# Матан. Подготовка к экзамену.

q

June 24, 2021

## Contents

# 1 Даты

## 1.1 Консультация

*2021-06-24 Thu*

## 1.2 Экзамен

*2021-06-25 Fri*

# 2 Видосы

## 2.1 Интегралы

Интеграл: Азы интегрирования. Высшая математика

Определенный интеграл. Шпаргалка для первокурсника. Высшая математика

## 2.2 Ряды

Математический анализ, 35 урок, Числовые ряды

Математический анализ, 36 урок, Достаточные признаки сходимости

# 3 Термины

## 3.1 DONE Бесконечно малая

(также: бесконечно малая функция, бесконечно малая величина)

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, т.е. для любого числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из $|xa| < \delta$ следует $|\alpha(x)| < \varepsilon$

## 3.2 DONE вертикальная асимптота

Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a0} f(x)$ равно $+\infty$ или $\infty$.

## 3.3 DONE возрастающая (убывающая) функция

Говорят, что функция f(x) возрастает (убывает) на (a,b), если для любый точек $x_1<x_2$ из (a,b) справедливо неравенство $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$)

## 3.4 DONE Второй замечательный предел

формула вида:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

или

$$\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = e$$

## 3.5 DONE Дифференциал

Если $y = f(x)$ - дифференцируемая функция, то главная линейная часть $A * \Delta x$ приращения функции f(x) называется дифференциалом функции и обозначается $dy$.

## 3.6 DONE Дифференцируемая функция

Функция $y = f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки $x$. называтеся дифференцируемой в точке $x$, если ее приращение в этой точке

$$\Delta y = f(x+\Delta x)f(x)$$

имеет вид

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

, где $A = const$, а функция $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

## 3.7 DONE евклидово пространство

Совокупность всех точек n-мерного пространства, в котором расстояние определяется по формуле

$$\rho(x,y) = \sqrt{(x_1y_1)^2 + \ldots + (x_ny_n)^2}$$

, называется n-мерным евклидовым пространством и обозначается $R^n$.

## 3.8 DONE координатная ось

Множество точек $x = (x1, \ldots, xn) \in R^n$ таких, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_{i1} = x_{i+1} = \ldots = x_n = 0$, называется \$i\$-й координатной осью ($i = 1, \ldots, n$) этого пространства. Точка $0 = (0, \ldots, 0)$ называется началом координат.

## 3.9 DONE Критическая точка

Точка $x_0$ называется критической, если $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует.

## 3.10 DONE локальный максимум (минимум)

Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет (или достигает) в точке $\alpha$ локальный максимум (минимум), если найдется такая окрестность $U(\alpha)$ точки $\alpha$, что для всех $x \in U(\alpha)$:

$$f(\alpha) \geq f(x)$$

$$(f(a) \leq f(x))$$

Локальный минимум и локальный максимум объединяют общим названием - локальный экстремум.

## 3.11 DONE наклонная асимптота

Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$ $(-\infty)$, если

$$f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \alpha(x) = 0$$

## 3.12 DONE Неопределенный интеграл

Неопределенным интегралом от данной функции f(x) называется множество всех его первообразных

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$$F'(x) = f(x)$$

.

## 3.13 DONE непрерывная функция

Функция называется непрерывной в точке x$_0$, если бесконечно малому приращению $\Delta x$ аргумента $x$ в точке x$_0$ соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta y$. т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) f(x_0)] = 0$$

### 3.14 DONE несобственный интеграл первого рода

Сходящимся несобственным интегралом первого рода $\int_a^\infty f(x)dx$ от функции $f(x)$ в интервале $[a, \infty)$ называется предел:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{bß\infty} \int_a^b f(x)dx$$

### 3.15 DONE неубывающая (невозрастающая) функция

Говорят, что функция $f(x)$ не убывает (не возрастает) на $(a, b)$, если для любых точек $x_1<x_2$ из $(a, b)$ справедливо неравенство

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

$$(f(x_1) \geq f(x_2))$$

### 3.16 DONE неявная функция

Неявная функция - это функция $y(x)$ заданная некоторым уравнением $F(x, y) = 0$.

### 3.17 DONE окрестность точки

Пусть $x \in R^n$, $\varepsilon > 0$. Совокупность всех точек $y \in R^n$ таких, что $\rho(x, y) < \varepsilon$, называется n-мерным шаром с центром в точке $X$ радиуса $\varepsilon$ или $\varepsilon$-окрестностью:

$$U(x; \varepsilon) = \{y : y \in R^n, \rho(x, y) < \varepsilon\}$$

.

### 3.18 DONE Определенный интеграл

Определенным интегралом от функции f(x) на [a,b] называется предел интегральной суммы

$$\lim_{n\to\infty} \Sigma_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

, если он существует. Здесь $\xi_i \in [x_{i1}, x_i]$ и $a = x_0 < x_1 < \ldots x_n = b$.

Обозначение интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx$$

### 3.19 DONE Первообразная

Первообразной от функции $f(x)$ в данном интервале называется функция $F(x)$, производная которой равна данной функции:

$$F'(x) = f(x)$$

### 3.20 DONE Первый замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

### 3.21 DONE Предел функции

(на языке $\varepsilon$-$\delta$) Число $A$ называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если существует такое число $\delta(\varepsilon)$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|xx_0| < \delta$ имеет место неравенство

$$|f(x)A| < \varepsilon$$

### 3.22 DONE производная функции

Производной функции $y = f(x)$ в данной фиксированной точке x называется предел

$$\lim_{\Delta x \text{ß} 0} \frac{f(x + \Delta x) f(x)}{\Delta x}$$

если этот предел существует.

### 3.23 DONE прямоугольная окрестность точки

Прямоугольной окрестностью точки $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ называется множество

$$P(x;_1, \ldots,_n) = \{(y_1, \ldots, y_n) : |x_i y_i| <_i, 1 \leq i \leq n\},_i > 0$$

### 3.24 DONE разрыв второго рода

Точка а называется точкой разрыва второго рода, если в этой точке функция $f(x)$ не имеет по крайней мере одного из односторонних пределов или хотя бы один из односторонних пределов бесконечен.

### 3.25 DONE разрыв первого рода

Точка a называется точкой разрыва первого рода, если в этой точке $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу правый и левые пределы

$$\lim_{x \to a+0} f(x) \neq \lim_{x \to a0} f(x)$$

### 3.26 DONE расстояние между точками

Расстояние между двумя точками $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ определяется по формуле:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 y_1)^2 + \ldots + (x_n y_n)^2}$$

### 3.27 DONE сложнопоказательная функция

Функция вида $y = u(x)^{v(x)}, (u(x) > 0)$, где и основание, и показатель степени зависят от x, называется сложнопоказательной.

### 3.28 DONE Стационарная точка

Точка $x_0$ называется стационарной для функции $f(x)$, если $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$ и $f'(x_0) = 0$.

### 3.29 DONE точка пространства

Точкой x n-мерного пространства называется упорядоченная совокупность n действительных чисел $(x_1, \ldots, x_n) = x$. Число $x_i$ называется i-й координатой точки $x, i = 1, \ldots, n$.

### 3.30 DONE устранимый разрыв

Точка a называется точкой устранимого разрыва функции $y = f(x)$, если предел функции $f(x)$ в точке $a$ существует, но в самой точке $a$ значение $f(x)$ либо не существует, либо не равно пределу $f(x)$ в этой точке.

## 4 Темы

### 4.1 DONE Билет 1

Первообразная и неопределенный интеграл (определения). Свойства интеграла. Таблица основных неопределенных интегралов. Формула замены переменной в неопределенном интеграле (с доказательством). Формула интегрирования по частям.

### 4.1.1 DONE Опр. 1.

Функция $F$ называется первообразной функции $f$ на промежутке $\Delta$ , если $F$ дифференцируема на $\Delta$ и в каждой точке $x \in \Delta$

$$F'(x) = f(x) \tag{1}$$

Очевидно, что первообразная *F(x)* непрерывна на $\Delta$.

### 4.1.2 DONE Опр. 2.

Пусть функция *f(x)* задана на промежутке $\Delta$. Совокупность всех ее первообразных на этом промежутке называется ***неопределенным интегралом от функции* f** и обозначается

$$\int f(x)dx \tag{2}$$

Если *F(x)* — какая-либо первообразная функции *f(x)* на $\Delta$, то пишут

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{3}$$

$C$ — произвольная постоянная.

### 4.1.3 DONE Основные свойства интеграла

1. Если функция *F(x)* дифференцируема на $\Delta$, то

$$\int dF(x) = F(x) + C \text{ или } \int F'(x)dx = F(x) + C \tag{4}$$

2. Пусть функция *f(x)* имеет первообразную на $\Delta$. Тогда для любого $x \in \Delta$ имеет место равенство:

$$d\int f(x) = f(x)dx \tag{5}$$

3. Если функции *f1*, *f2* имеют первообразные на $\Delta$, то функция *f1* + *f2* имеет первообразную на $\Delta$, причем:

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx \tag{6}$$

4. Если функция *f(x)* имеет первообразную на $\Delta$, $k \in$ , то функция *kf(x)* также имеет на $\Delta$ первообразную, и при $k \neq 0$:

$$\int kf(x)dx = \{kF(x) + C\},\ k\int f(x)dx = k\{F(x) + C\}$$

   Т.к. $C$ – произвольная постоянная и $k \neq 0$, то множества $kF(x) + C$ и $kF(x) + C$ совпадают.

### 4.1.4 DONE След. 1 (Линейность интеграла)

Если $f_1$ и $f_2$ имеют первообразные на $\Delta$, $\lambda_1$, $\lambda_2 \in$ , $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$, то функция $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ имеет первообразную на $\Delta$, причем

$$\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))dx = \lambda_1 \int f_1(x)dx + \lambda_2 \int f_2(x))dx \tag{7}$$

Доказательство вытекает из свойств 3 и 4.

### 4.1.5 DONE Формула замены переменной

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(t)$ заданы соответственно на промежутках $\Delta_x$ и $\Delta_t$, причем $\varphi(\Delta_t) = \Delta_x$, т.е. имеет смысл сложная функция $f(\varphi(t))$, $t \in \Delta_t$. Пусть, кроме того, функция $\varphi(t)$ дифференцируема и строго монотонна на $\Delta_t$. Тогда у функции $\varphi(t)$ существует обратная однозначная функция $\varphi^{-1}(x)$, определенная на промежутке $\Delta_x$.

1. **Теорема 1.** Существование на промежутке $\Delta_x$ интеграла

$$\int f(x)dx \tag{8}$$

   и существование на промежутке $\Delta_t$ интеграла

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \tag{9}$$

равносильны, и имеет место формула

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \tag{10}$$

Формула (10) называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле: переменная x заменяется переменной t по формуле $x = \varphi(t)$.

2. **Доказательство.** Докажем, что существование первообразной у функции f(x) на $\Delta_{\mathrm{x}}$ равносильно существованию первообразной у функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на $\Delta_{\mathrm{t}}$ . Пусть у функции f(x) на $\Delta_{\mathrm{x}}$ существует первообразная F(x), т.е.

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x),\, x \in \Delta_t \tag{11}$$

Имеет смысл сложная функция $F(\varphi(t))$, она является первообразной функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на $\Delta_{\mathrm{t}}$. Действительно,

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = \frac{dF(x)}{dx}\Big|_{x=\varphi(t)} * \frac{d\varphi(t)}{dt} = f(\varphi(t))\varphi'(t) \tag{12}$$

Обратно. Пусть функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ имеет первообразную Φ(t), тогда

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = f(\varphi(t))\varphi'(t) \tag{13}$$

Покажем, что $\Phi(\varphi^{-1}(x))$ является на $\Delta_{\mathrm{x}}$ первообразной функции f(x). В самом деле,

$$\frac{d}{dt}\Phi(\varphi^{-1}(x)) = \frac{d\Phi(t)}{dt}\bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)} * \frac{d\varphi^{-1}(x)}{dx} = (f(\varphi(t))\varphi'(t))\bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)} * \frac{d\varphi^{-1}(x)}{dx} = f(x).$$

Итак, интегралы (8) и (9) одновременно существуют или нет. При этом

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{14}$$

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$$

а так как $F(\varphi(t))|_{t=\varphi^{-1}(x)} = F(x)$, имеет равенство (10).

#### 4.1.6 DONE Формула интегрирования по частям

1. Теорема 2. Если функции $u(x)$, $v(x)$ дифференцируемы на некотором промежутке $\Delta$ и на этом промежутке существует $\int vdu$, то на нем существует интеграл $\int udv$, причем

   $$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x). \tag{15}$$

   Формула (15) называется ***формулой интегрирования по частям.***

2. Доказательство. Пусть $u(x)$, $v(x)$ — дифференцируемы на $\Delta$, тогда

   $$d(u(x)v(x)) = v(x)du(x)+u(x)dv(x) \Rightarrow u(x)dv(x) = d(u(x)v(x))-v(x)du(x).$$

   Проинтегрируем обе части полученного равенства:

   $$\int u(x)dv(x) = \int (d(u(x)v(x))-v(x)du(x)) = u(x)v(x)-\int v(x)du(x).$$

### 4.2 DONE Билет 2

Определенный интеграл Римана (определение). Ограниченность интегрируемых функций (с доказательством). Верхние и нижние суммы Дарбу (определения). Верхний и нижний интегралы Дарбу (определения). Критерий Дарбу. Интегрируемость непрерывных функций. Интегрируемость монотонных функций.

### 4.2.1 DONE Опр 1.

Множество точек $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ таких, что

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{k_\tau - 1} < x_{k_\tau} = b$$

называют ***разбиением*** $\tau$ ***отрезка*** [a, b].

Точки $x_k$ — точки разбиения $\tau$ , отрезки $[x_{k-1}, x_k]$ — отрезки разбиения $\tau$ , $\Delta x_k = x_k x_{k-1}$ — их длины, $|\tau| = \max\{\Delta x_1, ..., \Delta x_{k_\tau}\}$ называют */мелкостью разбиения (или диаметром разбиения)*/.

Отметим два очевидных свойства разбиений:

1. Если $\tau < \tau', \tau' < \tau''$, то $\tau < \tau''$.
2. Для любых разбиений $\tau', \tau''$ существует разбиение $\tau : \tau < \tau', \tau < \tau''$.

Пусть функция f определена на $[a, b], a < b, \tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ — некоторое разбиение этого отрезка. Всякая сумма $\sigma_\tau$ вида

$$\sigma_\tau = \sigma_\tau(f, \xi_1, ..., \xi_{k_\tau}) = \sum_{k=1}^{k_\tau} f(\xi_k)\Delta x_k, \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

называется ***интегральной суммой Римана*** функции f

### 4.2.2 DONE Опр 2.

Функция f называется ***интегрируемой по Риману на отрезке*** $[a, b]$, если существует число $I$ такое, что для любой последовательности разбиений $\tau_n = \{x_k^n\}_{k=0}^{k=k_{\tau_n}}, n \in \mathbb{N}$, отрезка [a, b] диаметры которых стремятся к нулю при $n→ $\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} |\tau_n| = 0$) и для любого набора точек

$$\xi_k^n \in [x_{k-1}^n, x_k^n], k = 1, 2, ..., k_{\tau_n}, n \to \mathbb{N}$$

существует предел интегральных сумм

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{\tau_n}(f, \xi_1^n, ..., \xi_{k_{\tau_n}}^n) = I$$

Число $I$ ***называют интегралом Римана от функции f на отрезке*** [a, b] и обозначают $\int_a^b f(x)dx$

### 4.2.3 DONE Теорема 1 Ограниченность интегрируемых функций

**Теорема 1.** Если функция интегрируема на некотором отрезке, то она ограничена на нем.

**Доказательство.** Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $\int_a^b f(x)\,dx = I$. Зафиксируем $\varepsilon = 1$. По определению 2′ $\exists\ \delta > 0$ : для любого разбиения $\tau(|\tau| < \delta)$ выполняется неравенство

$$|\sigma_\tau - I| < 1 \Longrightarrow -1 < \sigma_\tau - I < 1 \Longleftrightarrow I - 1 < \sigma_\tau < I + 1. \tag{1}$$

Следовательно, множество значений интегральных сумм $\sigma_\tau$ $(|\tau| < \delta)$ функции $f(x)$ ограничено.

Пусть существует функция $f(x)$, интегрируемая на отрезке $[a, b]$, но неограниченная на этом отрезке. Рассмотрим произвольное разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ отрезка $[a, b]$.

Пусть $f(x)$ ограничена на $[x_0, x_1]$, тогда $\forall\ n \in \mathbb{N}$ существует точка $\xi_1^n \in [x_0, x_1]$ : $|f(\xi_1^n)| > n$, откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_1^n) = \infty$.

Зафиксируем какие-либо точки $\xi_k$ в остальных отрезках разбиения $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 2, 3, \ldots, k_\tau$. Тогда

$$\sigma_\tau(f, \xi_1^n, \xi_2, \ldots, \xi_{k_\tau}) = f(\xi_1^n)\Delta x_1 + \sum_{k=2}^{k} f(\xi_k)\Delta x_k \to \infty,\ n \to \infty.$$

Следовательно, множество значений интегральных сумм неограничено. Это противоречит неравенству (1). □

**Замечание 1.** Условие ограниченности функции является необходимым условием интегрируемости по Риману, но не является достаточным. Рассмотрим функцию Дирихле:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Для любого отрезка $[a, b]$, для любого разбиения $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$, выбрав точки $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ рациональными, получим $\sigma_\tau(f, \xi_1, .., \xi_{k_\tau}) = \sum\limits_{k=1}^{k_\tau} f(\xi_k)\Delta x_k = b - a$. Если $\xi_k \in \mathbb{I}$, то

$$\sigma_\tau(f, \xi_1, .., \xi_{k_\tau}) = 0,$$

т.к. $f(\xi_k) = 0$. Поэтому функция Дирихле не интегрируема по Риману.

### 4.2.4 DONE Верхнии и нижнии суммы дарбу

$$M_k = \sup_{x \in \Delta_k} f(x),\ m_k = \inf_{x \in \Delta_k} f(x),\ k = 1, \ldots, k_\tau,$$

2

$$S_\tau = \sum_{k=1}^{k_\tau} M_k \Delta x_k,\ \ s_\tau = \sum_{k=1}^{k_\tau} m_k \Delta x_k.$$

Сумма $S_\tau$ называется *верхней суммой Дарбу*, а $s_\tau$ — *нижней суммой Дарбу*.

$$m_k \le M_k (k = 1, \ldots, k_\tau) \quad \Rightarrow \quad \text{для любого разбиения } \tau \ s_\tau \le \ S_\tau.$$

Кроме того, для любой точки $\xi_k \in \Delta_k$ имеет место неравенство

$$m_k \le f(\xi_k) \le M_k,\ \ k = 1, 2, \ldots, k_\tau.$$

Отсюда следует, что

$$s_\tau \le \sigma_\tau \left(f, (\xi_1, \ldots, \xi_{k_\tau})\right) \le S_\tau.$$

Отметим два свойства сумм Дарбу.

1°. Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит любой верхней: $s_{\tau_1} \le S_{\tau_2}$ ($\tau_1, \tau_2$ — разбиения $[a, b]$).

2°. Для фиксированного разбиения $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ отрезка $[a, b]$ справедливы соотношения:

$$s_\tau = \inf_{\xi_1, \ldots, \xi_{k_\tau}} \sigma_\tau(f, \xi_1, \ldots, \xi_{k_\tau}).$$

$$S_\tau = \sup_{\xi_1, \ldots, \xi_{k_\tau}} \sigma_\tau(f, \xi_1, \ldots, \xi_{k_\tau}).$$

### 4.2.5 DONE Опр 3.

$|\tau| \to 0$

**Определение 3.** Число $A$ называют *пределом функции* $F(\tau)$ при $|\tau| \to 0$, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$, что $\forall$ разбиений $\tau$ отрезка $[a, b]$ $(|\tau| < \delta)$, выполнено неравенство $|F(\tau) - A| < \varepsilon$.

### 4.2.6 DONE Нижний и верхний интегралы

**Нижний и верхний интегралы**

Пусть функция $f(x)$ ограничена на $[a, b]$. Рассмотрим величины:

$$I_* = \sup_{\tau} s_{\tau}, \qquad I^* = \inf_{\tau} S_{\tau}.$$

Число $I_*$ называют *нижним интегралом* функции $f$, а число $I^*$ — *верхним интегралом* $f$.

**Утверждение 1.** Если функция $f$ ограничена на $[a, b]$, то $I_*$, $I^*$ — конечны и $I_* \leq I^*$.

**Доказательство.** По свойству $1^\circ$ сумм Дарбу $\forall$ разбиений $\tau_1$, $\tau_2$ отрезка $[a, b]$

$$s_{\tau_1} \leq S_{\tau_2} \Rightarrow \quad \sup_{\tau_1} s_{\tau_1} = I_* \leq S_{\tau_2} \Rightarrow I_* \leq \inf_{\tau_2} S_{\tau_2} = I^* \Rightarrow I_* \leq I^*.$$

□

### 4.2.7 DONE Необходимые и достаточные условия интегрируемости функций

**Необходимые и достаточные условия интегрируемости функций**

**Теорема 2. (Критерий Дарбу).** Ограниченная на некотором отрезке функция интегрируема на нем $\Leftrightarrow$ суммы Дарбу этой функции удовлетворяют условию:

$$\lim_{|\tau|\to 0}(S_\tau - s_\tau) = 0. \tag{2}$$

**Доказательство необходимости.** Пусть функция $f(x)$, ограниченная на некотором отрезе $[a, b]$, интегрируема на нем и

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Тогда $\lim\limits_{|\tau|\to 0}\sigma_\tau = I$. Поэтому $\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0$ такое, что $\forall$ разбиения $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ отрезка $[a, b]$ $(|\tau| < \delta)$, $\forall$ набора точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, k_\tau$ выполняется неравенство

$$|\sigma_\tau - I| < \varepsilon \Leftrightarrow I - \varepsilon < \sigma_\tau < I + \varepsilon. \tag{3}$$

Если в неравенстве (3) перейти к inf или sup относительно точек $\xi_1, \ldots, \xi_{k_\tau}$, то в силу свойства $2^\circ$ сумм Дарбу получим

$$I - \varepsilon \le s_\tau \le S_\tau \le I + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad 0 \le S_\tau - s_\tau \le 2\varepsilon$$

при условии $|\tau| < \delta \quad \Rightarrow$

$$\lim_{|\tau|\to 0}(S_\tau - s_\tau) = 0.$$

$\square$

**Доказательство достаточности.** Пусть $f(x)$ ограничена на $[a, b]$ и для ее сумм Дарбу выполняется условие (2). Из определения нижнего и верхнего интегралов Дарбу следует:

$$s_\tau \le I_* \le I^* \le S_\tau. \tag{4}$$

Поэтому $0 \le I^* - I_* \le S_\tau - s_\tau$. В силу (2) имеем $I^* = I_*$. Обозначим общее значение интеграла $I = I_* = I^*$. Из (4) следует

$$s_\tau \le I \le S_\tau \Rightarrow$$

$$0 \le I - s_\tau \le S_\tau - s_\tau,$$

следовательно, применяя (2), получим

$$\lim_{|\tau|\to 0} s_\tau = I.$$

Кроме того, $0 \le S_\tau - I \le S_\tau - s_\tau$. Используя (2), получим

$$\lim_{|\tau|\to 0} S_\tau = I.$$

4



Так как для любого разбиения $\tau = \{x\}_{k=0}^{k=k_\tau}$, для любого набора точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, k_\tau$ выполняется неравенство

$$s_\tau \le \sigma_\tau \le S_\tau,$$

имеем $\lim\limits_{|\tau|\to 0}\sigma_\tau = I$, следовательно, $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. $\square$

### 4.2.8 DONE Теорема 4.

Функция, монотонная на отрезке интегрируема, на нем.

**Доказательство.** Пусть $f(x)$ возрастает на $[a,b]$, для любого $\forall\, x \in [a,b]$ выполняется неравенство $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, следовательно, $f(x)$ ограничена на $[a,b]$.

Кроме того, в силу возрастания $f$ на $[a,b]$ для любого разбиения $\tau = \{x\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ имеют место равенства

$$m_k = \inf_{[x_{k-1},x_k]} f(x) = f(x_{k-1}), \quad M_k = \sup_{[x_{k-1},x_k]} f(x) = f(x_k).$$

Заметим, что $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \leq |\tau|, k = 1, \ldots, k_\tau$. Получим

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{k=1}^{k_\tau}(M_k - m_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{k_\tau}[f(x_k) - f(x_{k-1})]\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{k-1}[f(x_k) - f(x_{k_\tau}]|\tau| =$$

5

$$= [f(b) - f(a)]|\tau| \longrightarrow 0 \text{ при } |\tau| \to 0.$$

Следовательно, по критерию Дарбу функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$. $\square$

**Замечание 2.** Из Теоремы 2 следует, что могут быть разрывные интегрируемые функции. Например, функция $y = \mathrm{sign} x$ монотонна и разрывна на любом отрезке, содержащем точку $x = 0$.

## 4.3 DONE Билет 3

Свойства определенного интеграла (сформулировать все, доказать непрерывность интеграла по верхнему пределу). Интегральная теорема о среднем.

**Свойства определенного интеграла:**

**1°.**

$$\int_a^b dx = b - a$$

**2°.** Если функция f(x) интегрируема на [a, b], то она интегрируема на любом отрезке [a*, b*]⊂[a, b].

**3°. Аддитивность интеграла.**

Пусть функция f(x) интегрируема на [a, b] и a<c<b. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

**4°Линейность интеграла.**

Пусть функции f(x) и g(x) интегрируемы на [a, b] и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тогда ∃

$$\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

**5°.** Если функции f(x) и g(x) интегрируемы на [a, b], то их произведение f(x)*g(x) интегрируема на [a, b].

**6°.Интегрирование неравенств**.

Если f(x) интегрируема на [a, b] и f(x) ≥ 0 на [a, b] , то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

**Следствие свойства 6 ◦ .**

Если функции f(x), g(x) интегрируемы на [a, b] и f(x) ≥ g(x) ∀ x ∈ [a, b] , то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

**7°.** Если функция f(x) интегрируема на [a, b], то |f(x)| также интегрируема на [a, b] и

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,, a < b.$$

**8° Непрерывность интеграла по верхнему пределу.**

Если функция f интегрируема на [a, b] , то функции F(x) непрерывны на [a, b].

$$F(x) \coloneqq \int_a^x f(t)\,dt, G(x) \colon= \int_x^b f(t)\,dt$$

Функция F(x) называется интегралом с переменным верхним пределом, а функция G(x) — интегралом с переменным нижним пределом.

**Доказательство.**

Пусть f(x) интегрируема на [a, b], тогда существует c > 0 : ∀ x ∈ [a, b] |f(x)| ≤ c , т.е. f(x) ограничена на [a, b].

Рассмотрим интеграл

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^x, f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \qquad (1)$$

Равенство (1) верно как при Δx ≥ 0 , так и при Δx < 0 , при условии x, x + Δx ∈ [a, b]. Приращение функции F(x) можно записать в виде:

$$\Delta F(x) = F(x+\Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

Проведем оценку:

$$|\Delta F(x)| = \left| \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt \right| \le \int_{x}^{x+\Delta x} |f(t)|\,dt \le C \left| \int_{x}^{x+\Delta x} dt \right| = C|\Delta x|$$

Тогда $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta F(x) = 0$, следовательно, F(x) непрерывна на [a, b].

Непрерывность функции G(x) следует из непрерывности F(x), т.к.

$$\int_{a}^{x} f(t)\,dt + \int_{x}^{b} f(t)\,dt = \int_{a}^{b} f(t)\,dt = const$$

Свойство непрерывности функции F(x) называют *непрерывностью интеграла* $\int_a^x f(t)\,dt$ *по верхнему пределу интегрирования*. Непрерывность G(x) — *непрерывность интеграла по нижнему пределу интегрирования.*

**Следствие свойства 8 ◦**

Если функция интегрируема на [a, b] , то $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,, 0 < \varepsilon < b - a$

**Доказательство следствия.**

Рассмотрим произвольную точку c ∈ (a, b). Применим свойство 8 ◦ к отрезкам [a, c] и [c, b]

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left( \int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

$$= \int_{a}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

**Интегральная теорема о среднем**

Теорема 1. Пусть

1) f(x), g(x) интегрируемы на [a, b];

2) справедливо неравенство $m \le f(x) \le M,\ x \in [a, b]$;

3) функция g(x) не меняет знака на [a, b] . Тогда существует такое число μ , $m \le \mu \le M$ , что

$$\int_{a}^{b} f(x)g(x)\,dx = \mu \int_{a}^{b} g(x)\,dx$$

### 4.4 DONE Билет 4

Теорема о дифференцировании интеграла по верхнему пределу (с доказательством). Теорема о существовании первообразной (с доказательством). Формула Ньютона-Лейбница (с доказательством). Формула замены переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям.

**4. Теорема о дифференцировании интеграла по верхнему пределу (с доказательством). Теорема о существовании первообразной (с доказательством). Формула Ньютона-Лейбница (с доказательством). Формула замены переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям.**

**<u>Теорема 1</u>** Пусть функция f(x) интегрируема на отрезке [a, b] и непрерывна в точке $x_0 \epsilon [a,b]$. Тогда функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ дифференцируема в точке $x_0$ и $F'(x_0) = f(x_0)$

Доказательство:

Рассмотрим приращение функции $F(x)$ в точке $x_0$

$$F(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)\,dt$$

$$F(x_0 + \Delta x) = \int\limits_a^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt$$

$$\Delta F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt\,, \quad x_0 \in [a,b]\,, \quad x_0 + \Delta x \in [a,b]$$

Докажем, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)$$

$$\left|\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)\,dx\right| = \frac{1}{\Delta x}\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\big(f(t) - f(x_0)\big)\,dt\right| \le \frac{1}{|\Delta x|}\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t) - f(x_0)|\,dt\right| \qquad \textbf{(1)}$$

Функция f(x) непрерывна в точке $x_0$, следовательно, для любого ε > 0 существует δ = δ(ε) такое, что $\forall x: |x - x_0| < \delta$ , $x \in [a,b]$выполняется неравенство

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Рассмотрим $\Delta x$ такое, что $|\Delta x| < \delta$

Следовательно $|t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ **(2)**

Выберем $\Delta x$ исходя из условия $\Delta x < \delta$. Тогда в силу непрерывности $f(t)$ в точке $x_0$ имеем $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$\left|\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| \le \frac{1}{|\Delta x|}\left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} \varepsilon\,dt\right| = \frac{1}{|\Delta x|} \cdot |\varepsilon| \cdot |\Delta x| = \varepsilon \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} f(x_0)$$

<u>Следовательно</u> $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} f(x_0)$

Замечание:

Функция $G(x)$ тоже дифференцируема в точке $x_0$, причем $G'(x_0) = -f(x_0)$

$$F(x) + G(x) = \int_a^b f(t)\,dt$$

$$G(x) = \int_a^b f(t)\,dt - F(x)$$

**Теорема 2** Всякая непрерывная функция $f(t)$ на $[a, b]$ имеет первообразную. Функции вида $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ , $\forall x_0 E[a, b]$ является первообразной функции $f(t)$

Доказательство:

Проверим, что функция $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ является первообразной функции $f(x)$. Если $x > x_0$ , $x \in [a, b]$ , то

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = -\frac{d}{dx}\int_{x}^{x_0} f(t)\,dt = -\big(-f(x)\big) = f(x)$$

**Теорема 3** Формула Ньютона-Лейбница: Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то для любой её первообразной $\phi(x)$ справедлива формула $\int_a^b f(t)\,dt = \phi(b) - \phi(a)$

Доказательство:

Функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ одна из первообразных функции $f(x)$.

Тогда

$$\int_a^x f(t)\,dt = \phi(x) + c \Rightarrow \int_a^a f(t)\,dt = \phi(a) + c \Rightarrow c = -\phi(a)$$

Тогда

$$\int_a^b f(t)\,dt = \phi(b) - \phi(a)$$

**<u>Формула замены переменной в определенном интеграле:</u>**

Пусть $\varphi: [\alpha, \beta] \to [a, b]$ непрерывно дифференцируема и строго монотонна, причем $\varphi(\alpha) = a$ , $\varphi(\beta) = b$. Тогда если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то функция $f\big(\varphi(t)\big): \varphi'(t)$ интегрируема на $[\alpha, \beta]$

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(J^3)} f(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{j^3} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt$$

**<u>Формула интегрирования по частям:</u>**

Пусть функции $U(x)$, $V(x)$, $U'(x)$, $V'(x)$ непрерывны на $[a, b]$. Тогда справедлива формула: $U(x) \cdot V'(x)\,dx = U(x) \cdot V(x)|_a^b - \int_a^b V(x) \cdot U'(x)\,dx$

### 4.5 DONE Билет 5

Определение несобственных интегралов. Формула Ньютона-Лейбница и формула замены переменной для несобственных интегралов.

Билет №5

Определение несобственных интегралов. Формула Ньютона-Лейбница и формула замены переменной для несобственных интегралов.

Пусть функция f(x) определена на конечном или бесконечном полуинтервале [a, b), $-\infty < a < b \le +\infty$, и для любого $\eta \in [a, b)$ интегрируема по Риману на отрезке [a, η].

- Если существует конечный предел функции $F(\eta) = \int_{\alpha}^{\eta} f(x)\,dx$ при $\eta \to b - 0$, то этот предел называется несобственным интегралом функции f(x) на промежутке [a,b) :

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\eta \to b} \int_a^{\eta} f(x)\,dx \qquad (1)$$

Если предел (1) существует, то говорят, что несобственный интеграл сходится, в противном случае — расходится. Если несобственный интеграл сходится, то говорят, что функция f(x) интегрируема в несобственном смысле на промежутке [a, b). Возможны два случая: b – конечное число, b = +∞

Если b – конечно и функция f интегрируема по Риману на [a, b], то по свойству непрерывности интеграла с переменным верхним пределом существует:

$$\lim_{\eta \to b} \int_a^{\eta} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Таким образом, определенный ранее интеграл Римана является частным случаем несобственного интеграла. Если b – конечно, то Определение (1) содержательно только если функция f не ограничена в любой окрестности точки b.

Геометрический смысл несобственного интеграла от неотрицательной функции f состоит в том, что он равен площади криволинейной трапеции.

- Если функция f определена на полуинтервале (a, b], $-\infty \le a < b < +\infty$ и для любой точки $\xi \in (a, b]$ интегрируема по Риману на отрезке [ξ, b], то несобственный интегралопределяется как предел:

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \to \alpha} \int_{\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \qquad (2)$$

Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция f(x) определена на полуинтервале [a, b) и интегрируема по Риману на любом отрезке [a, η], $a \le \eta < b$.

- Если f непрерывна на полуинтервале [a, b) и F – какая-либо ее первообразная, то:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b-0) - F(a) \qquad (1)$$

В равенстве (1) либо обе части имеют смысл, и тогда они равны, либо они одновременно не имеют смысла, то есть стоящие в них пределы не существуют. С учетом определений :

$\int_\alpha^b f(x)\,dx = \lim_{\eta \to b} \int_\alpha^\eta f(x)\,dx$; $F(b-0) - F(a) = \lim_{\eta \to b} F(\eta) - F(a)$

Замена переменной в несобственном интеграле.

- Если функция f(x) непрерывна на полуинтервале Δx = [a, b), функция u(t) непрерывно дифференцируема на полуинтервале Δt = [α, β), −∞ < α < β ≤ +∞,u(Δt) ⊂ Δx, a=u(a), $b = \lim_{t \to \beta} u(t)$ , то:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(u(t))\,u'(t)\,dt \quad (5)$$

причем из существования интеграла, стоящего слева в (5), следует существование интеграла, стоящего справа.

**Замечание**

Если функция u такова, что обратная функция u^ −1 однозначна и удовлетворяет условиям, аналогичным условиям, наложенным на u и, следовательно, в интеграле в правой части (5) можно сделать замену t = ^ −1 (x), то оба интеграла сходятся или расходятся одновременно.

Примеры:

1) $\int_\alpha^b \frac{dx}{(x-a)^p} = |t = x-a,\ x = t+a| = \int_0^{b-a} \frac{dt}{t^P}$ - — сходится при p < 1 и расходится при p ≥ 1.

2) $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \left|x = \frac{1}{t}\right| = \int_1^0 \frac{-\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin \vee_0^1 = \frac{\pi}{2}$

## 4.6 DONE Билет 6

Несобственные интегралы от неотрицательных функций (лемма и признак сравнения). Критерий Коши сходимости интеграла (с доказательством). Абсолютно сходящиеся интегралы (определение и теорема о сходимости абсолютно сходящегося интеграла).

6) Несобственные интегралы от неотрицательных функций (лемма и признак сравнения). Критерий Коши сходимости интеграла (с доказательством). Абсолютно сходящиеся интегралы (определение и теорема о сходимости абсолютно сходящегося интеграла)

**Лемма 1**. Пусть f(x) ≥ 0 на полуинтервале [a,b). Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда существует c > 0 такое, что для любого η ∈ [a,b) выполняется неравенство $\int_a^\eta f(x)dx \le c$.

**Теорема 1. (Признак сравнения).**

Пусть 0 ≤ g(x) ≤ f(x), x ∈ [a, b). Тогда:

1) Если Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ -сходится, то сходится и интеграл $\int_a^b g(x)dx$;

2) если Интеграл $\int_a^b g(x)dx$-расходится, то расходится и интеграл $\int_a^b f(x)dx$

**Следствие 1.(Признак сравнения в предельной форме)**

Пусть 0 ≤ g(x) и 0 ≤ f(x), для любого x ∈ [a, b) и существует (∃) конечный или бесконечный

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Тогда:

1) Если $0 \le k < +\infty$, то $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно;
2) Если $k=0 \rightarrow$ из сходимости $\int_a^b g(x)dx$ следует сходимость $\int_a^b f(x)dx$;
3) Если $k=+\infty$, тогда из расходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ следует расходимость;

**Теорема 2.( *Критерий Коши)***

Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, тогда и только тогда, когда для любого(∀) ε > 0 существует(∃) η ∈ [a, b) , что для любых η’, η’’ , η< η’< η’’ ,

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

**Доказательство**. По определению несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta\to\beta-0}\int_a^\eta f(x)dx = \lim_{\eta\to\beta-0}\varphi(\eta)$ по критерию Коши существование $\lim_{\eta\to\beta-0}\varphi(\eta)\exists \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \; \exists \; a <$η$< b$ : ∀ η’, η’’,

η< η’< η’’ выполняется неравенство $|\varphi(\eta') - \varphi(\eta'')|$<ε

$|\varphi(\eta') - \varphi(\eta'')|$= $\int_a^b f(x)dx - \int_a^{\eta'} f(x)dx = \int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx \Leftrightarrow \left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx\right| < \varepsilon.$

**Абсолютно сходящиеся интегралы**

**Определение** Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$.

**Теорема 3.** Если несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ абсолютно сходится, то он сходится.

**Замечание !!!!**

Утверждение обратное теореме 3 неверное, то есть из обычной сходимости не следует абсолютная сходимость.

**Замечание!!** Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ абсолютно сходится, а функция g(x) интегрируема по Риману на любом отрезке [a, η],∀ $\eta\epsilon(a,b)$ и ограничена на [a, b). Тогда $\int_a^b f(x)g(x)dx$ абсолютно сходится.

## 4.7 DONE Билет 7

Определение числового ряда. Необходимый признак сходимости ряда (с доказательством). Критерий Коши сходимости ряда (с доказательством). Ряды с неотрицательными членами (признак сравнения, интегральный признак Коши, радикальный признак Коши, признак Даламбера).

# Тема 12. Числовые ряды. Сходимость ряда. Критерий Коши сходимости ряда. Необходимый признак сходимости. Ряды с неотрицательными членами

**Определение 1.** Пара последовательностей $\{u_n\}$ и $\{s_n\}$, $u_n, s_n \in \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots,$ где

$$s_n = u_1 + \ldots + u_n, \ n = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

называется *рядом* или *бесконечной суммой* и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots. \tag{2}$$

Элементы последовательности $u_n$ называются *элементами ряда,* а элементы последовательности $s_n$ — его *частичными суммами.*

Если существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s, \tag{3}$$

то он называется *суммой ряда.* В этом случае ряд называют *сходящимся* и пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s.$$

Если последовательность $\{s_n\}$ не стремится к конечному пределу, то ряд называется *расходящимся.*

**Пример 1.** Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, $|q| < 1$, $q \in \mathbb{C}$. Частичная сумма ряда равна: $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, $n = 0, 1, \ldots.$ Вычислим предел последовательности $\{s_n\}$ :

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}\right) = \frac{1}{1-q}, \ |q| < 1.$$

Следовательно, при $|q| < 1$ ряд сходится и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$. При $|q| > 1$ ряд расходится. При $q = 1$ имеем $s_n = n$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$, а значит ряд расходится.

Отметим некоторые свойства сходящихся рядов.

**Теорема 1. (Необходимый признак сходимости ряда).** Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

**Доказательство.** Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ — сходится. Следовательно, существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. Из равенства $u_n = s_n - s_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0.$$

$\square$

**Теорема 2.** Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u''_n$ сходятся, причем их суммы равны $s'$ и $s''$, то для любых $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{C}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda' u'_n + \lambda'' u''_n)$ сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda' u'_n + \lambda'' u''_n) = \lambda' s' + \lambda'' s''.$$

**Доказательство** следует из определения сходящегося ряда и свойства пределов.

**Определение 2.** Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$ называется $n$*-м остатком данного ряда.* Если ряд сходится, то $r_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$ — сумма остатка.

**Теорема 3.** Если ряд сходится, то и любой его остаток сходится. Если какой-то остаток ряда сходится, то и сам ряд также сходится, причем $s - s_n = r_n$ для любых $n = 1, 2, \ldots$.

**Без доказательства.**

Сформулируем и докажем *критерий Коши* сходимости ряда.

**Теорема 4.** Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0$ : для любого $n > n_0$ и для любых целых $p \geq 0$ имеет место

$$|u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

**Доказательство.** Рассмотрим последовательность частичных сумм $s_n = u_1 + \ldots + u_n$. По критерию Коши для последовательности $\{s_n\}$ имеем: $\{s_n\}$ — сходится $\iff$ $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists\ n_0 :\ \forall\ n > n_0\ \forall$ целого $p \geq 0$ $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$, т.е. $|u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon$. $\square$

## Ряды с неотрицательными членами. Признаки сравнения

**Лемма 1.** Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \geq 0$, сходится тогда и только тогда, когда его частичные суммы ограничены сверху.

**Доказательство.** Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ с неотрицательными членами $(u_n \geq 0,\ n = 1, 2, \ldots)$. Тогда

$$s_{n+1} = s_n + u_n \geq s_n,$$

т.е. последовательность частичных сумм $\{s_n\}$ данного ряда возрастает. Возрастающая последовательность $\{s_n\}$ имеет конечный предел тогда и только тогда, когда она ограничена сверху. $\square$

**Замечание 1.** Если $u_n \geq 0$, то последовательность $\{s_n\}$ возрастает и всегда имеет конечный или бесконечный предел $S$.

**Теорема 5. (Признак сравнения).** Пусть даны два ряда

$$\sum u_n,\ \sum v_n,\ 0 \leq u_n \leq v_n,\ n = 1, 2, \ldots; \tag{4}$$

тогда:

1) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится;

2) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится.

**Доказательство** Теоремы 5 очевидным образом вытекает из Леммы 1.

**Следствие 1.** Пусть $u_n \geq 0,\ v_n > 0,\ n = 1, 2, \dots,$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l; \tag{5}$$

тогда:

1) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится и $0 \leq l < +\infty,$ то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$;

2) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится и $0 < l \leq +\infty,$ то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

В частности, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1,$$

то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся или расходятся одновременно.

**Доказательство.**

1) $0 \leq l < +\infty$

Из условия (5) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 :\ \forall\, n > n_0$ выполняется неравенство

$$\frac{u_n}{v_n} < l + \varepsilon \ \Rightarrow\ u_n < (l + \varepsilon)v_n,\ n > n_0. \tag{6}$$

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (l + \varepsilon)v_n$. Тогда в силу (6) по признаку сравнения (Теорема 5) сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n_0+k}$, следовательно, сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

2) $0 < l \leq +\infty,$ выберем $l' :\ 0 < l' < l.$

Из условия (5) следует, что существует $n_0 :\ \forall\, n > n_0$ выполняется неравенство

$$\frac{u_n}{v_n} > l' \ \rightarrow\ u_n > l'v_n,\ \ n > n_0. \tag{7}$$

Из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ вытекает, очевидно, расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l'v_n$. Тогда по признаку сравнения из (7) следует, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n_0+k}$ расходится, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится. □

**Пример 2.** Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ расходится, т. к. $\frac{1}{1+\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится.

**Замечание 2.** Если члены ряда $u_n$ заданы функцией от $n$, которая имеет смысл для любых достаточно больших неотрицательных значений переменной $n$ и является "достаточно гладкой" функцией этой переменной, то целесообразно разложить $u_n$ с помощью формулы Тейлора по степеням $\frac{1}{n}$. Поведение ряда определит главный член полученного разложения.

**Пример 3.** Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$, здесь $u_n = 1-\cos\frac{\pi}{n} \geq 0$.

Воспользуемся разложением Тейлора

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),\ x \to 0.$$

Тогда $1-\cos\frac{\pi}{n} = 1-\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 + o\left(\frac{\pi}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 + o\left(\frac{\pi}{n}\right)^2$. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 + o\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\pi^2}{2},$$

ряд сходится по признаку сравнения (Следствие 1).

**Теорема 6 (Интегральный признак Коши).** Если $f(x) \geq 0$ и убывает при $x \geq 1$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{8}$$

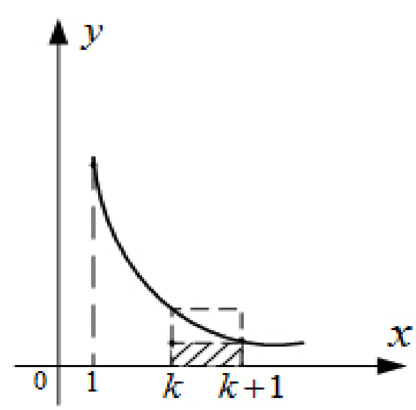
сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int\limits_1^{\infty} f(x)dx. \tag{9}$$

**Доказательство необходимости.** Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится. Функция $f(x)$ монотонна на $[1;+\infty)$. Следовательно, она интегрируема по Риману на $[1,\eta]$, $\eta \in (1,+\infty)$. Следовательно, имеет смысл говорить о несобственном интеграле (9).

Если $k \leq x \leq k+1$, $k = 1, 2\ldots$, то в силу убывания $f$ имеем

$$f(k) \geq f(x) \geq f(k+1).$$




Проинтегрируем последнее неравенство по отрезку $[k, k+1]$:

$$\int\limits_k^{k+1} f(k)dx \geq \int\limits_k^{k+1} f(x)dx \geq \int\limits_k^{k+1} f(k+1)dx,$$

получим неравенство

$$f(k) \geq \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx \geq f(k+1).$$

Просуммируем неравенства по $k$ от $1$ до $n$ :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \quad \Rightarrow$$

$$s_{n+1} - f(1) \leq \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \leq s_n, \tag{10}$$

где $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k),\ \ n = 1, 2, \ldots.$

Если ряд (8) сходится и его сумма равна $s,$ то $s_n \leq s,\ n = 1, 2, \ldots.$ Следовательно, в силу неравенств (10) имеем:

$$\int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \leq s,\ \ n = 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

Рассмотрим $\eta \geq 1,$ выберем такое натуральное $n,$ что $\eta \leq n + 1$ , тогда

$$\int\limits_{1}^{\eta} f(x)dx \leq \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \leq s.$$

Таким образом, множество интегралов от неотрицательной функции $f(x)$ ограничено сверху, следовательно интеграл $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ сходится.

**Доказательство достаточности.** Пусть $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ сходится. Из неравенства (10) в силу неотрицательности $f(x)$ следует:

$$s_{n+1} \leq \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx + f(1) \leq f(1) + \int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx.$$

Т. е. последовательность частичных сумм $s_n$ ряда (8) ограничена сверху, следовательно, ряд сходится. □

**Пример 4.** Применим интегральный признак Коши к исследованию сходимости *обобщенного гармонического ряда:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}},\ \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

При $\alpha > 0$ требуемой функцией является функция $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \le 1$. В силу интегрального признака Коши ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \le 1$. При $\alpha \le 0$ ряд расходится. Это можно доказать непосредственно $\frac{1}{n^\alpha} \ge 1$ при $\alpha \le 0$, т.е. последовательность членов ряда не стремится к нулю.

**Теорема 7 (Радикальный признак Коши).** Пусть для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \ge 0, \tag{12}$$

существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l; \tag{13}$$

тогда, если $l < 1$, то ряд (12) сходится, а если $l > 1$, то расходится.

**Доказательство.**

1) Пусть $l < 1$. Выберем число $q: \ l < q < 1$. Из условия (13) следует, что $\exists\, n_0 :$ $\forall\, n > n_0$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n} < q$, тогда $u_n < q^n$, $n > n_0$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится, поэтому ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n_0+k}$ сходится. Следовательно, ряд (12) сходится.

2) Пусть $l > 1$. В силу условия (13) $\exists\, n_0 : \ \forall\, n > n_0$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n} > 1 \ \Rightarrow \ u_n > 1$, $n > n_0$, т.е. последовательность $\{u_n\}$ не стремится к нулю. Следовательно, ряд (12) расходится. □

**Теорема 8 (Признак Даламбера).** Пусть для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \ u_n > 0, \ n = 1, 2, \ldots \tag{14}$$

существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l. \tag{15}$$

Тогда, если $l < 1$, то ряд (14) сходится, а если $l > 1$, то расходится.

**Без доказательства.**

**Пример 5.**

1) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ сходится по признаку Даламбера, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

2) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ сходится по радикальному признаку Коши, т.к.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

**Замечание 3.** Среди рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ с неотрицательными членами, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ $\left(\text{соответственно } \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1\right)$, имеются как сходящиеся $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)$, так и расходящиеся $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right)$ ряды.

## 4.8 DONE Билет 8

Знакопеременные ряды (признак Лейбница). Абсолютно сходящиеся ряды (определение). Критерий Коши абсолютной сходимости ряда. Условно сходящиеся ряды (определение). Теорема Римана.

*Вопрос № 8. (Тема 13) Знакопеременные ряды (признак Лейбница). Абсолютно сходящиеся ряды (определение). Критерий Коши абсолютной сходимости ряда. Условно сходящиеся ряды (определение). Теорема Римана.*

- *Теорема 1 (Признак Лейбница). Если последовательность* $\{u_n\}$ *убывает* ($\{u_n\} \geq \{u_{n+1}\}$, *n = 1, 2, . . .) и* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} u_n$ *сходится, причем, если s — сумма ряда, а* $s_n$ *— его частичная сумма, то для любых n = 1, 2, . . . выполняется неравенство* $|s_n - s| \leq u_{n+1}$ *(2)*

*Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} u_n$ *знакочередующийся. Из условий* $\{u_n\} \geq \{u_{n+1}\}$, $\lim_{n\to\infty} u_n$ *следует, что* $u_n \geq 0$.

- *Опр-е 1Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$

- *Теорема 2 (Критерий Коши абсолютной сходимости ряда)*

*Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится абсолютно* $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon): \forall\ n > N, \forall$ целого $p \geq 0\ (\sum_{k=1}^{p} |u_{n+k}| < \varepsilon)$

*Теорема 3 Если ряд абсолютно сходится, то он сходится. Данное утверждение следует из неравенства:* $\left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}\right| \leq \sum_{k=1}^{p} |u_{n+k}|$

- *Опр-е 2 Сходящийся, но не абсолютно, ряд называется условно сходящимся.*

- *Теорема Римана. Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ $u_n \in R$ *сходится условно, то* $\forall\ S \in R$ *можно так переставить члены этого ряда, что сумма получившегося ряда будет равна S.*

*Теорема Римана показывает, что свойства коммутативности сложения для конечных сумм не переносится на ряды. Если ряд сходится условно, то сумма зависит от порядка слагаемых.*

## 4.9 DONE Билет 9

Функциональные последовательности и ряды (определения, в том числе, ограниченная последовательность, сходящаяся последовательность, сходящийся ряд, абсолютно сходящийся ряд). Равномерная сходимость функциональной последовательности и функционального ряда (определение и пример). Критерии Коши равномерной сходимости функциональной последовательности (ряда). Признак Вейерштрасса.

# Тема 14. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса

Рассмотрим последовательность, членами которой являются комплекснозначные функции

$$f_n(x) \in \mathbb{C},\ n = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),\ u_n(x) \in \mathbb{C},\ n = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

При каждом фиксированном значении $x$ последовательность (1) и ряд (2) представляют собой числовую последовательность и числовой ряд соответственно.

Пусть $X \subset \mathbb{C}$ и последовательность (1) определена на $X$.

**Определение 1.** Последовательность функций (1) называется *ограниченной (равномерно ограниченной)* на множестве $X$, если существует постоянная $M > 0$ : $\forall\, x \in X,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$|f_n(x)| \le M.$$

**Определение 2.** Последовательность (1) называется *сходящейся* в точке $x_0 \in X$, если числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}$ сходится. Последовательность (1) называется *сходящейся на множестве* $X$, если она сходится в каждой точке множества $X$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, то говорят, что последовательность (1) сходится к функции $f(x),\ x \in X$.

**Определение 3.** Ряд (2) называется *сходящимся в точке* $x_0 \in X$, если сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$. Ряд (2) называют *сходящимся на множестве* $X$, если он сходится в каждой точке этого множества.

**Определение 4.** Ряд (2) называется *абсолютно сходящимся на множестве* $X$, если на множестве $X$, сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$.

Также как для числовых рядов определяются *$n$-я частичная сумма ряда* $s_n(x)$, *$n$-й остаток ряда* $r_n(x)$:

$s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x),\ n = 1, 2, \ldots;\ \ s(x) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(x),\ \ s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x);$

$r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ — $n$-й остаток, $s(x) = s_n(x) + r_n(x)$.

**Замечание 1.** Всякую теорему, доказанную для функциональных рядов, можно перефразировать в соответствующую теорему для функциональных последовательностей и наоборот.

**Пример 1.**

1) $1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots,\ z \in \mathbb{C}$.

Зафиксируем $z \in \mathbb{C}$. Исследуем ряд на абсолютную сходимость с помощью признака Даламбера: $u_n = \frac{|z^n|}{n!},\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|z^{n+1}|}{(n+1)!} \frac{n!}{|z|^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0\ \ \forall\, z \in \mathbb{C}$.

Ряд сходится абсолютно, а значит, и просто сходится $\forall\, z \in \mathbb{C}$.

2) $x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \ldots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \ldots,\ x \in \mathbb{R}$.

Если $x \neq 0$, то ряд представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{1+x^2}$, $0 < q < 1$. Следовательно,

$$s(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{x^2}{\frac{1+x^2-1}{1+x^2}} = 1 + x^2.$$

Если $x = 0$, то $s(0) = 0$. Таким образом, $s(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1 + x^2, & x \neq 0. \end{cases}$

Сумма $s(x)$ — разрывная функция, несмотря на то, что все члены ряда есть непрерывные функции и ряд сходится $\forall\, x \in \mathbb{R}$ (см. Рис. 1).

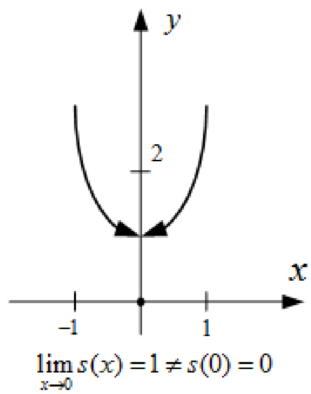



Рис. 1.

Таким образом, *предел суммы бесконечного числа слагаемых не обязательно равен сумме их пределов:*

$$\lim_{x \to x_0} s(x) \neq s(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \quad \text{или} \quad \lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x).$$

Выясним условия, при которых можно гарантировать непрерывность суммы сходящегося ряда непрерывной функции.

**Определение 5.** Пусть заданы последовательность функций (1) и функция $f$, определенные на множестве $X$. Указанная последовательность $\{f_n(x)\}$ *сходится к функции* $f(x)$ *равномерно на множестве* $X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0$ : для любого $n > n_0$, для любого $x \in X$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Последовательность (1) называется *равномерно сходящейся на множестве* $X$, если существует функция $f(x)$, к которой она равномерно сходится на $X$ (см. Рис. 2).

Если последовательность (1) равномерно сходится к функции $f(x)$ на множестве $X$ $\left(f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)\right)$, то она просто сходится к $f(x)$ на множестве $X$ $\left(f_n(x) \underset{X}{\to} f(x)\right)$.

$$f_n \underset{X}{\to} \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \forall\, x \in X\ \exists\, n_0 :\ \forall\, n > n_0\ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon; \qquad (*)$$

$$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} \overset{def}{\Leftrightarrow} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists\, n_0 : \forall\, x \in X \ \forall\, n > n_0 \ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \qquad (**)$$

Из определения $(*)$ видно, что номер $n_0$ зависит не только от $\varepsilon$, но и от точки $x \in X$.

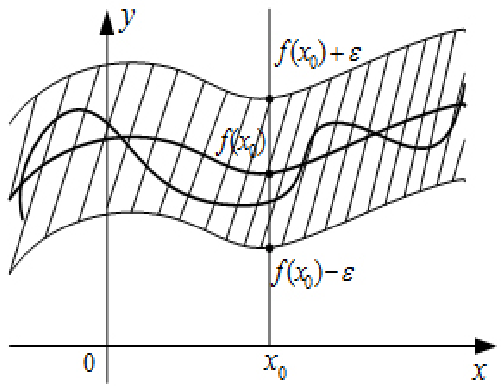



Рис. 2.

**Пример 2.**

1) $\{x^n\} \underset{[0,q]}{\rightrightarrows} 0, \ \ 0 < q < 1.$

Действительно, если $0 \le x \le q$, то $0 \le x^n \le q^n$, $n = 1, 2, \ldots$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, то $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \ \ n_0 : \ \forall\, n > n_0 \ \ q^n < \varepsilon \ \ \left(n > \log_q \varepsilon\right)$. Тогда $x^n \le q^n < \varepsilon \ \ \forall\, n > \left[\log_q \varepsilon\right]$, $\forall\, x \in [0, q]$.

2) $\{x^n\} \underset{[0,1)}{\to} 0$. Сходимость в этом случае не является равномерной.

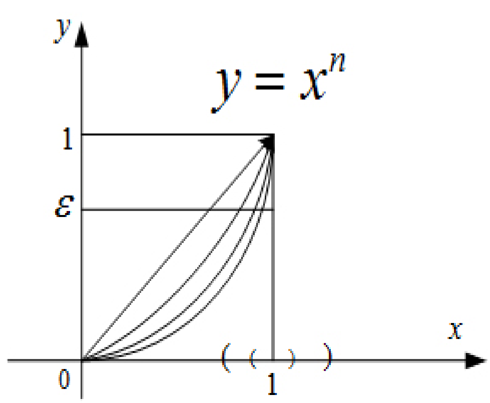



Рис. 3.

Имеем $\lim\limits_{x\to 1} x^n = 1$ для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует $x_\varepsilon : \ \ x_\varepsilon^n \ge \varepsilon$. Поэтому какое бы ни было $n_0$, для любого $n \ge n_0$ существует $x \in [0, 1) : \ |x^n - 0| \ge \varepsilon$.

3) $\{x^n\} \underset{[0,1]}{\to} f(x) = \begin{cases} 0, \ x \in [0,1), \\ 1, \ x = 1. \end{cases}$

Последовательность $x^n$ не сходится равномерно на $[0,1)$. Следовательно, она не сходится равномерно на $[0,1]$.

**Теорема 1 (Критерий Коши равномерной сходимости последовательности).**

$$f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x) \ \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall x \in X, \ \forall n > n_0, \forall p \geq 0, p \in \mathbb{Z}$$

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \tag{3}$$

**Доказательство необходимости.** Пусть $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для него существует $n_0 : \ \forall \, n > n_0 \ \ \forall \, x \in X \ \ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\forall \, x \in X, \ \ \forall \, n > n_0$ $\forall \, p \geq 0$ имеем

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = |[f_{n+p}(x) - f(x)] + [f(x) - f_n(x)]| \leq$$

$$|f_{n+p}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, справедливо условие (3).

**Доказательство достаточности.** Пусть выполняется условие (3), тогда $\forall \, x \in X$ последовательность $\{f_n(x)\}$ удовлетворяет условию Коши сходимости числовых последовательностей. Обозначим предельную функцию $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), \ x \in X$.

Перейдем к пределу в неравенстве (3) при $p \to \infty : \ \forall \, n > n_0 \ \ \forall \, x \in X$ выполняется неравенство $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$. Следовательно, $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$. $\square$

**Определение 6.** Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x), \ \ x \in X,$ называется *равномерно сходящимся на множестве* $X$, если на $X$ равномерно сходится последовательность его частичных сумм.

**Теорема 2 (Необходимое условие равномерной сходимости ряда).** Если ряд (2) равномерно сходится на множестве $X$, то $u_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$.

**Доказать самостоятельно.**

**Теорема 3 (Критерий Коши равномерной сходимости ряда).** Ряд (2) равномерно сходится на множестве $X \ \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \ \ n_0 : \ \forall n > n_0 \ \ \forall x \in X \ \ \forall \, p \geq 0$, $p \in \mathbb{Z}$, выполняется неравенство

$$|u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

**Доказать самостоятельно.**

**Теорема 4 (Признак Вейерштрасса).** Пусть дан функциональный ряд (2). Если числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n, \ \ \alpha_n \geq 0, \tag{4}$$

сходится и справедливо неравенство

$$|u_n(x)| \leq \alpha_n \tag{5}$$

для всех $x \in X$ и для всех $n$, начиная с некоторого номера, то ряд (2) абсолютно и равномерно сходится на множестве $X$.

**Доказательство.** Для всех $x \in X$ ряд (2) сходится абсолютно в силу признака сравнения. Это следует из неравенства (5) и сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ .

Докажем равномерную сходимость ряда (2). Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сходится, тогда существует $n_0 :\ \forall\, n > n_0 \ \ \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \alpha_n < \varepsilon$. Следовательно, $\forall\, x \in X$ и $\forall\, n > n_0$

$$|r_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_n(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \varepsilon,$$

а значит, $r_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$. Отсюда имеем $s_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} s(x)$, где $s(x)$ — сумма ряда (2). □

### 4.10 DONE Билет 10

Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы (с доказательством), интегрирование, дифференцирование).

*Вопрос №10. Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы (с док.), интегрирование, дифференцирование).*

- Теорема 1 (Непрерывность суммы ряда). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, x∈X, у которого функции $u_n(x)$ непрерывны в точке $x_0$∈X. Если ряд сходится равномерно на X, то сумма ряда s(x)= $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывна в точке $x_0$.

  **Док-во.** Пусть $s_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$, n=1,2,… - частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.
  Зададим $\varepsilon > 0$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно, следовательно $s_n(x) \rightrightarrows s(x)$, т.е. $\exists n_0 : \forall\, n > n_0$ , $\forall\, x \in X$ выполняется неравенство
  $$|s(x) - s_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$
  Для всех x ∈ $U_\delta(x_0)$∩X имеем
  $$|s(x) - s(x_0)| = |[s(x) - s_n(x)] + [s_n(x) - s_n(x_0)] + [s_n(x_0) - s(x_0)]| < \varepsilon$$
  что и означает непрерывность функции s(x) в точке $x_0$
  Замечание 1. В условиях теоремы 1 для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в точке $x_0 \in X$ возможен переход к пределу:
  $$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x)$$
- Теорема 2 (Интегрирование ряда).

  C$[a;b]$- класс функций, непрерывных на отрезке $[a;b]$

  C$^1[a;b]$- класс функций, непрерывно дифференц. на $[a;b]$

Пусть даны ф-и $u_n(x) \in C[a;b]$, n=1,2,… и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $[a;b]$. Тогда $\forall\, x_0 \in [a;b]$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{x_0}^{x} u_n(t)dt\right)$ сходится равномерно на $[a;b]$, причем
$$\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{x_0}^{x} u_n(t)dt\right)$$

- *Ряд непрерывных ф-ий в условиях теоремы 2 можно почленно интегрировать. Интеграл бесконечной суммы = сумме интегралов*
- *Функция f(x)называется непрерывной в точке, если: функция определена в точке и ее окрестности; существует конечный предел функции в точке; этот предел равен значению функции в этой точке.*

- Теорема 3 (Дифференцирование). Пусть дана последовательность ф-й $u_n(x) \in C^1[a;b]$, n=1,2,…, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ сходится равномерно на $[a;b]$. Тогда, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in [a;b]$, то
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

Причем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на $[a;b]$.

Его сумма s(x)= $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ является непрерывно дифференцируемой функцией и $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$.

В условиях Т3 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ можно почленно дифференцировать.

## 4.11 DONE Билет 11

Степенные ряды (определение). Первая теорема Абеля (с доказательством). Радиус и круг (интервал) сходимости степенного ряда (определения). Понятие аналитической функции (определение). Теорема о представлении аналитической функции рядом Тейлора.

# Тема 16. Аналитические функции. Разложение функции в степенные ряды. Ряд Тейлора

**Определение 1.** Функция $f$ называется *аналитической* в точке $z_0$, если в некотором круге $|z-z_0|<r$ с центром в этой точке функция $f$ раскладывается в степенной ряд

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n.$$

Очевидно, что радиус сходимости этого ряда больше нуля.

**Замечание 1.** В некоторых случаях лишь рассмотрение ряда в области комплексных чисел $\mathbb{C}$ объясняет величину его радиуса сходимости. Например, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ сходится при $|x|<1$. Сумма этого ряда $s(x)=\frac{1}{1+x^2}$ определена и бесконечно дифференцируема на всей действительной оси. Однако, функция $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ имеет особые точки $z=\pm i$.

**Теорема 1.** Радиусы сходимости рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n, \tag{1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n z^{n+1}}{n+1}, \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n a_n z^{n-1} \tag{3}$$

равны.

**Доказательство.** Пусть $R, R_1, R_2$ — радиусы сходимости рядов (1), (2), (3), соответственно.

Справедливы неравенства

$$\left|\frac{a_n z^{n+1}}{n+1}\right|\le |z||a_n z^n|\le |z^2||n a_n z^{n-1}|, \quad ,n=1,2,\ldots .$$

Из признака сравнения следует, что если в некоторой точке $z$ сходится ряд (3), то в этой точке сходится ряд (1). А если в этой точке $z$ сходится ряд (1), то в этой точке сходится ряд (2). Следовательно,

$$R_2\le R\le R_1. \tag{4}$$

Покажем, что $R_1\le R_2$. Рассмотрим точку $z_0\ne 0$ из круга сходимости ряда (2). Докажем, что в ней сходится ряд (3). Т.к. $|z_0|<R_1$, то существует $r: \quad |z_0|<r<R_1$. Преобразуем

$$|n a_n z_0^{n-1}|=\frac{n(n+1)}{|z_0|^2}\left|\frac{a_n r^{n+1}}{n+1}\right|\left|\frac{z_0}{r}\right|^{n+1},\ n=1,2,\ldots . \tag{5}$$

Последовательность $\left|\dfrac{a_n r^{n+1}}{n+1}\right|\to 0$ при $n\to\infty$ в силу сходимости ряда (2) в точке $z=r$. Следовательно, последовательность $\left|\dfrac{a_n r^{n+1}}{n+1}\right|$ ограничена, т.е. существует $M>0$:

$$\left|\frac{a_n r^{n+1}}{n+1}\right|\le M \quad \forall\ n\in\mathbb{N}.$$

Из неравенства (5) получим

$$\left|na_n z_0^{n-1}\right| \le \underbrace{\frac{n(n+1)}{|z_0|^2} M q^{n+1}}_{\text{ряд с таким общим членом сходится}}, \text{ где } \quad q = \left|\frac{z_0}{r}\right|.$$

Значит по признаку сравнения сходится ряд (3), т.е. $R_1 \le R_2$. Следовательно, $R = R_1 = R_2$. □

## Аналитические функции в действительной области

Далее будем рассматривать ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n, \tag{6}$$

где $a_n, x, x_0 \in \mathbb{R}$.

**Теорема 2.** Если $R$ — радиус сходимости степенного ряда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n, \tag{7}$$

$R > 0$, то
1) функция $f(x)$ имеет в интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ производные всех порядков и они находятся из ряда (7) почленным дифференцированием;
2) для всех $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\left(x - x_0\right)^{n+1}}{n+1}. \tag{8}$$

**Доказательство.** Всякий степенной ряд вида (7) на любом отрезке $[x_0 - r, x_0 + r]$, $0 < r < R$, сходится равномерно, поэтому мы можем почленно дифференцировать и интегрировать ряд (7). □

**Теорема 3.** Если функция $f(x)$ аналитическая в точке $x_0$, т.е. представима в окрестности этой точки степенным рядом (7) с радиусом сходимости $R$, то

$$a_n = \frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}, \; n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

т.е.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!} \left(x - x_0\right)^n.$$

**Доказательство.** Продифференцируем $n$ раз обе части равенства (7):

$$f^{(n)}(x) = n! a_n + (n+1)! a_{n+1}(x - x_0) + \ldots.$$

При $x = x_0$ получим формулы (9). $\square$

**Замечание 2.** Из Теоремы 3 следует единственность разложения функции в степенной ряд вида (6).

**Определение 2.** Пусть функция $f$ определена в некоторой окрестности точки $x_0$ и имеет в этой точке производные всех порядков. Тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \tag{10}$$

называется *рядом Тейлора* функции $f$ в точке $x_0$. При $x_0 = 0$ ряд (10) называется *рядом Маклорена.*

**Замечание 3.** Если функция $f(x)$ аналитическая в точке $x_0$, то она бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности этой точки и равна в этой окрестности сумме своего ряда Тейлора. Но существуют функции бесконечно дифференцируемые, но не аналитические, т.е. не представимые своим рядом Тейлора.

**Пример 1.** Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Пусть $x \neq 0: \ f'(x) = \dfrac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, \ f''(x) = -\dfrac{6}{x^4} e^{-\frac{1}{x^2}} + \dfrac{4}{x^6} e^{-\frac{1}{x^2}}, \ldots . \ f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$, $P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)$ — многочлен, $n$ — порядок производной. Имеем

$$\lim_{x \to \pm 0} f^{(n)}(x) = \lim_{x \to \pm 0} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = 0, \tag{11}$$

т.к. $P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$ — это линейная комбинация слагаемых вида

$$\frac{1}{x^m} e^{-\frac{1}{x^2}}, \ m = 0, 1, 2, \ldots,$$

а

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^m} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Из (11) следует, что при $n = 0$ $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = 0$ (т.е. $f$ непрерывна в точке $x = 0$ ), при $n = 1$ $\lim\limits_{x \to \pm 0} f'(x) = 0$, поэтому существует $f'(0) = 0$. Аналогично по индукции можно доказать, что $f^{(n)}(0) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Следовательно, все члены ряда Маклорена для функции $f(x)$ равны нулю, т.е. сумма ряда не совпадает с самой функцией. Таким образом, функция $f(x)$ *не является аналитической.*

*Возникает вопрос:* когда ряд Тейлора (10) функции $f(x)$ на некотором интервале сходится к $f(x)$? Запишем формулу Тейлора для $f(x)$ :

$$f(x) = \overbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}^{S_n(x)} + r_n(x), \tag{12}$$

здесь $r_n(x)$ — остаточный член формулы Тейлора, а не остаток ряда, т.к. пока не установлено, что ряд сходится. Обозначив через $S_n(x)$ $n$-ю частичную сумму ряда Тейлора, формулу (12) можно переписать в виде:

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x). \tag{13}$$

Из (13) видно, что $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ (т.е. $f(x)$ является суммой своего ряда Тейлора на интервале) $\iff$ для всех $x$ из этого интервала остаточный член формулы Тейлора стремится к нулю $\left(\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0\right)$.

## 4.12 DONE Билет 12

Определение n-мерного арифметического евклидова пространства. Определение n-мерного открытого шара. Предел последовательности в n-мерном пространстве, ограниченное множество в n-мерном пространстве, окрестность бесконечно удалённой точки (определения).

# Тема 17. Многомерные пространства. Сходимость последовательностей в $n$-мерном пространстве

**Определение 1.** Множество всех упорядоченных наборов $x = (x_1, \dots, x_n)$ $n$ действительных чисел, для которых определены линейные комбинации

$$\lambda x + \mu y := (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, ..., \lambda x_n + \mu y_n), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

и скалярное произведение

$$(x, y) := x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n, \tag{2}$$

называется *$n-$ мерным арифметическим евклидовым векторным пространством* и обозначается $\mathbb{R}^n$. Его элементы $x = (x_1, ..., x_n)$ называются *$n-$ мерными векторами,* а числа $x_1, x_2, ..., x_n$ – их координатами.

*Длина $|x|$ $n$-мерного вектора $x$* определяется равенством

$$|x| := \sqrt{(x, x)} \;\Rightarrow\; |x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}. \tag{3}$$

Свойства скалярного произведения:

$1^o$. Неравенство Коши-Шварца

$$|(x, y)| \le |x| \cdot |y|, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

$2^o$. Для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$|x + y| \le |x| + |y|. \tag{5}$$

$3^o$. Для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$||x| - |y|| \le |x - y|. \tag{6}$$

Для элементов $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$ можно ввести *понятие расстояния* между ними

$$\rho(x, y) := |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}. \tag{7}$$

**Определение 2.** Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$. Совокупность всех таких точек $y \in \mathbb{R}^n$, что $\rho(x, y) < \varepsilon$, называется *$n-$ мерным открытым шаром* радиуса $\varepsilon$ с центром в точке $x$ или $\varepsilon-$ окрестностью точки $x$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ и обозначается

$$U(x, \varepsilon) := \{y \in \mathbb{R}^n : \ \rho(x, y) < \varepsilon\}.$$

В координатной записи это выглядит так:

$$U(x, \varepsilon) = \left\{ y = (y_1, ..., y_n) : \ \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2 < \varepsilon \right\}.$$

Множество $U(x, \varepsilon)$ называется *сферической окрестностью точки $x$.*

**Определение 3.** Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $\delta_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Множество

$$P(x, \delta_1, ..., \delta_n) := \{y = (y_1, ..., y_n) : |y_i - x_i| < \delta_i, \quad i = 1, ..., n\}$$

называется *прямоугольной окрестностью* точки $x$.

Рассмотрим последовательность $\left\{x^{(m)}\right\}$ точек пространства $\mathbb{R}^n$, т.е. отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ в пространство $\mathbb{R}^n$, где $x^{(m)} = f(m)$, $m \in \mathbb{N}$.

**Определение 4.** Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется *пределом последовательности* $x^{(m)} \in \mathbb{R}^n$, $m = 1, 2, ...,$ если

$$\lim_{m\to\infty} \rho(x^{(m)}, x) = 0. \tag{8}$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x$ и говорят, что последовательность $\left\{x^{(m)}\right\}$ сходится к точке $x$. Условие (8) означает, что

$$\forall \quad \varepsilon > 0 \ \exists \ m_0 : \ \forall \ m > m_0 \ x^{(m)} \in U(x, \varepsilon).$$

**Теорема 1.** Для того чтобы последовательность $x^{(m)} = \left(x_1^m, ..., x_n^{(m)}\right) \in \mathbb{R}^n$, $m = 1, 2, ...,$ имела своим пределом точку $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \lim\limits_{m\to\infty} x_i^{(m)} = x_i$, $i = 1, 2, ..., n$.

**Доказательство.** Для любых чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ справедливо неравенство:

$$|a_i| \leq \sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2} \leq |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|, \ \ i = 1, 2, ..., n.$$

Это неравенство доказывается возведением в квадрат обеих его частей.

Применим его для $a_i = x_i^{(m)} - x_i$ :

$$\left|x_i^{(m)} - x_i\right| \leq \rho\left(x^{(m)}, x\right) \leq \left|x_1^{(m)} - x_1\right| + ... + \left|x_n^{(m)} - x_n\right|, \ \ i = 1, ..., n.$$

Полученное неравенство доказывает теорему. $\square$

Из Теоремы 1 и свойств пределов числовых последовательностей следует, что если последовательность точек имеет предел, то он единственный, и что всякая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу, что и вся последовательность.

**Определение 5.** Множество в $n-$ мерном пространстве называется *ограниченным,* если оно содержится в некотором $n-$ мерном шаре.

**Определение 6.** Последовательность точек пространства $\mathbb{R}^n$ называется *ограниченной,* если множество её значений ограничено.

Дополним пространство $\mathbb{R}^n$ бесконечно удаленной точкой, которая обозначается $\infty$.

**Определение 7.** $\varepsilon$*-окрестностью* $U(\infty, \varepsilon)$ *бесконечно удаленной точки* $\infty$, $\varepsilon > 0$, называется множество, состоящее из всех таких точек $x \in \mathbb{R}^n$, что $\rho(x, 0) > \frac{1}{\varepsilon}$, и из бесконечно удаленной точки $\infty$, т.е.

$$U(\infty, \varepsilon) = \left\{x : \ \rho(x, 0) > \frac{1}{\varepsilon}\right\} \cup \{\infty\},$$

где $0$ – начало координат пространства $\mathbb{R}^n$.

**Определение 8.** Последовательность $\left\{x^{(m)}\right\}$ называется *последовательностью, стремящейся к бесконечности,* если

$$\lim_{m\to\infty} \rho\left(x^{(m)}, 0\right) = +\infty.$$

**Замечание 1.** В случае $n > 1$ бесконечный предел определен только для бесконечности без знака $(\infty)$.

## 4.13 Билет 13

Внутренняя точка множества, открытое множество, точка прикосновения множества, предельная точка множества, замыкание множества, замкнутое множество, компактное множество, линейно связное множество, выпуклое множество, область (определения).

хз