§16 Многочлены

п. 1 Кольцо многочленов $K[x]$

Пусть K – область целостности, т.е. коммутативное кольцо с единицей и без делителей нуля. (например, $K = \mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел)

<u>Опр.</u> Многочленом от переменной x с коэффициентами из K называется формальное выражение вида

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

где n – целое неотрицательное число, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$ – коэффициенты мн-на $f(x)$

(a_i называется коэф. многочлена $f(x)$ при x^i)

<u>Опр</u> Два многочлена $f(x)$ и $g(x)$ считаются равными, если они имеют одинаковые

коэффициенты при одинаковых степенях переменной x (с точностью до первых коэффициентов):

$$1 + 1x + 0x^2 \text{ и } 1 + 1x$$

формально различаются, но считаются равными

Опр. Степенью многочлена $f(x)$ называется наибольшее число k такое, что $a_k \neq 0$, и обозн $\deg f(x)$

Опр. Нулевым многочленом наз. многочлен, все коэффициенты к-рого — нули.

Нулевой многочлен обозначается 0

Мн-во всех многочленов $f(x)$ от переменной x с коэффициентами из области целостности K обозначается $K[x]$.

Введем операции сложения и умножения на мн-ве $K[x]$

Опр Суммой многочленов $f(x)$ и $g(x) \in K[x]$,

$$f(x) = \sum_i a_i x^i \qquad g(x) = \sum_i b_i x^i \quad (*)$$

называется многочлен $h_1(x) \in K[x]$

$$h_1(x) = \sum_i c_i x^i$$

где $c_i = a_i + b_i$ для всех i

Опр Произведением многочленов $f(x), g(x) \in K[x]$ вида $(*)$ наз. многочлен $h_2(x) \in K[x]$

$$h_2(x) = \sum_k d_k x^k$$

где $d_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$

Теорема 1

По отношению к введенным операциям сложения и умножения мн-во $K[x]$ является областью целостности и называется кольцом многочленов от переменной x с коэффициентами из K.

Доказательство.

Нулевой многочлен — нулевой эл-нт $K[x]$;

многочлен $f(x) = 1$, где 1 – единичный эл-нт K, играет роль единичного эл-нта $K[x]$

Проверка ассоциативности умножения, его коммутативности, а также проверка дистрибутивности умножения отн. сложения проводится на основе определений операций сложения, умножения и соответствующих св-в кольца коэф. K

Докажем, что если $f(x) \neq 0 \neq g(x)$, то $h(x) = f(x)\,g(x) \neq 0$, т.е. в кольце $K[x]$ нет делителей нуля

Действительно, имеем

$$\deg h(x) = \deg f(x) + \deg g(x) \quad (**)$$

что следует из отсутствия делителей нуля в K. – коэф. перед наиб. степенью не сократ.

Итак, $K[x]$ – область целостности.

Замечание

Утверждение теоремы вполне очевидно для $\mathbb{R}[x]$ (по модулю формулы (**)).

Опр Говорят, что многочлен $f(x) \in K[x]$ делится на $g(x) \in K[x]$, если существует $h(x) \in K[x]$, что $f(x) = g(x)\,h(x)$.

Легко видеть, что отношение делимости на мн-ве $K[x]$ обладает следующими св-вами:

1 Рефлексивность

$f(x)$ делится на $f(x)$

2. Транзитивность

Если $f(x)$ делится на $g(x)$, а $g(x)$ делится на $h(x)$, то $f(x)$ делится на $h(x)$.

Опр Пусть $f(x) \in K[x]$, $a \in K$

Разделить $f(x)$ на двучлен $x - a$ – это значит представить $f(x)$ в виде

$$f(x) = (x - a)\,q(x) + r$$

где $q(x) \in K[x]$, $r \in K$.