

# Матан. Подготовка к экзамену.

q

June 19, 2021

## Contents

<b>1</b>	<b>Даты</b>	<b>3</b>
1.1	Консультация . . . . .	3
1.2	Экзамен . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Темы</b>	<b>3</b>
2.1	Первообразная и неопределенный интеграл (определения). Свойства интеграла. Таблица основных неопределенных интегралов. Формула замены переменной в неопределенном интеграле (с доказательством). Формула интегрирования по частям. . . . .	3
2.1.1	Опр. 1. . . . .	3
2.1.2	Опр. 2. . . . .	3
2.1.3	Основные свойства интеграла . . . . .	4
2.1.4	След. 1 (Линейность интеграла) . . . . .	5
2.2	Определенный интеграл Римана (определение). Ограниченность интегрируемых функций (с доказательством). Верхние и нижние суммы Дарбу (определения). Верхний и нижний интегралы Дарбу (определения). Критерий Дарбу. Интегрируемость непрерывных функций. Интегрируемость монотонных функций. 7	7
2.3	Свойства определенного интеграла (сформулировать все, доказать непрерывность интеграла по верхнему пределу). Интегральная теорема о среднем. . . . .	7
2.4	Теорема о дифференцировании интеграла по верхнему пределу (с доказательством). Теорема о существовании первообразной (с доказательством). Формула Ньютона-Лейбница (с доказательством). Формула замены переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям. . . . .	7

2.5	Определение несобственных интегралов. Формула Ньютона-Лейбница и формула замены переменной для несобственных интегралов. . . . .	7
2.6	Несобственные интегралы от неотрицательных функций (лемма и признак сравнения). Критерий Коши сходимости интеграла (с доказательством). Абсолютно сходящиеся интегралы (определение и теорема о сходимости абсолютно сходящегося интеграла). . . . .	7
2.7	Определение числового ряда. Необходимый признак сходимости ряда (с доказательством). Критерий Коши сходимости ряда (с доказательством). Ряды с неотрицательными членами (признак сравнения, интегральный признак Коши, радикальный признак Коши, признак Даламбера). . . . .	7
2.8	Знакопеременные ряды (признак Лейбница). Абсолютно сходящиеся ряды (определение). Критерий Коши абсолютной сходимости ряда. Условно сходящиеся ряды (определение). Теорема Римана. . . . .	7
2.9	Функциональные последовательности и ряды (определения, в том числе, ограниченная последовательность, сходящаяся последовательность, сходящийся ряд, абсолютно сходящийся ряд). Равномерная сходимость функциональной последовательности и функционального ряда (определение и пример). Критерии Коши равномерной сходимости функциональной последовательности (ряда). Признак Вейерштрасса. . . . .	7
2.10	Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы (с доказательством), интегрирование, дифференцирование). . . . .	7
2.11	Степенные ряды (определение). Первая теорема Абеля (с доказательством). Радиус и круг (интервал) сходимости степенного ряда (определения). Понятие аналитической функции (определение). Теорема о представлении аналитической функции рядом Тейлора. . . . .	7
2.12	Определение $n$ -мерного арифметического евклидова пространства. Определение $n$ -мерного открытого шара. Предел последовательности в $n$ -мерном пространстве, ограниченное множество в $n$ -мерном пространстве, окрестность бесконечно удалённой точки (определения). . . . .	7

2.13	Внутренняя точка множества, открытое множество, точка прикосновения множества, предельная точка множества, замыкание множества, замкнутое множество, компактное множество, линейно связное множество, выпуклое множество, область (определения). . . . .	7
------	--	---

# 1 Даты

## 1.1 Консультация

2021-06-24 Thu

## 1.2 Экзамен

2021-06-25 Fri

# 2 Темы

## 2.1 Первообразная и неопределенный интеграл (определения). Свойства интеграла. Таблица основных неопределенных интегралов. Формула замены переменной в неопределенном интеграле (с доказательством). Формула интегрирования по частям.

### 2.1.1 Опр. 1.

Функция  $F$  называется первообразной функции  $f$  на промежутке  $\Delta$  , если  $F$  дифференцируема на  $\Delta$  и в каждой точке  $x \in \Delta$

$$(1) \quad F'(x) = f(x)$$

Очевидно, что первообразная  $F(x)$  непрерывна на  $\Delta$ .

### 2.1.2 Опр. 2.

Пусть функция  $f(x)$  задана на промежутке  $\Delta$ . Совокупность всех ее первообразных на этом промежутке называется **неопределенным интегралом от функции  $f$**  и обозначается

$$(2) \quad \int f(x) \, dx$$

Если  $F(x)$  — какая-либо первообразная функции  $f(x)$  на  $\Delta$ , то пишут

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (3)$$

$C$  — произвольная постоянная.

### 2.1.3 Основные свойства интеграла

1. Если функция  $F(x)$  дифференцируема на  $\Delta$ , то

$$\begin{aligned} \int d F(x) &= F(x) \\ +C \text{ или } \int F'(x) dx &= F(x) + C \end{aligned} \quad (4)$$

2. Пусть функция  $f(x)$  имеет первообразную на  $\Delta$ . Тогда для любого  $x \in \Delta$  имеет место равенство:

$$\int_a^x f(x) dx = F(x) - F(a) \quad (5)$$

3. Если функции  $f_1, f_2$  имеют первообразные на  $\Delta$ , то функция  $f_1 + f_2$  имеет первообразную на  $\Delta$ , причем:

$$\int (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx \quad (6)$$

4. Если функция  $f(x)$  имеет первообразную на  $\Delta$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , то функция  $kf(x)$  также имеет на  $\Delta$  первообразную, и при  $k \neq 0$ :

$$\int_k f(x) dx = \{k F(x) + C\}, \quad k \int f(x) dx = k \{F(x) + C\}$$

Т.к.  $C$  – произвольная постоянная и  $k \neq 0$ , то множества  $\{kF(x) + C\}$  и  $k/\{F(x) + C\}$  совпадают.

#### 2.1.4 След. 1 (Линейность интеграла)

Если  $f_1$  и  $f_2$  имеют первообразные на  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$ , то функция  $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$  имеет первообразную на  $[a, b]$ , причем  $\int (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)) dx = \alpha_1 \int f_1(x) dx + \alpha_2 \int f_2(x) dx$ . (7) Доказательство вытекает из свойств 3 и 4.



- 2.2 Определенный интеграл Римана (определение). Ограниченность интегрируемых функций (с доказательством). Верхние и нижние суммы Дарбу (определения). Верхний и нижний интегралы Дарбу (определения). Критерий Дарбу. Интегрируемость непрерывных функций. Интегрируемость монотонных функций.
- 2.3 Свойства определенного интеграла (сформулировать все, доказать непрерывность интеграла по верхнему пределу). Интегральная теорема о среднем.
- 2.4 Теорема о дифференцировании интеграла по верхнему пределу (с доказательством). Теорема о существовании первообразной (с доказательством). Формула Ньютона-Лейбница (с доказательством). Формула замены переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям.
- 2.5 Определение несобственных интегралов. Формула Ньютона-Лейбница и формула замены переменной для несобственных интегралов.
- 2.6 Несобственные интегралы от неотрицательных функций (лемма и признак сравнения). Критерий Коши сходимости интеграла (с доказательством). Абсолютно сходящиеся интегралы (определение и теорема о сходимости абсолютно сходящегося интеграла).
- 2.7 Определение числового ряда. Необходимый признак сходимости ряда (с доказательством). Критерий Коши сходимости ряда (с доказательством). Ряды с неотрицательными членами (признак сравнения, интегральный признак Коши, радикальный признак Коши, признак Даламбера).
- 2.8 Знакопеременные ряды (признак Лейбница). Абсолютно сходящиеся ряды (определение). Критерий Коши абсолютной сходимости ряда. Условно сходящиеся ряды (определение). Теорема Римана.
- 2.9 Функциональные последовательности и ряды (определения, в том числе, ограниченная последовательность, сходящаяся последовательность, сходящийся ряд, абсолютно сходящийся ряд). Равномерная сходимость функциональной последовательности и функционального ряда (определение и пример). Критерии Коши равномерной сходимости функциональной последовательности (ряда). Признак Вейерштрасса.
- 2.10 Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы (с доказательством), интегрирование, дифференцирование).
- 2.11 Степенные ряды (определение). Первая теорема Абеля (с доказательством). Радиус и круг (интервал) сходимости