Замечание

Собственные векторы самосопряженного оператора, соответствующие различным собственным значениям, образуют ортогональную систему.

Это следует из леммы 2, но также может быть доказано непосредственно

Пусть x, y — собственные векторы (принадлежащие λ_1, λ_2, причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Имеем:

$$(\varphi(x), y) = (\lambda_1 x, y) = \lambda_1 (x, y)$$

$$\|$$

$$(y, \varphi(y)) = (x, \lambda_2 y) = \lambda_2 (x, y)$$

След-но,

$$(\lambda_2 - \lambda_1)(x, y) = 0$$

т.е.

$$(x, y) = 0$$

Опр. Линейный оператор $\varphi : V \to V$ евклидова пр-ва V называется ортогональным, если

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$$

для любых $x, y \in V$.

Иными словами, ортогональное преобразование — это то, которое сохраняет скалярное произведение.

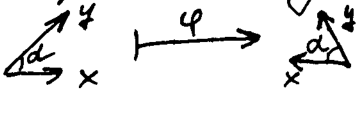
Можно показать, что д/ортогональности линейного оператора достаточно выполнения следующего условия:

$$|\varphi(x)| = |x|$$

для любого $x \in V$

Замечание

Ясно, что ортогональное преобразование сохраняет угол м/у векторами



Ортогональный оператор характеризуется также тем, что произвольный ортонормированный базис переводит в ортонормированный базис.

Поэтому переход от ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису описывается ортогональной матрицей, то матрица ортогонального оператора в ортогональном базисе должна быть ортогональной ($A^{-1} = A^t$)

Предположим, что e — собственный вектор ортогонального оператора $\varphi: V \to V$. Тогда

$$\varphi(e) = \lambda e$$

и

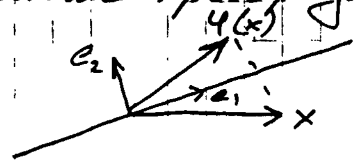
$$|\varphi(e)| = |\lambda||e| = |e|$$

т.е.

$$|\lambda| = 1, \quad \lambda = \pm 1$$

Примеры

1. Симметрия относительно оси — ортогональное преобразование плоскости.



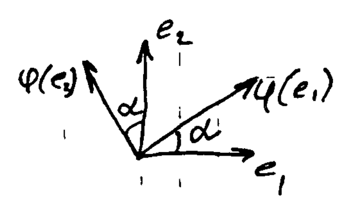
В ортонормированном базисе e_1, e_2 это преобразование задается матрицей

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2 Поворот вокруг начала координат на угол φ — ортогональное преобразование плоскости.

В ортонормированном базисе e_1, e_2 это преобразование может быть задано матрицей:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$



Если $\alpha \neq \pi + 2\pi k$ (т.е. поворот не явл. центральной симметрией), то собственных векторов нет. Иначе собственными будут все векторы.

ЗАМЕЧАНИЕ

Заметим, что других ортогональных преобразований плоскости нет. (док-ть).

Ортогональные преобразования сохраняющие ориентацию пр-ва, называются собственными. Если ориентация пр-ва меняется, то говорят о несобственном ортогональном преобразовании.

Собственные ортогональные преобразования характеризуются тем, что их определитель равен $+1$, а несобственные — тем, что их определитель равен -1.

Опр. Определитель линейного оператора — это определитель его матрицы в каком-либо базисе.

Теорема 11

Пусть $\varphi: V \to V$ — ортогональный оператор в Евклидовом пр-ве V. Тогда в нек-ром ортонормированном базисе матрица φ имеет вид.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & \\ & & & & & & \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 & & \\ & & & & & & \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & & \\ & 0 & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \cos\alpha_k & -\sin\alpha_k \\ & & & & & & & & \sin\alpha_k & \cos\alpha_k \end{pmatrix}$$

ЗАМЕЧАНИЕ О ДОК-ВЕ

Док-во может быть получено на базе аналога лемм 1 и 2, а именно можно показать, что Лемма 2 остается справедливой и д/ ортогонального преобразования, а Лемму 1 следует переформулировать след. образом: Любое ортогональное преобразование имеет либо одномерное, либо двумерное инвариантное подпр-во (это верно и д/ любых линейных преобразований).