Теорема 13

Если $b_1, \dots, b_n$ линейно независимы и $\dim V = n$, то $b_1, \dots, b_n$ — базис V

Доказательство

Предположим обратное, т.е. пусть существует вектор $a \in V$, к-рый невозможно линейно выразить ч/з $b_1, \dots, b_n$

Тогда $a, b_1, \dots, b_n$ — также линейно независимая система векторов — противоречие, т.к. $\dim V$ — максимально возможное число векторов в линейно независимой системе по Теореме 10.

Теорема 14 (о подпространстве конечномерного пространства)

Пусть L - подпространство V и $\dim V = n$.

Тогда L конечномерно и $\dim L \leq \dim V$

Если $\dim L = \dim V$, то $L = V$

Доказательство

L не может быть бесконечномерным, т.к. иначе L имеет бесконечные линейно независимые подсистемы $\Rightarrow V$ также имеет бесконечные линейно независимые подсистемы $\Rightarrow V$ бесконечномерно — противоречие

Пусть $b_1, \dots, b_k$ — нек-рый базис L. По теореме 10 $k \leq n$, т.е. $\dim L \leq \dim V$

Если $k = n$, по теореме 13 система $b_1, \dots, b_n$ явл. базисом V. Значит $L = V$

Опр. Пусть V, V' — векторные пространства над полем F. Пространства V и V' называются изоморфными, если существует такое отображение $\varphi: V \to V'$, что:

1. φ — биективное отображение,
2. $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ и $\varphi(ka) = k\,\varphi(a)$ для любых $a, b \in V$, $k \in F$

Замечание

Это определение корректно (т.е. симметрично по отношению к V, V'), т.к. отображение

$\varphi^{-1}: V' \to V$ обратное отображение φ, также удовлетворяет условию #2

Будем называть φ отображением, осуществляющим изоморфизм м/у V и V'

Отношение „быть изоморфными" является отношением эквивалентности, т.е

1. V изоморфно V
2. Если V изоморфно V', то V' изоморфно V
3. Если V изоморфно V', V' изоморфно V'', то V изоморфно V'' (если φ, ψ - отображения, осуществляющие изоморфизм м/у V и V', V' и V'' соответственно, то $\varphi \circ \psi$ осуществляет изоморфизм м/у V и V'').

Теорема 15

Конечномерное пространства V и V' изоморфны тогда и только тогда, когда $\dim V = \dim V'$

Конечномерное и бесконечномерное пространства не могут быть изоморфны.

Доказательство

Отметив св-ва отображения, осуществляющего изоморфизм м/у V и V':

1. $\varphi(0) = 0$
2. $\varphi(-a) = -\varphi(a)$ для любого $a \in V$
3. $\varphi(k_1 a_1 + \ldots + k_m a_m) = k_1 \varphi(a_1) + \ldots + k_m \varphi(a_m)$

Док-во этих св-в — непосредственное следствие условий 1-2 определения изоморфности.

Из этих св-в следует, в частности, что при изоморфизме линейно зависимые (независимые) системы векторов переходят в линейно зависимые (независимые) системы

$\Rightarrow$ Пусть $\dim V = \dim V' = n$

Построим изоморфизм $\varphi: V \to V'$

Выберем в V и V' по базису:

$b_1, \ldots, b_n$ — базис V, $b_1', \ldots, b_n'$ — базис V'

Определим отображение φ след. образом: если $x = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n \in V$, то положим $\varphi(x) = x_1 b_1' + \ldots + x_n b_n'$

Легко проверить, что $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ и $\varphi(kx) = k\varphi(x)$ для любых $x, y \in V$, $k \in F$

Таким образом, т.к. также φ биективно, V изоморфно V'

$\Leftarrow$ Пусть теперь V и V' изоморфны и $\dim V = n$

Докажем, что $\dim V' = n$. Рассмотрим произвольный базис пространства V:

$b_1, \ldots, b_n$

Тогда

$\varphi(b_1, \ldots, b_n)$ —

базис пр-ва V' (следствие св-в изоморфизма, приведенных выше).

След-но $\dim V' = n = \dim V$.

Бесконечномерное пр-во не может быть изоморфно конечномерному, т.к. при изоморфизме линейно независимые системы переходят в линейно независимые, а в бесконечномерном пр-ве существуют сколь угодно длинные лин. незав. системы, в то время как в конечномерном пр-ве число векторов в линейно независимой системе векторов ограничено сверху его размерностью.

Следствие

Всякое n-мерное векторное пр-во V над полем F изоморфно n-мерному арифметическому пр-ву F^n.

Пример

1 $V = \mathbb{R}[x]$, V' = векторное пр-во бесконечных финитных послед-тей из вещественных чисел. Эти пространства изоморфны. Отображение $\varphi: V \to V'$ устроено след. обр.:

$$\varphi(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots)$$

2. $V_n = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg f(x) \le n \}$
(если $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, $a_n \neq 0$, то $\deg f(x) = n$)
V_n изоморфно $V' = \mathbb{R}^{n+1}$ Здесь $\varphi(a_0 + a_1 x + .. + a_n x^n) =$
$= (a_0, a_1, \ldots, a_n)$

3 Координаты вектора в базисе

Пусть V – нек-рое n-мерное векторное пространство над полем F.

Опр. Координатами вектора $a \in V$ в базисе $b_1, .., b_n$ называются коэффициенты в разложении

$$a = k_1 b_1 + \ldots + k_n b_n$$

При фиксированном базисе каждому вектору $a \in V$ однозначно сопоставляется набор координат, к-рые записываются в виде столбца

$$a \to \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = (k_1, .., k_n)^t$$

Это сопоставление согласовано с операциями над векторами: при сложении векторов их столбцы складываются, а при умножении вектора на скаляр столбец координат умножается на скаляр.

Пример

Рассмотрим $\mathbb{R}^n$, где в кач-ве базиса взят стандартный базис (базис из единичных векторов).

$e_1 = (1, 0, \ , 0)$
$e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$
...
$e_n = (0, 0, \ldots, 1)$

Тогда столбец координат произвольного вектора
$a = (a_1, \ldots, a_n)$
есть $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_n \end{pmatrix}$