# Матан. Подготовка к экзамену.

q

June 21, 2021

## Contents

# 1 Даты

## 1.1 Консультация

*2021-06-24 Thu*

## 1.2 Экзамен

*2021-06-25 Fri*

# 2 Видосы

## 2.1 Интегралы

Интеграл: Азы интегрирования. Высшая математика

Определенный интеграл. Шпаргалка для первокурсника. Высшая математика

## 2.2 Ряды

Математический анализ, 35 урок, Числовые ряды

Математический анализ, 36 урок, Достаточные признаки сходимости

# 3 Термины

## 3.1 DONE Бесконечно малая

(также: бесконечно малая функция, бесконечно малая величина)

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$, т.е. для любого числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из $|xa| < \delta$ следует $|\alpha(x)| < \varepsilon$

## 3.2 DONE вертикальная асимптота

Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a0} f(x)$ равно $+\infty$ или $\infty$.

### 3.3 DONE возрастающая (убывающая) функция

Говорят, что функция f(x) возрастает (убывает) на (a,b), если для любый точек $x_1<x_2$ из (a,b) справедливо неравенство $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$)

### 3.4 DONE Второй замечательный предел

формула вида:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

или

$$\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = e$$

### 3.5 DONE Дифференциал

Если $y = f(x)$ - дифференцируемая функция, то главная линейная часть $A*\Delta x$ приращения функции f(x) называется дифференциалом функции и обозначается $dy$.

### 3.6 DONE Дифференцируемая функция

Функция $y = f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки $x$. називатеся дифференцируемой в точке $x$, если ее приращение в этой точке

$$\Delta y = f(x+\Delta x)f(x)$$

имеет вид

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

, где $A = const$, а функция $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

### 3.7 DONE евклидово пространство

Совокупность всех точек n-мерного пространства, в котором расстояние определяется по формуле

$$\rho(x,y) = \sqrt{(x_1y_1)^2 + \ldots + (x_ny_n)^2}$$

, называется n-мерным евклидовым пространством и обозначается $R^n$.

### 3.8 DONE координатная ось

Множество точек $x = (x1, \ldots, xn) \in R^n$ таких, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_{i1} = x_{i+1} = \ldots = x_n = 0$, называется $i$-й координатной осью ($i = 1, \ldots, n$) этого пространства. Точка $0 = (0, \ldots, 0)$ называется началом координат.

## 3.9 DONE Критическая точка

Точка $x_0$ называется критической, если $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует.

## 3.10 DONE локальный максимум (минимум)

Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет (или достигает) в точке $\alpha$ локальный максимум (минимум), если найдется такая окрестность $U(\alpha)$ точки $\alpha$, что для всех $x \in U(\alpha)$:

$$f(\alpha) \geq f(x)$$

$$(f(a) \leq f(x))$$

Локальный минимум и локальный максимум объединяют общим названием - локальный экстремум.

## 3.11 DONE наклонная асимптота

Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$ $(-\infty)$, если

$$f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \alpha(x) = 0$$

## 3.12 DONE Неопределенный интеграл

Неопределенным интегралом от данной функции f(x) называется множество всех его первообразных

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$$F'(x) = f(x)$$

.

## 3.13 DONE непрерывная функция

Функция называется непрерывной в точке $x_0$, если бесконечно малому приращению $\Delta x$ аргумента $x$ в точке $x_0$ соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta y$. т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) f(x_0)] = 0$$

## 3.14 DONE несобственный интеграл первого рода

Сходящимся несобственным интегралом первого рода $\int_a^\infty f(x)dx$ от функции $f(x)$ в интервале $[a,\infty)$ называется предел:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{bß\infty} \int_a^b f(x)dx$$

## 3.15 DONE неубывающая (невозрастающая) функция

Говорят, что функция $f(x)$ не убывает (не возрастает) на $(a,b)$, если для любых точек $x_1 < x_2$ из $(a,b)$ справедливо неравенство

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

$$(f(x_1) \geq f(x_2))$$

## 3.16 DONE неявная функция

Неявная функция - это функция $y(x)$ заданная некоторым уравнением $F(x,y)=0$.

## 3.17 DONE окрестность точки

Пусть $x \in R^n$, $\varepsilon > 0$. Совокупность всех точек $y \in R^n$ таких, что $\rho(x,y) < \varepsilon$, называется n-мерным шаром с центром в точке $X$ радиуса $\varepsilon$ или $\varepsilon$-окрестностью:

$$U(x;\varepsilon) = \{y : y \in R^n, \rho(x,y) < \varepsilon\}$$

.

## 3.18 DONE Определенный интеграл

Определенным интегралом от функции f(x) на [a,b] называется предел интегральной суммы

$$\lim_{n\to\infty} \Sigma_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

, если он существует. Здесь $\xi_i \in [x_{i1}, x_i]$ и $a = x_0 < x_1 < \ldots x_n = b$.

Обозначение интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx$$

### 3.19 DONE Первообразная

Первообразной от функции $f(x)$ в данном интервале называется функция $F(x)$, производная которой равна данной функции:

$$F'(x) = f(x)$$

### 3.20 DONE Первый замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

### 3.21 DONE Предел функции

(на языке $\varepsilon$-$\delta$) Число $A$ называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если существует такое число $\delta(\varepsilon)$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|xx_0| < \delta$ имеет место неравенство

$$|f(x)A| < \varepsilon$$

### 3.22 DONE производная функции

Производной функции $y = f(x)$ в данной фиксированной точке x называется предел

$$\lim_{\Delta x \text{ß} 0} \frac{f(x + \Delta x) f(x)}{\Delta x}$$

если этот предел существует.

### 3.23 DONE прямоугольная окрестность точки

Прямоугольной окрестностью точки $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ называется множество

$$P(x;_1, \ldots,_n) = \{(y_1, \ldots, y_n) : |x_i y_i| <_i, 1 \leq i \leq n\},_i > 0$$

### 3.24 DONE разрыв второго рода

Точка а называется точкой разрыва второго рода, если в этой точке функция $f(x)$ не имеет по крайней мере одного из односторонних пределов или хотя бы один из односторонних пределов бесконечен.

### 3.25 DONE разрыв первого рода

Точка а называется точкой разрыва первого рода, если в этой точке $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу правый и левые пределы

$$\lim_{x \to a+0} f(x) \neq \lim_{x \to a0} f(x)$$

### 3.26 DONE расстояние между точками

Расстояние между двумя точками $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ определяется по формуле:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 y_1)^2 + \ldots + (x_n y_n)^2}$$

### 3.27 DONE сложнопоказательная функция

Функция вида $y = u(x)^{v(x)}, (u(x) > 0)$, где и основание, и показатель степени зависят от x, называется сложнопоказательной.

### 3.28 DONE Стационарная точка

Точка $x_0$ называется стационарной для функции $f(x)$, если $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$ и $f'(x_0) = 0$.

### 3.29 DONE точка пространства

Точкой x n-мерного пространства называется упорядоченная совокупность n действительных чисел $(x_1, \ldots, x_n) = x$. Число $x_i$ называется i-й координатой точки $x, i = 1, \ldots, n$.

### 3.30 DONE устранимый разрыв

Точка а называется точкой устранимого разрыва функции $y = f(x)$, если предел функции $f(x)$ в точке $a$ существует, но в самой точке $a$ значение $f(x)$ либо не существует, либо не равно пределу $f(x)$ в этой точке.

## 4 Темы

### 4.1 DONE Все билеты, рукописный вариант

all

## 4.2 DONE Билет 1

Первообразная и неопределенный интеграл (определения). Свойства интеграла. Таблица основных неопределенных интегралов. Формула замены переменной в неопределенном интеграле (с доказательством). Формула интегрирования по частям.

### 4.2.1 DONE Опр. 1.

Функция $F$ называется первообразной функции $f$ на промежутке $\Delta$ , если $F$ дифференцируема на $\Delta$ и в каждой точке $x \in \Delta$

$$F'(x) = f(x) \tag{1}$$

Очевидно, что первообразная *F(x)* непрерывна на $\Delta$.

### 4.2.2 DONE Опр. 2.

Пусть функция *f(x)* задана на промежутке $\Delta$. Совокупность всех ее первообразных на этом промежутке называется ***неопределенным интегралом от функции*** **f** и обозначается

$$\int f(x)dx \tag{2}$$

Если *F(x)* — какая-либо первообразная функции *f(x)* на $\Delta$, то пишут

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{3}$$

$C$ — произвольная постоянная.

### 4.2.3 DONE Основные свойства интеграла

1. Если функция *F(x)* дифференцируема на $\Delta$, то

$$\int dF(x) = F(x) + C \text{ или } \int F'(x)dx = F(x) + C \tag{4}$$

2. Пусть функция *f(x)* имеет первообразную на $\Delta$. Тогда для любого $x \in \Delta$ имеет место равенство:

$$d\int f(x) = f(x)dx \tag{5}$$

3. Если функции *f1*, *f2* имеют первообразные на $\Delta$, то функция *f1* + *f2* имеет первообразную на $\Delta$, причем:

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx \tag{6}$$

4. Если функция *f(x)* имеет первообразную на $\Delta$, $k \in$ , то функция *kf(x)* также имеет на $\Delta$ первообразную, и при $k \neq 0$:

$$\int kf(x)dx = \{kF(x) + C\},\ k\int f(x)dx = k\{F(x) + C\}$$

Т.к. $C$ – произвольная постоянная и $k \neq 0$, то множества $kF(x) + C$ и $kF(x) + C$ совпадают.

### 4.2.4 DONE След. 1 (Линейность интеграла)

Если $f_1$ и $f_2$ имеют первообразные на $\Delta$, $\lambda_1$, $\lambda_2 \in$ , $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$, то функция $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ имеет первообразную на $\Delta$, причем

$$\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))dx = \lambda_1 \int f_1(x)dx + \lambda_2 \int f_2(x))dx \tag{7}$$

Доказательство вытекает из свойств 3 и 4.

### 4.2.5 DONE Формула замены переменной

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(t)$ заданы соответственно на промежутках $\Delta_x$ и $\Delta_t$, причем $\varphi(\Delta_t) = \Delta_x$, т.е. имеет смысл сложная функция $f(\varphi(t))$, $t \in \Delta_t$. Пусть, кроме того, функция $\varphi(t)$ дифференцируема и строго монотонна на $\Delta_t$. Тогда у функции $\varphi(t)$ существует обратная однозначная функция $\varphi^{-1}(x)$, определенная на промежутке $\Delta_x$.

1. **Теорема 1.** Существование на промежутке $\Delta_x$ интеграла

$$\int f(x)dx \tag{8}$$

и существование на промежутке $\Delta_t$ интеграла

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \tag{9}$$

равносильны, и имеет место формула

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \tag{10}$$

Формула (10) называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле: переменная x заменяется переменной t по формуле $x = \varphi(t)$.

2. **Доказательство.** Докажем, что существование первообразной у функции f(x) на $\Delta_\mathrm{x}$ равносильно существованию первообразной у функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на $\Delta_\mathrm{t}$ . Пусть у функции f(x) на $\Delta_\mathrm{x}$ существует первообразная F(x), т.е.

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x),\, x \in \Delta_t \tag{11}$$

Имеет смысл сложная функция $F(\varphi(t))$, она является первообразной функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на $\Delta_\mathrm{t}$. Действительно,

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = \frac{dF(x)}{dx}\Big|_{x=\varphi(t)} * \frac{d\varphi(t)}{dt} = f(\varphi(t))\varphi'(t) \tag{12}$$

Обратно. Пусть функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ имеет первообразную $\Phi$(t), тогда

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = f(\varphi(t))\varphi'(t) \tag{13}$$

Покажем, что $\Phi(\varphi^{-1}(x))$ является на $\Delta_{\mathrm{x}}$ первообразной функции f(x). В самом деле,

$$\frac{d}{dt}\Phi(\varphi^{-1}(x)) = \frac{d\Phi(t)}{dt}\bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)} * \frac{d\varphi^{-1}(x)}{dx} = (f(\varphi(t))\varphi'(t))\bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)} * \frac{d\varphi^{-1}(x)}{dx} = f(x).$$

Итак, интегралы (8) и (9) одновременно существуют или нет. При этом

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{14}$$

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$$

а так как $F(\varphi(t))|_{t=\varphi^{-1}(x)} = F(x)$, имеет равенство (10).

#### 4.2.6 DONE Формула интегрирования по частям

1. Теорема 2. Если функции $u(x)$, $v(x)$ дифференцируемы на некотором промежутке $\Delta$ и на этом промежутке существует $\int vdu$, то на нем существует интеграл $\int udv$, причем

   $$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x). \tag{15}$$

   Формула (15) называется ***формулой интегрирования по частям.***

2. Доказательство. Пусть $u(x)$, $v(x)$ — дифференцируемы на $\Delta$, тогда

   $$d(u(x)v(x)) = v(x)du(x) + u(x)dv(x) \Rightarrow u(x)dv(x) = d(u(x)v(x)) - v(x)du(x).$$

   Проинтегрируем обе части полученного равенства:

   $$\int u(x)dv(x) = \int (d(u(x)v(x)) - v(x)du(x)) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

## 4.3 TODO Билет 2

Определенный интеграл Римана (определение). Ограниченность интегрируемых функций (с доказательством). Верхние и нижние суммы Дарбу (определения). Верхний и нижний интегралы Дарбу (определения). Критерий Дарбу. Интегрируемость непрерывных функций. Интегрируемость монотонных функций.

### 4.3.1 DONE Опр 1.

Множество точек $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ таких, что

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{k_\tau 1} < x_{k_\tau} = b$$

называют ***разбиением*** $\tau$ ***отрезка*** [a, b].

Точки $\mathrm{x_k}$ — точки разбиения $\tau$ , отрезки $[\mathrm{x_{k1}}, \mathrm{x_k}]$ — отрезки разбиения $\tau$ , $\Delta x_k = x_k x_{k1}$ — их длины, $|\tau| = \max\{\Delta x_1, ..., \Delta x_{k_\tau}\}$ называют */мелкостью разбиения (или диаметром разбиения)*/.

Отметим два очевидных свойства разбиений:

1. Если $\tau < \tau', \tau' < \tau''$, то $\tau < \tau''$.
2. Для любых разбиений $\tau', \tau''$ существует разбиение $\tau : \tau < \tau', \tau < \tau''$.

Пусть функция f определена на $[a, b], a < b, \tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ — некоторое разбиение этого отрезка. Всякая сумма $\sigma_\tau$ вида

$$\sigma_\tau = \sigma_\tau(f, \xi_1, ..., \xi_{k_\tau}) = \sum_{k=1}^{k_\tau} f(\xi_k)\Delta x_k, \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

называется ***интегральной суммой Римана*** функции f

### 4.3.2 DONE Опр 2.

Функция f называется ***интегрируемой по Риману на отрезке*** $[a, b]$, если существует число $I$ такое, что для любой последовательности разбиений $\tau_n = \{x_k^n\}_{k=0}^{k=k_{\tau_n}}, n \in \mathbb{N}$, отрезка [a, b] диаметры которых стремятся к нулю при $n→ $\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} |\tau_n| = 0$) и для любого набора точек

$$\xi_k^n \in [x_{k-1}^n, x_k^n], k = 1, 2, ..., k_{\tau_n}, n \to \mathbb{N}$$

существует предел интегральных сумм

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{\tau_n}(f, \xi_1^n, ..., \xi_{k_{\tau_n}}^n) = I$$

Число $I$ ***называют интегралом Римана от функции f на отрезке*** [a, b] и обозначают $\int_a^b f(x)dx$

## 4.4 DONE Билет 3

Свойства определенного интеграла (сформулировать все, доказать непрерывность интеграла по верхнему пределу). Интегральная теорема о среднем. 3

**Свойства определенного интеграла:**

**1°.**

$$\int_a^b dx = b - a$$

**2°.** Если функция f(x) интегрируема на [a, b], то она интегрируема на любом отрезке [a*, b*]⊂[a, b].

**3°. Аддитивность интеграла.**

Пусть функция f(x) интегрируема на [a, b] и a<c<b. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

**4°Линейность интеграла.**

Пусть функции f(x) и g(x) интегрируемы на [a, b] и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тогда ∃

$$\int_a^b \left(\lambda f(x) + \mu g(x)\right) dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

**5°.** Если функции f(x) и g(x) интегрируемы на [a, b], то их произведение f(x)*g(x) интегрируема на [a, b].

**6°.Интегрирование неравенств**.

Если f(x) интегрируема на [a, b] и f(x) ≥ 0 на [a, b] , то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

**Следствие свойства 6 ◦ .**

Если функции f(x), g(x) интегрируемы на [a, b] и f(x) ≥ g(x) ∀ x ∈ [a, b] , то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

**7°.** Если функция f(x) интегрируема на [a, b], то |f(x)| также интегрируема на [a, b] и

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,, a < b.$$

**8° Непрерывность интеграла по верхнему пределу.**

Если функция f интегрируема на [a, b] , то функции F(x) непрерывны на [a, b].

$$F(x) \coloneqq \int_a^x f(t)\,dt, G(x) := \int_x^b f(t)\,dt$$

Функция F(x) называется интегралом с переменным верхним пределом, а функция G(x) — интегралом с переменным нижним пределом.

**Доказательство.**

Пусть f(x) интегрируема на [a, b], тогда существует c > 0 : ∀ x ∈ [a, b] |f(x)| ≤ c , т.е. f(x) ограничена на [a, b].

Рассмотрим интеграл

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^x, f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \qquad (1)$$

Равенство (1) верно как при Δx ≥ 0 , так и при Δx < 0 , при условии x, x + Δx ∈ [a, b]. Приращение функции F(x) можно записать в виде:

$$\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

Проведем оценку:

$$|\Delta F(x)| = \left|\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt\right| \leq \int_{x}^{x+\Delta x} |f(t)|\, dt \leq C\left|\int_{x}^{x+\Delta x} dt\right| = C|\Delta x|$$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta F(x) = 0$, следовательно, F(x) непрерывна на [a, b].

Непрерывность функции G(x) следует из непрерывности F(x), т.к.

$$\int_{a}^{x} f(t)\, dt + \int_{x}^{b} f(t)\, dt = \int_{a}^{b} f(t)\, dt = const$$

Свойство непрерывности функции F(x) называют *непрерывностью интеграла* $\int_a^x f(t)\, dt$ *по верхнему пределу интегрирования*. Непрерывность G(x) — *непрерывность интеграла по нижнему пределу интегрирования.*

**Следствие свойства 8 ◦**

Если функция интегрируема на [a, b] , то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx\,, 0 < \varepsilon < b - a$

**Доказательство следствия.**

Рассмотрим произвольную точку c ∈ (a, b). Применим свойство 8 ◦ к отрезкам [a, c] и [c, b]

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\, dx + \int_{c}^{b-\varepsilon} f(x)\, dx\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\, dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c}^{b-\varepsilon} f(x)\, dx$$

$$= \int_{a}^{c} f(x)\, dx + \int_{c}^{b} f(x)\, dx = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

## Интегральная теорема о среднем

Теорема 1. Пусть

1) f(x), g(x) интегрируемы на [a, b];

2) справедливо неравенство $m \leq f(x) \leq M,\ x \in [a, b]$;

3) функция g(x) не меняет знака на [a, b] . Тогда существует такое число μ , $m \leq \mu \leq M$ , что

$$\int_{a}^{b} f(x)g(x)\, dx = \mu \int_{a}^{b} g(x)\, dx$$

### 4.5 DONE Билет 4

Теорема о дифференцировании интеграла по верхнему пределу (с доказательством). Теорема о существовании первообразной (с доказательством). Формула Ньютона-Лейбница (с доказательством). Формула замены переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям. 4

**4. Теорема о дифференцировании интеграла по верхнему пределу (с доказательством). Теорема о существовании первообразной (с доказательством). Формула Ньютона-Лейбница (с доказательством). Формула замены переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям.**

**Теорема 1** Пусть функция f(x) интегрируема на отрезке [a, b] и непрерывна в точке $x_0 \epsilon [a, b]$. Тогда функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ дифференцируема в точке $x_0$ и $F'(x_0) = f(x_0)$

Доказательство:

Рассмотрим приращение функции $F(x)$ в точке $x_0$

$$F(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)\,dt$$

$$F(x_0 + \Delta x) = \int_a^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt$$

$$\Delta F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt\,, \quad x_0 \in [a, b]\,, \quad x_0 + \Delta x \in [a, b]$$

Докажем, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)$$

$$\left|\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)\,dx\right| = \frac{1}{\Delta x}\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\big(f(t) - f(x_0)\big)\,dt\right| \le \frac{1}{|\Delta x|}\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}|f(t) - f(x_0)|\,dt\right| \quad \textbf{(1)}$$

Функция f(x) непрерывна в точке $x_0$, следовательно, для любого ε > 0 существует δ = δ(ε) такое, что $\forall x$: $|x - x_0| < \delta$ , $x \in [a, b]$выполняется неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Рассмотрим $\Delta x$ такое, что $|\Delta x| < \delta$

Следовательно $|t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ **(2)**

Выберем $\Delta x$ исходя из условия $\Delta x < \delta$. Тогда в силу непрерывности $f(t)$ в точке $x_0$ имеем $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$\left|\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| \le \frac{1}{|\Delta x|}\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \varepsilon\,dt\right| = \frac{1}{|\Delta x|} \cdot |\varepsilon| \cdot |\Delta x| = \varepsilon \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} f(x_0)$$

<u>Следовательно</u> $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} f(x_0)$

Замечание:

Функция $G(x)$ тоже дифференцируема в точке $x_0$, причем $G'(x_0) = -f(x_0)$

$$F(x) + G(x) = \int_a^b f(t)\,dt$$

$$G(x) = \int_a^b f(t)\,dt - F(x)$$

**Теорема 2** Всякая непрерывная функция $f(t)$ на $[a, b]$ имеет первообразную. Функции вида $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ , $\forall x_0 E[a, b]$ является первообразной функции $f(t)$

Доказательство:

Проверим, что функция $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ является первообразной функции $f(x)$. Если $x > x_0$ , $x \in [a, b]$ , то

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = -\frac{d}{dx}\int_{x}^{x_0} f(t)\,dt = -\big(-f(x)\big) = f(x)$$

**Теорема 3** Формула Ньютона-Лейбница: Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то для любой её первообразной $\phi(x)$ справедлива формула $\int_a^b f(t)\,dt = \phi(b) - \phi(a)$

Доказательство:

Функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ одна из первообразных функции $f(x)$.

Тогда

$$\int_a^x f(t)\,dt = \phi(x) + c => \int_a^a f(t)\,dt = \phi(a) + c => c = -\phi(a)$$

Тогда

$$\int_a^b f(t)\,dt = \phi(b) - \phi(a)$$

**<u>Формула замены переменной в определенном интеграле:</u>**

Пусть $\varphi: [\alpha, \beta] \to [a, b]$ непрерывно дифференцируема и строго монотонна, причем $\varphi(\alpha) = a$ , $\varphi(\beta) = b$. Тогда если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то функция $f\big(\varphi(t)\big): \varphi'(t)$ интегрируема на $[\alpha, \beta]$

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(J^3)} f(x)\, dx = \int\limits_{\alpha}^{j^3} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\, dt$$

**<u>Формула интегрирования по частям:</u>**

Пусть функции $U(x)$, $V(x)$, $U'(x)$, $V'(x)$ непрерывны на $[a, b]$. Тогда справедлива формула: $U(x) \cdot V'(x)\, dx = U(x) \cdot V(x)|_a^b - \int_a^b V(x) \cdot U'(x)\, dx$

### 4.6 DONE Билет 5

Определение несобственных интегралов. Формула Ньютона-Лейбница и формула замены переменной для несобственных интегралов. 5

## Билет №5

### Определение несобственных интегралов. Формула Ньютона-Лейбница и формула замены переменной для несобственных интегралов.

Пусть функция f(x) определена на конечном или бесконечном полуинтервале [a, b), $-\infty < a < b \le +\infty$, и для любого $\eta \in [a, b)$ интегрируема по Риману на отрезке [a, η].

- Если существует конечный предел функции $F(\eta) = \int_{\alpha}^{\eta} f(x)\,dx$ при $\eta \to b - 0$, то этот предел называется несобственным интегралом функции f(x) на промежутке [a,b) :

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x)\,dx \qquad (1)$$

Если предел (1) существует, то говорят, что несобственный интеграл сходится, в противном случае — расходится. Если несобственный интеграл сходится, то говорят, что функция f(x) интегрируема в несобственном смысле на промежутке [a, b). Возможны два случая: b – конечное число, b = +∞

Если b – конечно и функция f интегрируема по Риману на [a, b], то по свойству непрерывности интеграла с переменным верхним пределом существует:

$$\lim_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Таким образом, определенный ранее интеграл Римана является частным случаем несобственного интеграла. Если b – конечно, то Определение (1) содержательно только если функция f не ограничена в любой окрестности точки b.

Геометрический смысл несобственного интеграла от неотрицательной функции f состоит в том, что он равен площади криволинейной трапеции.

- Если функция f определена на полуинтервале (a, b], $-\infty \le a < b < +\infty$ и для любой точки $\xi \in (a, b]$ интегрируема по Риману на отрезке [ξ, b], то несобственный интегралопределяется как предел:

$$\int_\alpha^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \to \alpha} \int_\varepsilon^b f(x)\,dx \qquad (2)$$

Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция f(x) определена на полуинтервале [a, b) и интегрируема по Риману на любом отрезке [a, η], $a \le \eta < b$.

- Если f непрерывна на полуинтервале [a, b) и F – какая-либо ее первообразная, то:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx=F(b-0)-F(a) \qquad (1)$$

В равенстве (1) либо обе части имеют смысл, и тогда они равны, либо они одновременно не имеют смысла, то есть стоящие в них пределы не существуют. С учетом определений :

$\int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx=\lim_{\eta\to b}\int_{\alpha}^{\eta} f(x)\,dx$; $F(b-0)-F(a)=\lim_{\eta\to b} F(\eta)-F(a)$

Замена переменной в несобственном интеграле.

- Если функция f(x) непрерывна на полуинтервале Δx = [a, b), функция u(t) непрерывно дифференцируема на полуинтервале Δt = [α, β), −∞ < α < β ≤ +∞,u(Δt) ⊂ Δx,  a=u(a), $b=\lim_{t\to\beta} u(t)$ , то:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta} f(u(t))\,u'(t)\,dt \quad (5)$$

причем из существования интеграла, стоящего слева в (5), следует существование интеграла, стоящего справа.

**Замечание**

Если функция u такова, что обратная функция u^ −1 однозначна и удовлетворяет условиям, аналогичным условиям, наложенным на u и, следовательно, в интеграле в правой части (5) можно сделать замену t = ^ −1 (x), то оба интеграла сходятся или расходятся одновременно.

Примеры:

1) $\int_{\alpha}^{b} \frac{dx}{(x-a)^p}=\left|t=x-a,\, x=t+a\right|=\int_{0}^{b-a} \frac{dt}{t^P}$ - — сходится при p < 1 и расходится при p ≥ 1.

2) $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\left|x=\frac{1}{t}\right|=\int_{1}^{0} \frac{-\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}=\int_{0}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin \big|_{0}^{1}=\frac{\pi}{2}$

## 4.7 DONE Билет 6

Несобственные интегралы от неотрицательных функций (лемма и признак сравнения). Критерий Коши сходимости интеграла (с доказательством). Абсолютно сходящиеся интегралы (определение и теорема о сходимости абсолютно сходящегося интеграла). 6

6) Несобственные интегралы от неотрицательных функций (лемма и признак сравнения). Критерий Коши сходимости интеграла (с доказательством). Абсолютно сходящиеся интегралы (определение и теорема о сходимости абсолютно сходящегося интеграла)

**Лемма 1**. Пусть f(x) ≥ 0 на полуинтервале [a,b). Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда существует c > 0 такое, что для любого η ∈ [a,b) выполняется неравенство $\int_a^{\eta} f(x)dx \leq c$.

**Теорема 1. (Признак сравнения).**

Пусть 0 ≤ g(x) ≤ f(x), x ∈ [a, b). Тогда:

1) Если Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ -сходится, то сходится и интеграл $\int_a^b g(x)dx$;

2) если Интеграл $\int_a^b g(x)dx$-расходится, то расходится и интеграл $\int_a^b f(x)dx$

**Следствие 1.(Признак сравнения в предельной форме)**

Пусть 0 ≤ g(x) и 0 ≤ f(x), для любого x ∈ [a, b) и существует (∃) конечный или бесконечный

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Тогда:

1) Если $0 \leq k < +\infty$, то $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно;
2) Если $k$=0→ из сходимости $\int_a^b g(x)dx$ следует сходимость $\int_a^b f(x)dx$;
3) Если $k$=+∞, тогда из расходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ следует расходимость;

**Теорема 2.(** ***Критерий Коши)***

Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, тогда и только тогда, когда для любого(∀) ε > 0 существует(∃) η ∈ [a, b) , что для любых η’, η’’ , η< η’< η’’ ,

$$\left| \int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

**Доказательство**. По определению несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta\to\beta-0}\int_a^\eta f(x)dx = \lim_{\eta\to\beta-0}\varphi(\eta)$ по критерию Коши существование $\lim_{\eta\to\beta-0}\varphi(\eta)\exists \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\ a <$η$< b$ : ∀ η', η'',

η< η'< η'' выполняется неравенство $|\varphi(\eta') - \varphi(\eta'')|$<ε

$|\varphi(\eta') - \varphi(\eta'')|$= $\int_a^b f(x)dx - \int_a^{\eta'} f(x)dx = \int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx \Leftrightarrow \left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx\right| < \varepsilon.$

**Абсолютно сходящиеся интегралы**

**Определение** Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$.

**Теорема 3.** Если несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ абсолютно сходится, то он сходится.

**Замечание !!!!**

Утверждение обратное теореме 3 неверное, то есть из обычной сходимости не следует абсолютная сходимость.

**Замечание!!** Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ абсолютно сходится, а функция g(x) интегрируема по Риману на любом отрезке [a, η],∀ $\eta\epsilon(a,b)$ и ограничена на [a, b). Тогда $\int_a^b f(x)g(x)dx$ абсолютно сходится.

### 4.8 Билет 7

Определение числового ряда. Необходимый признак сходимости ряда (с доказательством). Критерий Коши сходимости ряда (с доказательством). Ряды с неотрицательными членами (признак сравнения, интегральный признак Коши, радикальный признак Коши, признак Даламбера).

### 4.9 DONE Билет 8

Знакопеременные ряды (признак Лейбница). Абсолютно сходящиеся ряды (определение). Критерий Коши абсолютной сходимости ряда. Условно сходящиеся ряды (определение). Теорема Римана. 8

*Вопрос № 8. (Тема 13) Знакопеременные ряды (признак Лейбница). Абсолютно сходящиеся ряды (определение). Критерий Коши абсолютной сходимости ряда. Условно сходящиеся ряды (определение). Теорема Римана.*

- *Теорема 1 (Признак Лейбница). Если последовательность $\{u_n\}$ убывает ($\{u_n\} \geq \{u_{n+1}\}$, n = 1, 2, . . .) и $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} u_n$ сходится, причем, если s — сумма ряда, а $s_n$ — его частичная сумма, то для любых n = 1, 2, . . . выполняется неравенство $|s_n - s| \leq u_{n+1}$ (2)*

*Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} u_n$ знакочередующийся. Из условий $\{u_n\} \geq \{u_{n+1}\}$, $\lim_{n\to\infty} u_n$ следует, что $u_n \geq 0$.*

- *Опр-е 1Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$*

- *Теорема 2 (Критерий Коши абсолютной сходимости ряда)*

*Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно* $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon): \forall\ n > N, \forall$ целого $p \geq 0$ $(\sum_{k=1}^{p} |u_{n+k}| < \varepsilon)$

*Теорема 3 Если ряд абсолютно сходится, то он сходится. Данное утверждение следует из неравенства: $\left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}\right| \leq \sum_{k=1}^{p} |u_{n+k}|$*

- *Опр-е 2 Сходящийся, но не абсолютно, ряд называется условно сходящимся.*

- *Теорема Римана. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ $u_n \in R$ сходится условно, то $\forall\ S \in R$ можно так переставить члены этого ряда, что сумма получившегося ряда будет равна S.*

*Теорема Римана показывает, что свойства коммутативности сложения для конечных сумм не переносится на ряды. Если ряд сходится условно, то сумма зависит от порядка слагаемых.*

### 4.10 Билет 9

Функциональные последовательности и ряды (определения, в том числе, ограниченная последовательность, сходящаяся последовательность, сходящийся ряд, абсолютно сходящийся ряд). Равномерная сходимость функциональной последовательности и функционального ряда (определение и пример). Критерии Коши равномерной сходимости функциональной последовательности (ряда). Признак Вейерштрасса.

### 4.11 DONE Билет 10

Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы (с доказательством), интегрирование, дифференцирование). 10

*Вопрос №10. Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы (с док.), интегрирование, дифференцирование).*

- Теорема 1 (Непрерывность суммы ряда). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, x∈X, у которого функции $u_n(x)$ непрерывны в точке $x_0$∈X. Если ряд сходится равномерно на X, то сумма ряда s(x)= $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывна в точке $x_0$.

  **Док-во.** Пусть $s_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$, n=1,2,… - частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.
  Зададим $\varepsilon > 0$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно, следовательно $s_n(x) \rightrightarrows s(x)$, т.е. $\exists n_0 : \forall\, n > n_0$ , $\forall\, x \in X$ выполняется неравенство
  $$|s(x) - s_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$
  Для всех x ∈ $U_\delta(x_0)$∩X имеем
  $$|s(x) - s(x_0)| = |[s(x) - s_n(x)] + [s_n(x) - s_n(x_0)] + [s_n(x_0) - s(x_0)]| < \varepsilon$$
  что и означает непрерывность функции s(x) в точке $x_0$
  Замечание 1. В условиях теоремы 1 для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в точке $x_0 \in X$ возможен переход к пределу:
  $$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} u_n(x)$$
- Теорема 2 (Интегрирование ряда).

  C$[a; b]$- класс функций, непрерывных на отрезке $[a; b]$

  C$^1[a; b]$- класс функций, непрерывно дифференц. на $[a; b]$

Пусть даны ф-и $u_n(x) \in C[a; b]$, n=1,2,… и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $[a; b]$. Тогда $\forall\, x_0 \in [a; b]$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{x_0}^{x} u_n(t)dt\right)$ сходится равномерно на $[a; b]$, причем
$$\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\right)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{x_0}^{x} u_n(t)dt\right)$$

- *Ряд непрерывных ф-ий в условиях теоремы 2 можно почленно интегрировать. Интеграл бесконечной суммы = сумме интегралов*
- *Функция f(x)называется непрерывной в точке, если: функция определена в точке и ее окрестности; существует конечный предел функции в точке; этот предел равен значению функции в этой точке.*

- Теорема 3 (Дифференцирование). Пусть дана последовательность ф-й $u_n(x) \in C^1[a; b]$, n=1,2,…, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ сходится равномерно на $[a; b]$. Тогда, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in [a; b]$, то
  $$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

Причем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на $[a; b]$.

Его сумма s(x)= $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ является непрерывно дифференцируемой функцией и $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$.

В условиях Т3 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ можно почленно дифференцировать.

## 4.12 Билет 11

Степенные ряды (определение). Первая теорема Абеля (с доказательством). Радиус и круг (интервал) сходимости степенного ряда (определения). Понятие аналитической функции (определение). Теорема о представлении аналитической функции рядом Тейлора.

## 4.13 Билет 12

Определение n-мерного арифметического евклидова пространства. Определение n-мерного открытого шара. Предел последовательности в n-мерном пространстве, ограниченное множество в n-мерном пространстве, окрестность бесконечно удалённой точки (определения).

## 4.14 Билет 13

Внутренняя точка множества, открытое множество, точка прикосновения множества, предельная точка множества, замыкание множества, замкнутое множество, компактное множество, линейно связное множество, выпуклое множество, область (определения).