

# Матан. Подготовка к экзамену.

q

June 21, 2021

## Contents

<b>1</b>	<b>Даты</b>	<b>3</b>
1.1	Консультация . . . . .	3
1.2	Экзамен . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Видосы</b>	<b>3</b>
2.1	Интегралы . . . . .	3
2.2	Ряды . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Термины</b>	<b>3</b>
3.1	<b>DONE</b> Бесконечно малая . . . . .	3
3.2	<b>DONE</b> вертикальная асимптота . . . . .	3
3.3	<b>DONE</b> возрастающая (убывающая) функция . . . . .	4
3.4	<b>DONE</b> Второй замечательный предел . . . . .	4
3.5	<b>DONE</b> Дифференциал . . . . .	4
3.6	<b>DONE</b> Дифференцируемая функция . . . . .	4
3.7	<b>DONE</b> евклидово пространство . . . . .	4
3.8	<b>DONE</b> координатная ось . . . . .	4
3.9	<b>DONE</b> Критическая точка . . . . .	5
3.10	<b>DONE</b> локальный максимум (минимум) . . . . .	5
3.11	<b>DONE</b> наклонная асимптота . . . . .	5
3.12	<b>DONE</b> Неопределенный интеграл . . . . .	5
3.13	<b>DONE</b> непрерывная функция . . . . .	5
3.14	<b>DONE</b> несобственный интеграл первого рода . . . . .	6
3.15	<b>DONE</b> неубывающая (невозрастающая) функция . . . . .	6
3.16	<b>DONE</b> неявная функция . . . . .	6
3.17	<b>DONE</b> окрестность точки . . . . .	6
3.18	<b>DONE</b> Определенный интеграл . . . . .	6
3.19	<b>DONE</b> Первообразная . . . . .	7

3.20	<b>DONE</b>	Первый замечательный предел . . . . .	7
3.21	<b>DONE</b>	Предел функции . . . . .	7
3.22	<b>DONE</b>	производная функции . . . . .	7
3.23	<b>DONE</b>	прямоугольная окрестность точки . . . . .	7
3.24	<b>DONE</b>	разрыв второго рода . . . . .	7
3.25	<b>DONE</b>	разрыв первого рода . . . . .	8
3.26	<b>DONE</b>	расстояние между точками . . . . .	8
3.27	<b>DONE</b>	сложнопоказательная функция . . . . .	8
3.28	<b>DONE</b>	Стационарная точка . . . . .	8
3.29	<b>DONE</b>	точка пространства . . . . .	8
3.30	<b>DONE</b>	устранимый разрыв . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Темы</b>		<b>8</b>
4.1	<b>DONE</b>	Все билеты, рукописный вариант . . . . .	8
4.2	<b>DONE</b>	Билет 1 . . . . .	9
4.2.1	<b>DONE</b>	Опр. 1. . . . .	9
4.2.2	<b>DONE</b>	Опр. 2. . . . .	9
4.2.3	<b>DONE</b>	Основные свойства интеграла . . . . .	9
4.2.4	<b>DONE</b>	След. 1 (Линейность интеграла) . . . . .	10
4.2.5	<b>DONE</b>	Формула замены переменной . . . . .	10
4.2.6	<b>DONE</b>	Формула интегрирования по частям . . . . .	12
4.3	<b>TODO</b>	Билет 2 . . . . .	13
4.3.1	<b>DONE</b>	Опр 1. . . . .	13
4.3.2	<b>DONE</b>	Опр 2. . . . .	13
4.4	<b>DONE</b>	Билет 3 . . . . .	14
4.5	<b>DONE</b>	Билет 4 . . . . .	17
4.6	<b>DONE</b>	Билет 5 . . . . .	21
4.7	<b>DONE</b>	Билет 6 . . . . .	24
4.8		Билет 7 . . . . .	27
4.9	<b>DONE</b>	Билет 8 . . . . .	27
4.10		Билет 9 . . . . .	29
4.11	<b>DONE</b>	Билет 10 . . . . .	29
4.12		Билет 11 . . . . .	32
4.13		Билет 12 . . . . .	32
4.14		Билет 13 . . . . .	32
		Pdf версия	

## 1 Даты

### 1.1 Консультация

2021-06-24 Thu

### 1.2 Экзамен

2021-06-25 Fri

## 2 Видосы

### 2.1 Интегралы

Интеграл: Азы интегрирования. Высшая математика

Определенный интеграл. Шпаргалка для первокурсника. Высшая математика

### 2.2 Ряды

Математический анализ, 35 урок, Числовые ряды

Математический анализ, 36 урок, Достаточные признаки сходимости

## 3 Термины

### 3.1 DONE Бесконечно малая

(также: бесконечно малая функция, бесконечно малая величина)

Функция  $\alpha(x)$  называется бесконечно малой при  $x \rightarrow a$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ , т.е. для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что из  $|x - a| < \delta$  следует  $|\alpha(x)| < \varepsilon$

### 3.2 DONE вертикальная асимптота

Прямая  $x = a$  называется вертикальной асимптотой графика функции  $y = f(x)$ , если хотя бы одно из предельных значений  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  или  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$  равно  $+\infty$  или  $-\infty$ .

### 3.3 DONE возрастающая (убывающая) функция

Говорят, что функция  $f(x)$  возрастает (убывает) на  $(a, b)$ , если для любых точек  $x_1 < x_2$  из  $(a, b)$  справедливо неравенство  $f(x_1) < f(x_2)$  ( $f(x_1) > f(x_2)$ )

### 3.4 DONE Второй замечательный предел

формула вида:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

или

$$\lim_{z \rightarrow 0} (1 + z)^{\frac{1}{z}} = e$$

### 3.5 DONE Дифференциал

Если  $y = f(x)$  - дифференцируемая функция, то главная линейная часть  $A \cdot \Delta x$  приращения функции  $f(x)$  называется дифференциалом функции и обозначается  $dy$ .

### 3.6 DONE Дифференцируемая функция

Функция  $y = f(x)$ , определенная в некоторой окрестности точки  $x$ , называется дифференцируемой в точке  $x$ , если ее приращение в этой точке

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

имеет вид

$$\Delta y = A \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x$$

, где  $A = \text{const}$ , а функция  $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

### 3.7 DONE евклидово пространство

Совокупность всех точек  $n$ -мерного пространства, в котором расстояние определяется по формуле

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

, называется  $n$ -мерным евклидовым пространством и обозначается  $R^n$ .

### 3.8 DONE координатная ось

Множество точек  $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$  таких, что  $x_1 = x_2 = \dots = x_{i-1} = x_{i+1} = \dots = x_n = 0$ , называется  $i$ -й координатной осью ( $i = 1, \dots, n$ ) этого пространства. Точка  $0 = (0, \dots, 0)$  называется началом координат.

### 3.9 DONE Критическая точка

Точка  $x_0$  называется критической, если  $f'(x_0) = 0$  или  $f'(x_0)$  не существует.

### 3.10 DONE локальный максимум (минимум)

Говорят, что функция  $y = f(x)$  имеет (или достигает) в точке  $\alpha$  локальный максимум (минимум), если найдется такая окрестность  $U(\alpha)$  точки  $\alpha$ , что для всех  $x \in U(\alpha)$ :

$$f(\alpha) \geq f(x)$$

$$(f(\alpha) \leq f(x))$$

Локальный минимум и локальный максимум объединяют общим названием - локальный экстремум.

### 3.11 DONE наклонная асимптота

Прямая  $y = kx + b$  называется наклонной асимптотой графика функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  ( $-\infty$ ), если

$$f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \alpha(x) = 0$$

### 3.12 DONE Неопределенный интеграл

Неопределенным интегралом от данной функции  $f(x)$  называется множество всех его первообразных

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$$F'(x) = f(x)$$

.

### 3.13 DONE непрерывная функция

Функция называется непрерывной в точке  $x_0$ , если бесконечно малому приращению  $\Delta x$  аргумента  $x$  в точке  $x_0$  соответствует бесконечно малое приращение функции  $\Delta y$ . т.е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

### 3.14 DONE несобственный интеграл первого рода

Сходящимся несобственным интегралом первого рода  $\int_a^\infty f(x)dx$  от функции  $f(x)$  в интервале  $[a, \infty)$  называется предел:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$$

### 3.15 DONE неубывающая (невозрастающая) функция

Говорят, что функция  $f(x)$  не убывает (не возрастает) на  $(a, b)$ , если для любых точек  $x_1 < x_2$  из  $(a, b)$  справедливо неравенство

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

$$(f(x_1) \geq f(x_2))$$

### 3.16 DONE неявная функция

Неявная функция - это функция  $y(x)$  заданная некоторым уравнением  $F(x, y) = 0$ .

### 3.17 DONE окрестность точки

Пусть  $x \in R^n$ ,  $\varepsilon > 0$ . Совокупность всех точек  $y \in R^n$  таких, что  $\rho(x, y) < \varepsilon$ , называется  $n$ -мерным шаром с центром в точке  $X$  радиуса  $\varepsilon$  или  $\varepsilon$ -окрестностью:

$$U(x; \varepsilon) = \{y : y \in R^n, \rho(x, y) < \varepsilon\}$$

.

### 3.18 DONE Определенный интеграл

Определенным интегралом от функции  $f(x)$  на  $[a, b]$  называется предел интегральной суммы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

, если он существует. Здесь  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  и  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .

Обозначение интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx$$

### 3.19 DONE Первообразная

Первообразной от функции  $f(x)$  в данном интервале называется функция  $F(x)$ , производная которой равна данной функции:

$$F'(x) = f(x)$$

### 3.20 DONE Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

### 3.21 DONE Предел функции

(на языке  $\varepsilon$ - $\delta$ ) Число  $A$  называется пределом функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , если существует такое число  $\delta(\varepsilon)$ , что для всех  $x \neq x_0$ , удовлетворяющих условию  $|x - x_0| < \delta$  имеет место неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

### 3.22 DONE производная функции

Производной функции  $y = f(x)$  в данной фиксированной точке  $x$  называется предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

если этот предел существует.

### 3.23 DONE прямоугольная окрестность точки

Прямоугольной окрестностью точки  $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$  называется множество

$$P(x; \delta_1, \dots, \delta_n) = \{(y_1, \dots, y_n) : |x_i - y_i| < \delta_i, 1 \leq i \leq n\}$$

### 3.24 DONE разрыв второго рода

Точка  $a$  называется точкой разрыва второго рода, если в этой точке функция  $f(x)$  не имеет по крайней мере одного из односторонних пределов или хотя бы один из односторонних пределов бесконечен.

### 3.25 DONE разрыв первого рода

Точка  $a$  называется точкой разрыва первого рода, если в этой точке  $f(x)$  имеет конечные, но не равные друг другу правый и левые пределы

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a0} f(x)$$

### 3.26 DONE расстояние между точками

Расстояние между двумя точками  $(x_1, \dots, x_n)$  и  $(y_1, \dots, y_n)$  определяется по формуле:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 y_1)^2 + \dots + (x_n y_n)^2}$$

### 3.27 DONE сложнопоказательная функция

Функция вида  $y = u(x)^{v(x)}$ , ( $u(x) > 0$ ), где  $u$  — основание, и показатель степени зависят от  $x$ , называется сложнопоказательной.

### 3.28 DONE Стационарная точка

Точка  $x_0$  называется стационарной для функции  $f(x)$ , если  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$  и  $f'(x_0) = 0$ .

### 3.29 DONE точка пространства

Точкой  $x$   $n$ -мерного пространства называется упорядоченная совокупность  $n$  действительных чисел  $(x_1, \dots, x_n) = x$ . Число  $x_i$  называется  $i$ -й координатой точки  $x$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

### 3.30 DONE устранимый разрыв

Точка  $a$  называется точкой устранимого разрыва функции  $y = f(x)$ , если предел функции  $f(x)$  в точке  $a$  существует, но в самой точке  $a$  значение  $f(x)$  либо не существует, либо не равно пределу  $f(x)$  в этой точке.

## 4 Темы

### 4.1 DONE Все билеты, рукописный вариант

all



## 4.2 DONE Билет 1

Первообразная и неопределенный интеграл (определения). Свойства интеграла. Таблица основных неопределенных интегралов. Формула замены переменной в неопределенном интеграле (с доказательством). Формула интегрирования по частям.

### 4.2.1 DONE Опр. 1.

Функция  $F$  называется первообразной функции  $f$  на промежутке  $\Delta$ , если  $F$  дифференцируема на  $\Delta$  и в каждой точке  $x \in \Delta$

$$F'(x) = f(x) \quad (1)$$

Очевидно, что первообразная  $F(x)$  непрерывна на  $\Delta$ .

### 4.2.2 DONE Опр. 2.

Пусть функция  $f(x)$  задана на промежутке  $\Delta$ . Совокупность всех ее первообразных на этом промежутке называется **неопределенным интегралом от функции  $f$**  и обозначается

$$\int f(x)dx \quad (2)$$

Если  $F(x)$  — какая-либо первообразная функции  $f(x)$  на  $\Delta$ , то пишут

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (3)$$

$C$  — произвольная постоянная.

### 4.2.3 DONE Основные свойства интеграла

1. Если функция  $F(x)$  дифференцируема на  $\Delta$ , то

$$\int dF(x) = F(x) + C \text{ или } \int F'(x)dx = F(x) + C \quad (4)$$

2. Пусть функция  $f(x)$  имеет первообразную на  $\Delta$ . Тогда для любого  $x \in \Delta$  имеет место равенство:

$$d \int f(x) = f(x)dx \quad (5)$$

3. Если функции  $f_1, f_2$  имеют первообразные на  $\Delta$ , то функция  $f_1 + f_2$  имеет первообразную на  $\Delta$ , причем:

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx \quad (6)$$

4. Если функция  $f(x)$  имеет первообразную на  $\Delta$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , то функция  $kf(x)$  также имеет на  $\Delta$  первообразную, и при  $k \neq 0$ :

$$\int kf(x)dx = \{kF(x) + C\}, k \int f(x)dx = k\{F(x) + C\}$$

Т.к.  $C$  – произвольная постоянная и  $k \neq 0$ , то множества  $kF(x) + C$  и  $kF(x) + C$  совпадают.

#### 4.2.4 DONE След. 1 (Линейность интеграла)

Если  $f_1$  и  $f_2$  имеют первообразные на  $\Delta$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$ , то функция  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$  имеет первообразную на  $\Delta$ , причем

$$\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))dx = \lambda_1 \int f_1(x)dx + \lambda_2 \int f_2(x)dx \quad (7)$$

Доказательство вытекает из свойств 3 и 4.

#### 4.2.5 DONE Формула замены переменной

Пусть функции  $f(x)$  и  $\varphi(t)$  заданы соответственно на промежутках  $\Delta_x$  и  $\Delta_t$ , причем  $\varphi(\Delta_t) = \Delta_x$ , т.е. имеет смысл сложная функция  $f(\varphi(t))$ ,  $t \in \Delta_t$ . Пусть, кроме того, функция  $\varphi(t)$  дифференцируема и строго монотонна на  $\Delta_t$ . Тогда у функции  $\varphi(t)$  существует обратная однозначная функция  $\varphi^{-1}(x)$ , определенная на промежутке  $\Delta_x$ .

1. **Теорема 1.** Существование на промежутке  $\Delta_x$  интеграла

$$\int f(x)dx \quad (8)$$

и существование на промежутке  $\Delta_t$  интеграла

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad (9)$$

равносильны, и имеет место формула

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \quad (10)$$

Формула (10) называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле: переменная  $x$  заменяется переменной  $t$  по формуле  $x = \varphi(t)$ .

2. **Доказательство.** Докажем, что существование первообразной у функции  $f(x)$  на  $\Delta_x$  равносильно существованию первообразной у функции  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$  на  $\Delta_t$ . Пусть у функции  $f(x)$  на  $\Delta_x$  существует первообразная  $F(x)$ , т.е.

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x), \quad x \in \Delta_t \quad (11)$$

Имеет смысл сложная функция  $F(\varphi(t))$ , она является первообразной функции  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$  на  $\Delta_t$ . Действительно,

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = \frac{dF(x)}{dx} \Big|_{x=\varphi(t)} * \frac{d\varphi(t)}{dt} = f(\varphi(t))\varphi'(t) \quad (12)$$

Обратно. Пусть функция  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$  имеет первообразную  $\Phi(t)$ , тогда

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = f(\varphi(t))\varphi'(t) \quad (13)$$

Покажем, что  $\Phi(\varphi^{-1}(x))$  является на  $\Delta_x$  первообразной функции  $f(x)$ . В самом деле,

$$\frac{d}{dt}\Phi(\varphi^{-1}(x)) = \frac{d\Phi(t)}{dt} \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} * \frac{d\varphi^{-1}(x)}{dx} = (f(\varphi(t))\varphi'(t)) \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} * \frac{d\varphi^{-1}(x)}{dx} = f(x).$$

Итак, интегралы (8) и (9) одновременно существуют или нет. При этом

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (14)$$

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$$

а так как  $F(\varphi(t))|_{t=\varphi^{-1}(x)} = F(x)$ , имеет равенство (10).

#### 4.2.6 DONE Формула интегрирования по частям

1. Теорема 2. Если функции  $u(x)$ ,  $v(x)$  дифференцируемы на некотором промежутке  $\Delta$  и на этом промежутке существует  $\int vdu$ , то на нем существует интеграл  $\int u dv$ , причем

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x). \quad (15)$$

Формула (15) называется **формулой интегрирования по частям**.

2. Доказательство. Пусть  $u(x)$ ,  $v(x)$  — дифференцируемы на  $\Delta$ , тогда

$$d(u(x)v(x)) = v(x)du(x) + u(x)dv(x) \Rightarrow u(x)dv(x) = d(u(x)v(x)) - v(x)du(x).$$

Проинтегрируем обе части полученного равенства:

$$\int u(x)dv(x) = \int (d(u(x)v(x)) - v(x)du(x)) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

### 4.3 TODO Билет 2

Определенный интеграл Римана (определение). Ограниченность интегрируемых функций (с доказательством). Верхние и нижние суммы Дарбу (определения). Верхний и нижний интегралы Дарбу (определения). Критерий Дарбу. Интегрируемость непрерывных функций. Интегрируемость монотонных функций.

#### 4.3.1 DONE Опр 1.

Множество точек  $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$  отрезка  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  таких, что

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k_\tau-1} < x_{k_\tau} = b$$

называют **разбиением  $\tau$  отрезка**  $[a, b]$ .

Точки  $x_k$  — точки разбиения  $\tau$ , отрезки  $[x_{k-1}, x_k]$  — отрезки разбиения  $\tau$ ,  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$  — их длины,  $|\tau| = \max\{\Delta x_1, \dots, \Delta x_{k_\tau}\}$  называют **\*/мелкостью разбиения (или диаметром разбиения)\***/.

Отметим два очевидных свойства разбиений:

1. Если  $\tau < \tau', \tau' < \tau''$ , то  $\tau < \tau''$ .
2. Для любых разбиений  $\tau', \tau''$  существует разбиение  $\tau : \tau < \tau', \tau < \tau''$ .

Пусть функция  $f$  определена на  $[a, b]$ ,  $a < b$ ,  $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$  — некоторое разбиение этого отрезка. Всякая сумма  $\sigma_\tau$  вида

$$\sigma_\tau = \sigma_\tau(f, \xi_1, \dots, \xi_{k_\tau}) = \sum_{k=1}^{k_\tau} f(\xi_k) \Delta x_k, \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

называется **интегральной суммой Римана** функции  $f$

#### 4.3.2 DONE Опр 2.

Функция  $f$  называется **интегрируемой по Риману на отрезке**  $[a, b]$ , если существует число  $I$  такое, что для любой последовательности разбиений  $\tau_n = \{x_k^n\}_{k=0}^{k=k_{\tau_n}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , отрезка  $[a, b]$  диаметры которых стремятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} |\tau_n| = 0$ ) и для любого набора точек

$$\xi_k^n \in [x_{k-1}^n, x_k^n], k = 1, 2, \dots, k_{\tau_n}, n \rightarrow \infty$$

существует предел интегральных сумм

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\tau_n}(f, \xi_1^n, \dots, \xi_{k_{\tau_n}}^n) = I$$

Число  $I$  *называют интегралом Римана от функции  $f$  на отрезке  $[a, b]$*  и обозначают  $\int_a^b f(x)dx$

#### 4.4 DONE Билет 3

Свойства определенного интеграла (сформулировать все, доказать непрерывность интеграла по верхнему пределу). Интегральная теорема о среднем. 3

## Свойства определенного интеграла:

1°.

$$\int_a^b dx = b - a$$

2°. Если функция  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ , то она интегрируема на любом отрезке  $[a^*, b^*] \subset [a, b]$ .

3°. **Аддитивность интеграла.**

Пусть функция  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$  и  $a < c < b$ . Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

4°. **Линейность интеграла.**

Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на  $[a, b]$  и  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Тогда  $\exists$

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$$

5°. Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на  $[a, b]$ , то их произведение  $f(x) \cdot g(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ .

6°. **Интегрирование неравенств.**

Если  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$  и  $f(x) \geq 0$  на  $[a, b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

**Следствие свойства 6°.**

Если функции  $f(x)$ ,  $g(x)$  интегрируемы на  $[a, b]$  и  $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

7°. Если функция  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ , то  $|f(x)|$  также интегрируема на  $[a, b]$  и

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx, a < b.$$

8° **Непрерывность интеграла по верхнему пределу.**

Если функция  $f$  интегрируема на  $[a, b]$ , то функции  $F(x)$  непрерывны на  $[a, b]$ .

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt, G(x) := \int_x^b f(t) dt$$

Функция  $F(x)$  называется интегралом с переменным верхним пределом, а функция  $G(x)$  — интегралом с переменным нижним пределом.

**Доказательство.**

Пусть  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ , тогда существует  $c > 0 : \forall x \in [a, b] |f(x)| \leq c$ , т.е.  $f(x)$  ограничена на  $[a, b]$ .

Рассмотрим интеграл

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \quad (1)$$

Равенство (1) верно как при  $\Delta x \geq 0$ , так и при  $\Delta x < 0$ , при условии  $x, x + \Delta x \in [a, b]$ . Приращение функции  $F(x)$  можно записать в виде:

$$\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$$

Проведем оценку:

$$|\Delta F(x)| = \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \right| \leq \int_x^{x+\Delta x} |f(t)| dt \leq C \left| \int_x^{x+\Delta x} dt \right| = C|\Delta x|$$

Тогда  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta F(x) = 0$ , следовательно,  $F(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ .

Непрерывность функции  $G(x)$  следует из непрерывности  $F(x)$ , т.к.

$$\int_a^x f(t) dt + \int_x^b f(t) dt = \int_a^b f(t) dt = const$$

Свойство непрерывности функции  $F(x)$  называют *непрерывностью интеграла  $\int_a^x f(t) dt$  по верхнему пределу интегрирования*. Непрерывность  $G(x)$  — *непрерывность интеграла по нижнему пределу интегрирования*.

**Следствие свойства 8 °**

Если функция интегрируема на  $[a, b]$ , то  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx, 0 < \varepsilon < b - a$

**Доказательство следствия.**

Рассмотрим произвольную точку  $c \in (a, b)$ . Применим свойство 8 ° к отрезкам  $[a, c]$  и  $[c, b]$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{a+\varepsilon}^c f(x) dx + \int_c^{b-\varepsilon} f(x) dx \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^c f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_c^{b-\varepsilon} f(x) dx \\ &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

### Интегральная теорема о среднем

Теорема 1. Пусть

- 1)  $f(x), g(x)$  интегрируемы на  $[a, b]$ ;
- 2) справедливо неравенство  $m \leq f(x) \leq M, x \in [a, b]$ ;
- 3) функция  $g(x)$  не меняет знака на  $[a, b]$ . Тогда существует такое число  $\mu$ ,  $m \leq \mu \leq M$ , что

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx$$



#### 4.5 DONE Билет 4

Теорема о дифференцировании интеграла по верхнему пределу (с доказательством).  
Теорема о существовании первообразной (с доказательством). Формула  
Ньютона-Лейбница (с доказательством). Формула замены переменной в  
определенном интеграле. Формула интегрирования по частям. 4

**4. Теорема о дифференцировании интеграла по верхнему пределу (с доказательством). Теорема о существовании первообразной (с доказательством). Формула Ньютона-Лейбница (с доказательством). Формула замены переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям.**

**Теорема 1** Пусть функция  $f(x)$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$  и непрерывна в точке  $x_0 \in [a, b]$ . Тогда функция  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  дифференцируема в точке  $x_0$  и  $F'(x_0) = f(x_0)$

Доказательство:

Рассмотрим приращение функции  $F(x)$  в точке  $x_0$

$$\begin{aligned} F(x_0) &= \int_a^{x_0} f(t) dt \\ F(x_0 + \Delta x) &= \int_a^{x_0 + \Delta x} f(t) dt \\ \Delta F(x_0) &= \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt, \quad x_0 \in [a, b], \quad x_0 + \Delta x \in [a, b] \end{aligned}$$

Докажем, что

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} &= f(x_0) \\ \left| \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt - \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(x_0) dx \right| = \frac{1}{\Delta x} \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} (f(t) - f(x_0)) dt \right| \leq \\ &= \frac{1}{|\Delta x|} \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} |f(t) - f(x_0)| dt \right| \end{aligned} \quad (1)$$

Функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , следовательно, для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon)$  такое, что  $\forall x: |x - x_0| < \delta, x \in [a, b]$  выполняется неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Рассмотрим  $\Delta x$  такое, что  $|\Delta x| < \delta$

$$\text{Следовательно } |t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon \quad (2)$$

Выберем  $\Delta x$  исходя из условия  $\Delta x < \delta$ . Тогда в силу непрерывности  $f(t)$  в точке  $x_0$  имеем  $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$\left| \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{|\Delta x|} \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} \varepsilon dt \right| = \frac{1}{|\Delta x|} \cdot |\varepsilon| \cdot |\Delta x| = \varepsilon \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)$$

Следовательно  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)$

Замечание:

Функция  $G(x)$  тоже дифференцируема в точке  $x_0$ , причем  $G'(x_0) = -f(x_0)$

$$F(x) + G(x) = \int_a^b f(t) dt$$

$$G(x) = \int_a^b f(t) dt - F(x)$$

**Теорема 2** Всякая непрерывная функция  $f(t)$  на  $[a, b]$  имеет первообразную. Функции вида  $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ ,  $\forall x_0 \in [a, b]$  является первообразной функции  $f(t)$

Доказательство:

Проверим, что функция  $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$  является первообразной функции  $f(x)$ . Если  $x > x_0$ ,  $x \in [a, b]$ , то

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x f(t) dt = -\frac{d}{dx} \int_x^{x_0} f(t) dt = -(-f(x)) = f(x)$$

**Теорема 3** Формула Ньютона-Лейбница: Если функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то для любой её первообразной  $\phi(x)$  справедлива формула  $\int_a^b f(t) dt = \phi(b) - \phi(a)$

Доказательство:

Функция  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  одна из первообразных функции  $f(x)$ .

Тогда

$$\int_a^x f(t) dt = \phi(x) + c \Rightarrow \int_a^a f(t) dt = \phi(a) + c \Rightarrow c = -\phi(a)$$

Тогда

$$\int_a^b f(t) dt = \phi(b) - \phi(a)$$

**Формула замены переменной в определенном интеграле:**

Пусть  $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  непрерывно дифференцируема и строго монотонна, причем  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$ . Тогда если функция  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ , то функция  $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$  интегрируема на  $[\alpha, \beta]$

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

**Формула интегрирования по частям:**

Пусть функции  $U(x)$ ,  $V(x)$ ,  $U'(x)$ ,  $V'(x)$  непрерывны на  $[a, b]$ . Тогда справедлива формула:  $U(x) \cdot V'(x) dx = U(x) \cdot V(x)|_a^b - \int_a^b V(x) \cdot U'(x) dx$

#### 4.6 **DONE** Билет 5

Определение несобственных интегралов. Формула Ньютона-Лейбница и формула замены переменной для несобственных интегралов. 5

## Билет №5

### Определение несобственных интегралов. Формула Ньютона-Лейбница и формула замены переменной для несобственных интегралов.

Пусть функция  $f(x)$  определена на конечном или бесконечном полуинтервале  $[a, b)$ ,  $-\infty < a < b \leq +\infty$ , и для любого  $\eta \in [a, b)$  интегрируема по Риману на отрезке  $[a, \eta]$ .

- Если существует конечный предел функции  $F(\eta) = \int_a^\eta f(x) dx$  при  $\eta \rightarrow b - 0$ , то этот предел называется несобственным интегралом функции  $f(x)$  на промежутке  $[a, b)$ :

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\eta \rightarrow b} \int_a^\eta f(x) dx \quad (1)$$

Если предел (1) существует, то говорят, что несобственный интеграл сходится, в противном случае — расходится. Если несобственный интеграл сходится, то говорят, что функция  $f(x)$  интегрируема в несобственном смысле на промежутке  $[a, b)$ . Возможны два случая:  $b$  — конечное число,  $b = +\infty$

Если  $b$  — конечно и функция  $f$  интегрируема по Риману на  $[a, b]$ , то по свойству непрерывности интеграла с переменным верхним пределом существует:

$$\lim_{\eta \rightarrow b} \int_a^\eta f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Таким образом, определенный ранее интеграл Римана является частным случаем несобственного интеграла. Если  $b$  — конечно, то Определение (1) содержательно только если функция  $f$  не ограничена в любой окрестности точки  $b$ .

Геометрический смысл несобственного интеграла от неотрицательной функции  $f$  состоит в том, что он равен площади криволинейной трапеции.

- Если функция  $f$  определена на полуинтервале  $(a, b]$ ,  $-\infty \leq a < b < +\infty$  и для любой точки  $\xi \in (a, b]$  интегрируема по Риману на отрезке  $[\xi, b]$ , то несобственный интеграл определяется как предел:

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\xi \rightarrow a} \int_\xi^b f(x) dx \quad (2)$$

### Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция  $f(x)$  определена на полуинтервале  $[a, b)$  и интегрируема по Риману на любом отрезке  $[a, \eta]$ ,  $a \leq \eta < b$ .

- Если  $f$  непрерывна на полуинтервале  $[a, b)$  и  $F$  — какая-либо ее первообразная, то:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b-0) - F(a) \quad (1)$$

В равенстве (1) либо обе части имеют смысл, и тогда они равны, либо они одновременно не имеют смысла, то есть стоящие в них пределы не существуют. С учетом определений :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow b} \int_a^{\eta} f(x) dx; \quad F(b-0) - F(a) = \lim_{\eta \rightarrow b} F(\eta) - F(a)$$

Замена переменной в несобственном интеграле.

- Если функция  $f(x)$  непрерывна на полуинтервале  $\Delta x = [a, b)$ , функция  $u(t)$  непрерывно дифференцируема на полуинтервале  $\Delta t = [\alpha, \beta)$ ,  $-\infty < \alpha < \beta \leq +\infty$ ,  $u(\Delta t) \subset \Delta x$ ,  $a = u(a)$ ,  $b = \lim_{t \rightarrow \beta} u(t)$ , то:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(u(t)) u'(t) dt \quad (5)$$

причем из существования интеграла, стоящего слева в (5), следует существование интеграла, стоящего справа.

#### Замечание

Если функция  $u$  такова, что обратная функция  $u^{-1}$  однозначна и удовлетворяет условиям, аналогичным условиям, наложенным на  $u$  и, следовательно, в интеграле в правой части (5) можно сделать замену  $t = u^{-1}(x)$ , то оба интеграла сходятся или расходятся одновременно.

Примеры:

$$1) \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \left| t = x-a, x=t+a \right| = \int_0^{b-a} \frac{dt}{t^p} \quad - \text{сходится при } p < 1 \text{ и расходится при } p \geq 1.$$

$$2) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}} = \left| x = \frac{1}{t} \right| = \int_1^0 \frac{-\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\frac{1}{t} \sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

#### 4.7 DONE Билет 6

Несобственные интегралы от неотрицательных функций (лемма и признак сравнения). Критерий Коши сходимости интеграла (с доказательством). Абсолютно сходящиеся интегралы (определение и теорема о сходимости абсолютно сходящегося интеграла). 6



б) Несобственные интегралы от неотрицательных функций (лемма и признак сравнения). Критерий Коши сходимости интеграла (с доказательством). Абсолютно сходящиеся интегралы (определение и теорема о сходимости абсолютно сходящегося интеграла)

**Лемма 1.** Пусть  $f(x) \geq 0$  на полуинтервале  $[a, b)$ . Интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  сходится тогда и только тогда, когда существует  $c > 0$  такое, что для любого  $\eta \in [a, b)$  выполняется неравенство  $\int_a^\eta f(x)dx \leq c$ .

**Теорема 1. (Признак сравнения).**

Пусть  $0 \leq g(x) \leq f(x)$ ,  $x \in [a, b)$ . Тогда:

- 1) Если Интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  -сходится, то сходится и интеграл  $\int_a^b g(x)dx$ ;
- 2) если Интеграл  $\int_a^b g(x)dx$ -расходится, то расходится и интеграл  $\int_a^b f(x)dx$

**Следствие 1.(Признак сравнения в предельной форме)**

Пусть  $0 \leq g(x)$  и  $0 \leq f(x)$ , для любого  $x \in [a, b)$  и существует  $(\exists)$  конечный или бесконечный

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Тогда:

- 1) Если  $0 \leq k < +\infty$ , то  $\int_a^b f(x)dx$  и  $\int_a^b g(x)dx$  сходятся или расходятся одновременно;
- 2) Если  $k=0 \rightarrow$  из сходимости  $\int_a^b g(x)dx$  следует сходимость  $\int_a^b f(x)dx$ ;
- 3) Если  $k=+\infty$ , тогда из расходимости интеграла  $\int_a^b f(x)dx$  следует расходимость;

**Теорема 2.( Критерий Коши)**

Несобственный интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  сходится, тогда и только тогда, когда для любого  $(\forall) \varepsilon > 0$  существует  $(\exists) \eta \in [a, b)$ , что для любых  $\eta', \eta''$ ,  $\eta < \eta' < \eta''$ ,

$$\left| \int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

**Доказательство.** По определению несобственного интеграла  $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \rightarrow \beta-0} \int_a^\eta f(x)dx = \lim_{\eta \rightarrow \beta-0} \varphi(\eta)$  по критерию Коши существование  $\lim_{\eta \rightarrow \beta-0} \varphi(\eta) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists a < \eta < b : \forall \eta', \eta'',$

$\eta < \eta' < \eta''$  выполняется неравенство  $|\varphi(\eta') - \varphi(\eta'')| < \varepsilon$

$$|\varphi(\eta') - \varphi(\eta'')| = \int_a^b f(x)dx - \int_a^{\eta'} f(x)dx = \int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx \Leftrightarrow \left| \int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

### **Абсолютно сходящиеся интегралы**

**Определение** Несобственный интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл  $\int_a^b |f(x)|dx$ .

**Теорема 3.** Если несобственный интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  абсолютно сходится, то он сходится.

#### **Замечание !!!!**

Утверждение обратное теореме 3 неверное, то есть из обычной сходимости не следует абсолютная сходимость.

**Замечание!!** Если интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  абсолютно сходится, а функция  $g(x)$  интегрируема по Риману на любом отрезке  $[a, \eta], \forall \eta \in (a, b)$  и ограничена на  $[a, b)$ . Тогда  $\int_a^b f(x)g(x)dx$  абсолютно сходится.

#### 4.8 Билет 7

Определение числового ряда. Необходимый признак сходимости ряда (с доказательством). Критерий Коши сходимости ряда (с доказательством). Ряды с неотрицательными членами (признак сравнения, интегральный признак Коши, радикальный признак Коши, признак Даламбера).

#### 4.9 DONE Билет 8

Знакопеременные ряды (признак Лейбница). Абсолютно сходящиеся ряды (определение). Критерий Коши абсолютной сходимости ряда. Условно сходящиеся ряды (определение). Теорема Римана. 8

*Вопрос № 8. (Тема 13) Знакопеременные ряды (признак Лейбница). Абсолютно сходящиеся ряды (определение). Критерий Коши абсолютной сходимости ряда. Условно сходящиеся ряды (определение). Теорема Римана.*

- *Теорема 1 (Признак Лейбница). Если последовательность  $\{u_n\}$  убывает ( $\{u_n\} \geq \{u_{n+1}\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ) и  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$  сходится, причем, если  $s$  — сумма ряда, а  $s_n$  — его частичная сумма, то для любых  $n = 1, 2, \dots$  выполняется неравенство  $|s_n - s| \leq u_{n+1}$  (2)*  
*Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$  знакочередующийся. Из условий  $\{u_n\} \geq \{u_{n+1}\}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  следует, что  $u_n \geq 0$ .*

- *Опр-е 1 Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$*

- *Теорема 2 (Критерий Коши абсолютной сходимости ряда)*

*Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  сходится абсолютно  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): \forall n > N, \forall$  целого  $p \geq 0$  ( $\sum_{k=1}^p |u_{n+k}| < \varepsilon$ )*

*Теорема 3 Если ряд абсолютно сходится, то он сходится. Данное утверждение следует из неравенства:  $|\sum_{k=1}^p u_{n+k}| \leq \sum_{k=1}^p |u_{n+k}|$*

- *Опр-е 2 Сходящийся, но не абсолютно, ряд называется условно сходящимся.*

- *Теорема Римана. Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$   $u_n \in R$  сходится условно, то  $\forall S \in R$  можно так переставить члены этого ряда, что сумма получившегося ряда будет равна  $S$ .*

*Теорема Римана показывает, что свойства коммутативности сложения для конечных сумм не переносится на ряды. Если ряд сходится условно, то сумма зависит от порядка слагаемых.*

#### 4.10 Билет 9

Функциональные последовательности и ряды (определения, в том числе, ограниченная последовательность, сходящаяся последовательность, сходящийся ряд, абсолютно сходящийся ряд). Равномерная сходимость функциональной последовательности и функционального ряда (определение и пример). Критерии Коши равномерной сходимости функциональной последовательности (ряда). Признак Вейерштрасса.

#### 4.11 DONE Билет 10

Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы (с доказательством), интегрирование, дифференцирование). 10

Вопрос №10. Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы (с док.), интегрирование, дифференцирование).

- **Теорема 1 (Непрерывность суммы ряда).** Пусть дан ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ,  $x \in X$ , у которого функции  $u_n(x)$  непрерывны в точке  $x_0 \in X$ . Если ряд сходится равномерно на  $X$ , то сумма ряда  $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ .

**Док-во.** Пусть  $s_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ ,  $n=1,2,\dots$  - частичные суммы ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ .

Зададим  $\varepsilon > 0$ . Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  сходится равномерно, следовательно  $s_n(x) \Rightarrow s(x)$ , т.е.  $\exists n_0 : \forall n > n_0, \forall x \in X$  выполняется неравенство

$$|s(x) - s_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Для всех  $x \in U_\delta(x_0) \cap X$  имеем

$$|s(x) - s(x_0)| = |[s(x) - s_n(x)] + [s_n(x) - s_n(x_0)] + [s_n(x_0) - s(x_0)]| < \varepsilon$$

что и означает непрерывность функции  $s(x)$  в точке  $x_0$

**Замечание 1.** В условиях теоремы 1 для ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  в точке  $x_0 \in X$  возможен переход к пределу:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x)$$

- **Теорема 2 (Интегрирование ряда).**

$C[a; b]$ - класс функций, непрерывных на отрезке  $[a; b]$

$C^1[a; b]$ - класс функций, непрерывно дифференц. на  $[a; b]$

Пусть даны ф-и  $u_n(x) \in C[a; b]$ ,  $n=1,2,\dots$  и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  сходится равномерно на  $[a; b]$ .

Тогда  $\forall x_0 \in [a; b]$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{x_0}^x u_n(t) dt \right)$  сходится равномерно на  $[a; b]$ , причем

$$\int_{x_0}^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{x_0}^x u_n(t) dt \right)$$

- ❖ Ряд непрерывных ф-ий в условиях теоремы 2 можно почленно интегрировать.

*Интеграл бесконечной суммы = сумме интегралов*

- ❖ Функция  $f(x)$  называется непрерывной в точке, если: функция определена в точке и ее окрестности; существует конечный предел функции в точке; этот предел равен значению функции в этой точке.

- **Теорема 3 (Дифференцирование).** Пусть дана последовательность ф-й  $u_n(x) \in C^1[a; b]$ ,  $n=1,2,\dots$ , и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$  сходится равномерно на  $[a; b]$ . Тогда, если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  сходится хотя бы в одной точке  $x_0 \in [a; b]$ , то

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

Причем ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  сходится на  $[a; b]$ .

Его сумма  $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  является непрерывно дифференцируемой функцией и  $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ .

В условиях ТЗ ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  можно почленно дифференцировать.

#### **4.12 Билет 11**

Степенные ряды (определение). Первая теорема Абеля (с доказательством).  
Радиус и круг (интервал) сходимости степенного ряда (определения).  
Понятие аналитической функции (определение). Теорема о представлении  
аналитической функции рядом Тейлора.

#### **4.13 Билет 12**

Определение  $n$ -мерного арифметического евклидова пространства. Определение  
 $n$ -мерного открытого шара. Предел последовательности в  $n$ -мерном пространстве,  
ограниченное множество в  $n$ -мерном пространстве, окрестность бесконечно  
удалённой точки (определения).

#### **4.14 Билет 13**

Внутренняя точка множества, открытое множество, точка прикосновения  
множества, предельная точка множества, замыкание множества, замкнутое  
множество, компактное множество, линейно связное множество, выпуклое  
множество, область (определения).