многочлен $f(x) = 1$, где 1 - единичный эл-нт K, играет роль единичного эл-нта $K[x]$

Проверка ассоциативности умножения, его коммутативности, а также проверка дистрибутивности умножения отн. сложения проводится на основе определений операций сложения, умножения и соответствующих св-в кольца коэф. K

Докажем, что если $f(x) \neq 0 \neq g(x)$, то $h(x) = f(x) \cdot g(x) \neq 0$, т.е. в кольце $K[x]$ нет делителей нуля

Действительно, имеем

$$\deg h(x) = \deg f(x) + \deg g(x) \quad (**)$$

что следует из отсутствия делителей нуля в K. - коэф. перед наиб. степенью не сократ.

Итак, $K[x]$ - область целостности.

Замечание

Утверждение теоремы вполне очевидно для $\mathbb{R}[x]$ (по модулю формулы (**)).

Опр Говорят, что многочлен $f(x) \in K[x]$ делится на $g(x) \in K[x]$, если существует $h(x) \in K[x]$, что $f(x) = g(x)\ h(x)$.

Легко видеть, что отношение делимости на мн-ве $K[x]$ обладает следующими св-вами:

1 Рефлексивность

$f(x)$ делится на $f(x)$

2. Транзитивность

Если $f(x)$ делится на $g(x)$, а $g(x)$ делится на $h(x)$, то $f(x)$ делится на $h(x)$.

Опр Пусть $f(x) \in K[x]$, $a \in K$

Разделить $f(x)$ на двучлен $x-a$ — это значит представить $f(x)$ в виде

$$f(x) = (x-a)q(x) + r$$

где $q(x) \in K[x]$, $r \in K$.

Деление на $x-a$ осуществляется при помощи схемы Горнера

Пусть

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Будем искать $q(x)$ в виде

$$q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0$$

методом неопределенных коэффициентов

Имеем:

$$a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = (x-a)(b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0) + r =$$
$$= b_{n-1} x^n + (b_{n-2} - a b_{n-1}) x^{n-1} + \ldots + (b_0 - a b_1) x + (r - a b_0)$$

Таким образом, для определения неизвестного коэффициентов $b_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ и $r$ получаем ~~систему равенств~~ систему рав-в:

$$\begin{cases} a_n = b_{n-1} \\ a_{n-1} = b_{n-2} - a b_{n-1} \\ \ldots \\ a_1 = b_0 - a b_1 \\ a_0 = r - a b_0 \end{cases}$$

Отсюда находим (единственным образом)

$$\left.\begin{array}{l} b_{n-1} = a_n \\ b_{n-2} = a_{n-1} + a b_{n-1} \\ \ldots \\ b_0 = a_1 + a b_1 \end{array}\right\} \text{коэффициенты неполного частного } q(x)$$

$$r = a_0 + a b_0 \quad \text{остаток от деления}$$

Вычисление коэффициентов неполного качества и остатка по указанным формулам реализуют в виде схемы Горнера.

<u>Пример</u>

$K = \mathbb{R} \qquad f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 1 \qquad a = -1$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 2 & 1 & -3 & 3 & -2 \end{array}$$

$\underbrace{2\ \ 1\ \ -3\ \ 3}_{q(x)}\ \ \underbrace{-2}_{r}$

$$f(x) = (x+1)(2x^3 + x^2 - 3x + 3) - 2$$

Из сказанного выше следует, что деление с остатком на двучлен $x - a$ всегда возможно, причем единственным образом

<u>Опр</u> Пусть $f(x) \in K[x]$

Элемент $a \in K$ является корнем многочлена $f(x)$, если $f(a) = 0$

<u>Замечание</u>

Если $a \in K$, то символом $f(a)$ обозначается результат подстановки в выражение $f(x)$ вместо формальной переменной $x$ ее значение $a$:

$$f(a) = a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \dots + a_1 a + a_0 \in K$$

Если $K \subset L$, то, очевидно, $K[x] \subset L[x]$
Поэтому можно говорить о корнях многочлена $f(x) \in K[x]$, принадлежащих $L$

<u>Теорема 2</u> (теорема Безу)

Многочлен $f(x) \in K[x]$ делится на $x - a \Leftrightarrow f(a) = 0$, т.е. $a$ - корень $f(x)$

<u>Доказательство</u>

Разделим $f(x)$ на $x - a$ с остатком

$$f(x) = (x - a)\, q(x) + r$$

Подставив в это равенство $x = a$, получим:

$$0 = f(a) = r$$

<u>Опр.</u> Корень $a \in K$ многочлена $f(x) \in K[x]$ называется $k$-кратным, если $f(x)$ делится на $(x-a)^k$, но не делится на $(x-a)^{k+1}$

Корни кратности 1 называются простыми, остальные корни называются кратными.