6) Несобственные интегралы от неотрицательных функций (лемма и признак сравнения). Критерий Коши сходимости интеграла (с доказательством). Абсолютно сходящиеся интегралы (определение и теорема о сходимости абсолютно сходящегося интеграла)

Лемма 1. Пусть $f(x) \geq 0$ на полуинтервале $[a,b)$. Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда существует $c > 0$ такое, что для любого $\eta \in [a,b)$ выполняется неравенство $\int_a^\eta f(x)dx \leq c$.

Теорема 1. (Признак сравнения).

Пусть $0 \leq g(x) \leq f(x)$, $x \in [a, b)$. Тогда:

1) Если Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ -сходится, то сходится и интеграл $\int_a^b g(x)dx$;

2) если Интеграл $\int_a^b g(x)dx$-расходится, то расходится и интеграл $\int_a^b f(x)dx$

Следствие 1.(Признак сравнения в предельной форме)

Пусть $0 \leq g(x)$ и $0 \leq f(x)$, для любого $x \in [a, b)$ и существует (∃) конечный или бесконечный

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Тогда:

1) Если $0 \leq k < +\infty$, то $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно;
2) Если $k=0$→ из сходимости $\int_a^b g(x)dx$ следует сходимость $\int_a^b f(x)dx$;
3) Если $k=+\infty$, тогда из расходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ следует расходимость;

Теорема 2.(***Критерий Коши)***

Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, тогда и только тогда, когда для любого(∀) $\varepsilon > 0$ существует(∃) $\eta \in [a, b)$, что для любых η', η'' , $\eta < \eta' < \eta''$,

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

Доказательство. По определению несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta\to\beta-0} \int_a^\eta f(x)dx = \lim_{\eta\to\beta-0} \varphi(\eta)$ по критерию Коши существование $\lim_{\eta\to\beta-0} \varphi(\eta) \exists \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \ \exists \ a <$η$< b$: ∀ η', η'',

η< η'< η'' выполняется неравенство $|\varphi(\eta') - \varphi(\eta'')|$<ε

$|\varphi(\eta') - \varphi(\eta'')| = \int_a^b f(x)dx - \int_a^{\eta'} f(x)dx = \int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx \Leftrightarrow \left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx\right| < \varepsilon.$

Абсолютно сходящиеся интегралы

Определение Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$.

Теорема 3. Если несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ абсолютно сходится, то он сходится.

Замечание !!!!

Утверждение обратное теореме 3 неверное, то есть из обычной сходимости не следует абсолютная сходимость.

Замечание!! Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ абсолютно сходится, а функция g(x) интегрируема по Риману на любом отрезке [a, η],∀ $\eta\epsilon(a,b)$ и ограничена на [a, b). Тогда $\int_a^b f(x)g(x)dx$ абсолютно сходится.