

Матан. Подготовка к экзамену.

q

June 19, 2021

Contents

1	Даты	3
1.1	Консультация	3
1.2	Экзамен	3
2	Темы	3
2.1	Первообразная и неопределенный интеграл (определения). Свойства интеграла. Таблица основных неопределенных интегралов. Формула замены переменной в неопределенном интеграле (с доказательством). Формула интегрирования по частям.	3
2.1.1	Опр. 1.	3
2.1.2	Опр. 2.	3
2.1.3	Основные свойства интеграла	4
2.1.4	След. 1 (Линейность интеграла)	5
2.2	Определенный интеграл Римана (определение). Ограниченность интегрируемых функций (с доказательством). Верхние и нижние суммы Дарбу (определения). Верхний и нижний интегралы Дарбу (определения). Критерий Дарбу. Интегрируемость непрерывных функций. Интегрируемость монотонных функций. 7	7
2.3	Свойства определенного интеграла (сформулировать все, доказать непрерывность интеграла по верхнему пределу). Интегральная теорема о среднем.	7
2.4	Теорема о дифференцировании интеграла по верхнему пределу (с доказательством). Теорема о существовании первообразной (с доказательством). Формула Ньютона-Лейбница (с доказательством). Формула замены переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям.	7

2.5	Определение несобственных интегралов. Формула Ньютона-Лейбница и формула замены переменной для несобственных интегралов.	7
2.6	Несобственные интегралы от неотрицательных функций (лемма и признак сравнения). Критерий Коши сходимости интеграла (с доказательством). Абсолютно сходящиеся интегралы (определение и теорема о сходимости абсолютно сходящегося интеграла).	7
2.7	Определение числового ряда. Необходимый признак сходимости ряда (с доказательством). Критерий Коши сходимости ряда (с доказательством). Ряды с неотрицательными членами (признак сравнения, интегральный признак Коши, радикальный признак Коши, признак Даламбера).	7
2.8	Знакопеременные ряды (признак Лейбница). Абсолютно сходящиеся ряды (определение). Критерий Коши абсолютной сходимости ряда. Условно сходящиеся ряды (определение). Теорема Римана.	7
2.9	Функциональные последовательности и ряды (определения, в том числе, ограниченная последовательность, сходящаяся последовательность, сходящийся ряд, абсолютно сходящийся ряд). Равномерная сходимость функциональной последовательности и функционального ряда (определение и пример). Критерии Коши равномерной сходимости функциональной последовательности (ряда). Признак Вейерштрасса.	7
2.10	Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы (с доказательством), интегрирование, дифференцирование).	7
2.11	Степенные ряды (определение). Первая теорема Абеля (с доказательством). Радиус и круг (интервал) сходимости степенного ряда (определения). Понятие аналитической функции (определение). Теорема о представлении аналитической функции рядом Тейлора.	7
2.12	Определение n -мерного арифметического евклидова пространства. Определение n -мерного открытого шара. Предел последовательности в n -мерном пространстве, ограниченное множество в n -мерном пространстве, окрестность бесконечно удалённой точки (определения).	7

2.13	Внутренняя точка множества, открытое множество, точка прикосновения множества, предельная точка множества, замыкание множества, замкнутое множество, компактное множество, линейно связное множество, выпуклое множество, область (определения).	7
------	--	---

1 Даты

1.1 Консультация

2021-06-24 Thu

1.2 Экзамен

2021-06-25 Fri

2 Темы

2.1 Первообразная и неопределенный интеграл (определения). Свойства интеграла. Таблица основных неопределенных интегралов. Формула замены переменной в неопределенном интеграле (с доказательством). Формула интегрирования по частям.

2.1.1 Опр. 1.

Функция F называется первообразной функции f на промежутке Δ , если F дифференцируема на Δ и в каждой точке $x \in \Delta$

$$(1) \quad F'(x) = f(x)$$

Очевидно, что первообразная $F(x)$ непрерывна на Δ .

2.1.2 Опр. 2.

Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке Δ . Совокупность всех ее первообразных на этом промежутке называется **неопределенным интегралом от функции f** и обозначается

$$(2) \quad \int f(x) \, dx$$

Если $F(x)$ — какая-либо первообразная функции $f(x)$ на Δ , то пишут

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (3)$$

C — произвольная постоянная.

2.1.3 Основные свойства интеграла

1. Если функция $F(x)$ дифференцируема на Δ , то

$$\begin{aligned} \int d F(x) &= F(x) \\ +C \text{ или } \int F'(x) dx &= F(x) + C \end{aligned} \quad (4)$$

2. Пусть функция $f(x)$ имеет первообразную на Δ . Тогда для любого $x \in \Delta$ имеет место равенство:

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x) \quad (5)$$

3. Если функции f_1, f_2 имеют первообразные на Δ , то функция $f_1 + f_2$ имеет первообразную на Δ , причем:

$$\int (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx \quad (6)$$

4. Если функция $f(x)$ имеет первообразную на Δ , $k \in \mathbb{R}$, то функция $kf(x)$ также имеет на Δ первообразную, и при $k \neq 0$:

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

$$\begin{aligned}
 dx &= \{k F(x) \\
 +C\}, k \int & f(x) \\
 dx &= k\{ F(x) \\
 +C\}
 \end{aligned}$$

Т.к. C – произвольная постоянная и $k \neq 0$, то множества $\{kF(x) + C\}$ и $k/\{F(x) + C\}$ совпадают.

2.1.4 След. 1 (Линейность интеграла)

Если f_1 и f_2 имеют первообразные на $[a, b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, то функция $\alpha f_1 + \beta f_2$ имеет первообразную на $[a, b]$, причем $\int (\alpha f_1(x) + \beta f_2(x))dx = \alpha \int f_1(x)dx + \beta \int f_2(x)dx$. (7) Доказательство вытекает из свойств 3 и 4.

- 2.2 Определенный интеграл Римана (определение). Ограниченность интегрируемых функций (с доказательством). Верхние и нижние суммы Дарбу (определения). Верхний и нижний интегралы Дарбу (определения). Критерий Дарбу. Интегрируемость непрерывных функций. Интегрируемость монотонных функций.
- 2.3 Свойства определенного интеграла (сформулировать все, доказать непрерывность интеграла по верхнему пределу). Интегральная теорема о среднем.
- 2.4 Теорема о дифференцировании интеграла по верхнему пределу (с доказательством). Теорема о существовании первообразной (с доказательством). Формула Ньютона-Лейбница (с доказательством). Формула замены переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям.
- 2.5 Определение несобственных интегралов. Формула Ньютона-Лейбница и формула замены переменной для несобственных интегралов.
- 2.6 Несобственные интегралы от неотрицательных функций (лемма и признак сравнения). Критерий Коши сходимости интеграла (с доказательством). Абсолютно сходящиеся интегралы (определение и теорема о сходимости абсолютно сходящегося интеграла).
- 2.7 Определение числового ряда. Необходимый признак сходимости ряда (с доказательством). Критерий Коши сходимости ряда (с доказательством). Ряды с неотрицательными членами (признак сравнения, интегральный признак Коши, радикальный признак Коши, признак Даламбера).
- 2.8 Знакопеременные ряды (признак Лейбница). Абсолютно сходящиеся ряды (определение). Критерий Коши абсолютной сходимости ряда. Условно сходящиеся ряды (определение). Теорема Римана.
- 2.9 Функциональные последовательности и ряды (определения, в том числе, ограниченная последовательность, сходящаяся последовательность, сходящийся ряд, абсолютно сходящийся ряд). Равномерная сходимость функциональной последовательности и функционального ряда (определение и пример). Критерии Коши равномерной сходимости функциональной последовательности (ряда). Признак Вейерштрасса.
- 2.10 Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы (с доказательством), интегрирование, дифференцирование).
- 2.11 Степенные ряды (определение). Первая теорема Абеля (с доказательством). Радиус и круг (интервал) сходимости