где $a \in K,\ a \neq 0$,

$x_1, \quad , x_n$ – корни $f(x)$ (не обязательно различные)

Предполагая наличие разложения (**) получим так называемые формулы Виета

$$f(x) = a_n x^n + \quad + \ + a_1 x + a_0 = \ = a(x - x_1) \quad (x - x_n)$$

Раскрыв скобки в правой части, получим

$$a_n = a$$

$$a_{n-1} = a(-x - \quad - x_n)$$

$$a_{n-2} = \ = a(x_1 x_2 + \quad + x_{n-1} x_n)$$

$$a_{n-k} = \ = a(-1)^k \sum_{1 \le i_1 < \quad < i_k \le n} x_{i_1} \quad x_{i_k}$$

$$a_0 = a(-1)^n x_1 \quad x_n$$

Точнее, формулами Виета обычно называются формулы

$$\sum_{0 \le i_1 < \quad < i_k \le n} x_{i_1} \quad x_{i_k} = \ = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

$$1 \le k \le n$$

Замечание

Выражение, стоящее в левых частях формулы Виета, называется элементарными симметрическими многочленами от корней данного многочлена $f(x)$

Опр Функцией определенной многочленом $f(x) \in K[x]$ называется функция

$$\tilde{f} \quad K \to K,$$

задаваемая правилом

$$a \to f(a),\ a \in K$$

Если $f(x) \neq g(x)$ в K[x], то, вообще говоря, функции, определяемые многочленами $f(x)$ и $g(x)$, могут совпадать

Пример

$K = F_2 = \{0,1\}$ – поле из 2 элементов

$f(x) = x + 1$

$g(x) = x^2 + 1$

Составим таблицы значений соответствующих функций

$f(x) = x + 1$		$g(x) = x^2 + 1$	
a	$f(a)$	a	$g(a)$
0	1	0	1
1	0	1	0

Теорема 4 (о совпадении алгебраической и функциональной точек зрения на понятие многочлена)

Пусть K – бесконечная область целостности

Тогда f (x) = g (x) $\Leftrightarrow \tilde{f} = \tilde{g}$

Доказательство

Неочевидным является доказательство утверждения если $\tilde{f} = \tilde{g}$, то $f(x) = g(x)$ (в K[x])

Рассуждаем от противного Пусть $f(x) \neq g(x)$ Рассмотрим $h(x) = f(x) - g(x) \neq 0$

deg $h(x)$ определена

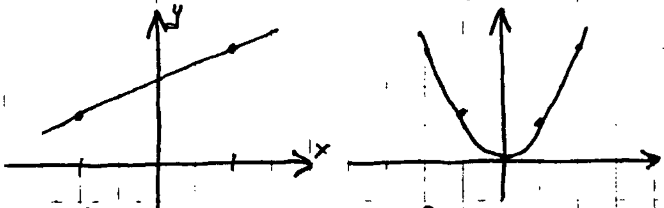
Так как $\tilde{f}(a) = \tilde{g}(a)$ $\forall a \in K$, то $h(a) = 0$ $\forall a \in K$

Но число корней многочлена h (x) конечно (не превосходит deg $h(x)$) – противоречие, доказывающее утверждение

Замечание

Фактически доказано следующее утверждение: если многочлены $f(x)$ и $g(x) \in K[x]$, степени к-рых не превосходит и совпадают при $x = a_i$, где $i = 1, \dots, n+1$, при этом $a_1, \dots, a_{n+1}$ попарно различны, то $f(x) = g(x)$ в $K[x]$.

Другими словами, существует не более одного многочлена степени не выше n, к-рый принимает в данных $n+1$ различных точках предписанные значения.



$n = 1$ $\quad$ $n = 2$

В общем случае существование такого многочлена не гарантируется.

Предположим теперь, что $K = F$ — поле. Тогда многочлен, о к-ром шла речь в замечании, всегда существует. Он может быть найден по интерполяционной формуле Лагранжа.

Пусть b_i — предписанные значения многочлена $f(x)$ в точках $x = a_i$ $(i = 1, \dots, n+1)$. Тогда многочлен $f(x)$ находится из формулы

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{(x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-a_{n+1})}{(a_i-a_1)\cdot\ldots\cdot(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdot\ldots\cdot(a_i-a_{n+1})}\, b_i$$