п 5 Поле рациональных дробей.

Опр Рациональной дробью над полем F называется класс эквивалентности выражения

вида $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x), g(x) \in F[x]$, $g(x) \neq 0$

Выражения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ считаются эквивалентными, если

$f(x)g_1(x) = f_1(x)g(x)$

Можно показать, что это отношение является отношением эквивалентности

Обозначим через $F(x)$ множество всех рациональных дробей от x над полем F На $F(x)$ вводятся (естественным образом) операции сложения и умножения

Относительно этих операций $F(x)$ представляет собой поле рациональных дробей с коэффициентами из поля F

Замечание

Поле рациональных дробей $F(x)$ – частный случай конструкции поля отношений данного целостного кольца K

Имеем $F[x] \subset F(x)$

Опр Рациональная дробь $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ называется правильной, если $\deg f(x) < \deg g(x)$

Любая рациональная дробь представляется (и притом единственным образом) в виде

$$q(x) + \frac{r(x)}{g(x)},$$

где $\dfrac{r(x)}{g(x)}$ – правильная рациональная дробь, $q(x)$ – многочлен (достаточно разделить $f(x)$ на $g(x)$ с остатком)

Опр Рациональная дробь вида $\dfrac{r(x)}{p(x)^k}$, где $r(x)$, $p(x)$ – многочлены, причем $p(x)$

неприводим, $\deg r(x) < \deg p(x)$, $k \in \mathbb{N}$, называется простейшей

Теорема 11

Всякая правильная рациональная дробь может быть представима (и притом единственным образом с точностью до порядка множителей) в виде суммы простейших дробей

Схема доказательства

Пусть дана правильная рациональная дробь $\dfrac{f(x)}{g(x)} \in F(x)$ Представим $g(x)$ в каноническом виде

$$g(x) = p_1(x)^{k_1} \quad p(x)^{k},$$

где $p_i(x)$ – неприводимые над F многочлены

1 Доказываем, что $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ можно представить в виде

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{p_1(x)^{k_1}} + \quad + \frac{f_s(x)}{p_s(x)^{k_s}},$$

где $f_i \in F[x]$, $\deg f_i(x) < k_i \deg p_i(x)$, т е дроби $\dfrac{f_i(x)}{p_i(x)^k}$ – правильные

Это представление единственно

2 Пусть имеется правильная дробь вида $\dfrac{\tilde{f}(x)}{p(x)^k}$, где $p\ (x)$ – неприводимый многочлен

Эту дробь можно представить, и притом единственным образом, в виде

$$\frac{\tilde{f}(x)}{p(x)^k} = \frac{r_1(x)}{p(x)} + \quad + \frac{r_k(x)}{p(x)^k}$$

где $\deg r_i(x) < \deg p(x)$

Здесь $r_k(x)$ находится как остаток от деления $\tilde{f}(x)$ на $p\ (x)$, r_{k-1} – это остаток от деления $\dfrac{f(x) - r_k(x)}{p(x)}$ на $p\ (x)$

<u>Замечание</u>

На практике разложение правильной дроби в сумму простейших обычно находят методом неопределенных коэффициентов

п. 6. Многочлены над $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$

Пусть $F = \mathbb{C}$ Следующую теорему называют основной теоремой алгебры Гаусса

Теорема 12 (теорема Гаусса)

Всякий многочлен $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\deg f(x) > 0$ имеет хотя бы один корень из $\mathbb{C}$

Замечание

Свойство поля $\mathbb{C}$, о котором идет речь в теореме 11, называется алгебраической замкнутостью

Доказательство

См какой-либо курс ТФКП (теория функций комплексного переменного) или стандартное доказательство, основанное на лемме Даламбера

Следствие 1

Всякий неприводимый многочлен $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ является линейным, т е имеет вид

$$p(x) = ax + b,$$

где $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$

Следствие 2

Всякий многочлен $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\deg f(x) > 0$ представляется в виде

$$a(x - x_1)^{k_1} \quad (x - x_s)^{k},$$

где $x_1, \quad, x_s \in \mathbb{C}$ – попарно различные корни f (x) кратности $k_1 \quad k_s$ соответственно

Пусть $F = \mathbb{R}$

Лемма

Пусть $f(x) \in \mathbb{R}[x]$

Если $x_0 \in \mathbb{C}$ – комплексный корень $f(x)$, то $\overline{x}_0$ – также корень $f(x)$

Доказательство

Пусть $f(x) = a_n x^n + \quad + \; + a_1 x + a_0$ Имеем

$$0 = f(x_0) = a_n x_0^n + \; + \quad + a_1 x + a_0$$

Тогда

$$\overline{0} = \overline{a}_n \overline{x}_0^n + \quad + \overline{a}_1 \overline{x}_0 + \overline{a}_0$$

Т к $a_k \in \mathbb{R}$, то $\overline{a}_k = a_k$ $(k = 0, \quad, n)$ и получаем

$$0 = a_n \overline{x}_0^n + \quad + a_1 \overline{x}_0 + a_0,$$

т е $\overline{x}_0$ – корень $f(x)$

Следствие

Всякий неприводимый многочлен $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ либо линеен, либо квадратичен, т е имеет вид

$$p(x) = ax^2 + bx + c,$$

причем $b^2 - 4ac < 0$

Доказательство

Пусть $p\ (x)$ – неприводим над $\mathbb{R}$ и $\deg p(x) > 2$ По теореме Гаусса существует $x_0 \in \mathbb{C}$ – корень $p\ (x)$ По лемме $\overline{x}_0$ – также корень $p\ (x)$ Имеем

$$p(x) = (x - x_0)(x - \overline{x}_0)q(x),$$

где $\deg q(x) > 0$

Ясно, что $q(x) \in \mathbb{R}[x]$, т к $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ и $(x - x_0)(x - \overline{x}_0) = \ = x^2 - (x_0 + \overline{x}_0)x +$

V $+|x_0|^2 \in \mathbb{R}[x]$

Но равенство

$$p(x) = (x^2 - \ -(x_0 + \overline{x}_0)x + |x_0|^2)q(x)$$

противоречит неприводимости многочлена $p\ (x)$

Осталось заметить, что многочлены $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $b^2 - 4ac \geq 0$ не могут быть неприводимыми, т к имеют хотя бы один вещественный корень

Замечание

Если $f(x) \in F[x]$, $\deg f(x) = 2$ или 3, то вопрос о неприводимости $f\ (x)$ эквивалентен вопросу об отсутствии корней $f\,(x)$ в поле F

В общем случае это утверждение неверно

Пример

$F = \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + 4 = \ = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = \ = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = \ = (x^2 - 2x + 2)$
$(x^2 + 2x + 2)$

Следствие 4

Всякий многочлен $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg f(x) > 0$ представим в виде

$$f(x) = a(x - x_1)^{k_1} \quad (x - x_s)^{k_s}\ p_1(x)^{l_1} \quad p_t(x)^{l_t},$$

Где $x_1, \quad, x_s \in \mathbb{R}$ – попарно различные вещественные корни $f\ (x)$ кратности $k_1, \quad, k_s$ соответственно, $p_i(x) = x^2 + c_i x + \quad + d_i \in \mathbb{R}[x]$ – попарно различные многочлены $c_i^2 - 4d_i < 0$ $(i = 1, \quad, t)$

Пусть $F = \mathbb{Q}$ Можно доказать, что неприводимыми над $\mathbb{Q}$ могут быть многочлены любой степени Например, многочлен $p(x) = x^n - 2$, неприводим при любом $n \geq 1$ Для доказательства этого утверждения и других подобных обычно применяют признаки (достаточные условия) неприводимости Наиболее известным из них является так называемый признак Эйзенштейна

Теорема 13 (критерий Эйзенштейна)

Пусть $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ + \quad + a_1 x + a_0$

Предположим, что существует такое простое число p что

1 a_n не делится на p

2 $a_{n-1}, \quad, a_1, a_0$ делятся на p

3 a_0 не делится на p^2

Тогда $f\,(x)$ неприводим над $\mathbb{Q}$