Тема 14. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса

Рассмотрим последовательность, членами которой являются комплекснозначные функции
$$f_n(x) \in \mathbb{C},\ n = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$
и ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),\ u_n(x) \in \mathbb{C},\ n = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$
При каждом фиксированном значении x последовательность (1) и ряд (2) представляют собой числовую последовательность и числовой ряд соответственно.

Пусть $X \subset \mathbb{C}$ и последовательность (1) определена на X.

Определение 1. Последовательность функций (1) называется *ограниченной (равномерно ограниченной)* на множестве X, если существует постоянная $M > 0$: $\forall\ x \in X,\ \ \forall\ n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства
$$|f_n(x)| \leq M.$$

Определение 2. Последовательность (1) называется *сходящейся* в точке $x_0 \in X$, если числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}$ сходится. Последовательность (1) называется *сходящейся на множестве* X, если она сходится в каждой точке множества X. Если $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, то говорят, что последовательность (1) сходится к функции $f(x),\ x \in X$.

Определение 3. Ряд (2) называется *сходящимся в точке* $x_0 \in X$, если сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$. Ряд (2) называют *сходящимся на множестве* X, если он сходится в каждой точке этого множества.

Определение 4. Ряд (2) называется *абсолютно сходящимся на множестве* X, если на множестве X, сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$.

Также как для числовых рядов определяются n*-я частичная сумма ряда* $s_n(x)$, n*-й остаток ряда* $r_n(x)$:

$s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x),\ n = 1, 2, \ldots;\ \ s(x) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(x),\ \ s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x);$

$r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ — n-й остаток, $s(x) = s_n(x) + r_n(x)$.

Замечание 1. Всякую теорему, доказанную для функциональных рядов, можно перефразировать в соответствующую теорему для функциональных последовательностей и наоборот.

Пример 1.

1) $1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots,\ z \in \mathbb{C}$.

Зафиксируем $z \in \mathbb{C}$. Исследуем ряд на абсолютную сходимость с помощью признака Даламбера: $u_n = \frac{|z^n|}{n!}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|z^{n+1}|}{(n+1)!}\frac{n!}{|z|^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0\ \ \forall\ z \in \mathbb{C}$.

Ряд сходится абсолютно, а значит, и просто сходится $\forall\ z \in \mathbb{C}$.

2) $x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \ldots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \ldots,\ x \in \mathbb{R}$.

Если $x \neq 0$, то ряд представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{1+x^2}$, $0 < q < 1$. Следовательно,

$$s(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{x^2}{\frac{1+x^2-1}{1+x^2}} = 1 + x^2.$$

Если $x = 0$, то $s(0) = 0$. Таким образом, $s(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1 + x^2, & x \neq 0. \end{cases}$

Сумма $s(x)$ — разрывная функция, несмотря на то, что все члены ряда есть непрерывные функции и ряд сходится $\forall\, x \in \mathbb{R}$ (см. Рис. 1).

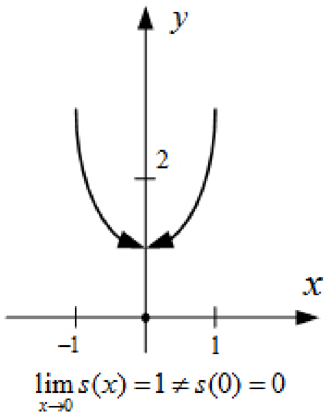

Рис. 1.

Таким образом, *предел суммы бесконечного числа слагаемых не обязательно равен сумме их пределов:*

$$\lim_{x\to x_0} s(x) \neq s(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \quad \text{или} \quad \lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} u_n(x).$$

Выясним условия, при которых можно гарантировать непрерывность суммы сходящегося ряда непрерывной функции.

Определение 5. Пусть заданы последовательность функций (1) и функция f, определенные на множестве X. Указанная последовательность $\{f_n(x)\}$ *сходится к функции* $f(x)$ *равномерно на множестве* X, если для любого $\varepsilon > 0$ существует n_0 : для любого $n > n_0$, для любого $x \in X$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Последовательность (1) называется *равномерно сходящейся на множестве* X, если существует функция $f(x)$, к которой она равномерно сходится на X (см. Рис. 2).

Если последовательность (1) равномерно сходится к функции $f(x)$ на множестве X $\left(f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)\right)$, то она просто сходится к $f(x)$ на множестве X $\left(f_n(x) \underset{X}{\to} f(x)\right)$.

$$f_n \underset{X}{\to} \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \; \forall x \in X \; \exists n_0 : \forall n > n_0 \;\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon; \qquad (*)$$

$$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} \overset{def}{\Leftrightarrow} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall x \in X \ \forall n > n_0 \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \qquad (**)$$

Из определения $(*)$ видно, что номер n_0 зависит не только от ε, но и от точки $x \in X$.

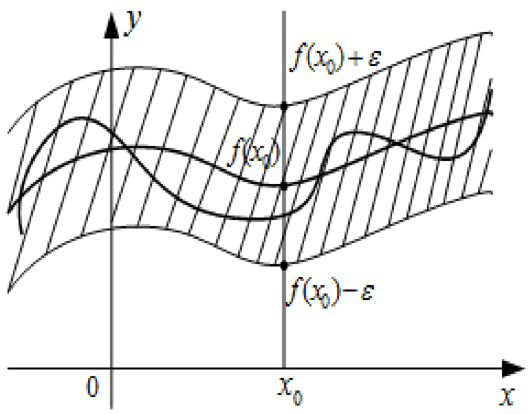

Рис. 2.

Пример 2.

1) $\{x^n\} \underset{[0,q]}{\rightrightarrows} 0, \ \ 0 < q < 1.$

Действительно, если $0 \le x \le q$, то $0 \le x^n \le q^n$, $n = 1, 2, \ldots$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, то $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \ \ n_0 : \ \forall n > n_0 \ \ q^n < \varepsilon \ \ \left(n > \log_q \varepsilon\right)$. Тогда $x^n \le q^n < \varepsilon \ \ \forall n > \left[\log_q \varepsilon\right]$, $\forall x \in [0, q]$.

2) $\{x^n\} \underset{[0,1)}{\to} 0$. Сходимость в этом случае не является равномерной.

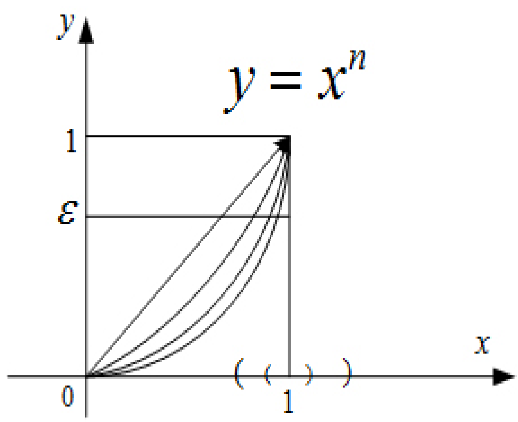

Рис. 3.

Имеем $\lim\limits_{x\to 1} x^n = 1$ для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует $x_\varepsilon : \ x_\varepsilon^n \ge \varepsilon$. Поэтому какое бы ни было n_0, для любого $n \ge n_0$ существует $x \in [0, 1) : \ |x^n - 0| \ge \varepsilon$.

3) $\{x^n\} \underset{[0,1]}{\to} f(x) = \begin{cases} 0, \ x \in [0,1), \\ 1, \ x = 1. \end{cases}$

Последовательность x^n не сходится равномерно на $[0,1)$. Следовательно, она не сходится равномерно на $[0,1]$.

Теорема 1 (Критерий Коши равномерной сходимости последовательности).

$$f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x) \ \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall x \in X, \ \forall n > n_0, \forall p \geq 0, p \in \mathbb{Z}$$

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \tag{3}$$

Доказательство необходимости. Пусть $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для него существует $n_0 : \ \forall \ n > n_0 \ \ \forall \ x \in X \ \ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\forall \ x \in X, \ \ \forall \ n > n_0$ $\forall \ p \geq 0$ имеем

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = |[f_{n+p}(x) - f(x)] + [f(x) - f_n(x)]| \leq$$

$$|f_{n+p}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, справедливо условие (3).

Доказательство достаточности. Пусть выполняется условие (3), тогда $\forall \ x \in X$ последовательность $\{f_n(x)\}$ удовлетворяет условию Коши сходимости числовых последовательностей. Обозначим предельную функцию $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), \ x \in X$.

Перейдем к пределу в неравенстве (3) при $p \to \infty : \ \forall \ n > n_0 \ \ \forall \ x \in X$ выполняется неравенство $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$. Следовательно, $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$. □

Определение 6. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x), \ \ x \in X,$ называется *равномерно сходящимся на множестве* X, если на X равномерно сходится последовательность его частичных сумм.

Теорема 2 (Необходимое условие равномерной сходимости ряда). Если ряд (2) равномерно сходится на множестве X, то $u_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0.$

Доказать самостоятельно.

Теорема 3 (Критерий Коши равномерной сходимости ряда). Ряд (2) равномерно сходится на множестве $X \ \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0 : \ \forall n > n_0 \ \ \forall x \in X \ \ \forall \ p \geq 0,$ $p \in \mathbb{Z},$ выполняется неравенство

$$|u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

Доказать самостоятельно.

Теорема 4 (Признак Вейерштрасса). Пусть дан функциональный ряд (2). Если числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n, \ \ \alpha_n \geq 0, \tag{4}$$

сходится и справедливо неравенство

$$|u_n(x)| \leq \alpha_n \tag{5}$$

для всех $x \in X$ и для всех n, начиная с некоторого номера, то ряд (2) абсолютно и равномерно сходится на множестве X.

Доказательство. Для всех $x \in X$ ряд (2) сходится абсолютно в силу признака сравнения. Это следует из неравенства (5) и сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$.

Докажем равномерную сходимость ряда (2). Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сходится, тогда существует $n_0 :\ \forall\, n > n_0\ \ \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \alpha_n < \varepsilon$. Следовательно, $\forall\, x \in X$ и $\forall\, n > n_0$

$$|r_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_n(x) \right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_n(x)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \varepsilon,$$

а значит, $r_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$. Отсюда имеем $s_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} s(x)$, где $s(x)$ — сумма ряда (2). $\square$