доказательство очевидно.

Теорема 3 (основная теорема о лин зависимости)
Пусть даны 2 системы векторов $S$ и $T$ (*)
Если $S > M$ и система $T$ линейно выражается ч/з систему $S$, то система $T$ линейно зависима.

Доказательство

Докажем, что существуют такие не все равные нулю коэффициенты $k_1, \dots, k_S$, что $k_1 b_1 + \dots + k_S b_S = 0$

$T$ линейно выражается ч/з $S$ по условию, значит

$$b_1 = l_{11} a_1 + \dots + l_{1m} a_m$$

$$\dots$$

$$b_S = l_{S1} a_1 + \dots + l_{Sm} a_m$$

Имеем

$$k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_S b_S =$$
$$= (l_{11} k_1 + l_{21} k_2 + \dots + l_{S1} k_S) a_1 +$$
$$+ (l_{12} k_1 + l_{22} k_2 + \dots + l_{S2} k_S) a_2 + \dots +$$
$$+ (l_{1m} k_1 + l_{2m} k_2 + \dots + l_{Sm} k_S) a_m = 0$$

Это равенство будет иметь место в случае, когда:

$$\begin{cases} l_{11} k_1 + \dots + l_{S1} k_S = 0, \\ \dots \\ l_{1m} k_1 + \dots + l_{Sm} k_S = 0, \end{cases} \quad (*)$$

Эту систему равенств можно рассматривать как однородную СЛУ с неизвестными $k_1, \dots, k_S$

Так как ур-ий $m$, а по условию $m < S$, то согласно теореме 4 §1 система (*) имеет ненулевые решения

Взяв произвольное ненулевое решение $(k_1, \dots, k_S)$ мы получим

$$k_1 b_1 + \dots + k_S b_S = 0$$

Следствие 1

Если система векторов из $s$ векторов линейно независима и линейно выражается ч/з систему из $m$ векторов, то $s \le m$.

Доказательство (от противного)

Если $s > m$, то по теореме 3 (основной теореме о линейной зависимости) система из $s$ векторов будет линейно зависимой — противоречие с условием.

Следствие 2

В $\mathbb{R}^n$ любая система, состоящая более чем из $n$ векторов будет линейно зависимой

Доказательство.

Пусть дана система векторов $b_1, \dots, b_s$, где $s > n$ (система T). В пр-ве система $S$ рассмотрим систему так называемых единичных векторов:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$$
$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$
$$\dots$$
$$e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

Применим теорему 3, т.к. очевидно, что любой вектор из $\mathbb{R}^n$ можно выразить ч/з единичные векторы ($a = (a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$).

По теореме 3 векторы $b_1, \dots, b_s$ линейно зависимы.

4 Базис

Опр. Пусть дана система векторов $S$ пр-ва $\mathbb{R}^n$. Ее подсистема $B$ называется базисом $S$, если:

1. $B$ — линейно независимая система
2. $S$ линейно выражается ч/з $B$

Пример $\mathbb{R}^3$

$S$: $a_1 = (1; 2; 1)$, $a_2 = (0; -1; 3)$, $a_3 = (2; 3; 1)$

Проверим, что подсистема $B$ является базисом.

1) линейная незав
2) лин выр

1) Векторы $a_1, a_2$ не пропорциональны, поэтому независимы

2) $a_1 = 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2$
$a_2 = 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2$
$a_3 = 2a_1 + a_2$

Аналогично можно проверить, что подсистемы $a_1, a_3$; $a_2, a_3$ также будут базисами $S$.

<u>Теорема 4</u> (о существовании базиса системы векторов)

Всякая система векторов $S$ пр-ва $\mathbb{R}^n$ имеет базис (при этом не единственный)

<u>Доказательство</u>

Считаем, что в системе $S$ есть ненулевые векторы.

Пусть $a \in S$ – один из них. Тогда система $S$ имеет линейно независимые подсистемы (такой будет, например, подсистема, образованная вектором $a \neq 0$)

Пусть $B$ – линейно независимая подсистема $S$ <u>максимальной</u> „длины".

Докажем, что $B$ – базис $S$

1) $B$ – линейно независимая подсистема по определению

2) Любой вектор из $S$ линейно выражается через $B$

Пусть $B$ $b_1, \dots, b_r$, $a \in S$.

Докажем, что $a$ линейно выражается из $b_1, \dots, b_r$

Для этого рассмотрим подсистему $B'$: $b_1, \dots, b_r, a$.

Эта подсистема линейно зависима, так как иначе противоречие с максимальностью подсистемы $B$

След-но: $k_1 b_1 + \dots + k_r b_r + ka = 0$ для нек-рых $k_1, \dots, k_r, k$, не всех равных нулю.

Заметим, что $k \neq 0$ (иначе $k_1 b_1 + \dots + k_r b_r = 0$, среди коэф есть ненулевой коэффициент – противоречие с линейной независимостью подсистемы $B$)

Тогда

$a = -\frac{k_1}{k} b_1 + \ldots + (-\frac{k_r}{k}) b_r$, т.е. $a$ линейно выражается ч/з $b_1, \ldots, b_r$

След-но, подсистема $B$ является базисом.

Теорема 5

Число векторов в разных базисах системы $S$ одно и то же

Доказательство

Пусть $B_1$, $B_2$ - два базиса системы $S$. Число векторов в $B_1$ есть $m$, число векторов в $B_2$ есть $s$

Так как $B_2$ линейно независима и линейно выражается через $B_1$ (так как $B_1$ - базис), то по следствию 1 теоремы 3 имеем $s \leq m$

Меняя в этом рассуждении $B_1$ и $B_2$ местами получим, что $m \leq s$.

След-но, $m = s$. ▩

Опр Рангом системы векторов $S$ называется число векторов в любом ее базисе.

Обозначение $\operatorname{rank}(S)$ или $r(S)$.

Примечание

Если система векторов состоит только из нулевых векторов, то ее ранг равен нулю

Алгоритм отыскания некоторого базиса данной системы векторов $S$

Пусть $S$: $a_1, \ldots, a_m$

1 Составим линейную комбинацию из векторов $a_1, \ldots, a_m$ с коэффициентами $k_1, \ldots, k_m$ и приравняем ее к нулевому вектору: $k_1 a_1 + \ldots + k_m a_m = 0$

2. Заменим это векторное равенство эквивалентной системой обычных равенств. Пусть:

$a_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n})$,

...

$a_m = (a_{m1}, \ldots, a_{mn})$.

Тогда:

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + \ldots + a_{m1}k_m = 0 \\ \ldots \\ a_{1n}k_1 + \ldots + a_{mn}k_m = 0 \end{cases}$$

3. Приведем эту однородную СЛУ к ступенчатому виду.

4 В качестве базиса системы $S$ можно взять подсистему тех векторов, номера к-рых суть номера главных неизвестных данной однородной СЛУ

Пример $\mathbb{R}^4$ $S$: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$

$a_1 = (1, 2, 3, 4)$,

$a_2 = (0, 1, 0, 0)$,

$a_3 = (1, 1, 3, 4)$,

$a_4 = (0, 0, 1, 1)$,

$a_5 = (-1, -1, 2, 1)$.

$k_1 a_1 + \ldots + k_5 a_5 = 0$

$$\begin{cases} k_1 + k_3 - k_5 = 0, \\ 2k_1 + k_2 + k_3 - k_5 = 0, \\ 3k_1 + 3k_3 + k_4 + 2k_5 = 0, \\ 4k_1 + 4k_3 + k_4 + k_5 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a_1, a_2, a_4$ (т.к. $k_1, k_2, k_3$ - глав. неизв) образуют базис системы $S$

Для того, чтобы выразить небазисные векторы ч/з базисные нужно решить однородную СЛУ

$$\begin{cases} k_1 = -k_3 + k_5 \\ k_2 = k_3 + k_5 \\ k_4 = -5k_5 \end{cases}$$

Проверим при $a_3$:
Положим $k_3 = 1$, $k_5 = 0$
Тогда:

$k_1 = -1 \quad k_2 = 1 \quad k_4 = 0$

$-1a_1 + a_2 + a_3 = 0$
$a_3 = a_1 - a_2$

Аналогично находится для $a_5$:

$a_5 = -a_1 - a_2 + 5a_4$

Обоснование $k_1 a_1 + \ldots + k_m a_m = 0$
Допустим, что главными неизвестными оказались $k_1, \ldots, k_r$.
При этом

$$\begin{cases} k_1 = c_{1,r+1} k_{r+1} + c_{2,r+2} k_{r+2} + \ldots + c_{1m} k_m, \\ \ldots \\ k_r = c_{r,r+1} + \ldots + c_{rm} k_m; \end{cases} \quad (*)$$

Докажем, что векторы $a_1, \ldots, a_r$ образуют базис системы $S$

1) $a_1, \ldots, a_r$ линейно независимы
Пусть $l_1 a_1 + \ldots + l_r a_r = 0$. Запишем это в виде $l_1 a_1 + \ldots + l_r a_r + 0 \cdot a_{r+1} + \ldots + 0 \cdot a_m = 0$
Это ур-ие является частным случаем $k_1 a_1 + \ldots + k a_r$, т.е числа $l_1, \ldots, l_r$ получаются по формулам $(*)$, если положить $k_{r+1} = \ldots = k_m = 0$, т.е числа $l_1, \ldots, l_r$ все равны нулю, т.к выражаются ч/з $k_{r+1}, \ldots, k_m$.

2). $a_{r+1}, \ldots, a_m$ линейно выражаются ч/з $a_1, \ldots, a_r$

Выразим, например $a_m$ ч/з $a_1, \ldots, a_r$
Для этого положим $k_{r+1} = \ldots = k_{m-1} = 0$, $k_m = 1$. Тогда $k_1 a_1 + \ldots + k_r a_r + a_m = 0$, где $k_1, \ldots, k_r$ — найденные по формулам $(*)$

Отсюда $a_m = (-k_1)a_1 + \ldots + (-k_r)a_r$

Итак, $a_1, \ldots, a_r$ – базис $S$.

Теорема 6

Разложение произвольного вектора системы $S$ по ее базису единственно

Доказательство

Согласно условию 2 в определении базиса всякий вектор системы $S$ допускает разложение по базису $B$

$a = k_1 b_1 + \ldots + k_r b_r$,

где $a$ – вектор системы, $b_1, \ldots, b_r$ – базис $B$

Допустим, что имеется еще одно разложение

$a = k_1' b_1 + \ldots + k_r' b_r$

Тогда их разность равна:

$0 = (k_1 - k_1')b_1 + \ldots + (k_r - k_r')b_r$

Так как базис по определению линейно независимая система, то $k_1 - k_1' = \ldots = k_r - k_r' = 0$, следно $k_1 = k_1', \ldots, k_r = k_r'$.

Опр Базисом пространства $\mathbb{R}^n$ называется такая конечная система векторов $B$, что:

1) $B$ – линейно независимая система

2) Любой вектор из $\mathbb{R}^n$ линейно выражается ч/з вектор $B$.

Теорема 7

Базисы пространства $\mathbb{R}^n$ существуют

Доказательство:

Рассмотрим систему единичных векторов

$e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$
$e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$
$\ldots$
$e_n = (0, 0, \ldots, 1)$

Докажем, что эта система явл. базисом, что очевидно ($k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 0$, любой вектор выр ч/з един)