Опр. Векторы $x, y \in V$ называются ортогональными, если $(x, y) = 0$

Опр. Система векторов $a_1, \dots, a_m$ пр-ва V наз. ортогональной, если

$$(a_i, a_j) = 0 \text{ при } i \neq j, \; i, j = (1, \dots, m).$$

Теорема 1

Ортогональная система векторов, не содержащая нулевых векторов, является линейно независимой

Доказательство:

Пусть векторы $a_1, \dots, a_m$ отличны от нулевого и образуют ~~ортогональ~~ ~~ую~~ -ьную систему.

Докажем их линейную независимость

Пусть $k_1 a_1 + \dots + k_m a_m = 0$ Покажем, что, например, $k_1 = 0$.

Умножим скалярно обе части рав-ва на a_1

$$0 = (k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m, a_1) =$$
$$= k_1 (a_1, a_1) + k_2 \overset{\text{ортогон.}}{(a_2, a_1)}^{=0} + \dots + k_m \overset{\text{ор-огон.}}{(a_m, a_1)}^{=0} =$$
$$= k_1 (a_1, a_1)$$

По св-ву положит-ти т.к. $a_1 \neq 0$, $(a_1, a_1) > 0$, след-но $k_1 = 0$.

п. 2 Евклидово пространство

Опр. Конечномерное векторное пр-во V над полем $\mathbb{R}$, в к-ром задана нек-рое скалярное умножение векторов, называется Евклидовым пространством

Теорема 2

Любое конечномерное векторное пр-во V над полем F можно превратить в евклидово пространство.

Доказательство

Пусть $\dim V = n$, $b_1, \dots, b_n$ – нек-рый базис V

Формула $(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ (где $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_n \end{pmatrix}$ – столбцы координат векторов x, y в данной