2. $V_n = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg f(x) \le n \}$

(если $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, $a_n \ne 0$, то $\deg f(x) = n$)

$V_n$ изоморфно $V' = \mathbb{R}^{n+1}$. Здесь $\varphi(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) = (a_0, a_1, \dots, a_n)$

## 3 Координаты вектора в базисе

Пусть $V$ – нек-рое $n$-мерное векторное пространство над полем $F$.

Опр. Координатами вектора $a \in V$ в базисе $b_1, \dots, b_n$ называются коэффициенты в разложении

$$a = k_1 b_1 + \dots + k_n b_n$$

При фиксированном базисе каждому вектору $a \in V$ однозначно сопоставляется набор координат, к-рые записываются в виде столбца

$$a \to \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = (k_1, \dots, k_n)^t$$

Это сопоставление согласовано с операциями над векторами: при сложении векторов их столбцы складываются, а при умножении вектора на скаляр столбец координат умножается на скаляр.

Пример

Рассмотрим $\mathbb{R}^n$, где в кач-ве базиса взят стандартный базис (базис из единичных векторов).

$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$

$e_2 = (0, 1, \dots, 0)$

...

$e_n = (0, 0, \dots, 1)$

Тогда столбец координат произвольного вектора

$a = (a_1, \dots, a_n)$

есть $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_n \end{pmatrix}$

Пусть $n = 3$. Выберем в $\mathbb{R}^3$ след. базис:

$b_1 = (1, 1, 0)$

$b_2 = (0, 1, 1)$

$b_3 = (0, 0, 1)$

Найдем координаты вектора

$a = (1, 2, 3)$

в данном базисе.

Имеем.

$$a = k_1 b_1 + k_2 b_2 + k_3 b_3$$

т.е

$$(1, 2, 3) = k_1 (1, 1, 0) + k_2 (0, 1, 1) + k_3 (0, 0, 1)$$

$$\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_1 + k_2 = 2 \\ k_2 + k_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Замечание

Столбец координат вектора зависит от выбора базиса.

Опр. Пусть $B: b_1, \dots, b_n$ и $B': b_1', b_2', \dots, b_n'$ — 2 базиса $n$-мерного пр-ва $V$.

Матрицей перехода от базиса $B$ к базису $B'$ называется такая матрица, столбцы к-рой суть столбцы координат вектора $B'$ в базисе $B$

Если

$$b_1' = t_{11} b_1 + \dots + t_{n1} b_n,$$

$$b_2' = t_{12} b_1 + \dots + t_{n2} b_n,$$

$$\dots$$

$$b_n' = t_{n2} b_1 + \dots + t_{nn} b_n$$

то

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица перехода от $B$ к $B'$ (от старого к новому).

Положим

$$B = (b_1, \dots, b_n)$$
$$B' = (b_1', \dots, b_n')$$

Тогда матрица перехода $T$ может быть определена следующим матричным равенством:

$$B' = B\,T$$

Теорема 16

Всякая матрица перехода является обратимой матрицей.

Любая обратимая матрица может служить матрицей перехода от некоторого базиса к некоторому другому базису.

Доказательство

1. Пусть $T$ – матрица перехода от $B$ к $B'$. Покажем, что $T$ обратима.

Пусть $T'$ – матрица перехода от $B'$ к $B$. Имеем:

$$B' = B \cdot T \qquad B = B' \cdot T'$$

След-но

$$B = (BT) \cdot T' = B(T\,T')$$

Из теоремы 9 следует, что $T\,T' = E$

Аналогично можно получить рав-во $T'\,T = E$

Отсюда $T' = T^{-1}$ по определению обратной матрицы.

2. Пусть $B: b_1, \dots, b_n$ некоторый базис и $T$ – произвольная обратимая матрица квадратная порядка $n$.

Определим новую систему векторов $B'$ равном

$$B' = B \cdot T$$

Докажем, что $B'$: $b_1', b_2', \ldots, b_n'$ является базисом $V$.

Для этого достаточно показать, что векторы $b_1', \ldots, b_n'$ линейно независимы.

Пусть $b_1', \ldots, b_n'$ линейно зависимы. Тогда линейно зависимыми ~~будут~~ столбцы матрицы $T$:

$$b_1' = t_{11} b_1 + \ldots + t_{n1} b_n$$

$$b_2' = t_{12} b_1 + \ldots + t_{n2} b_n$$

$$\ldots$$

$$b_n' = t_{1n} b_1 + \ldots + t_{nn} b_n$$

$$0 = k_1 b_1' + \ldots + k_n b_n' = k_1 t_{11} b_1 + \ldots + k_1 t_{n1} b_n + \ldots + k_n t_{1n} b_1 + \ldots + k_n t_{nn} b_n = (k_1 t_{11} + \ldots + k_n t_{1n}) b_1 + \ldots + (k_1 t_{n1} + \ldots + k_n t_{nn}) b_n$$

$$\begin{cases} k_1 t_{11} + \ldots + k_n t_{1n} = 0, \\ \ldots \\ k_1 t_{n1} + \ldots + k_n t_{nn} = 0, \end{cases}$$

Это рав-во означает, что линейная комбинация столбцов матрицы $T$ с коэффициентами $k_1, \ldots, k_n$ есть нулевой вектор, причем из $k_1, \ldots, k_n$ не все равны нулю, т.е столбцы $T$ линейно зависимы, однако по условию $T$ обратима, т.е. ее ранг ~~равен~~ полон и она не может иметь линейно зависимые столбцы.

Теорема 17

Пусть $B$ и $B'$ — базисы $n$-мерного пр-ва $V$, в к-рых столбцы координат вектора $a \in V$ суть

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} k_1' \\ \vdots \\ k_n' \end{pmatrix}$$