Теорема 5 (о равномощности различных базисов данной системы векторов)

см Теорему 5 §3

Опр. Рангом системы S называется число векторов в любом ее базисе

Способ отыскания нек-рого базиса системы S, данный в §3 в общем случае не применим

Теорема 6 (о единственности разложения вектора по базису системы векторов)

см.

п. 3 Базис векторного пространства. Конечномерное векторное пространство

Опр. Пусть V - векторное пространство над полем F

Конечная система векторов B наз базисом V, если:

1. B линейно независима.

2. Любой вектор из V линейно выражается ч/з B.

Теорема 7 §3 для произвольного пр-ва не верна, т.к. существуют векторные пр-ва, не имеющие базиса:

Пусть V - векторное пр-во всех бесконечных финитных послед-ней из вещественных чисел

Покажем, что V не имеет базиса.

Пусть, напротив $B: b_1, \ldots, b_n$ - нек-рый базис V.

Тогда:

$$b_1 = (b_{11}, \ldots, b_{1m}, 0, 0, \ldots)$$

$$b_2 = (b_{21}, \ldots, b_{2m}, 0, 0, \ldots)$$

$$\ldots$$

$$b_n = (b_{n1}, \ldots, b_{nm}, 0, 0, \ldots)$$

где m - нек-рое натуральное число

Но в таком случае вектор

$$b = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{m}, 1, 0, 0, \ldots)$$

нельзя линейно выразить ч/з $b_1, \ldots, b_n$

Опр. Векторное пр-во V над полем F называется конечномерным, если оно обладает хотя бы одним базисом. В противном случае V называется бесконечномерным.

Примеры

1. $\mathbb{R}^n$ – конечномерное векторное пр-во над полем $\mathbb{R}$
2. F^n – конечномерное векторное пр-во над полем F
3. $\mathbb{R}[x]$ – бесконечномерное векторное пр-во многочленов от x с вещественными коэффициентами (по существу $\mathbb{R}[x]$ – пр-во финитных бесконечных послед-тей из вещественных чисел)

Теорема 8 (о равномощности базисов конечномерного векторного пространства)

Пусть V – конечномерное векторное пр-во над полем F

Тогда все базисы V содержат одно и то же число векторов.

Опр. Размерностью конечномерного векторного пространства V над полем F называется число векторов в любом его базисе

Обозначение $\dim V$

Пример $\dim \mathbb{R}^n = n$

Теорема 9 (о единственности разложения вектора пространства по его базису)

см Теорему 9 §3

Теорема 10

Пусть $\dim V = n$. Тогда любая система векторов, содержащая более чем n векторов является линейно зависимой (аналог следствия 2 теоремы 3 §3)

Утверждение

Векторное пр-во V бесконечномерно $\Leftrightarrow$ в V существуют сколь угодно длинные линейно независимые системы векторов.

Построение базиса конечномерного векторного пространства

Теорема 11 (о замене вектора в базисе)

Пусть $b_1, \dots, b_n$ – кон-рный базис пр-ва V, и вектор $a \in V$ таков, что $a = k_1 b_1 + \dots + k_n b_n$, $k_1 \neq 0$.

Тогда $a, b_2, \dots, b_n$ – также базис V.

Доказательство

1. Убедимся, что векторы $a, b_2, \dots, b_n$ линейно независимы.

Пусть $la + l_2 b_2 + \dots + l_n b_n = 0$, т.е.

$$l(k_1 b_1 + \dots + k_n b_n) + l_2 b_2 + \dots + l_n b_n = 0$$

Имеем:

$$lk_1 b_1 + (lk_2 + l_2) b_2 + \dots + (lk_n + l_n) b_n = 0$$

След-но

$$\begin{aligned} &lk_1 = 0 \\ &lk_2 + l_2 = 0 \\ &\dots \\ &lk_n + l_n = 0 \end{aligned}$$

Т.к. по условию $k_1 \neq 0$, то из первого рав-ва следует, что $l = 0$. След-но из остальных рав-в имеем $l_2 = \dots = l_n = 0$

2. Покажем, что любой вектор $x \in V$ линейно выражается ч/з $a, b_2, \dots, b_n$

Для этого должны существовать коэф. $l, l_2, \dots, l_n$, такие, что:

$$x = la + l_2 b_2 + \dots + l_n b_n$$

Пусть

$$x = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$$

Тогда:

$$lk_1 b_1 + (lk_2 + l_2) b_2 + \dots + (lk_n + l_n) b_n = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$$

Т.к. $k_1 \neq 0$, имеем:

$$l = \frac{x_1}{k_1},\quad l_2 = x_2 - x_1\frac{k_2}{k_1},\ \dots,\ l_n = x_n - x_1\frac{k_n}{k_1}$$

Теорема 12 (о дополнении линейно независимой системы до базиса)

Пусть $b_1, \dots, b_k$ — линейно независимая система векторов в n-мерном пространстве V.

Тогда существуют такие векторы $b_{k+1}, \dots, b_n$, что $b_1, \dots, b_n$ — базис V

Доказательство

Используем теорему о замене вектора в базисе.

Пусть $a_1, \dots, a_n$ — нек-рый базис V

Так как $b_1 \neq 0$, то один из коэффициентов в его лин. выражении ч/з $a_1, \dots, a_n$ не равен нулю.

Будем считать, что нулю не равен коэффициент при a_1.

Тогда возможно заменить вектор a_1 вектором b_1 в базисе, т.е. $b_1, a_2, \dots, a_n$ — базис V

Разложим b_2 по этому базису:

$b_2 = k_1 b_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n$

Среди коэффициентов $k_2, \dots, k_n$ есть ненулевые, т.к. иначе векторы b_2 и b_1 пропорциональны, что противоречит линейной независимости $b_1, \dots, b_n$

Пусть ненулевым коэффициентом является k_2

Тогда $b_1, b_2, a_3, \dots, a_n$ — базис V по теореме 11

И т.д. в итоге получим базис $b_1, \dots, b_k, a_{k+1}, \dots, a_n$, что и требовалось доказать

Замечание

Эту теорему можно док-ть и другим способом (см док-во теоремы о существовании, которого нет и смотреть нечего)

Теорема 13

Если $b_1, \ldots, b_n$ линейно независимы и $\dim V = n$, то $b_1, \ldots, b_n$ — базис V

Доказательство

Предположим обратное, т.е. пусть существует вектор $a \in V$, к-рый невозможно линейно выразить ч/з $b_1, \ldots, b_n$

Тогда $a, b_1, \ldots, b_n$ — также линейно независимая система векторов — противоречие, т.к. $\dim V$ — максимально возможное число векторов в линейно независимой системе по Теореме 10.

Теорема 14 (о подпространстве конечномерного пространства)

Пусть L - подпространство V и $\dim V = n$.

Тогда L конечномерно и $\dim L \leq \dim V$

Если $\dim L = \dim V$, то $L = V$

Доказательство

L не может быть бесконечномерным, т.к иначе L имеет бесконечные линейно независимые подсистемы $\Rightarrow V$ также имеет бесконечные линейно независимые подсистемы $\Rightarrow V$ бесконечномерно — противоречие

Пусть $b_1, \ldots, b_k$ — нек-рый базис L. По теореме 10 $k \leq n$, т.е $\dim L \leq \dim V$

Если $k = n$, по теореме 13 система $b_1, \ldots, b_n$ явл. базисом V. Значит $L = V$

Опр. Пусть V, V' — векторные пространства над полем F. Пространства V и V' называются изоморфными, если существует такое отображение $\varphi: V \to V'$, что:

1. φ — биективное отображение,
2. $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ и $\varphi(ka) = k\,\varphi(a)$ для любых $a, b \in V$, $k \in F$

Замечание

Это определение корректно (т.е симметрично по отношению к V, V'), т.к отображение

2) Пусть любые k лошадей 1 масти

1 2 3 4 5 6 7 8 … k k+1

один. масть

один. масть — утверждение не для всех k верно

при k = 1

1 2

§3. Арифметическое n-мерное векторное пространство

1. Определения и примеры

Опр. Арифметический n-мерный вектор ~~векторное n-мерное пространство~~ — упорядоченный набор из n действительных чисел $a=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$

Пример.

1. Любое решение СЛУ с n неизвестными есть n-мерный арифметический вектор.
2. Пусть дана матрица размера $m\times n$. Тогда её строки — n-мерные арифметические векторы, столбцы — m-мерные арифметич. векторы!

Опр. α_i из арифметического n-мерного вектора $a=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ называется компонентой этого вектора.

Опр. Два вектора $a=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ и $b=(\beta_1,\dots,b_n)$ называются равными, если их соответствующие компоненты равны, т.е.:
$\alpha_i=\beta_i$ для всех $i=(1,\dots,n)$.

Это понятие верно только д/векторов одинаковой размерности.

Опр. Суммой двух векторов $a=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ и $b=(\beta_1,\dots,\beta_n)$ называется вектор $c=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$, где $\gamma_i=\alpha_i+\beta_i$ для всех $i=(1,\dots,n)$.

Опр. Произведением вектора $a=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ на число $k\in\mathbb{R}$ называется вектор $d=(\delta_1,\dots,\delta_n)$, где $\delta_i=k\cdot\alpha_i$, $i=(1,\dots,n)$.

Доказательство очевидно.

Теорема 3 (основная теорема о лин зависимости)
Пусть даны 2 системы векторов S и T (*)
Если $S > M$ и система T линейно выражается ч/з систему S, то система T линейно зависима.

Доказательство

Докажем, что существуют такие не все равные нулю коэффициенты $k_1, \ldots, k_S$, что $k_1 b_1 + \ldots + k_S b_S = 0$

T линейно выражается ч/з S по условию, значит

$$b_1 = l_{11} a_1 + \ldots + l_{1m} a_m$$

$$\ldots$$

$$b_S = l_{S1} a_1 + \ldots + l_{Sm} a_m$$

Имеем

$$k_1 b_1 + k_2 b_2 + \ldots + k_S b_S =$$
$$= (l_{11} k_1 + l_{21} k_2 + \ldots + l_{S1} k_S) a_1 +$$
$$+ (l_{12} k_1 + l_{22} k_2 + \ldots + l_{S2} k_S) a_2 + \ldots +$$
$$+ (l_{1m} k_1 + l_{2m} k_2 + \ldots + l_{Sm} k_S) a_m = 0$$

Это равенство будет иметь место в случае, когда:

$$\begin{cases} l_{11} k_1 + \ldots + l_{S1} k_S = 0, \\ \ldots \\ l_{1m} k_1 + \ldots + l_{Sm} k_S = 0, \end{cases} \qquad (*)$$

Эту систему равенств можно рассматривать как однородную СЛУ с неизвестными $k_1, \ldots, k_S$

Так как ур-ий m, а по условию $m < S$, то согласно теореме 4 §1 система (*) имеет ненулевое решения

Взяв произвольное ненулевое решение $(k_1, \ldots, k_S)$ мы получим

$$k_1 b_1 + \ldots + k_S b_S = 0$$

Следствие 1

Если система векторов из s векторов линейно независима и линейно выражается ч/з систему из m векторов, то $s \le m$.

Доказательство (от противного)

Если $s > m$, то по теореме 3 (основной теореме о линейной зависимости) система из S векторов будет линейно зависимой — противоречие с условием.

Следствие 2

В $\mathbb{R}^n$ любая система, состоящая более чем из n векторов будет линейно зависимой

Доказательство.

Пусть дана система векторов $b_1, \dots, b_s$, где $s > n$ (система T). В кач-ве системы S рассмотрим систему так называемых единичных векторов:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$\dots$$

$$e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

Применим теорему 3, т.к. очевидно, что любой вектор из $\mathbb{R}^n$ можно выразить ч/з единичные векторы ($a = (a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$).

По теореме 3 векторы $b_1, \dots, b_s$ линейно зависимы.

4 Базис

Опр. Пусть дана система векторов S пр-ва $\mathbb{R}^n$. Ее подсистема B называется базисом S, если:

1. B — линейно независимая система
2. S линейно выражается ч/з B

Пример $\mathbb{R}^3$

S: $a_1 = (1; 2; 1)$, $a_2 = (0; -1; 3)$, $a_3 = (2; 3; 1)$

Проверим, что подсистема B является базисом.

1) линейная незав
2) лин выр

Отсюда $a_m = (-k_1)a_1 + \ldots + (-k_r)a_r$

Итак, $a_1, \ldots, a_r$ — базис S.

Теорема 6

Разложение произвольного вектора системы S по ее базису единственно

Доказательство

Согласно условию 2 в определении базиса всякий вектор системы S допускает разложение по базису B

$$a = k_1 b_1 + \ldots + k_r b_r,$$

где a — вектор системы, $b_1, \ldots, b_r$ — базис B

Допустим, что имеется еще одно разложение

$$a = k_1' b_1 + \ldots + k_r' b_r$$

Тогда их разность равна:

$$0 = (k_1 - k_1')b_1 + \ldots + (k_r - k_r')b_r$$

Так как базис по определению линейно независимая система, то $k_1 - k_1' = \ldots = k_r - k_r' = 0$, следовательно $k_1 = k_1', \ldots, k_r = k_r'$.

Опр Базисом пространства $\mathbb{R}^n$ называется такая конечная система векторов B, что:

1) B — линейно независимая система

2) Любой вектор из $\mathbb{R}^n$ линейно выражается ч/з вектор B.

Теорема 7

Базисы пространства $\mathbb{R}^n$ существуют

Доказательство:

Рассмотрим систему единичных векторов

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$$
$$e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$$
$$\ldots$$
$$e_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

Докажем, что эта система явл. базисом, что очевидно ($k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 0$, любой вектор выр ч/з един)

Пример. $\mathbb{R}^3$

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= (1, 2, 1) \\ a_2 &= (0, 1, 2) \\ a_3 &= (0, 0, -1). \end{aligned}\right\} B$$

Проверим, что B — базис $\mathbb{R}^3$.

1) $k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} k_1 = 0, \\ 2k_1 + k_2 = 0, \\ k_1 + 2k_2 - k_3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

2) $a \in \mathbb{R}^3$, $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

$k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 = \alpha \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} k_1 = \alpha_1, \\ 2k_1 + k_2 = \alpha_2, \\ k_1 + 2k_2 - k_3 = \alpha_3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = \alpha_1, \\ k_2 = \alpha_2 - 2\alpha_1, \\ k_3 = -\alpha_3 + 2\alpha_2 - 3\alpha_1 \end{cases}$$

След-но B — базис

Теорема 8

Любой базис пространства $\mathbb{R}^n$ состоит из n векторов

Доказательство

см. док-во теоремы 5

Опр. Размерностью пространства $\mathbb{R}^n$ называется число векторов в любом его базисе, т.е n

Теорема 9

Пусть B — фиксированный базис пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда любой вектор a пространства $\mathbb{R}^n$ имеет единственное разложение по базису B.

Доказательство

см док-во теоремы 6