$\forall y \in L_1 + L_2$. Тогда, в частности, это верно $\forall y \in L_1$ и $\forall y \in L_2$, т.е. $x \in L_1^\perp$ и $x_2 \in L_2^\perp$, а значит $x \in L_1^\perp \cap L_2^\perp$

4. Пусть $L_1^\perp = \tilde{L}_1$, $L_2^\perp = \tilde{L}_2$.

$$(L_1 + L_2)^\perp = \tilde{L}_1 \cap \tilde{L}_2$$

$$\left((L_1 + L_2)^\perp\right)^\perp = (\tilde{L}_1 \cap \tilde{L}_2)^\perp$$

$$L_1 + L_2 = (\tilde{L}_1 \cap \tilde{L}_2)^\perp$$

$$\tilde{L}_1^\perp + \tilde{L}_2^\perp = (\tilde{L}_1 \cap \tilde{L}_2)^\perp$$

5. Выберем в L нек-рый базис $b_1, \ldots, b_k$ и дополним его до базиса $b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots, b_n$ пр-ва V.

Применим к этому базису $b_1, \ldots, b_n$ процесс ортогонализации. Получим ортогональный базис $b_1', \ldots, b_n'$

Имеем:

$L = \langle b_1, \ldots, b_k \rangle = \langle b_1', \ldots, b_k' \rangle$,

$L^\perp = \langle b_{k+1}', \ldots, b_n' \rangle$ (т.к. $b_{k+1}', \ldots, b_n'$ ортогон. $b_1', \ldots, b_k'$ и всякий вектор из V разл. по $b_1', \ldots, b_n'$)

Очевидно, что $L \oplus L^\perp = V$

п. 3 Геометрия евклидова пространства

Теорема 5 (неравенство Коши-Буняковского)

Пусть V - евклидово пр-во, $\dim V = n$. Тогда

$(a,b)^2 \le (a,a)\cdot(b,b) \quad \forall a, b \in V$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда a и b линейно зависимы (пропорциональны).

Доказательство

Если $b = 0$, то нер-во очевидно.

Будем считать, что $b \ne 0$. Рассмотрим вектор

$$x = a + t b$$

где $t \in \mathbb{R}$

Имеем

$$0 \le (x, x) = (a + tb, a + tb) = (a,a) + 2abt + (b,b)t^2 = f(t)$$

$D = 4(a,b)^2 - 4(a,a)(b,b) \le 0 \Rightarrow (a,b)^2 \le (a,a)(b,b)$

Следствие 1

$|(a,b)| \le \sqrt{(a,a)} \cdot \sqrt{(b,b)}$ (*)

Опр Длиной вектора $a \in V$ называется величина $\sqrt{(a,a)}$

Обозначение $|a|$

Следствие 2 (нер-во треугольника)

$|a+b| \le |a| + |b|$

Доказательство

$|a+b| \le |a| + |b| \Leftrightarrow |a+b|^2 \le |a|^2 + 2|ab| + |b|^2$

$(a+b, a+b) \le (a,a) + 2|a||b| + (b,b)$

$(a,a) + 2(a,b) + (b,b) \le (a,a) + 2|a||b| + (b,b)$

$(a,b) \le |a||b| = \sqrt{(a,a)}\sqrt{(b,b)}$

Это нер-во явл. следствием нер-ва (*)

Опр Пусть векторы $a, b \in V$ ненулевые

Угол φ м/у этими векторами определяется из рав-ва

$$\cos\varphi = \frac{(a,b)}{|a||b|}$$

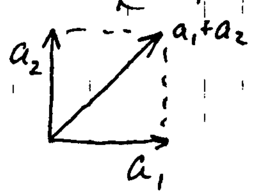
Замечание

Это определение корректно, т.к. $\left|\frac{(a,b)}{|a||b|}\right| \le 1$ по Следствию 1. Теоремы 5.

Теорема 6 (теорема Пифагора)

Пусть векторы $a_1, \dots, a_m$ образуют ортогональную систему. Тогда:

$$|a_1 + \dots + a_m|^2 = |a_1|^2 + \dots + |a_m|^2$$



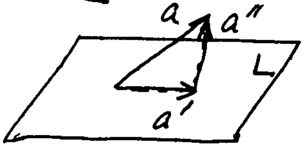
Доказательство

$|a_1 + .. + a_m|^2 = (a_1 + .. + a_m, a_1 + .. + a_m) =$

$= (a_1, a_1) + \ldots + (a_m, a_m) = |a_1|^2 + \ldots + |a_m|^2$

Пусть L — подпр-во V, $a \in V$. Имеем $V = L \oplus L^{\perp}$, след-но $a = a' + a''$, $a' \in L$, $a'' \in L^{\perp}$

Здесь a'' — так называемая ортогональная составляющая вектора a, a' — ортогональная проекция a на L



Пусть L — подпр-во V, $a \in V$

Угол φ м/у a и L определяется из рав-ва

$$\cos\varphi = \max_{0 \neq b \in L} \frac{(a,b)}{|a||b|} = \frac{|a'|}{|a|}$$

где a' — ортогональная проекция a на L.

<u>Опр.</u> Пусть L_1, L_2 — подпр-ва V

Если $L_1 \cap L_2 = \{0\}$, то угол φ м/у L_1 и L_2 определяется рав-вом:

$$\cos\varphi = \max_{\substack{0 \neq a \in L_1 \\ 0 \neq b \in L_2}} \frac{(a,b)}{|a||b|}$$

иначе $L = L_1 \cap L_2 \neq \{0\}$ и углом м/у L_1 и L_2 считается угол м/у $L_1 \cap L^{\perp}$ и $L_2 \cap L^{\perp}$

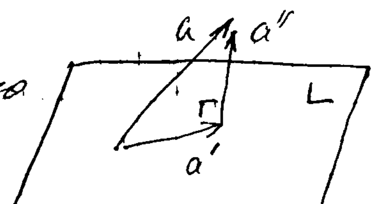
<u>Замечание</u>

Можно показать, что $(L_1 \cap L^{\perp}) \cap (L_2 \cap L^{\perp}) = \{0\}$.

Нахождение ортогональной проекции и орт. составл. вектора

Пусть $L = \langle b_1, \ldots, b_k \rangle$, $b_1, \ldots, b_k$ линейно независимы

Ортогональную проекцию можно представить в виде



$$a' = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$$

Где коэффициенты $x_1, \ldots, x_n$ подлежат определению

Имеем:

$$a'' = a - a' = a - x_1 b_1 - \quad - x_k b_k$$

ортогонален векторам $b_1, \ldots, b_k$, т.е.

Экстремальное свойство ортогональной составляющей. $\min\limits_{b \in L} |a-b| = |a-a'| = |a''|$.

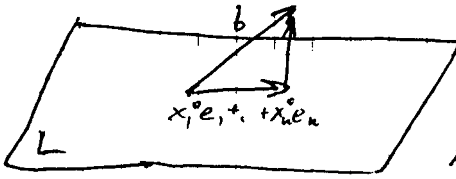
<u>Доказательство</u> Имеем $|a-b|^2 = |a-a'+a'-b|^2 =$
$= |a''+(a'-b)|^2 = |a''|^2 + |a'-b|^2 \geqslant |a''|^2$,
причем равенство возможно только при $b = a'$. $\square$

Докажем, что $\max\limits_{0 \neq b \in L} \dfrac{(a,b)}{|a| \cdot |b|} = \dfrac{|a'|}{|a|}$. Пусть $a' \neq 0$.

Имеем $\dfrac{(a,b)}{|a| \cdot |b|} = \dfrac{(a'+a'', b)}{|a| \cdot |b|} = \dfrac{(a', b)}{|a| \cdot |b|} \leqslant$
$\leqslant \dfrac{|a'| \cdot |b|}{|a| \cdot |b|} = \dfrac{|a'|}{|a|}$, причем равенство возможно только при $b = ka'$, где $k > 0$

$$x_1e_1+\dots+x_ne_n=b$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_j^0-b_i\Big)^2}=|x_1^0e_1+\dots+x_n^0e_n-b|$$



Графическое представление ситуации при наименьшем среднеквадратичном отклонении

$L=\langle e_1,\dots,e_n\rangle$, $\dim L=n$

Наименьшее среднеквадратичное отклонение будет в том случае, когда в качестве $x_1^0,\dots,x_n^0$ взяты координаты ортогональных проекции вектора b на подпространство $L=\langle e_1,\dots,e_n\rangle$

Опр. Пусть даны векторы $b_1,\dots,b_n$ в n-мерном евклидовом пр-ве V

Предположим, что они линейно независимы и заданы своими координатами

$$\begin{pmatrix}t_{11}\\ \dots\\ t_{n1}\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}t_{1n}\\ \dots\\ t_{nn}\end{pmatrix}$$ в нек-ром ортонормированном базисе.

Тогда объем параллелепипеда $\Pi(b_1,\dots,b_n)=\{x_1b_1+\dots+x_nb_n \mid 0\le x_i\le 1,\ i=1,\dots,n\}$, натянутого на векторы $b_1,\dots,b_n$ наз число

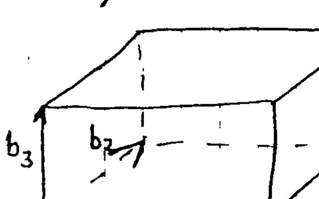
$$|\det(T)|$$

где

$$T=\begin{pmatrix}t_{11} & \dots & t_{1n}\\ \dots & \dots & \dots\\ t_{n1} & \dots & t_{nn}\end{pmatrix}$$

Пример

Пусть $b_1,\dots,b_n$ — ортогональный базис евклидова пр-ва V



В качестве ортонормированного базиса возьмем тот, к-рый получается нормировкой базиса $b_1,\dots,b_n$.

Тогда матрица T примет вид:

$$T=\begin{pmatrix} |b_1| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |b_2| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |b_n| \end{pmatrix}$$

След-но

$$V=|\det T|=|b_1||b_2|\cdot\ldots\cdot|b_n|$$

Теорема 7

Объем параллелепипеда $\Pi(b_1,..,b_n)$ равен

$$\sqrt{\det(G(b_1,\dots,b_n))}$$

где $G(b_1,\dots,b_n)$ — матрица Грама скалярного произведения в базисе $b_1,\dots,b_n$, т.е.

$$G=\begin{pmatrix} (b_1,b_1) & \dots & (b_1,b_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ (b_n,b_1) & \dots & (b_n,b_n) \end{pmatrix}$$

Замечание

Отсюда следует, в частности, корректность определения объема параллелепипеда, т.е. независимость от выбора ортонормированного базиса

Доказательство

Пусть $e_1,\dots,e_n$ — тот ортонормированный базис, о к-ром идет речь в определении объема

Тогда матрица T — это матрица перехода от базиса $e_1,..,e_n$ к базису $b_1,\dots,b_n$

Имеем:

$$G=T^t\cdot E\cdot T$$

Перейдем к определителям.

$$\det G=\det(T^tT)=\det(T^t)\cdot\det(T)=$$
$$=(\det T)^2$$

Извлекая квадратный корень из обоих частей рав-ва получим доказываемое выражение