Поскольку $b_1, \dots, b_m$ – базис, то

$$DA' = AC$$

Отсюда

$$A' = D^{-1}AC$$

В частности, если φ – линейный оператор, то

$$A' = C^{-1}AC$$

где C – матрица перехода от одного базиса к другому.

п. 2 Ядро и образ

Пусть $\varphi: V \to W$ – линейное отображение

Опр. Образом линейного отображения φ называется его образ как отображения мн-ва V в мн-во W

$$\mathrm{Im}\,\varphi = \{\varphi(x) \in W \mid x \in V\} \subset W$$

Опр. Ядром линейного отображения φ называется мн-во

$$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{x \in V \mid \varphi(x) = 0\} \subset V$$

Теорема 1

Если $\varphi: V \to W$ – линейное отображение, то $\mathrm{Im}\,\varphi$ – подпр-во W, $\mathrm{Ker}\,\varphi$ – подпр-во V.

Доказательство

1. Пусть $y, y' \in \mathrm{Im}\,\varphi$, $k \in F$

Докажем, что $y + y' \in \mathrm{Im}\,\varphi$, $ky \in \mathrm{Im}\,\varphi$

По определению $\mathrm{Im}\,\varphi$ имеем $y = \varphi(x)$, $y' = \varphi(x')$ для нек-рых $x, x' \in V$

След-но

$$y + y' = \varphi(x) + \varphi(x') = \varphi(x + x') \in \mathrm{Im}\,\varphi$$

$$ky = k\varphi(x) = \varphi(kx) \in \mathrm{Im}\,\varphi$$

Итак, $\mathrm{Im}\,\varphi$ замкнут относительно векторных операций. Поэтому $\mathrm{Im}\,\varphi$ – подпр-во пр-ва W (см. хар. признак под-пр-ва)

2. Док-во аналогично.

Пример

Пусть $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi((x_1, x_2)) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 0)$

Найдем матрицу этого линейного отображения в канонических базисах пр-в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$

$a_1 = (1, 0)$, $a_2 = (0, 1)$

$b_1 = (1, 0, 0)$, $b_2 = (0, 1, 0)$, $b_3 = (0, 0, 1)$

$\varphi(a_1) = (1, 1, 0) = 1 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3$

$\varphi(a_2) = (1, -1, 0) = 1 \cdot b_1 - 1 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3$

Итак, матрица линейного отображения есть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Если вектор x имеет в базисе a_1, a_2 координаты x_1, x_2, то вектор $y = \varphi(x)$ имеет в базисе b_1, b_2, b_3 координаты y_1, y_2, y_3, где

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Найдем $\operatorname{Ker} \varphi$. Для этого необходимо решить систему линейных ур-ий:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \end{cases}$$

Итак, $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$.

Найдем $\operatorname{Im} \varphi$. Для этого заметим, что

$$\operatorname{Im} \varphi = \langle \varphi(a_1), \varphi(a_2) \rangle$$

Это общий факт, справедливый для произвольного отображения линейного $\varphi: V \to W$, т.е.

$$\operatorname{Im} \varphi = \langle \varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n) \rangle$$

где $a_1, \dots, a_n$ – базис V.

Так как

$$\varphi(a_1) = (1,1,0)$$
$$\varphi(a_2) = (1,-1,0)$$

то $\varphi(a_1), \varphi(a_2)$ — базис $\operatorname{Im}\varphi$

Таким образом,

$$\dim \operatorname{Ker}\varphi = 0$$
$$\dim \operatorname{Im}\varphi = 2$$

Теорема 2

Пусть $\varphi: V \to W$ — линейное отображение.

Тогда

$$\dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi = \dim V$$

Доказательство

Выберем $a_1, \dots, a_k$ подпр-ва $\operatorname{Ker}\varphi$ ($k = \dim \operatorname{Ker}\varphi$)

Дополним линейно независимую систему $a_1, \dots, a_k$ до базиса $a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n$ всего пр-ва V ($n = \dim V$).

Покажем, что векторы $\varphi(a_{k+1}), \dots, \varphi(a_n)$ образуют базис $\operatorname{Im}\varphi$

1. Векторы $\varphi(a_{k+1}), \dots, \varphi(a_n)$ линейно независимы

   Пусть

   $$l_1\varphi(a_{k+1}) + \dots + l_{n-k}\varphi(a_n) = 0$$

   Значит,

   $$\varphi(l_1 a_{k+1} + \dots + l_{n-k} a_n) = 0$$

   След-но,

   $$l_1 a_{k+1} + \dots + l_{n-k} a_n \in \operatorname{Ker}\varphi$$

   Так как базис $\operatorname{Ker}\varphi$ составляют $a_1, \dots, a_k$, то должно быть

   $$l_1 = \dots = l_{n-k} = 0$$

2. Всякий вектор $y \in \operatorname{Im} \varphi$ является нек-рой линейной комбинацией $\varphi(a_{k+1}), \dots, \varphi(a_n)$

Имеем:

$$y = \varphi(x)$$

для нек-рого $x \in V$.

Разложим x по базису $a_1, \dots, a_n$:

$$x = \underbrace{l_1 a_1 + \dots + l_k a_k}_{\in \operatorname{Ker} \varphi} + l_{k+1} a_{k+1} + \dots + l_n a_n$$

Значит,

$$y = \varphi(x) = \varphi(l_{k+1} a_{k+1} + \dots + l_n a_n) =$$
$$= l_{k+1} \varphi(a_{k+1}) + \dots + l_n \varphi(a_n)$$

<u>Опр.</u> Дефектом линейного отображения называется размерность его ядра ($\dim \operatorname{Ker} \varphi$)

<u>Опр.</u> Рангом линейного отображения $\varphi: V \to W$ называется $\dim \operatorname{Im} \varphi$.

<u>Опр.</u> Линейное отображение $\varphi: V \to W$ называется невырожденным, если его дефект равен нулю, т.е. $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$. (или его ранг равен n)

<u>Теорема 3</u> (критерий невырожденности линейного оператора)

Пусть $\varphi: V \to V$ — линейный оператор

Следующие условия эквивалентны:

1. $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$
2. $\operatorname{Im} \varphi = V$, т.е φ - сюръективное отображ
3. φ - инъективное отображение
4. φ - биективное отображение

<u>Доказательство</u>

Схема док-ва: $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 1)$

$1) \Rightarrow 2)$

Пусть $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$. Имеем:

$$\dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi = n$$

След-но,

$$\dim \operatorname{Im} = n - \dim \operatorname{Ker}\varphi = n = \dim V$$

Значит,

$$\operatorname{Im}\varphi = V$$

2) $\Rightarrow$ 3)

Пусть $\operatorname{Im}\varphi = V$, т.е φ сюръективно
Тогда $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$

Если $x \neq y$, то $x - y \neq 0$. Поэтому

$$\varphi(x-y) \neq 0$$

т.е

$$\varphi(x) - \varphi(y) \neq 0$$

След-но,

$$\varphi(x) \neq \varphi(y)$$

3) $\Rightarrow$ 4)

Пусть φ инъективное отображение Тогда

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$$

(если $x \neq 0$, $x \in \operatorname{Ker}\varphi$, то $\varphi(x) = 0 = \varphi(0)$ – противоречие инъективности отображения)

След-но,

$$\operatorname{Im}\varphi = V$$

т е

φ – сюръективное отображение

Таким образом, φ биективное отображение

4) $\Rightarrow$ 1)

Если φ – биективное отображение, то $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$
(см предыдущее рассуждение)