Тема 16. Аналитические функции. Разложение функции в степенные ряды. Ряд Тейлора

Определение 1. Функция f называется *аналитической* в точке z_0, если в некотором круге $|z-z_0|<r$ с центром в этой точке функция f раскладывается в степенной ряд

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n.$$

Очевидно, что радиус сходимости этого ряда больше нуля.

Замечание 1. В некоторых случаях лишь рассмотрение ряда в области комплексных чисел $\mathbb{C}$ объясняет величину его радиуса сходимости. Например, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ сходится при $|x|<1$. Сумма этого ряда $s(x)=\frac{1}{1+x^2}$ определена и бесконечно дифференцируема на всей действительной оси. Однако, функция $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ имеет особые точки $z=\pm i$.

Теорема 1. Радиусы сходимости рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n, \tag{1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_nz^{n+1}}{n+1}, \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1} \tag{3}$$

равны.

Доказательство. Пусть R, R_1, R_2 — радиусы сходимости рядов (1), (2), (3), соответственно.

Справедливы неравенства

$$\left|\frac{a_nz^{n+1}}{n+1}\right|\le|z||a_nz^n|\le|z^2||na_nz^{n-1}|,\quad ,n=1,2,\ldots.$$

Из признака сравнения следует, что если в некоторой точке z сходится ряд (3), то в этой точке сходится ряд (1). А если в этой точке z сходится ряд (1), то в этой точке сходится ряд (2). Следовательно,

$$R_2\le R\le R_1. \tag{4}$$

Покажем, что $R_1\le R_2$. Рассмотрим точку $z_0\ne0$ из круга сходимости ряда (2). Докажем, что в ней сходится ряд (3). Т.к. $|z_0|<R_1$, то существует $r:\quad |z_0|<r<R_1$. Преобразуем

$$|na_nz_0^{n-1}|=\frac{n(n+1)}{|z_0|^2}\left|\frac{a_nr^{n+1}}{n+1}\right|\left|\frac{z_0}{r}\right|^{n+1},\ n=1,2,\ldots. \tag{5}$$

Последовательность $\left|\dfrac{a_nr^{n+1}}{n+1}\right|\to0$ при $n\to\infty$ в силу сходимости ряда (2) в точке $z=r$. Следовательно, последовательность $\left|\dfrac{a_nr^{n+1}}{n+1}\right|$ ограничена, т.е. существует $M>0$:

$$\left|\frac{a_nr^{n+1}}{n+1}\right|\le M\quad\forall\ n\in\mathbb{N}.$$

Из неравенства (5) получим

$$\left|na_n z_0^{n-1}\right| \le \underbrace{\frac{n(n+1)}{|z_0|^2} M q^{n+1}}_{\text{ряд с таким общим членом сходится}}, \text{ где } \quad q = \left|\frac{z_0}{r}\right|.$$

Значит по признаку сравнения сходится ряд (3), т.е. $R_1 \le R_2$. Следовательно, $R = R_1 = R_2$. □

Аналитические функции в действительной области

Далее будем рассматривать ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n, \tag{6}$$

где $a_n, x, x_0 \in \mathbb{R}$.

Теорема 2. Если R — радиус сходимости степенного ряда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n, \tag{7}$$

$R > 0$, то
1) функция $f(x)$ имеет в интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ производные всех порядков и они находятся из ряда (7) почленным дифференцированием;
2) для всех $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\left(x - x_0\right)^{n+1}}{n+1}. \tag{8}$$

Доказательство. Всякий степенной ряд вида (7) на любом отрезке $[x_0 - r, x_0 + r]$, $0 < r < R$, сходится равномерно, поэтому мы можем почленно дифференцировать и интегрировать ряд (7). □

Теорема 3. Если функция $f(x)$ аналитическая в точке x_0, т.е. представима в окрестности этой точки степенным рядом (7) с радиусом сходимости R, то

$$a_n = \frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}, \; n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

т.е.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!} \left(x - x_0\right)^n.$$

Доказательство. Продифференцируем n раз обе части равенства (7):

$$f^{(n)}(x) = n! a_n + (n+1)! a_{n+1}(x - x_0) + \ldots.$$

При $x = x_0$ получим формулы (9). $\square$

Замечание 2. Из Теоремы 3 следует единственность разложения функции в степенной ряд вида (6).

Определение 2. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков. Тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{10}$$

называется *рядом Тейлора* функции f в точке x_0. При $x_0 = 0$ ряд (10) называется *рядом Маклорена.*

Замечание 3. Если функция $f(x)$ аналитическая в точке x_0, то она бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности этой точки и равна в этой окрестности сумме своего ряда Тейлора. Но существуют функции бесконечно дифференцируемые, но не аналитические, т.е. не представимые своим рядом Тейлора.

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Пусть $x \neq 0$: $f'(x) = \dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$, $f''(x) = -\dfrac{6}{x^4}e^{-\frac{1}{x^2}} + \dfrac{4}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}}, \ldots.$ $f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$, $P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)$ — многочлен, n — порядок производной. Имеем

$$\lim_{x\to\pm 0} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to\pm 0} P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} = 0, \tag{11}$$

т.к. $P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$ — это линейная комбинация слагаемых вида

$$\frac{1}{x^m}e^{-\frac{1}{x^2}},\ m = 0, 1, 2, \ldots,$$

а

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^m}e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Из (11) следует, что при $n = 0$ $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = 0$ (т.е. f непрерывна в точке $x = 0$), при $n = 1$ $\lim\limits_{x\to\pm 0} f'(x) = 0$, поэтому существует $f'(0) = 0$. Аналогично по индукции можно доказать, что $f^{(n)}(0) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Следовательно, все члены ряда Маклорена для функции $f(x)$ равны нулю, т.е. сумма ряда не совпадает с самой функцией. Таким образом, функция $f(x)$ *не является аналитической.*

Возникает вопрос: когда ряд Тейлора (10) функции $f(x)$ на некотором интервале сходится к $f(x)$? Запишем формулу Тейлора для $f(x)$:

$$f(x) = \overbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}^{S_n(x)} + r_n(x), \tag{12}$$

здесь $r_n(x)$ — остаточный член формулы Тейлора, а не остаток ряда, т.к. пока не установлено, что ряд сходится. Обозначив через $S_n(x)$ n-ю частичную сумму ряда Тейлора, формулу (12) можно переписать в виде:

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x). \tag{13}$$

Из (13) видно, что $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ (т.е. $f(x)$ является суммой своего ряда Тейлора на интервале) $\Longleftrightarrow$ для всех x из этого интервала остаточный член формулы Тейлора стремится к нулю $\left(\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0\right)$.