## п. 4 Суммы и прямые суммы подпространств

Примером подпространства служит линейная оболочка конечной системы векторов:

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \{ k_1 a_1 + \dots + k_n a_n \mid k_i \in F \ (i = 1, \dots, n) \}$$

**Опр.** Суммой подпространств $L_1, \dots, L_m$ пространства $V$ называется подпространство $L = \{ x_1 + \dots + x_m \mid x_i \in L_i \ (i = 1, \dots, m) \}$

**Обозначение**

$$L = L_1 + \dots + L_m$$

**Замечание**

Так определенное мн-во $L$ действительно является подпространством, что легко следует из характеристического признака подпространства

**Опр.** Сумма $L = L_1 + \dots + L_m$ называется прямой, если всякий вектор $x \in L$ допускает единственное представление в виде $x = x_1 + \dots + x_m$, где $x_i \in L_i$ $(i = 1, \dots, m)$

**Обозначение** $L = L_1 \oplus \dots \oplus L_m$

Примеры

$V = \mathbb{R}^3$

$L_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

$L_2 = \langle (1,1,1) \rangle$

Имеем: $L = L_1 + L_2 = \mathbb{R}^3$

Более того, $\mathbb{R}^3 = L_1 \oplus L_2$

Теорема 18

Если $L_1, .., L_m$ конечномерны, то $L = L_1 + .. + L_m$ также конечномерно.

При этом $\dim L \leq \dim L_1 + . + \dim L_m$

Равенство $\dim L = \dim L_1 + . + \dim L_m$ имеет место тогда и только тогда, когда $L = L_1 \oplus ... \oplus L_m$

Доказательство

Пусть $B_1, .., B_m$ — базисы подпр-в $L_1, ..., L_m$.

Обозначим ч/з $B$ систему векторов, полученную соединением систем векторов $B_1, .., B_m$ (в частности, число векторов в системе $B$ $|B| = |B_1| + .. + |B_m|$, т.е. одинаковые векторы не группируются)

1. Заметим, что $L = L_1 + ... + L_m = \langle B_1 \rangle + .. + \langle B_m \rangle = \langle B \rangle$

Так как размерность $\langle B \rangle$ равна рангу порождающей системы $B$ (в кач-ве базиса линейной оболочки можно взять какой-нибудь базис порождающей системы векторов), а $\operatorname{rank} B \leq |B|$, то ~~[illegible]~~

$$\dim L \leq |B_1| + . . + |B_m| = \dim L_1 + \dim L_m$$

2. Равенство возможно тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank} B = |B| \Longleftrightarrow B$ линейно независимая система $\Longleftrightarrow$ ~~[illegible]~~ $L = L_1 \oplus ... \oplus L_m$

Теорема 19 (критерий прямой суммы)

$L = L_1 \oplus .. \oplus L_m \Longleftrightarrow L_i \cap (L_1 + . . + L_{i-1} + L_{i+1} + L_m) = \{0\}$ для любого $i = 1, ..., m$

Доказательство

$\Rightarrow$ Докажем, например, что

$$L_1 \cap (L_2 + .. + L_m) = \{0\}$$

Пусть $x \in L_1 \cap (L_2 + ... + L_m)$. Тогда $x \in L_1$, $x = x_2 + ... + x_m$, где $x_2 \in L_2, .., x_m \in L_m$

След-но,

$$0 = \underset{L_1}{\underset{\cap}{(-x)}} + \underset{L_2}{\underset{\cap}{x_2}} + .. + \underset{L_m}{\underset{\cap}{x_m}} = 0 + 0 ... + 0$$

Т.е. существует 2 представления нулевого вектора з/з вектора из $L_1, ..., L_m$, но при этом $L$ - прямая сумма, ~~ро~~ след-но эти суммы ~~[illegible]~~ след-но $-x = 0$, $x = 0$, что и требовалось док-ть.

$\Leftarrow$ Пусть все пересечения $L_i \cap (L_1 + ... + L_{i-1} + L_{i+1} + .. + L_m)$ нулевые.

Докажем, что $L = L_1 \oplus .. \oplus L_m$

Пусть $x \in L$ и $x = x_1 + ... + x_m = y_1 + .. + y_m$, где $x_i, y_i \in L_i$ $(i = 1, ..., m)$

Тогда $\underset{L_1}{\underset{\cap}{x_1 - y_1}} = \underset{L_2}{\underset{\cap}{(y_2 - x_2)}} + ... + \underset{L_m}{\underset{\cap}{(y_m - x_m)}} \in L_2 + .. + L_m$

Т.е $x_1 - y_1 \in L_1 \cap (L_2 + ... + L_m) = \{0\}$, след-но $x_1 - y_1 = 0$.

Значит, $x_1 = y_1$. Аналогично доказывается, что $x_2 = y_2, .., x_m = y_m$.

Пример

Сумма $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\} + \langle (1,1,1) \rangle$ является прямой, т.к. эти подпространства имеют нулевое пересечение

Рассмотрим случай $m = 2$

Теорема 20

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 \cap L_2)$$

Доказательство

Считаем, что $L_1, L_2$ конечномерны.

Пусть $b_1, .., b_k$ – базис $L_1 \cap L_2$, $\dim(L_1 \cap L_2) = k$

Дополним линейно независимую систему $b_1, ..., b_k \in L_1, L_2$ до базиса $L_1, L_2$

$$b_1, .., b_k, u_1, .., u_l \quad (\dim L_1 = k + l)$$

$$b_1, ..., b_k, v_1, ..., v_m \quad (\dim L_2 = k + m)$$

Докажем, что векторы $b_1, ..., b_k, u_1, ..., u_l, v_1, ..., v_m$ образуют базис $L_1 + L_2$ (в таком случае будем иметь $k + l + m = (k + l) + (k + m) - k$)

1. Проверим линейную независимость векторов $b_1, .., b_k, u_1, ..., u_l, v_1, ..., v_m$

Пусть $p_1 b_1 + .. + p_k b_k + q_1 u_1 + ... + q_l u_l + r_1 v_1 + .. + r_m v_m = 0$ (*)

$r_1 v_1 + .. + r_m v_m = b$, $q_1 u_1 + ... + q_l u_l = u$, $p_1 b_1 + .. + p_k b_k = b$

$L_2 \ni v = -b - u \in L_1$ –

Так как $v \in L_1$, $v \in L_2$, то $v \in L_1 \cap L_2$, след-но

$$v = s_1 b_1 + ... + s_k b_k$$

и, таким образом,

$$(p_1 + s_1) b_1 + ... + (p_k + s_k) b_k + q_1 u_1 + .. + q_l u_l = 0$$

Поскольку векторы $b_1, .., b_k, u_1, ..., u_l$ линейно независимы, т.к. они образуют базис $L_1$, то, в частности

$$q_1 = ... = q_l = 0$$

И так, $u = 0$. Аналогично доказывается, что $v = 0$. Отсюда и $b = 0$, т.е. линейная комбинация (*) тривиальна

2. Убедимся, что $\langle b_1, ..., b_k, u_1, .., u_l, q_1, ..., q_l \rangle = L_1 + L_2$, т.е. всякий вектор $x \in L_1 + L_2$ представим в виде линейной комбинации указанных векторов

Имеем $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$

Где $x_1, x_2$ линейно выражаются ч/з базисы $L_1$ и $L_2$ соответственно, т.е.

$$x_1 = r_1 b_1 + \dots + r_k b_k + s_1 u_1 + \dots + s_e u_e$$

$$x_2 = p_1 b_1 + \dots + p_k b_k + q_1 v_1 + \dots + q_m v_m$$

След-но $x$ линейно выражается ч/з $b_1, \dots, b_k, u_1, \dots, u_e, v_1, \dots, v_m$

<u>п. 5</u> Фактор пространство

Пусть $V$ – векторное пространство, $L$ – подпр-во $V$

<u>Опр</u> Векторы $x, y \in V$ назовем $L$-эквивалентными, если $x - y \in L$ ($x \overset{L}{\sim} y$)

Отношение $L$-эквивалентности, заданное на мн-ве $V$, является отношением эквивалентности на этом мн-ве, т.е.

1. $x \overset{L}{\sim} x$ для любого $x \in V$
2. Если $x \overset{L}{\sim} y$, то $y \overset{L}{\sim} x$ $\forall x, y \in V$
3. Если $x \overset{L}{\sim} y$, $y \overset{L}{\sim} z$, то $x \overset{L}{\sim} z$ $\forall x, y, z \in V$

Рассмотрим фактор множество $V/\overset{L}{\sim} = V/L$, элементами к-рого служат классы $L$-эквивалентных векторов простр-ва $V$

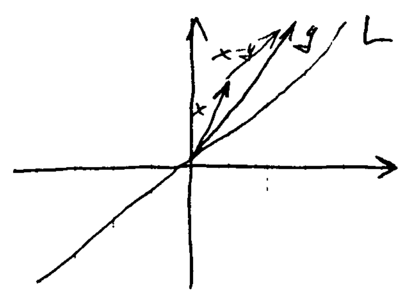
<u>Пример</u>

$V = \mathbb{R}^2$, $L = \langle (1,1) \rangle$

Пусть $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$

$x \overset{L}{\sim} y \Leftrightarrow x - y \in L \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_1 - y_1) - (x_2 - y_2) = 0$




<u>Опр.</u> Множество $x + L = \{x + y \mid y \in L\}$ называется линейным многообразием пр-ва $V$ (здесь $x$ – произвольный вектор из $V$, $L$ – подпр-во $V$)

Определим на фактор-мн-ве $V/L$ операции сложения и умножения на скаляр

Пусть $x + L$, $y + L \in V/L$, $k \in F$. Положим

$$(x + L) + (y + L) = (x + y) + L$$

$$k(x + L) = (kx) + L$$