п. 3 Сигнатура скалярного произведения

В этом пункте считаем $F = \mathbb{R}$.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортогональный базис V, в к-ром задано скалярное произведение g.

Опр. Сигнатурой скалярного произведения g в ортогональном базисе $e_1, \ldots, e_n$ наз. тройка

$$(r, s, t). \qquad g(e_1, e_1), g(e_2, e_2), \ldots, g(e_n, e_n)$$

где r — число „положительных квадратов"
s — число „отрицательных квадратов"
t — число „нулевых квадратов"

Теорема 4 (закон инерции)

Сигнатура (r, s, t) не зависит от выбора ортогонального базиса отн. скалярного пр g.

Доказательство

Т.к $r+s=\operatorname{rank}(g)$ – инвариант, то число $t=n-(r+s)$ не зависит от выбора ортогонального базиса.

Пусть $L_0=\operatorname{Ker} g$, Тогда:

$$V=L_0\oplus L_+\oplus L_- = L_0\oplus L'_+\oplus L'_-$$

Здесь $L_+, L_-; L'_+, L'_-$ – подпр-ва, соотв положительным и отрицательным диагональным эл-там матриц Грама двух различных ортогональных базисов.

Нужно док-ть, что $\dim L_+ = \dim L'_+$ и $\dim L_- = \dim L'_-$.

Рассуждая от противного, предположим, что

$$r=\dim L_+ > r'=\dim L'_+$$

Пусть $a_1,\dots,a_r$ – нек-рый базис подпр-ва L_+. Тогда

$$a_i=b_i+c_i+d_i \quad (i=1,\dots,r)$$

где $b_i\in L_0$, $c_i\in L'_+$, $d_i\in L'_-$.

Векторы $c_1,\dots,c_r$ линейно зависимы, т.к. по предположению $r'<r$, т.е.

$$k_1c_1+\dots+k_rc_r=0$$

для нек-рых k_i, среди к-рых есть отличные от нуля.

Отсюда получаем

$$a=b+d$$

где $a=\sum_{i=1}^r k_ia_i$, $b=\sum_{i=1}^r k_ib_i$, $d=\sum_{i=1}^r k_id_i$

При этом $a\neq 0$, т.к $a_i\neq 0$ $(i=1,\dots,r)$ как базисные, среди k_i есть ненулевой.

Полученное рав-во противоречиво, т.к.

$$\underset{a\in L_+,\, a\neq 0}{0<} g(a,a)=\underbrace{g(b,b)}_{=0}+\underbrace{2g(b,d)}_{\substack{=0\\ \text{т.к. } b\in L_0}}+g(d,d)=\underset{\text{т.к. } d\in L_-}{g(d,d)\leq 0}$$

След-но $r=r'$, а значит и $t=t'$.

Обычно закон инерции формулируют в терминах квадратичных форм: если квадратичную форму

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} g_{ij} x_i x_j$$

привести к сумме квадратов

$$\lambda_1 (x_1')^2 + \ldots + \lambda_n (x_n')^2$$

то число положительных, отрицательных, равных нулю коэффициентов не зависит от способа приведения.

Если матрица квадр. формы $G = (g_{ij})_{i,j=1}^{n}$ такова, что

$$\Delta_1 \neq 0, \ldots, \Delta_n \neq 0$$

т. е. все ее главные миноры отличны от нуля, то число отрицательных коэффициентов равно числу перемен знака в числовой послед-ти

$$1, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1}, \Delta_n$$

(следствие теоремы Якоби)

Справедлива также след. теорема:

<u>Теорема 5</u> (критерий Сильвестра)

Квадратичная форма

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i x_j$$

является положительно определенной (т. е. $q(x) > 0$ для всех $x \neq 0$) тогда и только тогда, когда

$$\Delta_1 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$$

<u>Доказательство</u> следует из теоремы Якоби.