

# Матан. Подготовка к экзамену.

q

June 19, 2021

## Contents

<b>1</b>	<b>Даты</b>	<b>3</b>
1.1	Консультация . . . . .	3
1.2	Экзамен . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Темы</b>	<b>3</b>
2.1	Первообразная и неопределенный интеграл (определения). Свойства интеграла. Таблица основных неопределенных интегралов. Формула замены переменной в неопределенном интеграле (с доказательством). Формула интегрирования по частям. . . . .	3
2.1.1	<b>DONE</b> Опр. 1. . . . .	3
2.1.2	<b>DONE</b> Опр. 2. . . . .	3
2.1.3	<b>DONE</b> Основные свойства интеграла . . . . .	4
2.1.4	<b>DONE</b> След. 1 (Линейность интеграла) . . . . .	5
2.1.5	<b>TODO</b> Формула замены переменной . . . . .	5
2.2	Определенный интеграл Римана (определение). Ограниченность интегрируемых функций (с доказательством). Верхние и нижние суммы Дарбу (определения). Верхний и нижний интегралы Дарбу (определения). Критерий Дарбу. Интегрируемость непрерывных функций. Интегрируемость монотонных функций. 8	
2.3	Свойства определенного интеграла (сформулировать все, доказать непрерывность интеграла по верхнему пределу). Интегральная теорема о среднем. . . . .	8
2.4	Теорема о дифференцировании интеграла по верхнему пределу (с доказательством). Теорема о существовании первообразной (с доказательством). Формула Ньютона-Лейбница (с доказательством). Формула замены переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям. . . . .	8

2.5	Определение несобственных интегралов. Формула Ньютона-Лейбница и формула замены переменной для несобственных интегралов. . . . .	8
2.6	Несобственные интегралы от неотрицательных функций (лемма и признак сравнения). Критерий Коши сходимости интеграла (с доказательством). Абсолютно сходящиеся интегралы (определение и теорема о сходимости абсолютно сходящегося интеграла). . . . .	8
2.7	Определение числового ряда. Необходимый признак сходимости ряда (с доказательством). Критерий Коши сходимости ряда (с доказательством). Ряды с неотрицательными членами (признак сравнения, интегральный признак Коши, радикальный признак Коши, признак Даламбера). . . . .	8
2.8	Знакопеременные ряды (признак Лейбница). Абсолютно сходящиеся ряды (определение). Критерий Коши абсолютной сходимости ряда. Условно сходящиеся ряды (определение). Теорема Римана. . . . .	8
2.9	Функциональные последовательности и ряды (определения, в том числе, ограниченная последовательность, сходящаяся последовательность, сходящийся ряд, абсолютно сходящийся ряд). Равномерная сходимость функциональной последовательности и функционального ряда (определение и пример). Критерии Коши равномерной сходимости функциональной последовательности (ряда). Признак Вейерштрасса. . . . .	8
2.10	Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы (с доказательством), интегрирование, дифференцирование). . . . .	8
2.11	Степенные ряды (определение). Первая теорема Абеля (с доказательством). Радиус и круг (интервал) сходимости степенного ряда (определения). Понятие аналитической функции (определение). Теорема о представлении аналитической функции рядом Тейлора. . . . .	8
2.12	Определение $n$ -мерного арифметического евклидова пространства. Определение $n$ -мерного открытого шара. Предел последовательности в $n$ -мерном пространстве, ограниченное множество в $n$ -мерном пространстве, окрестность бесконечно удалённой точки (определения). . . . .	8

2.13	Внутренняя точка множества, открытое множество, точка прикосновения множества, предельная точка множества, замыкание множества, замкнутое множество, компактное множество, линейно связное множество, выпуклое множество, область (определения).	8
------	--	---

## 1 Даты

### 1.1 Консультация

2021-06-24 Thu

### 1.2 Экзамен

2021-06-25 Fri

## 2 Темы

### 2.1 Первообразная и неопределенный интеграл (определения). Свойства интеграла. Таблица основных неопределенных интегралов. Формула замены переменной в неопределенном интеграле (с доказательством). Формула интегрирования по частям.

#### 2.1.1 DONE Опр. 1.

Функция  $F$  называется первообразной функции  $f$  на промежутке  $\Delta$ , если  $F$  дифференцируема на  $\Delta$  и в каждой точке  $x \in \Delta$

$$F'(x) = f(x) \quad (1)$$

Очевидно, что первообразная  $F(x)$  непрерывна на  $\Delta$ .

#### 2.1.2 DONE Опр. 2.

Пусть функция  $f(x)$  задана на промежутке  $\Delta$ . Совокупность всех ее первообразных на этом промежутке называется **неопределенным интегралом от функции  $f$**  и обозначается

$$\int f(x)dx \quad (2)$$

Если  $F(x)$  — какая-либо первообразная функции  $f(x)$  на  $\Delta$ , то пишут

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (3)$$

$C$  — произвольная постоянная.

### 2.1.3 DONE Основные свойства интеграла

1. Если функция  $F(x)$  дифференцируема на  $\Delta$ , то

$$\int dF(x) = F(x) + C \text{ или } \int F'(x)dx = F(x) + C \quad (4)$$

2. Пусть функция  $f(x)$  имеет первообразную на  $\Delta$ . Тогда для любого  $x \in \Delta$  имеет место равенство:

$$d \int f(x) = f(x)dx \quad (5)$$

3. Если функции  $f_1, f_2$  имеют первообразные на  $\Delta$ , то функция  $f_1 + f_2$  имеет первообразную на  $\Delta$ , причем:

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx \quad (6)$$

4. Если функция  $f(x)$  имеет первообразную на  $\Delta$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , то функция  $kf(x)$  также имеет на  $\Delta$  первообразную, и при  $k \neq 0$ :

$$\int kf(x)dx = \{kF(x) + C\}, \quad k \int f(x)dx = k\{F(x) + C\}$$

Т.к.  $C$  — произвольная постоянная и  $k \neq 0$ , то множества  $kF(x) + C$  и  $kF(x) + C$  совпадают.

#### 2.1.4 DONE След. 1 (Линейность интеграла)

Если  $f_1$  и  $f_2$  имеют первообразные на  $\Delta$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$ , то функция  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$  имеет первообразную на  $\Delta$ , причем

$$\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) dx = \lambda_1 \int f_1(x) dx + \lambda_2 \int f_2(x) dx \quad (7)$$

Доказательство вытекает из свойств 3 и 4.

#### 2.1.5 TODO Формула замены переменной

Пусть функции  $f(x)$  и  $\varphi(t)$  заданы соответственно на промежутках  $\Delta_x$  и  $\Delta_t$ , причем  $\varphi(\Delta_t) = \Delta_x$ , т.е. имеет смысл сложная функция  $f(\varphi(t))$ ,  $t \in \Delta_t$ . Пусть, кроме того, функция  $\varphi(t)$  дифференцируема и строго монотонна на  $\Delta_t$ . Тогда у функции  $\varphi(t)$  существует обратная однозначная функция  $\varphi^{-1}(x)$ , определенная на промежутке  $\Delta_x$ .

**Теорема 1.** Существование на промежутке  $\Delta_x$  интеграла

$$\int f(x) dx \quad (8)$$

и существование на промежутке  $\Delta_t$  интеграла

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad (9)$$

равносильны, и имеет место формула

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \quad (10)$$

Формула (10) называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле: переменная  $x$  заменяется переменной  $t$  по формуле  $x = \varphi(t)$ .

**Доказательство.** Докажем, что существование первообразной у функции  $f(x)$  на  $\Delta_x$  равносильно существованию первообразной у функции  $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$  на  $\Delta_t$ . Пусть у функции  $f(x)$  на  $\Delta_x$  существует первообразная  $F(x)$ , т.е.

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x), \quad x \in \Delta_x \quad (11)$$

Имеет смысл сложная функция  $F(\varphi(t))$ , она является первообразной функции  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$  на  $\Delta_t$ . Действительно,  $\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = \frac{d}{dx}F(x) \frac{dx}{dt} = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ . (14) Обратно. Пусть функция  $f(t)$  имеет первообразную  $F(t)$ , тогда  $\frac{d}{dt}F(t) = f(t)$ . (15) Покажем, что  $F(\varphi(x))$  является на  $x$  первообразной функции  $f(x)$ . В самом деле,  $\frac{d}{dx}F(\varphi(x)) = \frac{d}{dt}F(t) \frac{dt}{dx} = f(t)\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$ . Итак, интегралы (10) и (11) одновременно существуют или нет. При этом  $\int f(x)dx = F(x) + C$ , (16)  $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$ , а так как  $F(\varphi(t))|_{t=\varphi(x)} = F(x)$ , имеет равенство (12).



- 2.2 Определенный интеграл Римана (определение). Ограниченность интегрируемых функций (с доказательством). Верхние и нижние суммы Дарбу (определения). Верхний и нижний интегралы Дарбу (определения). Критерий Дарбу. Интегрируемость непрерывных функций. Интегрируемость монотонных функций.
- 2.3 Свойства определенного интеграла (сформулировать все, доказать непрерывность интеграла по верхнему пределу). Интегральная теорема о среднем.
- 2.4 Теорема о дифференцировании интеграла по верхнему пределу (с доказательством). Теорема о существовании первообразной (с доказательством). Формула Ньютона-Лейбница (с доказательством). Формула замены переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям.
- 2.5 Определение несобственных интегралов. Формула Ньютона-Лейбница и формула замены переменной для несобственных интегралов.
- 2.6 Несобственные интегралы от неотрицательных функций (лемма и признак сравнения). Критерий Коши сходимости интеграла (с доказательством). Абсолютно сходящиеся интегралы (определение и теорема о сходимости абсолютно сходящегося интеграла).
- 2.7 Определение числового ряда. Необходимый признак сходимости ряда (с доказательством). Критерий Коши сходимости ряда (с доказательством). Ряды с неотрицательными членами (признак сравнения, интегральный признак Коши, радикальный признак Коши, признак Даламбера).
- 2.8 Знакопеременные ряды (признак Лейбница). Абсолютно сходящиеся ряды (определение). Критерий Коши абсолютной сходимости ряда. Условно сходящиеся ряды (определение). Теорема Римана.
- 2.9 Функциональные последовательности и ряды (определения, в том числе, ограниченная последовательность, сходящаяся последовательность, сходящийся ряд, абсолютно сходящийся ряд). Равномерная сходимость функциональной последовательности и функционального ряда (определение и пример). Критерии Коши равномерной сходимости функциональной последовательности (ряда). Признак Вейерштрасса.
- 2.10 Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы (с доказательством), интегрирование, дифференцирование).
- 2.11 Степенные ряды (определение). Первая теорема Абеля (с доказательством). Радиус и круг (интервал) сходимости