базисе) задает скалярное умножение в V.

Пусть V – евклидово пр-во, $\dim V = n$

<u>Опр.</u> Матрицей Грама скалярного произведения в базисе $b_1, .., b_n$ евклидова пр-ва V наз. матрица $G = (g_{ij})$, где $g_{ij} = (b_i, b_j)$, $i, j = 1, \dots, n$

<u>Опр</u> Базис называется ортогональным, если G – диагональная матрица, т.е. базис является ортогональной системой

<u>Опр.</u> Базис называется ортонормированным, если $G = E$ – единичная матрица

<u>Доказательство</u>

Пусть G – матрица Грама скалярного произведения в базисе $b_1, \dots, b_n$, а векторы $x, y \in V$ заданы своими координатами $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_n$ в этом базисе.

Вычислим скалярное произведение этих векторов

$$(x, y) = (x_1 b_1 + \dots + x_n b_n, y_1 b_1 + \dots + y_n b_n) =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} (x_i b_i, y_j b_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j (b_i, b_j) =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j g_{ij} = (x_1 \dots x_n) G \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

В частности, если базис ортонормированный, т.е. $G = E$, то $(x, y) = (x_1 \dots x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

Пусть T – матрица перехода от базиса $b_1, .., b_n$ к базису $b_1', \dots, b_n'$, $T = (t_{ij})$

Имеем:

$$(b_i'; b_j') = \left(\sum_{k=1}^{n} t_{ki} b_k, \sum_{l=1}^{n} t_{lj} b_l\right) =$$
$$= \sum_{k,l=1}^{n} t_{ki} t_{lj} (b_k, b_l) = \sum_{k,l=1}^{n} t_{ki} g_{kl} t_{lj}$$

Отсюда:

$$G' = T^t G T$$

~~Итак~~

Для построения ортонормированных базисов используют процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Теорема 3

В любом евклидовом пр-ве существуют ортонормированные базисы.

Доказательство

Пусть дана нек-рая линейно независимая система векторов $a_1, \dots, a_m$ в евклидовом пр-ве V

Построим ортогональную систему ненулевых векторов $b_1, \dots, b_m$, при этом

$$\langle b_1, \dots, b_m \rangle = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$$

Положим $b_1 = a_1$ ($b_1 \neq 0$, т.к. по условию $a_1, \dots, a_m$ линейно независимы)

Предположим, что уже построены векторы $b_1, \dots, b_k$, обладающие нужными св-вами, т.е. $b_1, \dots, b_k$ – система ортогональная ненулевых векторов и $\langle b_1, \dots, b_k \rangle = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$

Покажем, как найти b_{k+1}. Положим

$$b_{k+1} = a_{k+1} - l_1 b_1 - \dots - l_k b_k$$

где коэффициенты $l_1, \dots, l_k$ найдены из условия

$$(b_{k+1}, b_i) = 0 \qquad i = 1, \dots, k$$

т.е.

$$0 = (b_{k+1}, b_i) = (a_{k+1} - l_1 b_1 - \dots - l_k b_k, b_i) =$$
$$= (a_{k+1}, b_i) - l_i (b_i, b_i) - 0 \quad \left(\begin{smallmatrix}\text{т.к. } b_1, \dots, b_k \\ \text{ортогональны,} \\ \text{след-но их скаляр} \\ \text{произв. равно } 0\end{smallmatrix}\right)$$

откуда

$$l_i = \frac{(a_{k+1}, b_i)}{(b_i, b_i)} \qquad i = 1, \dots, k$$

Заметим, что $b_{k+1} \neq 0$. Иначе a_{k+1} есть нек-рая линейная комбинация $b_1, \dots, b_k$, а значит, т.к. $\langle b_1, \dots, b_k \rangle = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$, и векторов $a_1, \dots, a_k$ – противоречие с линейной независимостью системы $a_1, \dots, a_m$

Кроме того, $\langle b_1, \dots, b_k, b_{k+1} \rangle = \langle a_1, \dots, a_k, a_{k+1} \rangle$, что следует из рав-ва

$$\langle a_1, \dots, a_k \rangle = \langle b_1, \dots, b_k \rangle$$

а также из того, что

$$b_{k+1} = a_{k+1} - l_1 b_1 - \dots - l_k b_k$$

(т.к. a_{k+1} линейно выражается ч/з $b_1, \dots, b_k, b_{k+1}$)

В итоге получим ортогональную систему векторов $b_1, \dots, b_m$, обладающую требуемыми св-вами.

В частности, если $a_1, \dots, a_n$ — базис евклидова пр-ва V, то применение процесса ортогонализации к нему приводит к ортогональному базису $b_1, \dots, b_n$

Нормировкой вектора $b \in V$ называется его замена на вектор

$$\tilde{b} = \frac{b}{\sqrt{(b, b)}} \quad (b \neq 0)$$

Имеем $(\tilde{b}, \tilde{b}) = 1$

Отнормировав полученный ортогональный базис, получим ортонормированный базис $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n$

Пример

Пусть $V = \mathbb{R}^3$, умножение стандартно скалярн

$$b_1 = a_1 = (1, -1, 2)$$

$$b_2 = a_2 - l b_1 \qquad l = \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$b_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$b_3 = a_3 - k b_1 - f b_2 \qquad k = \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad f = \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = \frac{0}{1/2} = 0$$

$$b_3 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\tilde{b}_1 = \frac{b_1}{\sqrt{(b_1, b_1)}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\tilde{b}_2 = \frac{b_2}{\sqrt{(b_2, b_2)}} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$$\tilde{b}_3 = \frac{b_3}{\sqrt{(b_3, b_3)}} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3$ — ортонормированный базис.

Опр. Пусть L - подпр-во евклидова пр-ва V

Ортогональным дополнением к L называется подпр-во:

$$L^{\perp} = \{ x \in V \mid (x,y) = 0 \quad \forall y \in L \}$$

Замечание

Ортогональное дополнение $L^{\perp}$ действительно является подпространством, т.к. это следует из характеристического признака подпространства

Теорема 4

1 Если $L_1 \subset L_2$, то $L_1^{\perp} \supset L_2^{\perp}$

2. $(L^{\perp})^{\perp} = L$

3. $(L_1 + L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$

4 $(L_1 \cap L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} + L_2^{\perp}$

5 $V = L \oplus L^{\perp}$

L_1, L_2, L - подпр-ва евклидова пр-ва V

Доказательство

1 Непосредственно следует из определения ортогонального дополнения

2 Не трудно видеть, что $(L^{\perp})^{\perp} \supset L$

Пусть $\dim L = k$, $\dim V = n$

Из утверждения п. 5 следует, что $(L^{\perp})^{\perp} = \dim V - \dim L^{\perp} = n - (n-k) = k$

След-но $\dim L = \dim (L^{\perp})^{\perp}$. Тогда т.к. $L \subset (L^{\perp})^{\perp}$, то $L = (L^{\perp})^{\perp}$.

3 Пусть $x \in L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$. Тогда $(x, y_1) = 0$ и $(x, y_2) = 0$ $\forall y_1 \in L_1, y_2 \in L_2$

След-но $(x, \underbrace{y_1 + y_2}_{\in L_1 + L_2}) = 0$, т.е. x ортогонален

произвольному вектору из $L_1 + L_2$, т.е. $x \in (L_1 + L_2)^{\perp}$, след-но $L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp} \subset (L_1 + L_2)^{\perp}$

Очевидно, пусть $x \in (L_1 + L_2)^{\perp}$, т.е. $(x,y) = 0$

$\forall y \in L_1 + L_2$. Тогда, в частности, это верно $\forall y \in L_1$ и $\forall y \in L_2$, т.е. $x \in L_1^{\perp}$ и $x_2 \in L_2^{\perp}$, а значит $x \in L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$

4. Пусть $L_1^{\perp} = \tilde{L}_1$, $L_2^{\perp} = \tilde{L}_2$.

$$(L_1 + L_2)^{\perp} = \tilde{L}_1 \cap \tilde{L}_2$$

$$\left((L_1 + L_2)^{\perp}\right)^{\perp} = (\tilde{L}_1 \cap \tilde{L}_2)^{\perp}$$

$$L_1 + L_2 = (\tilde{L}_1 \cap \tilde{L}_2)^{\perp}$$

$$\tilde{L}_1^{\perp} + \tilde{L}_2^{\perp} = (\tilde{L}_1 \cap \tilde{L}_2)^{\perp}$$

5. Выберем в L неп-рой базис $b_1, \dots, b_k$ и дополним его до базиса $b_1, \dots, b_k, b_{k+1}, \dots, b_n$ пр-ва V.

Применим к этому базису $b_1, \dots, b_n$ процесс ортогонализации. Получим ортогональный базис $b_1', \dots, b_n'$

Имеем:

$L = \langle b_1, \dots, b_k \rangle = \langle b_1', \dots, b_k' \rangle$,

$L^{\perp} = \langle b_{k+1}', \dots, b_n' \rangle$ (т.к. $b_{k+1}', \dots, b_n'$ ортогон. $b_1', \dots, b_k'$ и всякий вектор из V расклад. по $b_1', \dots, b_n'$)

Очевидно, что $L \oplus L^{\perp} = V$