Матан. Подготовка к экзамену.

q

June 20, 2021

Contents

1 Даты

1.1 Консультация

2021-06-24 Thu

1.2 Экзамен

2021-06-25 Fri

2 Видосы

2.1 Интегралы

Интеграл: Азы интегрирования. Высшая математика

Определенный интеграл. Шпаргалка для первокурсника. Высшая математика

2.2 Ряды

Математический анализ, 35 урок, Числовые ряды

Математический анализ, 36 урок, Достаточные признаки сходимости

3 Термины

3.1 DONE Бесконечно малая

(также: бесконечно малая функция, бесконечно малая величина)

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$, т.е. для любого числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из $|xa| < \delta$ следует $|\alpha(x)| < \varepsilon$

3.2 DONE вертикальная асимптота

Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a0} f(x)$ равно $+\infty$ или ∞.

3.3 DONE возрастающая (убывающая) функция

Говорят, что функция f(x) возрастает (убывает) на (a,b), если для любый точек $x_1<x_2$ из (a,b) справедливо неравенство $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$)

3.4 DONE Второй замечательный предел

формула вида:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

или

$$\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = e$$

3.5 DONE Дифференциал

Если $y = f(x)$ - дифференцируемая функция, то главная линейная часть $A*\Delta x$ приращения функции f(x) называется дифференциалом функции и обозначается dy.

3.6 DONE Дифференцируемая функция

Функция $y = f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x.называтеся дифференцируемой в точке x, если ее приращение в этой точке

$$\Delta y = f(x+\Delta x)f(x)$$

имеет вид

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

, где $A = const$, а функция $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

3.7 DONE евклидово пространство

Совокупность всех точек n-мерного пространства, в котором расстояние определяется по формуле

$$\rho(x,y) = \sqrt{(x_1y_1)^2 + \ldots + (x_ny_n)^2}$$

, называется n-мерным евклидовым пространством и обозначается R^n.

3.8 DONE координатная ось

Множество точек $x = (x1,\ldots,xn) \in R^n$ таких, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_{i1} = x_{i+1} = \ldots = x_n = 0$, называется i-й координатной осью $(i = 1,\ldots,n)$ этого пространства. Точка $0 = (0,\ldots,0)$ называется началом координат.

3.9 DONE Критическая точка

Точка x_0 называется критической, если $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует.

3.10 DONE локальный максимум (минимум)

Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет (или достигает) в точке α локальный максимум (минимум), если найдется такая окрестность $U(\alpha)$ точки α, что для всех $x \in U(\alpha)$:

$$f(\alpha) \geq f(x)$$

$$(f(a) \leq f(x))$$

Локальный минимум и локальный максимум объединяют общим названием - локальный экстремум.

3.11 DONE наклонная асимптота

Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$ $(-\infty)$, если

$$f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \alpha(x) = 0$$

3.12 DONE Неопределенный интеграл

Неопределенным интегралом от данной функции f(x) называется множество всех его первообразных

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$$F'(x) = f(x)$$

.

3.13 DONE непрерывная функция

Функция называется непрерывной в точке x_0, если бесконечно малому приращению Δx аргумента x в точке x_0 соответствует бесконечно малое приращение функции Δy. т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) f(x_0)] = 0$$

3.14 DONE несобственный интеграл первого рода

Сходящимся несобственным интегралом первого рода $\int_a^\infty f(x)dx$ от функции $f(x)$ в интервале $[a, \infty)$ называется предел:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b ß \infty} \int_a^b f(x)dx$$

3.15 DONE неубывающая (невозрастающая) функция

Говорят, что функция $f(x)$ не убывает (не возрастает) на (a, b), если для любых точек $x_1 < x_2$ из (a, b) справедливо неравенство

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

$$(f(x_1) \geq f(x_2))$$

3.16 DONE неявная функция

Неявная функция - это функция $y(x)$ заданная некоторым уравнением $F(x, y) = 0$.

3.17 DONE окрестность точки

Пусть $x \in R^n$, $\varepsilon > 0$. Совокупность всех точек $y \in R^n$ таких, что $\rho(x, y) < \varepsilon$, называется n-мерным шаром с центром в точке X радиуса ε или ε-окрестностью:

$$U(x; \varepsilon) = \{y : y \in R^n, \rho(x, y) < \varepsilon\}$$

.

3.18 DONE Определенный интеграл

Определенным интегралом от функции f(x) на [a,b] называется предел интегральной суммы

$$\lim_{n \to \infty} \Sigma_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

, если он существует. Здесь $\xi_i \in [x_{i1}, x_i]$ и $a = x_0 < x_1 < \ldots x_n = b$.

Обозначение интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx$$

3.19 DONE Первообразная

Первообразной от функции $f(x)$ в данном интервале называется функция $F(x)$, производная которой равна данной функции:

$$F'(x) = f(x)$$

3.20 DONE Первый замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

3.21 DONE Предел функции

(на языке ε-δ) Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если существует такое число $\delta(\varepsilon)$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|xx_0| < \delta$ имеет место неравенство

$$|f(x)A| < \varepsilon$$

3.22 DONE производная функции

Производной функции $y = f(x)$ в данной фиксированной точке x называется предел

$$\lim_{\Delta x \text{ß} 0} \frac{f(x + \Delta x) f(x)}{\Delta x}$$

если этот предел существует.

3.23 DONE прямоугольная окрестность точки

Прямоугольной окрестностью точки $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ называется множество

$$P(x;_1, \dots,_n) = \{(y_1, \dots, y_n) : |x_i y_i| <_i, 1 \leq i \leq n\},_i > 0$$

3.24 DONE разрыв второго рода

Точка а называется точкой разрыва второго рода, если в этой точке функция $f(x)$ не имеет по крайней мере одного из односторонних пределов или хотя бы один из односторонних пределов бесконечен.

3.25 DONE разрыв первого рода

Точка а называется точкой разрыва первого рода, если в этой точке $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу правый и левые пределы

$$\lim_{x \to a+0} f(x) \neq \lim_{x \to a0} f(x)$$

3.26 DONE расстояние между точками

Расстояние между двумя точками $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ определяется по формуле:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 y_1)^2 + \ldots + (x_n y_n)^2}$$

3.27 DONE сложнопоказательная функция

Функция вида $y = u(x)^{v(x)}, (u(x) > 0)$, где и основание, и показатель степени зависят от x, называется сложнопоказательной.

3.28 DONE Стационарная точка

Точка x_0 называется стационарной для функции $f(x)$, если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = 0$.

3.29 DONE точка пространства

Точкой x n-мерного пространства называется упорядоченная совокупность n действительных чисел $(x_1, \ldots, x_n) = x$. Число x_i называется i-й координатой точки $x, i = 1, \ldots, n$.

3.30 DONE устранимый разрыв

Точка а называется точкой устранимого разрыва функции $y = f(x)$, если предел функции $f(x)$ в точке a существует, но в самой точке a значение $f(x)$ либо не существует, либо не равно пределу $f(x)$ в этой точке.

4 Темы

4.1 DONE Все билеты, рукописный вариант

all

4.2 DONE Билет 1

Первообразная и неопределенный интеграл (определения). Свойства интеграла. Таблица основных неопределенных интегралов. Формула замены переменной в неопределенном интеграле (с доказательством). Формула интегрирования по частям.

4.2.1 DONE Опр. 1.

Функция F называется первообразной функции f на промежутке Δ , если F дифференцируема на Δ и в каждой точке $x \in \Delta$

$$F'(x) = f(x) \tag{1}$$

Очевидно, что первообразная *F(x)* непрерывна на Δ.

4.2.2 DONE Опр. 2.

Пусть функция *f(x)* задана на промежутке Δ. Совокупность всех ее первообразных на этом промежутке называется ***неопределенным интегралом от функции*** **f** и обозначается

$$\int f(x)dx \tag{2}$$

Если *F(x)* — какая-либо первообразная функции *f(x)* на Δ, то пишут

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{3}$$

C — произвольная постоянная.

4.2.3 DONE Основные свойства интеграла

1. Если функция *F(x)* дифференцируема на Δ, то

$$\int dF(x) = F(x) + C \text{ или } \int F'(x)dx = F(x) + C \tag{4}$$

2. Пусть функция *f(x)* имеет первообразную на Δ. Тогда для любого $x \in \Delta$ имеет место равенство:

$$d\int f(x) = f(x)dx \tag{5}$$

3. Если функции *f1*, *f2* имеют первообразные на Δ, то функция *f1* + *f2* имеет первообразную на Δ, причем:

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx \tag{6}$$

4. Если функция *f(x)* имеет первообразную на Δ, $k \in$, то функция *kf(x)* также имеет на Δ первообразную, и при $k \neq 0$:

$$\int kf(x)dx = \{kF(x) + C\},\ k\int f(x)dx = k\{F(x) + C\}$$

   Т.к. C – произвольная постоянная и $k \neq 0$, то множества $kF(x) + C$ и $kF(x) + C$ совпадают.

4.2.4 DONE След. 1 (Линейность интеграла)

Если f$_1$ и f$_2$ имеют первообразные на Δ, λ_1, $\lambda_2 \in$, $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$, то функция $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ имеет первообразную на Δ, причем

$$\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))dx = \lambda_1 \int f_1(x)dx + \lambda_2 \int f_2(x))dx \tag{7}$$

Доказательство вытекает из свойств 3 и 4.

4.2.5 DONE Формула замены переменной

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(t)$ заданы соответственно на промежутках Δ_x и Δ_t, причем $\varphi(\Delta_t) = \Delta_x$, т.е. имеет смысл сложная функция $f(\varphi(t))$, $t \in \Delta_t$. Пусть, кроме того, функция $\varphi(t)$ дифференцируема и строго монотонна на Δ_t. Тогда у функции $\varphi(t)$ существует обратная однозначная функция $\varphi^{-1}(x)$, определенная на промежутке Δ_x.

1. **Теорема 1.** Существование на промежутке Δ_x интеграла

$$\int f(x)dx \tag{8}$$

и существование на промежутке Δ_t интеграла

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \tag{9}$$

равносильны, и имеет место формула

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \tag{10}$$

Формула (10) называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле: переменная x заменяется переменной t по формуле $x = \varphi(t)$.

2. **Доказательство.** Докажем, что существование первообразной у функции f(x) на Δ_x равносильно существованию первообразной у функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на Δ_t . Пусть у функции f(x) на Δ_x существует первообразная F(x), т.е.

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x),\, x \in \Delta_t \tag{11}$$

Имеет смысл сложная функция $F(\varphi(t))$, она является первообразной функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на Δ_t. Действительно,

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = \frac{dF(x)}{dx}\Big|_{x=\varphi(t)} * \frac{d\varphi(t)}{dt} = f(\varphi(t))\varphi'(t) \tag{12}$$

Обратно. Пусть функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ имеет первообразную Φ(t), тогда

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = f(\varphi(t))\varphi'(t) \tag{13}$$

Покажем, что $\Phi(\varphi^{-1}(x))$ является на Δ_x первообразной функции f(x). В самом деле,

$$\frac{d}{dt}\Phi(\varphi^{-1}(x)) = \frac{d\Phi(t)}{dt}\bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)} * \frac{d\varphi^{-1}(x)}{dx} = (f(\varphi(t))\varphi'(t))\bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)} * \frac{d\varphi^{-1}(x)}{dx} = f(x).$$

Итак, интегралы (8) и (9) одновременно существуют или нет. При этом

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{14}$$

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$$

а так как $F(\varphi(t))|_{t=\varphi^{-1}(x)} = F(x)$, имеет равенство (10).

4.2.6 DONE Формула интегрирования по частям

1. Теорема 2. Если функции $u(x)$, $v(x)$ дифференцируемы на некотором промежутке Δ и на этом промежутке существует $\int vdu$, то на нем существует интеграл $\int udv$, причем

   $$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x). \tag{15}$$

   Формула (15) называется ***формулой интегрирования по частям.***

2. Доказательство. Пусть $u(x)$, $v(x)$ — дифференцируемы на Δ, тогда

   $$d(u(x)v(x)) = v(x)du(x) + u(x)dv(x) \Rightarrow u(x)dv(x) = d(u(x)v(x)) - v(x)du(x).$$

   Проинтегрируем обе части полученного равенства:

   $$\int u(x)dv(x) = \int (d(u(x)v(x)) - v(x)du(x)) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

4.3 Билет 2

Определенный интеграл Римана (определение). Ограниченность интегрируемых функций (с доказательством). Верхние и нижние суммы Дарбу (определения). Верхний и нижний интегралы Дарбу (определения). Критерий Дарбу. Интегрируемость непрерывных функций. Интегрируемость монотонных функций.

4.4 DONE Билет 3

Свойства определенного интеграла (сформулировать все, доказать непрерывность интеграла по верхнему пределу). Интегральная теорема о среднем. 3

Свойства определенного интеграла:

1º.

$$\int_a^b dx = b - a$$

2º. Если функция f(x) интегрируема на [a, b], то она интегрируема на любом отрезке [a*, b*]⊂[a, b].

3º. Аддитивность интеграла.

Пусть функция f(x) интегрируема на [a, b] и a<c<b. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

4ºЛинейность интеграла.

Пусть функции f(x) и g(x) интегрируемы на [a, b] и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тогда ∃

$$\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

5º. Если функции f(x) и g(x) интегрируемы на [a, b], то их произведение f(x)*g(x) интегрируема на [a, b].

6º.Интегрирование неравенств.

Если f(x) интегрируема на [a, b] и f(x) ≥ 0 на [a, b] , то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

Следствие свойства 6 ◦ .

Если функции f(x), g(x) интегрируемы на [a, b] и f(x) ≥ g(x) ∀ x ∈ [a, b] , то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

7º. Если функция f(x) интегрируема на [a, b], то |f(x)| также интегрируема на [a, b] и

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,, a < b.$$

8º Непрерывность интеграла по верхнему пределу.

Если функция f интегрируема на [a, b] , то функции F(x) непрерывны на [a, b].

$$F(x) \coloneqq \int_a^x f(t)\,dt, G(x) := \int_x^b f(t)\,dt$$

Функция F(x) называется интегралом с переменным верхним пределом, а функция G(x) — интегралом с переменным нижним пределом.

Доказательство.

Пусть f(x) интегрируема на [a, b], тогда существует c > 0 : ∀ x ∈ [a, b] |f(x)| ≤ c , т.е. f(x) ограничена на [a, b].

Рассмотрим интеграл

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^x, f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \qquad (1)$$

Равенство (1) верно как при Δx ≥ 0 , так и при Δx < 0 , при условии x, x + Δx ∈ [a, b]. Приращение функции F(x) можно записать в виде:

$$\Delta F(x) = F(x+\Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

Проведем оценку:

$$|\Delta F(x)| = \left|\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt\right| \leq \int_{x}^{x+\Delta x} |f(t)|\,dt \leq C\left|\int_{x}^{x+\Delta x} dt\right| = C|\Delta x|$$

Тогда $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta F(x) = 0$, следовательно, F(x) непрерывна на [a, b].

Непрерывность функции G(x) следует из непрерывности F(x), т.к.

$$\int_{a}^{x} f(t)\,dt + \int_{x}^{b} f(t)\,dt = \int_{a}^{b} f(t)\,dt = const$$

Свойство непрерывности функции F(x) называют *непрерывностью интеграла* $\int_a^x f(t)\,dt$ *по верхнему пределу интегрирования*. Непрерывность G(x) — *непрерывность интеграла по нижнему пределу интегрирования.*

Следствие свойства 8 ◦

Если функция интегрируема на [a, b] , то $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,, 0 < \varepsilon < b-a$

Доказательство следствия.

Рассмотрим произвольную точку c ∈ (a, b). Применим свойство 8 ◦ к отрезкам [a, c] и [c, b]

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

$$= \int_{a}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

Интегральная теорема о среднем

<u>Теорема 1</u>. Пусть

1) f(x), g(x) интегрируемы на [a, b];

2) справедливо неравенство $m \leq f(x) \leq M$, $x \in [a, b]$;

3) функция g(x) не меняет знака на [a, b] . Тогда существует такое число μ , $m \leq \mu \leq M$, что

$$\int_{a}^{b} f(x)g(x)\,dx = \mu\int_{a}^{b} g(x)\,dx$$

4.5 DONE Билет 4

Теорема о дифференцировании интеграла по верхнему пределу (с доказательством). Теорема о существовании первообразной (с доказательством). Формула Ньютона-Лейбница (с доказательством). Формула замены переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям. 4

4. Теорема о дифференцировании интеграла по верхнему пределу (с доказательством). Теорема о существовании первообразной (с доказательством). Формула Ньютона-Лейбница (с доказательством). Формула замены переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям.

Теорема 1 Пусть функция f(x) интегрируема на отрезке [a, b] и непрерывна в точке $x_0 \epsilon [a, b]$. Тогда функция $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ дифференцируема в точке x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$

Доказательство:

Рассмотрим приращение функции $F(x)$ в точке x_0

$$F(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)\, dt$$

$$F(x_0 + \Delta x) = \int_a^{x_0+\Delta x} f(t)\, dt$$

$$\Delta F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\, dt\,, \quad x_0 \in [a, b]\,, \quad x_0 + \Delta x \in [a, b]$$

Докажем, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)$$

$$\left|\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\, dt - \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)\, dx\right| = \frac{1}{\Delta x}\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \big(f(t) - f(x_0)\big)\, dt\right| \le \frac{1}{|\Delta x|}\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t) - f(x_0)|\, dt\right| \qquad \textbf{(1)}$$

Функция f(x) непрерывна в точке x_0, следовательно, для любого ε > 0 существует δ = δ(ε) такое, что $\forall x$: $|x - x_0| < \delta$, $x \in [a, b]$выполняется неравенство

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Рассмотрим Δx такое, что $|\Delta x| < \delta$

Следовательно $|t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ **(2)**

Выберем Δx исходя из условия $\Delta x < \delta$. Тогда в силу непрерывности $f(t)$ в точке x_0 имеем $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$\left|\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| \le \frac{1}{|\Delta x|}\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \varepsilon\, dt\right| = \frac{1}{|\Delta x|} \cdot |\varepsilon| \cdot |\Delta x| = \varepsilon \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} f(x_0)$$

<u>Следовательно</u> $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} f(x_0)$

Замечание:

Функция $G(x)$ тоже дифференцируема в точке x_0, причем $G'(x_0) = -f(x_0)$

$$F(x) + G(x) = \int_a^b f(t)\,dt$$

$$G(x) = \int_a^b f(t)\,dt - F(x)$$

Теорема 2 Всякая непрерывная функция $f(t)$ на $[a, b]$ имеет первообразную. Функции вида $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, $\forall x_0 E[a, b]$ является первообразной функции $f(t)$

Доказательство:

Проверим, что функция $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ является первообразной функции $f(x)$. Если $x > x_0$, $x \in [a, b]$, то

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = -\frac{d}{dx}\int_{x}^{x_0} f(t)\,dt = -\big(-f(x)\big) = f(x)$$

Теорема 3 Формула Ньютона-Лейбница: Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то для любой её первообразной $\phi(x)$ справедлива формула $\int_a^b f(t)\,dt = \phi(b) - \phi(a)$

Доказательство:

Функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ одна из первообразных функции $f(x)$.

Тогда

$$\int_a^x f(t)\,dt = \phi(x) + c => \int_a^a f(t)\,dt = \phi(a) + c => c = -\phi(a)$$

Тогда

$$\int_a^b f(t)\,dt = \phi(b) - \phi(a)$$

<u>Формула замены переменной в определенном интеграле:</u>

Пусть φ: $[\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ непрерывно дифференцируема и строго монотонна, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то функция $f\big(\varphi(t)\big)$: $\varphi'(t)$ интегрируема на $[\alpha, \beta]$

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(J^3)} f(x)\, dx = \int_{\alpha}^{j^3} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\, dt$$

<u>Формула интегрирования по частям:</u>

Пусть функции $U(x)$, $V(x)$, $U'(x)$, $V'(x)$ непрерывны на $[a, b]$. Тогда справедлива формула: $U(x) \cdot V'(x)\, dx = U(x) \cdot V(x)|_a^b - \int_a^b V(x) \cdot U'(x)\, dx$

4.6 DONE Билет 5

Определение несобственных интегралов. Формула Ньютона-Лейбница и формула замены переменной для несобственных интегралов. 5

Билет №5

Определение несобственных интегралов. Формула Ньютона-Лейбница и формула замены переменной для несобственных интегралов.

Пусть функция f(x) определена на конечном или бесконечном полуинтервале [a, b), $-\infty < a < b \le +\infty$, и для любого $\eta \in [a, b)$ интегрируема по Риману на отрезке [a, η].

- Если существует конечный предел функции $F(\eta) = \int_{\alpha}^{\eta} f(x)\,dx$ при $\eta \to b - 0$, то этот предел называется несобственным интегралом функции f(x) на промежутке [a,b) :

  $$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\eta \to b} \int_a^{\eta} f(x)\,dx \qquad (1)$$

Если предел (1) существует, то говорят, что несобственный интеграл сходится, в противном случае — расходится. Если несобственный интеграл сходится, то говорят, что функция f(x) интегрируема в несобственном смысле на промежутке [a, b). Возможны два случая: b – конечное число, b = +∞

Если b – конечно и функция f интегрируема по Риману на [a, b], то по свойству непрерывности интеграла с переменным верхним пределом существует:

$$\lim_{\eta \to b} \int_a^{\eta} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Таким образом, определенный ранее интеграл Римана является частным случаем несобственного интеграла. Если b – конечно, то Определение (1) содержательно только если функция f не ограничена в любой окрестности точки b.

Геометрический смысл несобственного интеграла от неотрицательной функции f состоит в том, что он равен площади криволинейной трапеции.

- Если функция f определена на полуинтервале (a, b], $-\infty \le a < b < +\infty$ и для любой точки $\xi \in (a, b]$ интегрируема по Риману на отрезке [ξ, b], то несобственный интегралопределяется как предел:

  $$\int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \to \alpha} \int_{\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \qquad (2)$$

Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция f(x) определена на полуинтервале [a, b) и интегрируема по Риману на любом отрезке [a, η], $a \le \eta < b$.

- Если f непрерывна на полуинтервале [a, b) и F – какая-либо ее первообразная, то:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b-0) - F(a) \qquad (1)$$

В равенстве (1) либо обе части имеют смысл, и тогда они равны, либо они одновременно не имеют смысла, то есть стоящие в них пределы не существуют. С учетом определений :

$\int_\alpha^b f(x)\,d_{x=\lim_{\eta\to b} \int_\alpha^\eta f(x)\,dx}$; $F(b-0) - F(a) = \lim_{\eta\to b} F(\eta) - F(a)$

Замена переменной в несобственном интеграле.

- Если функция f(x) непрерывна на полуинтервале Δx = [a, b), функция u(t) непрерывно дифференцируема на полуинтервале Δt = [α, β), −∞ < α < β ≤ +∞,u(Δt) ⊂ Δx, a=u(a),$b = \lim_{t\to\beta} u(t)$, то:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(u(t))\,u'(t)\,dt \,(5)$$

причем из существования интеграла, стоящего слева в (5), следует существование интеграла, стоящего справа.

Замечание

Если функция u такова, что обратная функция u^ −1 однозначна и удовлетворяет условиям, аналогичным условиям, наложенным на u и, следовательно, в интеграле в правой части (5) можно сделать замену t = ^ −1 (x), то оба интеграла сходятся или расходятся одновременно.

Примеры:

1) $\int_\alpha^b \frac{dx}{(x-a)^p} = |t = x-a,\, x = t+a| = \int_0^{b-a} \frac{dt}{t^P}$ - — сходится при p < 1 и расходится при p ≥ 1.

2) $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \left|x = \frac{1}{t}\right| = \int_1^0 \frac{-\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin \vee_0^1 = \frac{\pi}{2}$

4.7 DONE Билет 6

Несобственные интегралы от неотрицательных функций (лемма и признак сравнения). Критерий Коши сходимости интеграла (с доказательством). Абсолютно сходящиеся интегралы (определение и теорема о сходимости абсолютно сходящегося интеграла). 6

6) Несобственные интегралы от неотрицательных функций (лемма и признак сравнения). Критерий Коши сходимости интеграла (с доказательством). Абсолютно сходящиеся интегралы (определение и теорема о сходимости абсолютно сходящегося интеграла)

Лемма 1. Пусть f(x) ≥ 0 на полуинтервале [a,b). Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда существует c > 0 такое, что для любого η ∈ [a,b) выполняется неравенство $\int_a^{\eta} f(x)dx \le c$.

Теорема 1. (Признак сравнения).

Пусть 0 ≤ g(x) ≤ f(x), x ∈ [a, b). Тогда:

1) Если Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ -сходится, то сходится и интеграл $\int_a^b g(x)dx$;

2) если Интеграл $\int_a^b g(x)dx$-расходится, то расходится и интеграл $\int_a^b f(x)dx$

Следствие 1.(Признак сравнения в предельной форме)

Пусть 0 ≤ g(x) и 0 ≤ f(x), для любого x ∈ [a, b) и существует (∃) конечный или бесконечный

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Тогда:

1) Если $0 \le k < +\infty$, то $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно;
2) Если $k=0 \to$ из сходимости $\int_a^b g(x)dx$ следует сходимость $\int_a^b f(x)dx$;
3) Если $k=+\infty$, тогда из расходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ следует расходимость;

Теорема 2.(*Критерий Коши)*

Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, тогда и только тогда, когда для любого(∀) ε > 0 существует(∃) η ∈ [a, b) , что для любых η', η'' , η< η'< η'' ,

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

Доказательство. По определению несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta\to\beta-0}\int_a^\eta f(x)dx = \lim_{\eta\to\beta-0}\varphi(\eta)$ по критерию Коши существование $\lim_{\eta\to\beta-0}\varphi(\eta)\exists\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\ a<\eta<b:\ \forall\ \eta', \eta''$,

$\eta<\eta'<\eta''$ выполняется неравенство $|\varphi(\eta')-\varphi(\eta'')|<\varepsilon$

$|\varphi(\eta')-\varphi(\eta'')| = \int_a^b f(x)dx - \int_a^{\eta'} f(x)dx = \int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx \Leftrightarrow \left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx\right| < \varepsilon.$

Абсолютно сходящиеся интегралы

Определение Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$.

Теорема 3. Если несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ абсолютно сходится, то он сходится.

Замечание !!!!

Утверждение обратное теореме 3 неверное, то есть из обычной сходимости не следует абсолютная сходимость.

Замечание!! Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ абсолютно сходится, а функция g(x) интегрируема по Риману на любом отрезке [a, η],$\forall\ \eta\epsilon(a,b)$ и ограничена на [a, b). Тогда $\int_a^b f(x)g(x)dx$ абсолютно сходится.

4.8 Билет 7

Определение числового ряда. Необходимый признак сходимости ряда (с доказательством). Критерий Коши сходимости ряда (с доказательством). Ряды с неотрицательными членами (признак сравнения, интегральный признак Коши, радикальный признак Коши, признак Даламбера).

4.9 DONE Билет 8

Знакопеременные ряды (признак Лейбница). Абсолютно сходящиеся ряды (определение). Критерий Коши абсолютной сходимости ряда. Условно сходящиеся ряды (определение). Теорема Римана. 8

Вопрос № 8. (Тема 13) Знакопеременные ряды (признак Лейбница). Абсолютно сходящиеся ряды (определение). Критерий Коши абсолютной сходимости ряда. Условно сходящиеся ряды (определение). Теорема Римана.

- *Теорема 1 (Признак Лейбница). Если последовательность $\{u_n\}$ убывает ($\{u_n\} \geq \{u_{n+1}\}$, n = 1, 2, . . .) и $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} u_n$ сходится, причем, если s — сумма ряда, а s_n — его частичная сумма, то для любых n = 1, 2, . . . выполняется неравенство $|s_n - s| \leq u_{n+1}$ (2)*

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} u_n$ знакочередующийся. Из условий $\{u_n\} \geq \{u_{n+1}\}$, $\lim_{n\to\infty} u_n$ следует, что $u_n \geq 0$.

- *Опр-е 1Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$*

- *Теорема 2 (Критерий Коши абсолютной сходимости ряда)*

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \; \exists \; N = N(\varepsilon): \forall \; n > N, \forall$ целого $p \geq 0$ $(\sum_{k=1}^{p} |u_{n+k}| < \varepsilon)$

Теорема 3 Если ряд абсолютно сходится, то он сходится. Данное утверждение следует из неравенства: $\left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}\right| \leq \sum_{k=1}^{p} |u_{n+k}|$

- *Опр-е 2 Сходящийся, но не абсолютно, ряд называется условно сходящимся.*

- *Теорема Римана. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ $u_n \in R$ сходится условно, то $\forall \; S \in R$ можно так переставить члены этого ряда, что сумма получившегося ряда будет равна S.*

Теорема Римана показывает, что свойства коммутативности сложения для конечных сумм не переносится на ряды. Если ряд сходится условно, то сумма зависит от порядка слагаемых.

4.10 Билет 9

Функциональные последовательности и ряды (определения, в том числе, ограниченная последовательность, сходящаяся последовательность, сходящийся ряд, абсолютно сходящийся ряд). Равномерная сходимость функциональной последовательности и функционального ряда (определение и пример). Критерии Коши равномерной сходимости функциональной последовательности (ряда). Признак Вейерштрасса.

4.11 DONE Билет 10

Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы (с доказательством), интегрирование, дифференцирование). 10

Вопрос №10. Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы (с док.), интегрирование, дифференцирование).

- Теорема 1 (Непрерывность суммы ряда). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, x∈X, у которого функции $u_n(x)$ непрерывны в точке x_0∈X. Если ряд сходится равномерно на X, то сумма ряда s(x)= $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывна в точке x_0.

  Док-во. Пусть $s_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$, n=1,2,… - частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.
  Зададим $\varepsilon > 0$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно, следовательно $s_n(x) \rightrightarrows s(x)$, т.е. $\exists n_0 : \forall\, n > n_0$, $\forall\, x \in X$ выполняется неравенство
  $$|s(x) - s_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$
  Для всех x ∈ $U_\delta(x_0)$∩X имеем
  $$|s(x) - s(x_0)| = |[s(x) - s_n(x)] + [s_n(x) - s_n(x_0)] + [s_n(x_0) - s(x_0)]| < \varepsilon$$
  что и означает непрерывность функции s(x) в точке x_0
  Замечание 1. В условиях теоремы 1 для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в точке $x_0 \in X$ возможен переход к пределу:
  $$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} u_n(x)$$
- Теорема 2 (Интегрирование ряда).

  C$[a; b]$- класс функций, непрерывных на отрезке $[a; b]$

  C$^1[a; b]$- класс функций, непрерывно дифференц. на $[a; b]$

Пусть даны ф-и $u_n(x) \in$ C$[a; b]$, n=1,2,… и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $[a; b]$. Тогда $\forall\, x_0 \in [a; b]$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{x_0}^{x} u_n(t)dt\right)$ сходится равномерно на $[a; b]$, причем
$$\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\right)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{x_0}^{x} u_n(t)dt\right)$$

- *Ряд непрерывных ф-ий в условиях теоремы 2 можно почленно интегрировать. Интеграл бесконечной суммы = сумме интегралов*
- *Функция f(x)называется непрерывной в точке, если: функция определена в точке и ее окрестности; существует конечный предел функции в точке; этот предел равен значению функции в этой точке.*

- Теорема 3 (Дифференцирование). Пусть дана последовательность ф-й $u_n(x) \in C^1[a; b]$, n=1,2,…, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ сходится равномерно на $[a; b]$. Тогда, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in [a; b]$, то
  $$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

Причем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на $[a; b]$.

Его сумма s(x)= $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ является непрерывно дифференцируемой функцией и $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$.

В условиях Т3 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ можно почленно дифференцировать.

4.12 Билет 11

Степенные ряды (определение). Первая теорема Абеля (с доказательством). Радиус и круг (интервал) сходимости степенного ряда (определения). Понятие аналитической функции (определение). Теорема о представлении аналитической функции рядом Тейлора.

4.13 Билет 12

Определение n-мерного арифметического евклидова пространства. Определение n-мерного открытого шара. Предел последовательности в n-мерном пространстве, ограниченное множество в n-мерном пространстве, окрестность бесконечно удалённой точки (определения).

4.14 Билет 13

Внутренняя точка множества, открытое множество, точка прикосновения множества, предельная точка множества, замыкание множества, замкнутое множество, компактное множество, линейно связное множество, выпуклое множество, область (определения).