Опр Так построенная матрица A называется матрицей линейного отображения $\varphi: V \to W$ в выбранных базисах

Опр. В случае $W = V$ линейное отображение называется линейным оператором, заданным на V (или линейным преобразованием пр-ва V)

Итак, всякое линейное отображение может быть задано при помощи пары базисов и матрицы. Если линейное отображение — линейный оператор, то второй базис считаем совпадающим с первым и в таком случае говорим о матрице линейного оператора в данном базисе

Пусть $\varphi: V \to W$ линейное отображение

Q: Как связаны матрицы этого отображения в различных парах базисов пр-в V и W?

A: Пусть $a_1, \ldots, a_n$ и $a_1', \ldots, a_n'$ — два базиса пр-ва V ($n = \dim V$), $b_1, \ldots, b_m$ и $b_1', \ldots, b_m'$ — два базиса пр-ва W ($m = \dim W$)

Обозначим ч/з A и A' матрицы линейного отображения φ в указанных парах базисов

Пусть также C и D — матрицы перехода от $a_1, \ldots, a_n$ к $a_1', \ldots, a_n'$ и от $b_1, \ldots, b_m$ к $b_1', \ldots, b_m'$ соответственно.

Имеем:

$$(a_1' \ldots a_n') = (a_1 \ldots a_n) \cdot C$$

$$(b_1' \ldots b_m') = (b_1 \ldots b_m) \cdot D$$

$$(\varphi(a_1) \ldots \varphi(a_n)) = (b_1 \ldots b_m) A$$

$$(\varphi(a_1') \ldots \varphi(a_n')) = (b_1' \ldots b_m') A'$$

След-но,

$$(\varphi(a_1') \ldots \varphi(a_n')) = (\varphi(a_1) \ldots \varphi(a_n)) \cdot C$$

Таким образом,

$$(b_1' \ldots b_m') A' = (b_1 \ldots b_m) A \cdot C$$

или

$$(b_1 \ldots b_m) D A' = (b_1 \ldots b_m) A C$$

Поскольку $b_1, \dots, b_m$ — базис, то

$$DA' = AC$$

Отсюда

$$A' = D^{-1}AC$$

В частности, если φ — линейный оператор, то

$$A' = C^{-1}AC$$

где C — матрица перехода от одного базиса к другому.

п. 2 Ядро и образ

Пусть $\varphi : V \to W$ — линейное отображение

Опр. Образом линейного отображения φ называется его образ как отображения мн-ва V в мн-во W

$$\operatorname{Im} \varphi = \{\varphi(x) \in W \mid x \in V\} \subset W$$

Опр. Ядром линейного отображения φ называется мн-во

$$\operatorname{Ker} \varphi = \{x \in V \mid \varphi(x) = 0\} \subset V$$

Теорема 1

Если $\varphi : V \to W$ — линейное отображение, то $\operatorname{Im} \varphi$ — подпр-во W, $\operatorname{Ker} \varphi$ — подпр-во V.

Доказательство

1. Пусть $y, y' \in \operatorname{Im} \varphi$, $k \in F$

Докажем, что $y + y' \in \operatorname{Im} \varphi$, $ky \in \operatorname{Im} \varphi$

По определению $\operatorname{Im} \varphi$ имеем $y = \varphi(x)$, $y' = \varphi(x')$ для нек-рых $x, x' \in V$

След-но

$$y + y' = \varphi(x) + \varphi(x') = \varphi(x + x') \in \operatorname{Im} \varphi$$

$$ky = k\varphi(x) = \varphi(kx) \in \operatorname{Im} \varphi$$

Итак, $\operatorname{Im} \varphi$ замкнут относительно векторных операций. Поэтому $\operatorname{Im} \varphi$ — подпр-во пр-ва W (см. хар. признак под-пр-ва)