Тема 12. Числовые ряды. Сходимость ряда. Критерий Коши сходимости ряда. Необходимый признак сходимости. Ряды с неотрицательными членами

Определение 1. Пара последовательностей $\{u_n\}$ и $\{s_n\}$, $u_n, s_n \in \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots$, где

$$s_n = u_1 + \ldots + u_n, \ \ n = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

называется *рядом* или *бесконечной суммой* и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots . \tag{2}$$

Элементы последовательности u_n называются *элементами ряда,* а элементы последовательности s_n — его *частичными суммами.*

Если существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s, \tag{3}$$

то он называется *суммой ряда.* В этом случае ряд называют *сходящимся* и пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s.$$

Если последовательность $\{s_n\}$ не стремится к конечному пределу, то ряд называется *расходящимся.*

Пример 1. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, $|q| < 1$, $q \in \mathbb{C}$. Частичная сумма ряда равна: $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, $n = 0, 1, \ldots$. Вычислим предел последовательности $\{s_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q} \right) = \frac{1}{1-q}, \ \ |q| < 1.$$

Следовательно, при $|q| < 1$ ряд сходится и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$. При $|q| > 1$ ряд расходится. При $q = 1$ имеем $s_n = n$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$, а значит ряд расходится.

Отметим некоторые свойства сходящихся рядов.

Теорема 1. (Необходимый признак сходимости ряда). Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ — сходится. Следовательно, существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. Из равенства $u_n = s_n - s_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0.$$

$\square$

Теорема 2. Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u''_n$ сходятся, причем их суммы равны s' и s'', то для любых $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{C}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda' u'_n + \lambda'' u''_n)$ сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda' u'_n + \lambda'' u''_n) = \lambda' s' + \lambda'' s''.$$

Доказательство следует из определения сходящегося ряда и свойства пределов.

Определение 2. Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$ называется n*-м остатком данного ряда.* Если ряд сходится, то $r_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$ — сумма остатка.

Теорема 3. Если ряд сходится, то и любой его остаток сходится. Если какой-то остаток ряда сходится, то и сам ряд также сходится, причем $s - s_n = r_n$ для любых $n = 1, 2, \ldots$.

Без доказательства.

Сформулируем и докажем *критерий Коши* сходимости ряда.

Теорема 4. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует n_0 : для любого $n > n_0$ и для любых целых $p \geq 0$ имеет место

$$|u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность частичных сумм $s_n = u_1 + \ldots + u_n$. По критерию Коши для последовательности $\{s_n\}$ имеем: $\{s_n\}$ — сходится $\iff$ $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists\ \ n_0 :\ \forall\ \ n > n_0\ \forall$ целого $p \geq 0$ $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$, т.е. $|u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon$. $\square$

Ряды с неотрицательными членами. Признаки сравнения

Лемма 1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \geq 0$, сходится тогда и только тогда, когда его частичные суммы ограничены сверху.

Доказательство. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ с неотрицательными членами $(u_n \geq 0,\ n = 1, 2, \ldots)$. Тогда

$$s_{n+1} = s_n + u_n \geq s_n,$$

т.е. последовательность частичных сумм $\{s_n\}$ данного ряда возрастает. Возрастающая последовательность $\{s_n\}$ имеет конечный предел тогда и только тогда, когда она ограничена сверху. $\square$

Замечание 1. Если $u_n \geq 0$, то последовательность $\{s_n\}$ возрастает и всегда имеет конечный или бесконечный предел S.

Теорема 5. (Признак сравнения). Пусть даны два ряда

$$\sum u_n,\ \sum v_n,\ 0 \leq u_n \leq v_n,\ n = 1, 2, \ldots; \tag{4}$$

тогда:

1) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится;

2) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится.

Доказательство Теоремы 5 очевидным образом вытекает из Леммы 1.

Следствие 1. Пусть $u_n \geq 0,\ v_n > 0,\ n = 1, 2, \ldots,$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l; \tag{5}$$

тогда:

1) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится и $0 \leq l < +\infty,$ то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$;

2) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится и $0 < l \leq +\infty,$ то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n.$

В частности, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1,$$

то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство.

1) $0 \leq l < +\infty$

Из условия (5) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 :\ \forall\, n > n_0$ выполняется неравенство

$$\frac{u_n}{v_n} < l + \varepsilon \ \Rightarrow\ u_n < (l+\varepsilon)v_n,\ n > n_0. \tag{6}$$

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (l+\varepsilon)v_n$. Тогда в силу (6) по признаку сравнения (Теорема 5) сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n_0+k}$, следовательно, сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

2) $0 < l \leq +\infty,$ выберем $l' :\ 0 < l' < l.$

Из условия (5) следует, что существует $n_0 :\ \forall\, n > n_0$ выполняется неравенство

$$\frac{u_n}{v_n} > l' \ \rightarrow\ u_n > l'v_n,\ \ n > n_0. \tag{7}$$

Из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ вытекает, очевидно, расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l'v_n$. Тогда по признаку сравнения из (7) следует, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n_0+k}$ расходится, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится. □

Пример 2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ расходится, т. к. $\frac{1}{1+\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится.

Замечание 2. Если члены ряда u_n заданы функцией от n, которая имеет смысл для любых достаточно больших неотрицательных значений переменной n и является "достаточно гладкой" функцией этой переменной, то целесообразно разложить u_n с помощью формулы Тейлора по степеням $\frac{1}{n}$. Поведение ряда определит главный член полученного разложения.

Пример 3. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$, здесь $u_n = 1-\cos\frac{\pi}{n} \geq 0$.

Воспользуемся разложением Тейлора

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),\ x \to 0.$$

Тогда $1-\cos\frac{\pi}{n} = 1 - \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 + o\left(\frac{\pi}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 + o\left(\frac{\pi}{n}\right)^2$. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 + o\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\pi^2}{2},$$

ряд сходится по признаку сравнения (Следствие 1).

Теорема 6 (Интегральный признак Коши). Если $f(x) \geq 0$ и убывает при $x \geq 1$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{8}$$

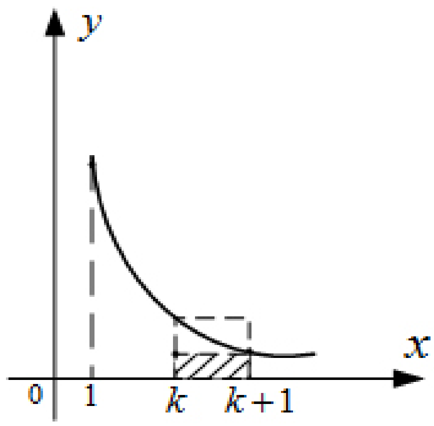
сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int\limits_1^{\infty} f(x)dx. \tag{9}$$

Доказательство необходимости. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится. Функция $f(x)$ монотонна на $[1;+\infty)$. Следовательно, она интегрируема по Риману на $[1,\eta]$, $\eta \in (1,+\infty)$. Следовательно, имеет смысл говорить о несобственном интеграле (9).

Если $k \leq x \leq k+1$, $k = 1, 2\ldots$, то в силу убывания f имеем

$$f(k) \geq f(x) \geq f(k+1).$$



Проинтегрируем последнее неравенство по отрезку $[k, k+1]$:

$$\int\limits_k^{k+1} f(k)dx \geq \int\limits_k^{k+1} f(x)dx \geq \int\limits_k^{k+1} f(k+1)dx,$$

получим неравенство

$$f(k) \geq \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx \geq f(k+1).$$

Просуммируем неравенства по k от 1 до n :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \quad \Rightarrow$$

$$s_{n+1} - f(1) \leq \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \leq s_n, \tag{10}$$

где $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k), \; n = 1, 2, \dots .$

Если ряд (8) сходится и его сумма равна s, то $s_n \leq s$, $n = 1, 2, \dots .$ Следовательно, в силу неравенств (10) имеем:

$$\int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \leq s, \; n = 1, 2, \dots . \tag{11}$$

Рассмотрим $\eta \geq 1$, выберем такое натуральное n, что $\eta \leq n+1$, тогда

$$\int\limits_{1}^{\eta} f(x)dx \leq \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \leq s.$$

Таким образом, множество интегралов от неотрицательной функции $f(x)$ ограничено сверху, следовательно интеграл $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ сходится.

Доказательство достаточности. Пусть $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ сходится. Из неравенства (10) в силу неотрицательности $f(x)$ следует:

$$s_{n+1} \leq \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx + f(1) \leq f(1) + \int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx.$$

Т. е. последовательность частичных сумм s_n ряда (8) ограничена сверху, следовательно, ряд сходится. □

Пример 4. Применим интегральный признак Коши к исследованию сходимости *обобщенного гармонического ряда:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \; \alpha \in \mathbb{R}.$$

При $\alpha > 0$ требуемой функцией является функция $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \le 1$. В силу интегрального признака Коши ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \le 1$. При $\alpha \le 0$ ряд расходится. Это можно доказать непосредственно $\frac{1}{n^\alpha} \ge 1$ при $\alpha \le 0$, т.е. последовательность членов ряда не стремится к нулю.

Теорема 7 (Радикальный признак Коши). Пусть для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \ge 0, \tag{12}$$

существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l; \tag{13}$$

тогда, если $l < 1$, то ряд (12) сходится, а если $l > 1$, то расходится.

Доказательство.

1) Пусть $l < 1$. Выберем число q : $l < q < 1$. Из условия (13) следует, что $\exists\, n_0$: $\forall\, n > n_0$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n} < q$, тогда $u_n < q^n$, $n > n_0$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится, поэтому ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n_0+k}$ сходится. Следовательно, ряд (12) сходится.

2) Пусть $l > 1$. В силу условия (13) $\exists\, n_0$: $\forall\, n > n_0$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n} > 1 \;\Rightarrow\; u_n > 1$, $n > n_0$, т.е. последовательность $\{u_n\}$ не стремится к нулю. Следовательно, ряд (12) расходится. $\square$

Теорема 8 (Признак Даламбера). Пусть для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \; u_n > 0, \; n = 1, 2, \ldots \tag{14}$$

существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l. \tag{15}$$

Тогда, если $l < 1$, то ряд (14) сходится, а если $l > 1$, то расходится.

Без доказательства.

Пример 5.

1) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ сходится по признаку Даламбера, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

2) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ сходится по радикальному признаку Коши, т.к.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Замечание 3. Среди рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ с неотрицательными членами, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ $\left(\text{соответственно } \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1\right)$, имеются как сходящиеся $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)$, так и расходящиеся $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right)$ ряды.