Вопрос №10. Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы (с док.), интегрирование, дифференцирование).

- Теорема 1 (Непрерывность суммы ряда). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, x∈X, у которого функции $u_n(x)$ непрерывны в точке x_0∈X. Если ряд сходится равномерно на X, то сумма ряда s(x)= $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывна в точке x_0.

  Док-во. Пусть $s_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$, n=1,2,… - частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.
  Зададим $\varepsilon > 0$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно, следовательно $s_n(x) \rightrightarrows s(x)$, т.е. $\exists n_0 : \forall\, n > n_0$, $\forall\, x \in X$ выполняется неравенство
  $$|s(x) - s_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$
  Для всех $x \in U_\delta(x_0) \cap X$ имеем
  $$|s(x) - s(x_0)| = |[s(x) - s_n(x)] + [s_n(x) - s_n(x_0)] + [s_n(x_0) - s(x_0)]| < \varepsilon$$
  что и означает непрерывность функции s(x) в точке x_0
  Замечание 1. В условиях теоремы 1 для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в точке $x_0 \in X$ возможен переход к пределу:
  $$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} u_n(x)$$
- Теорема 2 (Интегрирование ряда).

  C$[a;b]$- класс функций, непрерывных на отрезке $[a;b]$

  $C^1[a;b]$- класс функций, непрерывно дифференц. на $[a;b]$

Пусть даны ф-и $u_n(x) \in C[a;b]$, n=1,2,… и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $[a;b]$. Тогда $\forall\, x_0 \in [a;b]$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{x_0}^{x} u_n(t)dt\right)$ сходится равномерно на $[a;b]$, причем
$$\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\right)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{x_0}^{x} u_n(t)dt\right)$$

- *Ряд непрерывных ф-ий в условиях теоремы 2 можно почленно интегрировать. Интеграл бесконечной суммы = сумме интегралов*
- *Функция f(x)называется непрерывной в точке, если: функция определена в точке и ее окрестности; существует конечный предел функции в точке; этот предел равен значению функции в этой точке.*

- Теорема 3 (Дифференцирование). Пусть дана последовательность ф-й $u_n(x) \in C^1[a;b]$, n=1,2,…, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ сходится равномерно на $[a;b]$. Тогда, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in [a;b]$, то
  $$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

Причем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на $[a;b]$.

Его сумма s(x)= $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ является непрерывно дифференцируемой функцией и $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$.

В условиях Т3 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ можно почленно дифференцировать.