Опр. Векторы $x, y \in V$ называются ортогональными, если $(x, y) = 0$

Опр. Система векторов $a_1, \dots, a_m$ пр ва V наз. ортогональной, если

$$(a_i, a_j) = 0 \text{ при } i \neq j,\ i,j = (1, \dots, m).$$

Теорема 1

Ортогональная система векторов, не содержащая нулевых векторов, является линейно независимой

Доказательство:

Пусть векторы $a_1, \dots, a_m$ отличны от нулевого и образуют ~~ортогона~~льную систему.

Докажем их линейную независимость

Пусть $k_1 a_1 + \dots + k_m a_m = 0$ Докажем, что, например, $k_1 = 0$.

Умножим скалярно обе части рав-ва на a_1

$$0 = (k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m, a_1) =$$
$$= k_1 (a_1, a_1) + k_2 \overset{\text{ортогон.}}{(a_2, a_1)} \overset{=0}{} + \dots + k_m \overset{\text{ор-огон.}}{(a_m, a_1)} \overset{=0}{} =$$
$$= k_1 (a_1, a_1)$$

По св-ву положит-ти т.к $a_1 \neq 0$, $(a_1, a_1) > 0$, след-но $k_1 = 0$.

п. 2 Евклидово пространство

Опр. Конечномерное векторное пр-во V над полем $\mathbb{R}$, в к-ром задана нек-рое скалярное умножение векторов, называется Евклидовым пространством

Теорема 2

Любое конечномерное векторное пр-во V над полем F можно превратить в евклидово пространство.

Доказательство

Пусть $\dim V = n$, $b_1, \dots, b_n$ — нек-рый базис V

Формула $(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ (где $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_n \end{pmatrix}$ — столбцы координат векторов x, y в данном базисе) задает скалярное умножение в V.

Пусть V — евклидово пр-во, $\dim V = n$

<u>Опр.</u> Матрицей Грама скалярного произведения в базисе $b_1, \ldots, b_n$ евклидова пр-ва V наз. матрица $G = (g_{ij})$, где $g_{ij} = (b_i, b_j)$, $i, j = 1, \ldots, n$

<u>Опр.</u> Базис называется ортогональным, если G — диагональная матрица, т.е. базис является ортогональной системой

<u>Опр.</u> Базис называется ортонормированным, если $G = E$ — единичная матрица

<u>Доказательство</u>

Пусть G — матрица Грама скалярного произведения в базисе $b_1, \ldots, b_n$, а векторы $x, y \in V$ заданы своими координатами $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ в этом базисе.

Вычислим скалярное произведение этих векторов

$$(x, y) = (x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n,\ y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n) =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} (x_i b_i,\ y_j b_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j (b_i, b_j) =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j g_{ij} = (x_1 \ldots x_n)\, G \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

В частности, если базис ортонормированный, т.е. $G = E$, то $(x, y) = (x_1 \ldots x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$

Пусть T — матрица перехода от базиса $b_1, \ldots, b_n$ к базису $b_1', \ldots, b_n'$, $T = (t_{ij})$

Имеем:

$$(b_i'; b_j') = \left(\sum_{k=1}^{n} t_{ki} b_k,\ \sum_{l=1}^{n} t_{lj} b_l\right) =$$
$$= \sum_{k,l=1}^{n} t_{ki} t_{lj} (b_k, b_l) = \sum_{k,l=1}^{n} t_{ki} g_{kl} t_{lj}$$

Отсюда:

$$G' = T^t G T$$