Определим новую систему векторов B' равном

$B' = B \cdot T$

Докажем, что B': $b_1', b_2', \dots, b_n'$ является базисом V.

Для этого достаточно показать, что векторы $b_1', \dots, b_n'$ линейно независимы.

Пусть $b_1', \dots, b_n'$ линейно зависимы. Тогда линейно зависимыми будут столбцы матрицы T:

$b_1' = t_{11} b_1 + \dots + t_{n1} b_n$

$b_2' = t_{12} b_1 + \dots + t_{n2} b_n$

$\dots$

$b_n' = t_{1n} b_1 + \dots + t_{nn} b_n$

$$0 = k_1 b_1' + \dots + k_n b_n' = k_1 t_{11} b_1 + \dots + k_1 t_{n1} b_n + \\ + \dots + k_n t_{1n} b_1 + \dots + k_n t_{nn} b_n = \\ = (k_1 t_{11} + \dots + k_n t_{1n}) b_1 + \dots + (k_1 t_{n1} + \dots + k_n t_{nn}) b_n$$

$$\begin{cases} k_1 t_{11} + \dots + k_n t_{1n} = 0, \\ \dots \\ k_1 t_{n1} + \dots + k_n t_{nn} = 0. \end{cases}$$

Это рав-во означает, что линейная комбинация столбцов матрицы T с коэффициентами $k_1, \dots, k_n$ есть нулевой вектор, причем из $k_1, \dots, k_n$ не все равны нулю, т.е столбцы T линейно зависимы, однако по условию T обратима, т.е. ее ранг ~~равен~~ полон и она не может иметь линейно зависимые столбцы.

Теорема 17

Пусть B и B' — базисы n-мерного пр-ва V, в к-рых столбцы координат вектора $a \in V$ суть

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} k_1' \\ \vdots \\ k_n' \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ \dots \\ k_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} k_1' \\ \dots \\ k_n' \end{pmatrix}$$

где T – матрица перехода от B к B'.

<u>Доказательство</u>

Имеем $B' = BT$, $a = k_1 b_1 + \dots + k_n b_n = k_1' b_1' + \dots + k_n' b_n'$

Другими словами,

$$B \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = B' \begin{pmatrix} k_1' \\ \vdots \\ k_n' \end{pmatrix}$$

Отсюда

$$B \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = (BT) \begin{pmatrix} k_1' \\ \dots \\ k_n' \end{pmatrix} = B \left(T \begin{pmatrix} k_1' \\ \dots \\ k_n' \end{pmatrix} \right).$$

След-но,

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} k_1' \\ \dots \\ k_n' \end{pmatrix}$$

<u>Замечание</u>

Обычно используют эквивалентный вариант полученной формулы:

$$\begin{pmatrix} k_1' \\ \dots \\ k_n' \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} k_1 \\ \dots \\ k_n \end{pmatrix}$$

<u>Пример</u>

$V = \mathbb{R}^3$, $B = e_1, e_2, e_3$ (станд. базис)

B': $e_1' = (5, -1, -2)$,

$e_2' = (2, 3, 0)$,

$e_3' = (-2, 1, 1)$.

Имеем:

$$T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Эта матрица обратима и

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 6 & -4 & 17 \end{pmatrix}$$

Пусть $a = (1, 4, -1)$

Найдем координаты вектора a в базисе B':

$$\begin{pmatrix} k_1' \\ k_2' \\ k_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 6 & -4 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 6 \\ -27 \end{pmatrix}$$