п. 3 Собственные значения и собственные векторы

Пусть φ – линейный оператор, матрица которого в нек-ром базисе $b_1, \dots, b_n$ ($n = \dim V$) имеет диагональный вид:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Действие этого оператора на векторы следующее:

$$\varphi(b_1) = \lambda_1 b_1, \quad \varphi(b_2) = \lambda_2 b_2, \dots, \varphi(b_n) = \lambda_n b_n$$

Если $b = k_1 b_1 + \ldots + k_n b_n \in V$, то $\varphi(b) = \lambda_1 k_1 b_1 + \ldots + \lambda_n k_n b_n$

<u>Опр.</u> Пусть $\varphi : V \to V$ – линейный оператор.

Скаляр $\lambda \in F$ называется собственным значением линейного оператора φ если существует такой ненулевой вектор $x \in V$, что $\varphi(x) = \lambda x$

<u>Опр.</u> Вектор $x \in V$, $x \neq 0$ называется собственным вектором, принадлежащим собственному значению λ, если $\varphi(x) = \lambda x$

<u>Примеры</u>

1. Если $\varphi : V \to V$ – линейный оператор с матрицей

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

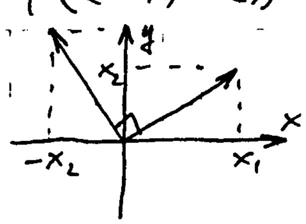
то скаляры $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ являются собственными значениями оператора φ

Соответственно, собственные векторы – векторы $b_1, \ldots, b_n$

Можно показать, что других собственных значений нет.

2. Рассмотрим оператор поворота на $90°$ в $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi((x_1, x_2)) = (-x_2, x_1)$$



Ясно, что этот линейный оператор не имеет собственных значений.

Это легко следует из геометрического смысла оператора поворота, но может быть доказано и непосредственными вычислениями.

Пусть $x = (x_1, x_2)$ – собственный вектор, принадлежащий собственному значению λ, $x \neq 0$.

Тогда:

$$\varphi(x) = \lambda x \iff$$

$$(-x_2, x_1) = (\lambda x_1, \lambda x_2) \iff$$

$$\begin{cases} -x_2 = \lambda x_1 \\ x_1 = \lambda x_2 \end{cases} \iff \begin{cases} -\lambda x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - \lambda x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 \neq 0$$

Эта СЛУ имеет только нулевое решение, а значит собственных векторов нет ни для какого значения λ

3 Аналогично определенный линейный оператор $\varphi: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ уже будет иметь собственные значения, а именно, таковыми будут корни ур-ия

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

т. е.

$$\lambda_1 = i, \ \lambda_2 = -i$$

Матрица φ в стандартном базисе

$$e_1 = (1, 0) \quad e_2 = (0, 1)$$

имеет вид:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Образ $y = \varphi(x)$ имеет координаты:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Соотношение $\varphi(x) = \lambda x$ в координатной форме примет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

При $\lambda = i$ имеем:

$$\begin{cases} -ix_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - ix_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -ix_1 - x_2 = 0$$

Если $x_2 = 1$, то $x_1 = i \Rightarrow$ вектор $x(i, 1)$ будет собственным вектором, принадлежащим собственному значению λ.

Пусть $\lambda = -i$. Тогда собственный вектор - вектор $b_2 = (-i, 1)$.

Видно, что b_1, b_2 - базис $\mathbb{C}^2$. Тогда данный оператор $\varphi: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ можно задать более простым способом, а именно, диагональной матрицей

$$A_{\varphi'} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

в базисе из собственных векторов.

Одной из причин недиагонализируемости линейных операторов $\varphi: V \to V$ являются алгебраические св-ва поля скаляров F, над к-рым задано векторное пр-во V.

Теорема 6

Пусть $\varphi: V \to V$ - линейный оператор, заданный матрицей A_φ в нек-ром базисе $b_1, \ldots, b_n$ пр-ва V.

Тогда скаляр λ является собственным значением оператора $\varphi \Leftrightarrow \det(A_\varphi - \lambda E)$

Это ур-ие наз. характеристическим ур-ием оператора φ и оно не зависит от выбора матрицы линейного оператора

Если A'_φ - матрица в др. базисе, то

$$A'_\varphi = T^{-1} A_\varphi T$$

где T - матрица перехода и

$$\det(A'_\varphi - \lambda E) = \det(T^{-1} A_\varphi T - \lambda E) =$$

$$= \det(T^{-1}A_\varphi' - T^{-1}\lambda E T) =$$
$$= \det(T^{-1}(A_\varphi - \lambda E)T) =$$
$$= \det T^{-1} \det(A_\varphi - \lambda E) \det T =$$
$$= \det(A_\varphi - \lambda E).$$

Если λ – одно из собственных значений опер. φ, то принадлежащие ему собственные векторы могут быть найдены (в координатах решения ОСЛУ

$$(A_\varphi - \lambda E)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

где $x_1, \dots, x_n$ – координаты собственного вектора в базисе $b_1, \dots, b_n$.

<u>Доказательство</u>

Пусть $\underline{x}$ – собственный вектор, принадлежащий собственному значению λ,

$$x = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$$

Это равносильно соотношению

$$\varphi(x) = \lambda x \quad (*)$$

или в координатной форме

$$A_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

или (*) могут быть найдены как ненулевые решения ОСЛУ

$$(A_\varphi - \lambda E)\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Эта ОСЛУ имеет ненулевые решения $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \det(A_\varphi - \lambda E) = 0.$

<u>Замечание</u>

Характеристическое ур-ие линейного опер. φ имеет вид

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

или

$$(-1)^n \lambda^n + \dots = 0$$

Это алгебраическое ур-ие n-ой степени. Из теории многочленов следует, что корней этого ур-ия не более n, значит собственных значений любого линейного оператора не более $n = \dim V$.

Опр. Пусть $\lambda \in F$ — нек-рое собственное значение линейного оператора $\varphi: V \to V$.

Мн-во всех собственных векторов, принадлежащих собственному значению λ вместе с нулевым вектором, образует подпр-во, называемое собственным подпр-вом, соответствующим собственному значению λ.

Это подпр-во есть $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ — тождественный линейный оператор (тождественное преобразование).

Обозначение

$$L_\lambda = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\mathcal{E})$$

собственное подпр-во оператора $\varphi: V \to V$, соотв. собственному значению λ.

Опр Если линейный оператор $\varphi: V \to V$ в нек-ром базисе может быть задан диагональной матрицей, то говорят, что φ — диагонализируемый линейный оператор.

Легко видеть, что любой диагонализируемый оператор имеет $n = \dim V$ линейно независимых собственных векторов.

Обратно, если линейный оператор диагонализируемый, то он имеет n линейно независимые собственные векторы.