п. 3 Кольцо многочленов $F[x]$ над полем F

Опр. Пусть $f(x), g(x) \in F[x]$, $g(x) \neq 0$

Разделить $f(x)$ на $g(x)$ с остатком — это значит представить $f(x)$ в виде:

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

где $q(x), r(x) \in F[x]$

$q(x)$ — неполное частное

$r(x)$ — остаток

при этом либо $r(x) = 0$, либо $\deg r(x) < \deg g(x)$

Теорема 5

Деление с остатком всегда возможно в $F[x]$ и притом единственным образом.

Доказательство

1. Существование

Неполное частное $q(x)$ и остаток $r(x)$ находятся при помощи процедуры „деления уголком".

Продемонстрируем это на примере. Пусть

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 1$$

$$g(x) = x^2 - x + 1$$

(здесь $F = \mathbb{R}$)

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 - 2x^2 + x - 1 & x^2 - x + 1 \\ \cline{2-2} -\underline{4x^3 - 4x^2 + 4x} & 4x + 2 \quad = q(x) \\ 2x^2 - 3x - 1 & \\ -\underline{2x^2 - 2x + 2} & \\ x - 3 \quad = r(x) & \end{array}$$

2. Единственность

Пусть $f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x) = g(x)q_2(x) + r_2(x)$ — два способа поделить $f(x)$ на $g(x)$ с остатком.

Имеем:

$$g(x)(q_1(x) - q_2(x)) = r_2(x) - r_1(x)$$

Если допустить, что $q_1(x) \neq q_2(x)$, то $r_2(x) - r_1(x) \neq 0$ и $\deg(r_2(x) - r_1(x)) < \deg g(x)$,

$$\deg(g(x)(q_1(x) - q_2(x))) \geq \deg g(x) > \deg(r_1(x) - r_2(x))$$

противоречие, след-но $q_1(x) = q_2(x)$ и $r_1(x) = r_2(x)$.

Опр. Пусть $f_1(x), \dots, f_m(x) \in F[x]$ — многочлены, среди к-рых есть отличные от 0

Наибольшим общим делителем (НОД) этих многочленов называется любой многочлен $d(x) \in F[x]$, обладающий следующими свойствами:

1. $f_1(x), \dots, f_m(x)$ делятся на $d(x)$, т.е. $d(x)$ есть общий делитель $f_1(x), \dots, f_m(x)$.
2. Если $d_1(x)$ — любой другой общий делитель многочленов $f_1(x), \dots, f_m(x)$, то $d(x)$ делится на $d_1(x)$.

Аналогично определяется наименьшее общее кратное (НОК) ненулевых многочленов $f_1(x), \dots, f_m(x)$: слово „делитель" заменяется на „кратное".

Равенство вида

$$d(x) = \text{НОД}\,(f_1(x), \dots, f_m(x))$$

означает, что многочлен $d(x)$ является одним из НОД многочленов $f_1(x), \dots, f_m(x)$.

Аналогично следует понимать равенство

$$m(x) = \text{НОК}\,(f_1(x), \dots, f_m(x))$$

<u>Замечание</u>

1. Из определений формально не следует, что НОД и НОК данных многочленов существуют.

   На самом деле, как будет показано ниже, они существуют.

2. Если $d(x)$ некоторый НОД многочленов $f_1(x), \dots, f_m(x)$, то любой другой НОД этих многочленов $\tilde{d}(x)$ связан с $d(x)$ соотношением:

   $$\tilde{d}(x) = c \cdot d(x)$$

   где $c \in F$, $c \neq 0$.

   Аналогичное утверждение справедливо и в отношении НОК

   Говорят, что многочлены $f(x)$ и $g(x) \in F[x]$ ассоциированы, если $f(x) = c\, g(x)$, где $0 \neq c \in F$

Пусть сначала $m = 2$.

<u>Теорема 6</u> (алгоритм Евклида отыскания НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$)

Пусть $f(x), g(x) \in F[x]$, $g(x) \neq 0$

Если $f(x)$ делится на $g(x)$, то $g(x) = \text{НОД}(f(x), g(x))$ иначе

$$f(x) = g(x)\,q_1(x) + r_1(x), \quad \deg r_1(x) < \deg g(x)$$
$$g(x) = r_1(x)\,q_2(x) + r_2(x), \quad \deg r_2(x) < \deg r_1(x)$$