	2	3	-2	0	1
-1	2	1	-3	3	-2

$\underbrace{2 \quad 1 \quad -3 \quad 3}_{q(x)}$ $\underbrace{-2}_{r}$

$$f(x) = (x+1)(2x^3 + x^2 - 3x + 3) - 2$$

Из сказанного выше следует, что деление с остатком на двучлен $x - a$ всегда возможно, причем единственным образом

Опр. Пусть $f(x) \in K[x]$

Элемент $a \in K$ является корнем многочлена $f(x)$, если $f(a) = 0$

Замечание

Если $a \in K$, то символом $f(a)$ обозначается результат подстановки в выражение $f(x)$ вместо формальных переременной x ее значение a:

$$f(a) = a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \dots + a_1 a + a_0 \in K$$

Если $K \subset L$, то, очевидно, $K[x] \subset L[x]$
Поэтому можно говорить о корнях многочлена $f(x) \in K[x]$, принадлежащих L

Теорема 2 (теорема Безу)

Многочлен $f(x) \in K[x]$ делится на $x - a \Leftrightarrow f(a) = 0$, т.е. a - корень $f(x)$

Доказательство

Разделим $f(x)$ на $x - a$ с остатком

$$f(x) = (x - a)\, q(x) + r$$

Подставив в это равенство $x = a$, получим:

$$0 = f(a) = r$$

Опр. Корень $a \in K$ многочлена $f(x) \in K[x]$ называется k-кратным, если $f(x)$ делится на $(x-a)^k$, но не делится на $(x-a)^{k+1}$

Корни кратности 1 называются простыми, остальные корни называются кратными.

Теорема 3 (о числе корней многочлена)

Пусть $f(x) \in K[x]$ и $n = \deg f(x) > 0$

Тогда число корней многочлена $f(x)$ с учетом их кратностей не превосходит n

Доказательство

Индукция по $n \geq 1$

База индукции очевидна. Предположим, что утверждение доказано для всех многочленов степени меньше n и пусть $f(x)$ — произвольный многочлен степени n

Докажем утверждения для многочлена $f(x)$
Если многочлен $f(x)$ не имеет корней, то доказывать нечего

Иначе многочлен $f(x)$ имеет некоторый корень $a \in K$ Пусть a — корень кратности $k \geq 1$, т.е

$$f(x) = (x-a)^k g(x)$$

причем $g(a) \neq 0$ и $\deg g(x) < \deg f(x)$

По предположению индукции число корней многочлена $g(x)$ с учетом их кратности не превосходит $\deg g(x)$.

Ясно, что корни многочлена $f(x)$ — элемент a и все корни многочлена $g(x)$ (следствие целостности кольца K (нет делителей нуля))

Теперь утверждение теоремы для многочлена $f(x)$ очевидно

Добавления к теореме 3

Если число корней с учетом кратности многочлена $f(x)$ равно $n = \deg f(x)$, то имеет место разложение:

$$f(x) = a_0 (x-a_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-a_s)^{k_s} \quad (*)$$

где $a_0 \in K$, $a_0 \neq 0$
$a_1, \ldots, a_s$ — попарно различные корни $f(x)$, $s \geq 1$

Разложение $(*)$ можно записать в виде

$$f(x) = a(x-x_1) \ldots (x-x_m) \quad (**)$$

где $a \in K$, $a \neq 0$,

$x_1, \quad , x_n$ – корни $f(x)$ (не обязательно различные)

Предполагая наличие разложения (**) получим так называемые формулы Виета

$$f(x) = a_n x^n + \quad + \ + a_1 x + a_0 = \ = a(x - x_1) \quad (x - x_n)$$

Раскрыв скобки в правой части, получим

$$a_n = a$$

$$a_{n-1} = a(-x - \quad - x_n)$$

$$a_{n-2} = \ = a(x_1 x_2 + \quad + x_{n-1} x_n)$$

$$a_{n-k} = \ = a(-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \quad < i_k \leq n} x_{i_1} \quad x_{i_k}$$

$$a_0 = a(-1)^n x_1 \quad x_n$$

Точнее, формулами Виета обычно называются формулы

$$\sum_{0 \leq i_1 < \quad < i_k \leq n} x_{i_1} \quad x_{i_k} = \ = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

$$1 \leq k \leq n$$

Замечание

Выражение, стоящее в левых частях формулы Виета, называется элементарными симметрическими многочленами от корней данного многочлена $f(x)$

Опр Функцией определенной многочленом $f(x) \in K[x]$ называется функция

$$\tilde{f} \quad K \to K,$$

задаваемая правилом

$$a \to f(a), \ a \in K$$

Если $f(x) \neq g(x)$ в K[x], то, вообще говоря, функции, определяемые многочленами $f(x)$ и $g(x)$, могут совпадать

Пример

$K = F_2 = \{0,1\}$ – поле из 2 элементов

$f(x) = x + 1$

$g(x) = x^2 + 1$

Составим таблицы значений соответствующих функций

$f(x) = x + 1$		$g(x) = x^2 + 1$	
a	$f(a)$	a	$g(a)$
0	1	0	1
1	0	1	0

Теорема 4 (о совпадении алгебраической и функциональной точек зрения на понятие многочлена)

Пусть K – бесконечная область целостности

Тогда f (x) = g (x) $\Leftrightarrow \tilde{f} = \tilde{g}$