Алгебра линейных операторов

Определим действия над линейными операторами $\varphi: V \to V$ (V — векторное пр-во над полем F)

Опр. Суммой линейных операторов $\varphi, \psi: V \to V$ называется линейный оператор $\varphi + \psi: V \to V$, заданный правилом:

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) \quad \forall x \in V$$

Опр. Произведением линейного оператора $\varphi: V \to V$ на скаляр $k \in F$ называется линейный оператор $k\varphi: V \to V$, действующий по правилу:

$$(k\varphi)(x) = k\varphi(x) \quad \forall x \in V$$

Замечание

Сумма линейных операторов и произведение линейного оператора на скаляр являются линейными операторами, что проверяется непосредственно

Свойства (φ, ψ, χ — линейные операторы $V \to V$)

1. $\varphi + (\psi + \chi) = (\varphi + \psi) + \chi$ (ассоциативность слож.)
2. $\varphi + \psi = \psi + \varphi$ (коммутативность сложения)
3. $\varphi + O = \varphi$, где $O: V \to V$ — нулевой оператор
4. Для любого φ существует такой ψ, что

   $$\varphi + \psi = O$$

   ψ — противоположный линейный оператор, обозначаемый $-\varphi$
5. $k(l\varphi) = (kl)\varphi \quad (k, l \in F)$ (смешанная асс-ть)
6. $(k + l)\varphi = k\varphi + l\varphi \qquad k(\varphi + \psi) = k\varphi + k\psi \quad (k, l \in F)$

   (дистрибутивность)
7. $1 \cdot \varphi = \varphi$

Теорема 4

Мн-во всех линейных операторов $\varphi: V \to V$ относительно операций сложения и умножения на скаляр представляет собой векторное пр-во над полем F.

Доказательство

см. св-ва 1, – 7.

Опр. Произведением линейных операторов $\varphi, \psi: V \to V$ называется линейный оператор $\varphi \circ \psi: V \to V$, действующий по правилу

$$(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(\psi(x)) \quad \forall x \in V$$

Замечание

Так определенное произведение линейных операторов действительно будет линейным оператором.:

$$(\varphi \circ \psi)(x+y) = \varphi(\psi(x+y)) = \varphi(\psi(x)+\psi(y)) =$$
$$= \varphi(\psi(x)) + \varphi(\psi(x)) = (\varphi \circ \psi)(x) + (\varphi \circ \psi)(y)$$

и аналогично для св-ва однородности

Свойства

φ, ψ, χ – линейные операторы $V \to V$

1. $\varphi \circ (\psi \circ \chi) = (\varphi \circ \psi) \circ \chi$
2. $\varphi \circ (\psi + \chi) = \varphi \circ \psi + \varphi \circ \chi$

   $(\psi \circ \chi) \circ \varphi = \psi \circ \varphi + \chi \circ \varphi$
3. $k(\varphi \circ \psi) = (k\varphi) \circ \psi = \varphi \circ (k\psi) \quad (k \in F)$

Опр. Пусть K – кольцо и F – поле. Если K является векторным пр-вом над F, причем $k(ab) = (ka)b = a(kb)$ для любых $a, b \in K$, $k \in F$.

Тогда K называется алгеброй над полем F

Опр. Размерностью алгебры K называется ее размерность как векторного пр-ва над F

Примеры

1. Алгебра линейных операторов, действующих в векторном пр-ве V
2. Алгебра матриц порядка n
3. Алгебра многочленов

Фиксируем произвольный базис $b_1, \dots, b_n$ пр-ва V. Тогда всякий линейный оператор $\varphi\ V \to V$ может быть задан матрицей $A_\varphi \in M_n(F)$, $n = \dim V$

Соответствие $\varphi \mapsto A_\varphi$ является взаимнооднозначным и связано с операциями над линейными преобразованиями следующим образом:

$$A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$$

$$A_{k\varphi} = k A_\varphi$$

$$A_{\varphi\psi} = A_\varphi \cdot A_\psi$$

Убедимся в справедливости последней формулы

Находим образы базисных векторов:

$$\varphi(b_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}^{\varphi}\, b_j \qquad \psi(b_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}^{\psi}\, b_j$$

здесь $A_\varphi = (a_{ij}^{\varphi})$, $A_\psi = (a_{ij}^{\psi})$

$$(\varphi \circ \psi)(b_i) = \varphi(\psi(b_i)) = \varphi\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ji}^{\psi}\, b_j\Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ji}^{\psi}\varphi(b_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}^{\psi} \sum_{k=1}^{n} a_{kj}^{\varphi}\, b_k = \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}^{\varphi} a_{ji}^{\psi}\Big) b_k$$

Отсюда и следует доказываемая формула, т.к.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, a_{ji}$$

есть ki-ый эл-нт матрицы $A_\varphi \cdot A_\psi$

Опр. Линейный оператор $\varphi : V \to V$ называется обратимым, если существует такой линейный оператор ψ, что $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = \mathcal{E}$ где $\mathcal{E}$ – тождественный линейный оператор ($\mathcal{E}(x) = x \quad \forall x$)

Обозначение

$$\psi = \varphi^{-1}$$

Теорема 5

Линейный оператор $\varphi : V \to V$ обратим тогда и только тогда, когда он является невырожденным

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

$\Rightarrow$ Пусть оператор $\varphi: V \to V$ обратим.

Тогда рав-во

$$\varphi(x) = 0$$

влечет рав-во

$$x = 0$$

Действительно, $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = x = \varphi(0) = 0$

Значит, $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$, т.е φ - невырожденный оператор.

$\Leftarrow$ Пусть φ - невырожденный оператор

Тогда, во-первых, φ - инъективное отображение и, во-вторых, φ - сюръективное отображение, т.е $\varphi: V \to V$ - взаимооднозначное отображение, поэтому определено обратное отображение $\varphi^{-1}: V \to V$, которое, как легко видеть, является линейным

Таким образом, оператор φ обратим

ЗАМЕЧАНИЕ

Линейный оператор $\varphi: V \to V$ является невырожденным тогда и только тогда, когда $\det A_\varphi \neq 0$, где A_φ - матрица линейного оператора φ в каком-нибудь базисе:

$\dim \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{rank} \varphi = \operatorname{rank} A_\varphi$. Если $\det A_\varphi \neq 0$, то обратный оператор $\varphi^{-1}: V \to V$ существует и $A_{\varphi^{-1}} = A_\varphi^{-1}$