$$1 = f_1(x)u(x) + g(x)v(x) \quad (*)$$

$$\deg u(x) < \deg g_1(x) = \deg g(x) - \deg d(x)$$

$$\deg v(x) < \deg f_1(x) = \deg f(x) - \deg d(x)$$

Ясно, что равенство $(*)$ эквивалентно (после умножения на $d(x)$) некоторому искомому линейному представлению $d(x)$

Опр Многочлены $f_1(x), \ldots, f_m(x) \in F[x]$ называются взаимно простыми, если

$$\text{НОД}(f_1(x), \ldots, f_m(x)) = 1$$

Замечание

Из теоремы 7 вытекает следующий критерий взаимной простоты 2 многочленов:

Многочлены $f(x), g(x)$ взаимно просты $\Leftrightarrow$ существуют такие многочлены $q(x)$ и $v(x)$, что

$$1 = f(x)u(x) + g(x)v(x)$$

Свойства взаимно простых многочленов

Пусть $f(x), g(x), h(x) \in F[x]$

1. Если $f(x)g(x)$ делится на $h(x)$ и $\text{НОД}(f(x), h(x)) = 1$, то $g(x)$ делится на $h(x)$.
2. Пусть $\text{НОД}(f(x), g(x)) = 1$. Тогда $h(x)$ делится на $f(x)g(x) \Leftrightarrow h(x)$ делится и на $f(x)$, и на $g(x)$.
3. Пусть $\text{НОД}(f(x), g(x)) = \text{НОД}(f(x), h(x)) = 1$. Тогда $\text{НОД}(f(x), g(x)h(x)) = 1$.

Доказательство (1)

Имеем по критерию взаимной простоты

$$1 = f(x)u(x) + h(x)v(x)$$

для нек-рых $u(x), v(x) \in F[x]$.

Умножим обе части на $g(x)$ -

$$g(x) = \underbrace{(f(x)g(x))u(x)}_{\text{делится на } h(x)} + \underbrace{h(x)v(x)g(x)}_{\text{также очевидно делится}} \Rightarrow \text{вся сумма, т.е. } g(x) \text{ делится на } h(x)$$