п. 3 Собственные значения и собственные векторы

Пусть φ - линейный оператор, матрица которого в нек-ром базисе $b_1, \dots, b_n$ $(n = \dim V)$ имеет диагональный вид:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Действие этого оператора на векторы следующее:

$$\varphi(b_1) = \lambda_1 b_1, \; \varphi(b_2) = \lambda_2 b_2, \dots, \varphi(b_n) = \lambda_n b_n$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

или

$$(-1)^n \lambda^n + \dots = 0$$

Это алгебраическое ур-ие n-ой степени. Из теории многочленов следует, что корней этого ур-ия не более n, значит собственных значений любого линейного оператора не более $n = \dim V$.

Опр. Пусть $\lambda \in F$ — нек-рое собственное значение линейного оператора $\varphi : V \to V$.

Мн-во всех собственных векторов, принадлежащих собственному значению λ вместе с нулевым вектором, образует подпр-во, называемое собственным подпр-вом, соответствующим собственному значению λ

Это подпр-во есть $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ — тождественный линейный оператор (тождественное преобразование).

Обозначение

$$L_\lambda = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \mathcal{E})$$

собственное подпр-во оператора $\varphi : V \to V$, соотв. собственному значению λ.

Опр Если линейный оператор $\varphi : V \to V$ в нек-ром базисе может быть задан диагональной матрицей, то говорят, что φ — диагонализируемый линейный оператор.

Легко видеть, что любой диагонализируемый оператор имеет $n = \dim V$ линейно независимых собственных векторов.

Обратно, если линейный оператор диагонализируемый, то он имеет n линейно независимые собственные векторы.

Опр. Спектром линейного оператора φ называется мн-во всех его собственных значений.

Спектр называется простым, если он состоит из n различных значений ($n = \dim V$)

Теорема 7 (о диагонализируемости линейного оператора с простым спектром)

Если $\varphi : V \to V$ линейный оператор с простым спектром, то φ - диагонализируемый оператор.

Лемма

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - попарно различные собственные значения линейного оператора $\varphi : V \to V$, а $x_1, \dots, x_k$ - соответствующие им собственные векторы

Тогда $x_1, \dots, x_k$ линейно независимы.

Доказательство

Пусть

$$l_1 x_1 + \dots + l_k x_k$$

Предположим, что утверждение леммы для числа векторов $< k$. Имеем:

$$0 = l_1 \varphi(x_1) + l_2 \varphi(x_2) + \dots + l_k \varphi(x_k) =$$
$$= l_1 \lambda_1 x_1 + l_2 \lambda_2 x_2 + \dots + l_k \lambda_k x_k$$

След-но, умножив первое рав-во на $-\lambda_1$, добавив ко второму, имеем:

$$l_2 (\lambda_2 - \lambda_1) x_2 + \dots + l_k (\lambda_k - \lambda_1) x_k = 0$$

По предположению $x_2, \dots, x_k$ линейно независимы, поэтому отсюда следует, что

$$l_2 (\lambda_2 - \lambda_1) = \dots = l_k (\lambda_k - \lambda_1) = 0$$

Т.к. $\lambda_2 \neq \lambda_1, \dots, \lambda_k \neq \lambda_1$, то $l_2 = \dots = l_k = 0$

Также $l_1 x_1 = 0$, значит $l_1 = 0$.

Доказательство теоремы 7

Спектр оператора содержит n различных собств значений $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. По лемме соотв. им собственные векторы $b_1, \dots, b_n$ будут линейно независимы и, след-но, их можно взять в кач-ве базиса V.

В этом базисе матрица оператора φ имеет диагональный вид.

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Если спектр оператора φ $V \to V$ не является простым, то оператор φ не обязательно недиагонализируемый.

<u>Пример</u>

$\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан матрицей

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

в нек-ром базисе b_1, b_2, b_3

Найдем собственные значения:

$$|A_\varphi - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2$

След-но оператор не имеет простого спектра.

Найдем собственные векторы:

1. $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$L_{\lambda_1} = \langle (1, 1, 1) \rangle, \ \dim L_{\lambda_1} = 1$

2. $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$$

$$L_{\lambda_2} = \langle (1,1,0), (-1,0,3) \rangle, \ \dim L_{\lambda_2} = 2$$

Векторы $b_1' = (1,1,1)$, $b_2' = (1,1,0)$, $b_3' = (-1,0,3)$ образуют базис $\mathbb{R}^3$ и в этом базисе матрица оператора φ диагональна

$$A_\varphi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

На диагонали матрицы находятся собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Теорема 8 (критерий диагонализируемости)

Пусть линейный оператор $\varphi: V \to V$ имеет в точности k различных собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ($k \le n = \dim V$)

Оператор φ диагонализируем тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{k} \dim L_{\lambda_i} = \dim V$$

Доказательство

$\Rightarrow$ Пусть φ – диагонализируемый оператор, т.е. в нек-ром базисе его матрица имеет вид

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \underbrace{\lambda_1 \ \ddots \ \lambda_1}_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underbrace{\lambda_k \ \ddots \ \lambda_k}_{n_k} \end{pmatrix}$$

Докажем, что собственное подпр-во L_{λ_i} ($i = 1, \dots, k$) является линейной оболочкой тех базисных векторов, к-рые являются собственными с собственными значениями λ_i

Пусть $i = 1$, $L_{\lambda_1} = \langle b_1, \dots, b_{n_1} \rangle$. Предположим, что $x \in L_{\lambda_1}$ и

$$x = x_1 + \dots + x_k$$

где $x_1 \in \langle b_1, \ldots, b_{n_1} \rangle, \ldots, x_k \in \langle b_{n-n_k+1}, \ldots, b_n \rangle$

Если, например, $x_2 \neq 0$, то было бы

$$\underset{\lambda_1}{(x_1 - x)} + \underset{\lambda_2}{x_2} + \underset{\ldots}{\ldots} + \underset{\lambda_k}{x_k} = 0$$

поэтому $x_2 = \ldots = x_k = 0$, т.е. $x = x_1$
(по лемме о линейной независимости собственных векторов, соотв. различным собственным значениям)

Итак, $L_{\lambda_1} = \langle b_1, \ldots, b_{n_1} \rangle$. В частности,

$$\dim L_{\lambda_1} = n_1 \quad (i = 1, \ldots, k)$$

Таким образом, сумма размерностей

$$\sum_{i=1}^{n} \dim L_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{k} n_i = n = \dim V.$$

$\Leftarrow$ Пусть

$$\sum_{i=1}^{k} \dim L_{\lambda_i} = n$$

Докажем, что

$$L_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus L_{\lambda_k} = V$$

То, что сумма является прямой, есть следствие уже упомянутой леммы о линейной независимости, а тот факт, что она есть все пр-во V, возникает из рав-ва $(*)$, т.к.

$$\dim (L_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus L_{\lambda_k}) = \sum_{i=1}^{n} \dim L_{\lambda_i} = n$$

Взяв в каждом подпр-ве L_{λ_i} по базису и затем, соединив их, получим базис всего пр-ва V, в к-ром матрица оператора φ будет иметь диагональный вид

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \lambda_k & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$