§ 10. Векторные пространства над произвольным полем

п 1 Определения и примеры

Пусть V — нек-рое мн-во. Элементы V будем называть „векторами".

Пусть F — нек-рое поле, эл-ты к-рого назовем „скалярами"

Будем считать, что на V задано „сложение", т.е. нек-рая бинарная алгебраическая операция, $(a, b) \to a+b=c$ $(a, b, c \in V)$; и также определена операция бинарная „умножение вектора на скаляр" $(a, k) \to ka = d$ $(a, d \in V;\ k \in F)$

Опр. Пара (V, F) называется векторным пространством V над F, если

1 $(V, +)$ — абелева группа (нулевой эл-т — это нулевой вектор, противоположный эл-т — противоположный вектор $-a$)

2 $k(a+b) = ka + kb$ для любых $a, b \in V$; $k \in F$

3 $(k+m)a = ka + ma$ для любых $a \in V$; $k, m \in F$

4 $(kl)a = k(la)$ для любых $a \in V$; $k, l \in F$

5 $1a = a$ для любого $a \in V$ (1 – единица поля F)

Примеры

1 V – мн-во „обычных" геометрических векторов, например, векторов плоскости, F – множ-во действительных чисел

2 $V = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}$

3 $V = F^n$ – арифметическое n-мерное векторное пространство над полем F

4 $V = P$ – произвольное поле, F – нек-рое подполе поля P. Тогда P можно рассматривать как векторное пространство над F. Приведем конкретный пример:

$$P = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, \quad F = \mathbb{Q}$$

Говорят, что поле P является расширением поля F. Итак, любое расширение данного поля может быть рассмотрено как векторное пространство над этим полем

5 V = мн-во всех функций $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$ (пространство функций)

Свойства операций в векторном пространстве V над полем F

1. $k \cdot 0 = 0$ для любого $k \in F$, где 0 – нулевой вектор

2 $0 \cdot a = 0$ для любого $a \in V$

3 $k(a-b) = ka - kb$ для любых $a, b \in V$; $k \in F$

4. $(k-l)a = ka - la$ для любых $a \in V$, $k, l \in F$

5 $(-k) \cdot a = k(-a) = -(ka)$ для любых $a \in V$; $k \in F$

Опр. Подмножество L векторного пространства V над полем F называется подпространством, если оно само образует векторное пространство над F

Пример

Пусть V – векторное пространство функций

$f\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ над $\mathbb{R}$. Положим L – мн-во всех многочленов, т.е. функций вида

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

где $a_n, \ldots, a_1, a_0$ – действительные числа, $a_n \neq 0$

Это мн-во L является подпространством V

Теорема 0 (характеристический признак подпространства)

Подмножество L векторного пространства V явл. подпространством тогда и только тогда, когда:

1. L замкнуто отн. сложения векторов
2. L замкнуто отн. умножения векторов на скаляры

Доказательство

Непосредственное сравнение условий 1,2 с условиями в определении пространства

Пример 1

V – пространство всех бесконечных послед-тей $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ с элементами из $\mathbb{R}$ (сложение и умножение на вещественные числа поэлементное)

L – подпространство всех финитных послед-тей $(a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$, т.е. послед-тей, у н-рых лишь конечное число эл-тов отлично от нуля.

Пример 2

V – мн-во всех многочленов с $\mathbb{R}$ коэф. ($\mathbb{R}[x]$)

$L_n = \{ f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x_n^n,\ a_n \neq 0 \}$ – не подпространство V, т.к. L_n не замкнуто отн. сложения (может уменьшиться степень многочлена)

$L_{\leq n} = \{ f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x_n^n \mid a_i \in \mathbb{R} \}$ – подпространство V

Следствие

Пересечение 2 подпространств является подпространством