Свойства определенного интеграла:

1°.

$$\int_a^b dx = b - a$$

2°. Если функция f(x) интегрируема на [a, b], то она интегрируема на любом отрезке [a*, b*]⊂[a, b].

3°. Аддитивность интеграла.

Пусть функция f(x) интегрируема на [a, b] и a<c<b. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

4°Линейность интеграла.

Пусть функции f(x) и g(x) интегрируемы на [a, b] и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тогда ∃

$$\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

5°. Если функции f(x) и g(x) интегрируемы на [a, b], то их произведение f(x)*g(x) интегрируема на [a, b].

6°.Интегрирование неравенств.

Если f(x) интегрируема на [a, b] и f(x) ≥ 0 на [a, b] , то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

Следствие свойства 6 ◦ .

Если функции f(x), g(x) интегрируемы на [a, b] и f(x) ≥ g(x) ∀ x ∈ [a, b] , то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

7°. Если функция f(x) интегрируема на [a, b], то |f(x)| также интегрируема на [a, b] и

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,, a < b.$$

8° Непрерывность интеграла по верхнему пределу.

Если функция f интегрируема на [a, b] , то функции F(x) непрерывны на [a, b].

$$F(x) \coloneqq \int_a^x f(t)\,dt, G(x) \colon= \int_x^b f(t)\,dt$$

Функция F(x) называется интегралом с переменным верхним пределом, а функция G(x) — интегралом с переменным нижним пределом.

Доказательство.

Пусть f(x) интегрируема на [a, b], тогда существует c > 0 : ∀ x ∈ [a, b] |f(x)| ≤ c , т.е. f(x) ограничена на [a, b].

Рассмотрим интеграл

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^x, f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \qquad (1)$$

Равенство (1) верно как при Δx ≥ 0 , так и при Δx < 0 , при условии x, x + Δx ∈ [a, b]. Приращение функции F(x) можно записать в виде:

$$\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

Проведем оценку:

$$|\Delta F(x)| = \left|\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt\right| \le \int_{x}^{x+\Delta x} |f(t)|\,dt \le C\left|\int_{x}^{x+\Delta x} dt\right| = C|\Delta x|$$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta F(x) = 0$, следовательно, F(x) непрерывна на [a, b].

Непрерывность функции G(x) следует из непрерывности F(x), т.к.

$$\int_{a}^{x} f(t)\,dt + \int_{x}^{b} f(t)\,dt = \int_{a}^{b} f(t)\,dt = const$$

Свойство непрерывности функции F(x) называют *непрерывностью интеграла* $\int_a^x f(t)\,dt$ *по верхнему пределу интегрирования*. Непрерывность G(x) — *непрерывность интеграла по нижнему пределу интегрирования.*

Следствие свойства 8 ◦

Если функция интегрируема на [a, b] , то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,, 0 < \varepsilon < b - a$

Доказательство следствия.

Рассмотрим произвольную точку c ∈ (a, b). Применим свойство 8 ◦ к отрезкам [a, c] и [c, b]

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{c}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$
$$= \int_{a}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

Интегральная теорема о среднем

Теорема 1. Пусть

1) f(x), g(x) интегрируемы на [a, b];

2) справедливо неравенство $m \le f(x) \le M,\ x \in [a, b]$;

3) функция g(x) не меняет знака на [a, b] . Тогда существует такое число μ , m ≤ μ ≤ M , что

$$\int_{a}^{b} f(x)g(x)\,dx = \mu\int_{a}^{b} g(x)\,dx$$