п. 6. Самосопряженные и ортогональные операторы в евклидовом пространстве

Предположим, что V – евклидово пространство Тогда V и V^* канонически изоморфны и эти пространства, следовательно, можно отождествить
Значит, можно считать, что сопряженный оператор φ^* действует в том же пространстве что и исходный оператор φ Таким образом, сопряженный оператор φ^* может быть определен так

$$\left(\varphi^*(y), x\right) = \left(y, \varphi(x)\right),$$

где $x, y \in V$ и внешние скобки обозначают операцию скалярного умножения, заданную в V
Если $a_1, \ \ , a_n$ – некоторый базис V, $a_1^*, \ \ , a_n^*$ – сопряженный базис V, т е

$$\left(a_i^*, a_j\right) = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

то матрица A_{φ^*} оператора φ^* в базисе, сопряженном $a_1^*, \ \ , a_n^*$, равна A_φ^t, где A_φ – матрица оператора φ в базисе $a_1, \ \ , a_n$
В случае ортонормированного базиса имеем $a_j^* = a_j$ (т е сопряженный базис совпадает с исходным) и переход к сопряженному оператору наиболее прост он состоит в транспонировании матрицы исходного оператора – $A_{\varphi^*} = A_\varphi^t$

<u>Опр</u> Оператор $\varphi \ V \to V$ называется самосопряженным (или симметричным) если

$$\varphi^* = \varphi$$

Для самосопряженных операторов имеем

$$\left(\varphi(y), x\right) = \left(y, \varphi(x)\right)$$

где $x, y \in V$

В координатной форме условие самосопряженности выражается следующим образом $A_\varphi = A_\varphi^t$, т е матрица оператора φ в ортонормированном базисе является симметричной

<u>Лемма</u>

У самосопряженного оператора $\varphi \ V \to V$ есть вещественное собственное значение
<u>Доказательство</u>

Рассмотрим квадратичную функцию

$$q(x) = \left(\varphi(x), x\right),$$

где $x \in V$
На «сфере» $S = \left\{x \in V \mid |x| = 1\right\}$ эта функция $q(x)$ принимает минимальное значение (как и любая непрерывная на S функция)

$$\min_{x \in S} q(x) = \ = \min_{x \in S}\left(\varphi(x), x\right) = \ = \varphi\left(\varphi(x_0), x_0\right) = \ = q(x_0) = \lambda_0,$$

где $|x_0| = 1$
Положим $\psi = \varphi - \lambda_0 \varepsilon$ Имеем $\left(\psi(x), x\right) \geq 0$ для всех $x \in V$ Ясно что ψ – самосопряженный оператор Кроме того, $\left(\psi(x_0), x_0\right) = 0$
На самом деле, $\psi(x_0) = 0$, т е x_0 – собственный вектор с собственным значением λ_0
Пусть $\psi(x_0) \neq 0$, тогда $\left(\psi(x_0), y\right) \neq 0$ для некоторого $y \in V$

Рассмотрим вектор $x = x_0 + ty$ $(t \in \mathbb{R})$ Имеем

$$\left(\psi(x), x\right) = \ = \left(\psi(x_0) + t\psi(x_0), x_0 + ty\right) = \ = \left(\psi(x_0), x_0\right) + t\left(\psi(x_0), y\right) +$$
$$+t\left(\psi(y), x_0\right) + t^2\left(\psi(y), y\right) = \ = 2t\left(\psi(x_0), y\right) + \ +t^2\left(\psi(y), y\right) \geq 0$$

для всех t

Это невозможно, поскольку $\left(\psi(x_0), y\right) \neq 0$ – противоречие

Другое доказательство. Пусть A_φ — матрица симметричного оператора $\varphi: V \to V$ в каком-нибудь базисе. Характеристическое уравнение $\det(A_\varphi - \lambda E) = 0$ имеет комплексный корень $\lambda = \alpha + i\beta$. Пусть X — ненулевой столбец комплексных чисел, такой, что $A_\varphi X = \lambda X$. Положим $X = X_1 + i X_2$, где X_1, X_2 — вещественные столбцы; тогда

$$\begin{cases} A_\varphi X_1 = \alpha X_1 - \beta X_2, \\ A_\varphi X_2 = \beta X_1 + \alpha X_2 \end{cases}$$

Пусть $x_1, x_2 \in V$ — векторы со столбцами координат X_1, X_2 соответственно. Тогда

$$\begin{cases} \varphi(x_1) = \alpha x_1 - \beta x_2, \\ \varphi(x_2) = \beta x_1 + \alpha x_2 \end{cases}$$

Имеем $(\varphi(x_1), x_2) = (x_1, \varphi(x_2))$, что равносильно $\beta(|x_1|^2 + |x_2|^2) = 0$. Отсюда $\beta = 0$, т.е. $\lambda \in \mathbb{R}$.

Замечание. Попутно доказано, что линейный оператор $\varphi: V \to V$ в вещественном векторном пространстве V имеет либо одномерные, либо двумерные инвариантные подпространства (это $L = \langle x_1, x_2 \rangle$). При $\beta \neq 0$ векторы x_1, x_2 линейно независимы.

Лемма 2

Пусть L – инвариантное подпр-во относительно самосопряженного оператора $\varphi: V \to V$. Тогда $L^{\perp}$ также является инвариантным подпр-вом относительно φ.

Доказательство

Имеем $\varphi(L) \subset L$. Нужно док-ть, что из условия $x \in L^{\perp}$ следует, что $\varphi(x) \in L^{\perp}$.

Так как φ – самосопряженный оператор, то

$$(\varphi(u), v) = (u, \varphi(v))$$

для любых $u, v \in V$

Докажем, что $(\varphi(x), y) = 0$ для любого $y \in L$. Действительно,

$$(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)) = 0$$

поскольку $x \in L^{\perp}$, а $\varphi(y) \in L$

Теорема 10

Пусть $\varphi: V \to V$ – самосопряженный оператор в евклидовом пр-ве V. Тогда существует ортонормированный базис, в к-ром матрица оператора φ диагональна

Доказательство

По Лемме 1 существует вектор $e_1 \in V$ единич. длины, к-рый является собственным для оператора $\varphi: V \to V$.

Значит, $L = \langle e_1 \rangle$ – инвариантное одномерное подпр-во

По Лемме 2 $L^{\perp}$ – инвариантное подпр-во, при этом $V = L \oplus L^{\perp}$

Рассматривая φ на подпр-ве $L^{\perp}$, размерность к-рого равна $n-1 < n$, и, рассуждая по индукции, найдем ортонормированный базис $e_2, \dots, e_n$ подпр-ва $L^{\perp}$, в к-ром матрица φ диагональна.

Тогда $e_1, \dots, e_n$ – ортонормированный базис V, в к-ром оператор φ задается диагональной матрицей.

Замечание

Собственные векторы самосопряженного оператора, соответствующие различным собственным значениям, образуют ортогональную систему.

Это следует из леммы 2, но также может быть доказано непосредственно.

Пусть x, y — собственные векторы (принадлежащие λ_1, λ_2, причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Имеем:

$$(\varphi(x), y) = (\lambda_1 x, y) = \lambda_1 (x, y)$$
$$\parallel$$
$$(y, \varphi(y)) = (x, \lambda_2 y) = \lambda_2 (x, y)$$

След-но,

$$(\lambda_2 - \lambda_1)(x, y) = 0$$

т.е.

$$(x, y) = 0$$

__Опр.__ Линейный оператор $\varphi: V \to V$ евклидова пр-ва V называется ортогональным, если

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$$

для любых $x, y \in V$.

Иными словами, ортогональное преобразование — это то, которое сохраняет скалярное произведение.

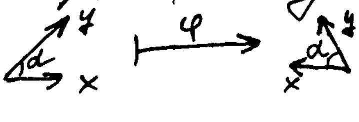
Можно показать, что д/ ортогональности линейного оператора достаточно выполнения следующего условия:

$$|\varphi(x)| = |x|$$

для любого $x \in V$

Замечание

Ясно, что ортогональное преобразование сохраняет угол м/у векторами



п. 4. Нормальная жорданова форма

Если $x \in V$ – собственный вектор линейного оператора $\varphi\ V \to V$, подпространство L = <x> обладает следующим свойством инвариантности $\varphi(L) \subset L$, где $\varphi(L) = \{\varphi(x) \mid x \in L\}$ – образ подпространства L относительно действия оператора φ

Опр Подпространство L пространства V называется инвариантным относительно линейного оператора $\varphi(L) \subset L$, если $\varphi(L) \subset L$

Выберем в L базис $b_1, \ldots, b_n$ ($n = \dim L$) и дополним его до базиса всего пространства V $b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots, b_n$ ($n = \dim L$) В этом базисе матрица оператора φ имеет вид

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} A_1 & A_0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

где A_1 – матрица порядка k

Предположим теперь, что $V = L_1 \oplus L_2$, где L_1 и L_2 – инвариантные подпространства Тогда в подходящем базисе (а именно, в базисе, полученном соединением базисов подпространств L_1 и L_2)

Матрица оператора φ имеет вид

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

Опр Матрица вида

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ & & \\ 0 & & A_m \end{pmatrix}$$

называется блочно-диагональной (блоки A_i ($i = 1, \ldots, m$) – это квадратные матрицы порядка n_i, расположенные на главной диагонали, вне этих блоков находятся нули)

Таким образом, если имеет место разложение пространства V в прямую сумму нескольких инвариантных подпространств $V = L_1 \oplus \ldots \oplus L_m$, где L_i (i = 1, …, m) – инвариантное относительно φ подпространство, то матрица φ имеем блочно-диагональный вид

В частности, диагонализируемые операторы допускают разложение пространства V в прямую сумму одномерных инвариантных подпространств

Примеры

1. $\{0\}$, V – тривиальные инвариантные подпространства
2. $\operatorname{Ker}\varphi$, $\operatorname{Im}\varphi$ – инвариантные подпространства
3. Пусть оператор $\psi\ V \to V$ перестановочен с оператором φ, т е $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi$ тогда подпространства $\operatorname{Ker}\psi$, $\operatorname{Im}\psi$ инвариантные подпространства относительно действия оператора φ