§ 11. Евклидовы пространства

п. 1 Скалярное произведение

Пусть $F = \mathbb{R}$, т.е. V – векторное пр-во над $\mathbb{R}$

<u>Опр</u> Будем говорить, что в пр-ве V задано скалярное умножение векторов, если определено отображение из V^2 в $\mathbb{R}$, т.е. каждой упорядоченной паре векторов $x, y \in V$ поставлено в соответствие действительное число, обозначаемое (x, y) и называемое скалярным произведением векторов x, y; при этом:

1. $(x, y) = (y, x)$ для любых $x, y \in V$ — условие симметрии
2. $(k_1 x_1 + k_2 x_2, y) = k_1(x_1, y) + k_2(x_2, y)$ — условие линейности
   $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R};\ x_1, x_2, y \in V$
3. $(x, x) > 0 \quad \forall x \in V,\ x \neq 0$ — условие положит-ти

<u>Замечание</u>

Имеем $(0, y) = 0 \quad \forall y \in V$ как следствие условия линейности.

<u>Примеры</u>

1. $V = \mathbb{R}^n$

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n),\ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

Положим $(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

Эта формула задает скалярное умножение, называемое стандартным

2. $V = \mathbb{R}^2,\ x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2)$.

Положим $(x, y) = (x_1\ \ x_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =$

$= (x_1 + 2x_2\ \ \ 2x_1 + 5x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =$

$= x_1 y_1 + 2x_2 y_1 + 2x_1 y_2 + 5x_2 y_2$

Эта формула также задает скалярное умножение в $\mathbb{R}^2$.

1 Условие линейности выполнено

2. Условие симметричности также выполнено

3. $(x, x) = x_1^2 + 4x_1 x_2 + 5x_2^2 > 0 \quad \forall x = (x_1, x_2) \neq 0$

т.к. $D = 4^2 - 4 \cdot 5 = -4 < 0$

Опр. Векторы $x, y \in V$ называются ортогональными, если $(x, y) = 0$

Опр. Система векторов $a_1, \dots, a_m$ пр-ва V наз. ортогональной, если

$$(a_i, a_j) = 0 \text{ при } i \neq j, \; i, j = (1, \dots, m).$$

Теорема 1

Ортогональная система векторов, не содержащая нулевых векторов, является линейно независимой

Доказательство:

Пусть векторы $a_1, \dots, a_m$ отличны от нулевого и образуют ~~ортогон~~альную систему.

Докажем их линейную независимость

Пусть $k_1 a_1 + \dots + k_m a_m = 0$ Покажем, что, например, $k_1 = 0$.

Умножим скалярно обе части рав-ва на a_1

$$0 = (k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m, a_1) = k_1 (a_1, a_1) + k_2 \overset{\text{ортогон.}}{(a_2, a_1)}^{=0} + \dots + k_m \overset{\text{ор-огон.}}{(a_m, a_1)}^{=0} = k_1 (a_1, a_1)$$

По св-ву положит-ти т.к $a_1 \neq 0$, $(a_1, a_1) > 0$, след-но $k_1 = 0$.

п. 2 Евклидово пространство

Опр. Конечномерное векторное пр-во V над полем $\mathbb{R}$, в к-ром задано нек-рое скалярное умножение векторов, называется Евклидовым пространством

Теорема 2

Любое конечномерное векторное пр-во V над полем F можно превратить в евклидово пространство.

Доказательство

Пусть $\dim V = n$, $b_1, \dots, b_n$ — нек-рый базис V

Формула $(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ (где $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_n \end{pmatrix}$ — столбцы координат векторов x, y в данном