1. ~~Пр~~ Первообразная и неопределенный интеграл (опр.)

Свойства интеграла. Таблица основных неопр. интегралов. Формула замены переменной в неопределенном интеграле (с док-вом). Формула интегр. по частям.

Функция F называется первообразной ф-ии f на промежутке Δ, если F дифференцир. на Δ и в каждой точке $x \in \Delta$

Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке Δ. Совокупность всех ее первообразных на этом промежутке называется неопределенным интегралом от ф-и f.

Свойства интеграла.

1) Если ф-я $F(x)$ дифференц. на Δ, то

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

2) Пусть ф-я $F(x)$ имеет первообразную на Δ. Тогда для любого $x \in \Delta$ имеет место равенство

$$d\int f(x)dx = F(x)dx$$

3) Если ф-ии f_1, f_2 имеют первообразные на Δ, то $f_1 + f_2$ имеет первообразную на Δ, причем:

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

4) Если ф-я $f(x)$ имеет первообразную на Δ, $k \in \mathbb{R}$, то ф-я $k\,f(x)$ также имеет на Δ первообразную, и при $k \neq 0$:

$$\int kf(x)dx = \{kF(x) + C\}, \quad k\int f(x)dx = k\{F(x) + C\}$$

Сл-е 1. (Линейность интеграла) Если f_1 и f_2 имеют первообразные на Δ, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1^2+\lambda_2^2>0$, то ф-я $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ имеет первообразную на Δ, причем

$$\int(\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x))\,dx=\lambda_1\int f_1(x)\,dx+\lambda_2\int f_2(x)\,dx$$

(Док-во вытекает и 3), 4))

Формула замены переменной в неопределенном интеграле

Пусть ф-ии $f(x)$ и $\varphi(t)$ заданы соотв. на промеж. Δ_x и Δ_t, причем $\varphi(\Delta_t)=\Delta_x$, т.е. имеет смысл сложная ф-я $f(\varphi(t))$, $t\in\Delta_t$. Пусть, кроме того, ф-я $\varphi(t)$ дифференц. и строго монотонна на Δ_t. Тогда у ф-ии $\varphi(t)$ сущ. обратная однозн. ф-я $\varphi^{-1}(x)$, опр. на промеж. Δx.

Т. 1

Сущ.-ие на промеж. Δ_x интеграла

$$\int f(x)\,dx \qquad (1)$$

и сущ. на промеж. Δ_t интеграла

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \qquad (2)$$

равносильны, и имеет место формула

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

$$x=\varphi(t)$$

$$dx=\varphi'(t)\,dt$$

Д)

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x),\quad x\in\Delta x$$

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t))=\frac{dF(x)}{dx}\Big|_{x=\varphi(t)}\times\frac{d\varphi(t)}{dt}=f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Обратно:

$$\frac{d\Phi(t)}{dt}=f(\varphi(t))\varphi'(t)\qquad \frac{d}{dx}\Phi(\varphi^{-1}(x))=\frac{d\Phi(t)}{dt}\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}\frac{d\varphi^{-1}(x)}{dx}=$$

$$= \left(F(\varphi(t))\varphi'(t)\right)'\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \times \frac{d\,\varphi^{-1}(x)}{dx} = f(x)$$

интегралы (1), (2) одновременно сущ. или нет. При этом

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C.$$

а т. к. $F(\varphi(t))\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} = F(x)$, то ■

Формула интегрирования по частям.

Т. 2 Если ф-ии $u(x), v(x)$ дифференц. на некотором промежутке Δ и на этом промежутке сущ. $\int u\,du$, то на нем сущ. интеграл $\int u\,dv$ причем:

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$

Д) Пусть $u(x), v(x)$ – дифференц. на Δ, тогда

$d(u(x)v(x)) = v(x)du(x) + u(x)dv(x) \Rightarrow u(x)dv(x) = d(u(x)v(x)) - v(x)du(x)$

$$\int u(x)dv(x) = \int \left(d(u(x)v(x)) - v(x)du(x)\right) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$ ■

2. Определенный интеграл Римана (определение). Ограниченность интегрируемых ф-ций (с док-вом). Верхние и нижние суммы Дарбу (опр.). Верхний и нижний интеграл Дарбу (опр.). Критерий ~~Коши~~ Дарбу (с док-вом). Интегрируемость непрерывных ф-ций. Интегрируемость монотонных ф-ций.

Опр. 1 Мн-во точек $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ отр. $[a, b] \subset \mathbb{R}$ таких, что

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k_\tau} = b$ называют разбиением τ отр. $[a, b]$. Точки x_k — точки разбиения τ, отр. $[x_{k-1}, x_k]$ — ~~отр~~ отрезки разбиения τ, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ — их длины. $|\tau| = \max\{\Delta x_1, \ldots, \Delta x_{k_\tau}\}$ называют диаметром разбиения.

1) если $\tau < \tau'$, $\tau' < \tau''$, то $\tau < \tau''$

2) $\forall\ \tau', \tau''\ \exists\ \tau : \tau < \tau', \tau < \tau''$

Опр. 2 Ф-я f назыв. интегрируемой по Риману на отр. $[a, b]$, если существует число I такое, что для любой пос-ти разбиений $\tau_n = \{x_k^n\}_{k=0}^{k=k_{\tau_n}}$, $n \in \mathbb{N}$ отрезка $[a, b]$ диаметры которых стремятся к нулю при $n \to \infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} |\tau_n| = 0$) и для любого набора точек

$$\xi_k^n \in [x_{k-1}^n, x_k^n],\ k = 1, 2 \ldots, k_{\tau_n},\ n \in \mathbb{N}$$

существует предел интег. сумм

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{\tau_n}(f, \xi_1^n \ldots \xi_{k_{\tau_n}}^n) = I$$

$$\sigma_\tau = \sigma_\tau(f, \xi_1 \ldots \xi_{k_\tau}) = \sum_{k=1}^{k_\tau} f(\xi_k)\Delta x_k,\ \xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$$

Число I называют интегралом Римана от ф-и f на отр. $[a, b]$ и обознач. $\int_a^b f(x)dx$.

Опр. 2' Число I назыв. интегралом Римана от ф-ии f на отр. $[a, b]$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $\forall$ $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ отр. $[a, b]$ диаметр которого $|\tau| < \delta$, для любого набора точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, k_\tau$, выпол. нер-во

$$|\sigma_\tau(f, \xi_1, \dots, \xi_{k_\tau}) - I| < \varepsilon$$

Опр. 2 и 2' эквивалентны.

Ограниченность интегрируемых ф-ий.

Т.1 Если ф-я интегр. на некотором отр., то она ограничена на нем.

Д) Пусть $f(x)$ интегр. на $[a, b]$ и $\int_a^b f(x)\,dx = I$.

Зафиксир. $\varepsilon = 1$. По опр. 2' $\exists \delta > 0$: для любого разбиения τ $(|\tau| < \delta)$ выполняется нер-во

$$|\sigma_\tau - I| < 1 \Rightarrow -1 < \sigma_\tau - I < 1 \Leftrightarrow I - 1 < \sigma_\tau < I + 1$$

Следовательно мн-во знач. интегр. сумм σ_τ $(|\tau| < \delta)$ ф-ии $f(x)$ ограничено

Пусть сущ. $f(x)$ интегр. на $[a, b]$, но неогр. на этом отр. Рассмотрим произвольное разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ отр. $[a, b]$

Пусть $F(x)$ огран. на $[x_0, x_1]$, тогда $\forall n \in N$ сущ. точка $\xi_1^n \in [x_0, x_1]$: $|f(\xi_1^n)| > n$, откуда сл., что $\lim\limits_{n \to \infty} f(\xi_1^n) = \infty$

Зафиксируем точки ξ_k в ост. отр. разбиения $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 2, \dots, k_\tau$. Тогда

$$\sigma_\tau(f, \xi_1^n, \xi_2, \dots, \xi_{k_\tau}) = f(\xi_1^n)\Delta x_1 + \sum_{k=2}^{k} f(\xi_k)\Delta x_k \to \infty, n \to \infty$$

сл. мн-во знач. интег. сумм неогр. Противоречие ■

Условие огран. ф-ии явл. необх. усл. инт. по Риману, но не явл. дост.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in I \end{cases}$$ – ф-я Дирихле

Верхние и нижние суммы Дарбу

$M_k = \sup\limits_{x \in \Delta_k} f(x)$, $m_k = \inf\limits_{x \in \Delta_k} f(x)$, $k = 1, \ldots, k_\tau$

$S_\tau = \sum\limits_{k=1}^{k_\tau} M_k \Delta x_k$, $s_\tau = \sum\limits_{k=1}^{k_\tau} m_k \Delta x_k$

Сумма S_τ называется верхней суммой Дарбу, s_τ – нижней суммой Дарбу.

$m_k \le M_k \Rightarrow \forall \tau \; s_\tau \le S_\tau$

$\forall (\cdot) \; \xi_k \in \Delta_k \quad m_k \le f(\xi_k) \le M_k \Rightarrow s_\tau \le \sigma_\tau \le S_\tau$

Свойства сумм Дарбу:

1) $s_{\tau_1} \le S_{\tau_2}$

2) Для фиксированного разбиения $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ отр. $[a, b]$ справедливы соотношения:

$$s_\tau = \inf_{\xi_1 \ldots, \xi_{k_\tau}} \sigma_\tau(f, \xi_1 \ldots, \xi_{k_\tau})$$

$$S_\tau = \sup_{\xi_1 \ldots \xi_{k_\tau}} \sigma_\tau(f, \xi_1 \ldots \xi_{k_\tau})$$

Нижний и верхний интеграл

$I_* = \sup\limits_\tau s_\tau \qquad I^* = \inf\limits_\tau S_\tau$

Если ф. f огр. на $[a, b]$ то I_*, I^* – конечны и $I_* \le I^*$

Критерий Дарбу

Т. 2 (Критерий Дарбу). Ограниченная на некотором отрезке функция интегрируема на нем <=> суммы Дарбу этой ф-ции удовлетв. условию:

$$\lim_{|\tau|\to 0}(S_\tau - s_\tau) = 0 \quad (2)$$

Д) необх. Пусть ф-я $f(x)$, огран. на нек. отр. $[a, b]$ интег. на нем и

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

тогда $\lim_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau = I$. Поэтому $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ такое что $\forall\ \tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ отр. $[a, b]$ $(|\tau|<\delta)$, $\forall\ \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $k = 1, 2, \dots, k_\tau$ выпол. нер-во

$$|\sigma_\tau - I| < \varepsilon <=> I - \varepsilon < \sigma_\tau < I + \varepsilon$$

В силу св-ва 2)

$$I - \varepsilon \le s_\tau \le S_\tau \le I + \varepsilon => 0 \le S_\tau - s_\tau \le 2\varepsilon$$

При усл-ии $|\tau| < \delta => \lim_{|\tau|\to 0}(S_\tau - s_\tau) = 0$

Д) дост. Пусть ф-я $f(x)$ огранич. на $[a, b]$ и для ее сумм Дарбу выпол. усл. (2). Из опр. нижнего и верхнего интегралов Дарбу следует:

$$s_\tau \le I_* \le I^* \le S_\tau \quad (4)$$

Поэтому $0 \le I^* - I_* \le S_\tau - s_\tau$. В силу (2) имеем $I^* = I_*$. $I = I_* = I^*$ из (4) следует

$$s_\tau \le I \le S_\tau => 0 \le I - s_\tau \le S_\tau - s_\tau$$

следовательно, применяя (2), получим. $\lim s_\tau = I$

Кроме того, $0 \le S_\tau - I \le S_\tau - s_\tau$. Используя (2), получим.

$$\lim_{|\tau|\to 0} S_\tau = I$$

Т.к. $\forall\ \tau$, $\forall\ \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1 \dots k_\tau$. $s_\tau \le \sigma_\tau \le S_\tau$

Интегрируемость монотонной ф-ии.

<u>Т 4</u> Ф-я, монотонная на отрезке, ~~интегр~~ интегрируема на нём

<u>Замечание 2</u> Могут быть разрывные инт. ф-ии.
Например, $y = \operatorname{sign} x$ монотонна и разрывна на любом отрезке, содержащем точку $x = 0$.

3. Свойства определенного интеграла (сформулировать все, док-ть непрерывность интеграла по верхнему пределу). Интегральная теорема о среднем.

Свойства определенного интеграла.

1.) $\int_a^b dx = b - a$

2). Если ф-я интегрируема на $[a, b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[a^*, b^*] \subset [a, b]$

3) Аддитивность интеграла

Если ф-я f интегрируема на $[a, b]$ и $a < c < b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4) Линейность интеграла

Если ф-ии f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то $\forall\ \lambda, \mu \in R$ ф-я $\lambda f + \mu g$ интегрируема на $[a, b]$ и

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx$$

5) Если ~~ф~~ ф-ии f и g интегрируемы на $[a,b]$, то их произведение fg интегрируемо на $[a,b]$.

6) Интегрирование неравенств.

Если f интегрируема на $[a,b]$ и $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Сл-е Если ф-ии $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$ и $f(x) \geq g(x)$, $x \in [a,b]$ то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

7) Если ф-я f интегрируема на $[a,b]$, то $|f|$ также интегрируема на $[a,b]$ и

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx, \quad a<b$$

8) Непрерывность интеграла по верхнему пределу.

Если ф-я f интегрируема на $[a,b]$, то ф-ии

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt, \quad G(x) := \int_x^b f(t)dt$$ непрерывные на $[a,b]$

$F(x)$ - интеграл с переменным верхним пределом

$G(x)$ - интеграл с переменным нижним пределом.

Д) Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, тогда $\exists\ c>0$:
$\forall\ x \in [a,b]$ $|f(x)| \leq c$, т.е. $f(x)$ ограничена на $[a,b]$

Рассм. интеграл

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \qquad (1)$$

Равенство (1) верно при $\Delta x > 0$, $\Delta x < 0$, при усл-вии $x, x+\Delta x \in [a, b]$.

Приращение ф-ии $F(x)$

$$\Delta F(x) = F(x+\Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

$$|\Delta F(x)| = \left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\right| \le \left|\int_x^{x+\Delta x} |f(t)|\,dt\right| \le C\left|\int_x^{x+\Delta x} dt\right| = C|\Delta x|.$$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta F(x) = 0 \Rightarrow F(x)$ непрерывная на $[a, b]$

Из ~~непрерывности $F(x)$ вытекает непрерыв. $G(x)$~~

$$\cancel{\underbrace{\int_a^x f(t)\,dt}_{F(x)} + \underbrace{\int_x^b f(t)\,dt}_{G(x)} = \int_a^b f(t)\,dt = const}$$

~~Свойство~~

Свойство непрерыв. $F(x)$ называют непрерыв. интеграла по верхнему пределу.

Сл-е Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx, \quad 0 < \varepsilon < b - a$$

Интегральная теорема о среднем.

Т1 Пусть

1) $f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$;
2) справедливо нер-во
$$m \le f(x) \le M \quad x \in [a, b]$$
3) $g(x)$ не меняет знака на $[a, b]$. Тогда $\exists$ число μ, $m \le \mu \le M$, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$$

4. Теорема о дифференцировании интеграла по верхнему пределу (с док-вом). Теорема о существовании первообразной (с док-вом). Формула Ньютона-Лейбница (с док-вом). Формула замены переменной в опр. интеграле. Формула интегрирования по частям.

Теорема о дифференцировании интеграла по верхнему пределу.

Т.1 Если ф-я f интегрируема на $[a,b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a,b]$, то ф-я

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

дифференцируема в этой точке и

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

Д) Рассм. приращение ф-ии $F(x)$ в точке x_0:

$$\Delta F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt, \quad x_0 \in [a,b], \quad x_0 + \Delta x \in [a,b].$$

Заметим, что

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt = 1.$$

Покажем, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0).$$

Имеем

$$\left|\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \frac{f(x_0)}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}(f(t)-f(x_0))dt\right| \le$$

$$\le \frac{1}{|\Delta x|}\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}|f(t)-f(x_0)|dt\right|$$

Ф.-я $f(x)$ непрерывна в (·) x_0 => $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta(\varepsilon)$:
$\forall\ x: |x-x_0|<\delta$ $x\in[a,b]$ выпол. нер-во

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Рассм. Δx : $|\Delta x|<\delta$ => $\forall\ t\in[x_0, x_0+\Delta x]$ имеем.

$$|t-x_0|\le|\Delta x|<\delta \Rightarrow |f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x}-f(x_0)\right|\le\frac{1}{|\Delta x|}\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}|f(t)-f(x_0)|dt\right|\le\frac{\varepsilon}{|\Delta x|}\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}dt\right|=\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x}=f(x_0) \quad \boxtimes$$

Замечание 1. Ф-я $G(x)=\int_a^b f(t)dt$ имеет произв. в (·) x_0 и

$G'(x_0)=-f(x_0)$

Замечание 2. Если f непрерывна на $[a,b]$, то $\forall$ (·) $x\in[a,b]$

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt\ \cancel{*},\quad \frac{d}{dx}\int_x^b f(t)dt=-f(x)$$

Теорема о существовании первообразной.

Т.2 Если f непрерывна на $[a,b]$, то на $[a,b]$ $f(x)$ имеет первообразную. Если $x_0\in[a,b]$, то ф-я

$$F(x)=\int_{x_0}^x f(t)dt,\ x\in[a,b] \quad (3)$$

явл. одной из первообразных ф-ции $f(x)$ на $[a,b]$.

Д) Проверим, что ф-я (3) явл. первообразной ф-ии $f(x)$. Если $x > x_0$, $x \in [a, b]$ то рав-во $F'(x) = f(x)$ следует из П. 1. Если $x < x_0$, $x \in [a, b]$ то

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = -\frac{d}{dx}\int_{x}^{x_0} f(t)\,dt = -(-f(x)) = f(x)$$

Замечание 3 любые две первообразные отличаются на постоянную, поэтому

$$\int f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + C, \quad x_0, x \in [a, b]$$

Формула Ньютона-Лейбница

П. 3 Если f непрерывна на $[a, b]$, то для любой ее первообразной $\Phi(x)$ справедлива формула

$$\int_a^b f(t)\,dt = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Д) По П. 2 функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ явл. первообразной функции f на $[a, b]$. Если $\Phi(x)$ - какая-либо первообразная ф-ии $f(x)$ на $[a, b]$, то

$$\int_a^x f(t)\,dt = \Phi(x) + C.$$

При $x = a$ $\int_a^a f(t)\,dt = \Phi(a) + C = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow C = -\Phi(a)$

$$\int_a^x f(t)\,dt = \Phi(x) - \Phi(a) \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Формула замены переменной в определенном интеграле

Пусть ф-я $f(x)$ задана на Δ_x, а $\varphi(t)$ задана на Δ_t, $\varphi(\Delta_t) \subset \Delta_x$. Тогда $F\varphi = f(\varphi(t))$

__Т. 4__ Если $f(x)$ непрерывна на Δx, $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ непрерывна на Δt, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

где $\alpha \in \Delta_t$, $\beta \in \Delta t$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$

Д). Пусть $F(x)$ - какая-либо первообразная для $f(x)$ на Δx, тогда $F(\varphi(t))$ - первообразная для ф-ии $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на Δt, т.к.

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

По Т. 3

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Формула интегрирования по частям

__Т. 5__ Если $u(x)$, $v(x)$, $u'(x)$, $v'(x)$ непрерывны на $[a, b]$, то справедлива формула интегрирования по частям.

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

D) Рассм. интеграл по отрезку $[a, b]$ от производной произведения ф-ий u и v:

$$\int_a^b (uv)'dx = \int_a^b (uv' + vu')dx = \int_a^b u\,dv + \int_a^b v\,du$$

$$\int_a^b (uv)'dx = uv\Big|_a^b \Rightarrow \int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du \quad \blacksquare$$

5. Определение несобственных интегралов. Формула Ньютона-Лейбница и формула замены переменной для несобственных интегралов.

Если существует конечный предел ф-ии $F(\eta) = \int_a^\eta f(x)dx$ при $\eta \to b-0$, то этот предел называется несобственным интегралом ф-ии $f(x)$ на промежутке $[a, b)$:

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\eta \to b-0} \int_a^\eta f(x)dx \qquad (1)$$

Если предел (1) существует, то несобственный интеграл сходится, в противном случае - расходится.

Формула Ньютона-Лейбница

Если f непрерывна на полуинтервале $[a, b)$ и F - какая-либо ее первообразная, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(a) \qquad (1)$$

В равенстве (1) либо обе части имеют смысл, и тогда они равны, либо они одновременно не имеют смысла, то есть стоящие в них пределы не существуют.

Формула замены переменной.

Если ф-я $f(x)$ непрерывна на $\Delta_x = [a, b)$, ф-я $\varphi(t)$ непрерывно дифференц. на $\Delta_t = [\alpha, \beta)$ $-\infty < \alpha < \beta \le +\infty$, $\varphi(\Delta_t) \subset \Delta_x$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \lim\limits_{t \to \beta} \varphi(t)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \quad (5)$$

Причем из интеграла, стоящего слева, в (5) следует существование интеграла справа.

6. Несобственные интегралы от неотрицательных ф-ций (лемма и признак сравнения). Критерий Коши сходимости интеграла (с док-вом). Абсолютно сходящиеся интегралы (определение и теорема о сх-ти абсолютно сход. интеграла)

Лемма 1. Пусть $f(x) \ge 0$ на полуинтервале $[a, b)$. Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда $\exists c > 0$: $\forall \eta \in [a, b)$ выполняется нер-во

$$\varphi(\eta) = \int_a^\eta f(x)dx \le c$$

Замечание 1. Если $\varphi(\eta)$ неограничена на $[a, b)$, то

$$\lim_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x)dx = \lim_{\eta \to b} \varphi(\eta) = +\infty \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = +\infty$$

Т.1 (Признак сравнения)

Пусть $0 \le g(x) \le f(x)$, $x \in [a, b)$. Тогда:

1) если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^b g(x)dx$.

2) если интеграл $\int_a^b g(x)dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int_a^b \cancel{g(x)} f(x)dx$.

Сл-е 1 Пусть $f(x), g(x) \ge 0$ на $[a, b)$, $g(x) \ne 0$ для любого $x \in [a, b)$ и существует конечный или бесконечный

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = k$$

Тогда:

1) если $\int_a^b g(x)dx$ сходится и $0 \le k < +\infty$, то $\int_a^b f(x)dx$ сходится.

2) если $\int_a^b g(x)dx$ расходится и $0 < k \le +\infty$, то $\int_a^b f(x)dx$ расход.

Критерий Коши сходимости интеграла.

Т.2 Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, $-\infty < a < b \le +\infty$, сходится тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta$: $\forall \eta', \eta'' \in (\eta, b)$ выполняется нер-во

$$\left| \int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

Д) По определению несобственного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\eta \to b} \int_a^{\eta} f(x)dx = \lim_{\eta \to b} \varphi(\eta)$$

Следовательно, сходимость интеграла будет означать существование конечного предела ф-ции $\varphi(\eta)$ при $\eta \to b$. По критерию Коши для предела ф-ии:

$\lim_{\eta \to b} \varphi(\eta)$ существует $\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta, \forall \eta', \eta'' \in (\eta, b)$:

$|\varphi(\eta') - \varphi(\eta'')| < \varepsilon$.

$$|\varphi(\eta'') - \varphi(\eta')| = \left| \int_a^{\eta''} f(x)dx - \int_a^{\eta'} f(x)dx \right| = \left| \int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

Опр. 1 Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$

Т. 3 Если несобственный интеграл абсолютно сходится, то он сходится.

Замечание 3 Т. 3. утверждает, что если ф-я абсолютно интегрируема, то она просто интегрируема в несобственном смысле.

Замечание 4. Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ абсолютно сходится, а ф-я $g(x)$ интегрируема по Риману на любом отр. $[a, \eta] \subset [a, b)$ и $|g(x)| \le c$ на $[a, b)$, то интеграл $\int_a^b f(x)g(x)dx$ абсолютно сходится.

7. Определение числового ряда. Необходимый признак сходимости ряда (с док-вом). Критерий Коши сходимости ряда (с док-вом). Ряды с неотрицательными членами (признак сравнения, интегральный признак Коши, радикальный признак Коши, признак Даламбера).

Опр. 1 Пара последовательностей $\{u_n\}$ и $\{S_n\}$, $u_n, S_n \in \mathbb{C}$, $n=1,2\dots$, где

$$S_n = u_1 + \dots + u_n,\ n = 1, 2, \dots$$

называется рядом или бесконечной суммой и обозначается. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + \dots u_n + \dots$

Элементы пос-ти u_n называются элементами ряда, а элементы пос-ти S_n — его частичными суммами.

$S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ — сумма ряда.

Если S конечное число, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$ называют сходящимся.

Необходимый признак сходимости ряда.

Т.1 Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

Д). Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ — сходится. Следовательно существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Из равенства $u_n = S_n - S_{n-1}$, $n = 2, 3 \dots$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0 \ \blacksquare$$

Критерий Коши.

Т.4 Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0: \forall n > n_0\ \forall p \geq 0, p \in \mathbb{Z}$

$$|u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

Д). Рассм. посл-ть частичных сумм $S_n = u_1 + \ldots + u_n$

По критерию Коши для посл-ти $\{S_n\}$ имеем:

$\{S_n\}$ - сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0: \forall n > n_0\ \forall p \geq 0\ p \in \mathbb{Z}$

$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$, т.е. $|u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon$

Ряды с неотрицательными членами.

Т.5 (Признак сравнения).

Пусть даны два ряда $\sum u_n$, $\sum v_n$, $0 \leq u_n \leq v_n\ \forall n = 1, 2 \ldots$ тогда:

1) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится
2) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расход.

Сл-е 1.

Пусть $u_n \geq 0$, $v_n > 0$, $n = 1, 2 \ldots$, ~~тогда~~

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = L.$$

тогда:

1) если $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится и $0 \leq L < +\infty$, то сходится $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.
2) если $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится и $0 < L \leq +\infty$, то расход. $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.
3) если $\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ведут себя одинаково

Т.6 (интегральный признак Коши)

Если $f(x) \geq 0$ и убывает при $x \geq 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$.

Т.7 (радикальный признак Коши).

Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \geq 0$ существует предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = L$ тогда, если $L<1$, то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, а если $L>1$, то расходится.

Т.8 (признак Даламбера)

Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$, $n=1,2,\ldots$ существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$. Тогда если $L<1$, то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, а если $L>1$, то расходится

8. Знакопеременные ряды (признак Лейбница). Абсолютно сходящиеся ряды (опр.). Критерий Коши абсолютной сходимости ряда. Условно сходящиеся ряды (опр.). Теорема Римана.

Т.1 (признак Лейбница)

Если пос-ть $\{u_n\}$ убывает ($u_n \geq u_{n+1}$, $n=1,2,\ldots$) и $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд (1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ сходится причем, если S - сумма ряда (1), а S_n - его частичная сумма, то для любых $n=1,2,\ldots$ выполняется нер-во

$$|S_n - S| \leq u_{n+1}$$

Замечание 1 Ряд (1) знакочередующийся. Из условий $u_n \geq u_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ следует, что $u_n \geq 0$.

Опр. 1 Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \in \mathbb{C}$, называется абсолютно сходящимся, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится.

Т. 2 (Критерий Коши абсолютной сходимости ряда)

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ абсолютно сходится тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \forall n > n_0\ \forall p \geq 0\ p \in \mathbb{Z}$ выполняется нер-во $\sum\limits_{k=1}^{p} |u_{n+k}| < \varepsilon$

Условно сходящиеся ряды.

Опр. 2 Сходящийся, но не абсолютно сходящийся ряд, называется условно сходящимся рядом.

Т. 5 (Риман)

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \in \mathbb{R}$ условно сходится, то $\forall S \in \mathbb{R}$ можно так переставлять члены этого ряда, что сумма получившегося ряда будет равна S.

Замечание 2 Т. 5 показывает, что одно из основных свойств конечных сумм (коммутативность сложения) не переносится на ряды. Если ряд сходится условно, то сумма зависит от порядка слагаемых.

9. Функциональные последовательности и ряды (опр., в том числе, ограниченная последовательность, сходящаяся последовательность, сходящийся ряд, абсолютно сходящийся ряд). Равномерная сходимость функциональной последовательности и функционального ряда (определение и пример). Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности (ряда). Признак Вейерштрасса.

Опр. 1 Посл-ть функций $f_n(x) \in \mathbb{C}$, $n=1,2\ldots$ называется ограниченной на множестве X, если существует постоянная $M>0: \forall x \in X, \forall n \in N$ выполняются нер-ва $|f_n(x)| \leq M$

Опр. 2 Посл-ть $f_n(x) \in \mathbb{C}$, $n=1,2\ldots$ называется сходящейся в точке $x_0 \in X$, если числовая посл-ть $\{f_n(x)\}$ сходится. Посл-ть $f_n(x) \in \mathbb{C}$, $n=1,2\ldots$ называется сходящейся на множестве X, если она сходится в каждой точке множества X. Если $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$, то говорят, что посл-ть $f_n(x) \in \mathbb{C}$, $n=1,2\ldots$ сходится к ф-ции $f(x), x \in X$.

Опр. 3 Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $u_n(x) \in \mathbb{C}$, $n=1,2\ldots$ (1) называется сходящимся в точке $x_0 \in X$, если сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$. Ряд (1) называют сходящимся на множестве X, если он сходится в каждой точке этого множества.

Опр. 4 Ряд (1) называется абсолютно сходящимся на множестве X, если на множестве X, сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$

Опр. 5 Равномерная сходимость посл-ти $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ на множестве X.

$$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f(x) \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n > n_0, \forall x \in X \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Равномерно сходящаяся посл-ть на множестве X, если существует ф-ция $f(x)$, к которой она равномерно сходится на X.

Если посл-ть равномерно сходится к ф-ции $f(x)$ на мн-ве X, то она просто сходится к $f(x)$ на мн-ве X.

Т. 1 (Критерий Коши равномерной сходимости последовательности)

$$f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall x \in X, \forall n > n_0, \forall p \geq 0, p \in \mathbb{Z}$$
$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Т. 3 (Критерий Коши равномерной сходимости ряда)

Ряд (1) равномерно сходится на мн-ве $X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 : \forall n > n_0 \ \forall x \in X \ \forall p \geq 0, p \in \mathbb{Z}$ выполняется нер-во

$$|u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

Т. 4 (Признак Вейерштрасса)

Пусть дан функциональный ряд (1). Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, $\alpha_n \geq 0$ сходится и справедливо нер-во $|u_n(x)| \leq \alpha_n$ для всех $x \in X$ и для всех n, начиная с некоторого номера, то ряд (1) абсолютно и равномерно сходится на мн-ве X.

10. Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы (с док-вом), интегрирование, дифференцирование)

Т. 1 (непрерывность суммы ряда)

Если ф-ии $u_n(x) \in C$, $n = 1, 2 \ldots$, $x \in X \subset \mathbb{R}$, непрерывные в точке $x_0 \in X$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на X, то его сумма $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ также непрерывна в точке x_0.

Д) Пусть $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ - частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (1). Зададим $\varepsilon > 0$. Ряд (1) сходится равномерно, следовательно $S_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} S(x)$, т.е. $\exists\, n_0 : \forall n > n_0 \ \forall x \in X$ выполняется нер-во $|S(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Функция $S_n(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in X$, как сумма конечного числа непрерывных ф-ий, тогда $\exists\, \delta > 0 \ \forall x \in U_\delta(x_0) \cap X$ выполняется нер-во

$$|S_n(x) - S_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Для всех $x \in U_\delta(x_0) \cap X$ имеем

$$|S(x) - S(x_0)| = |[S(x) - S_n(x)] + [S_n(x) - S_n(x_0)] + [S_n(x_0) - S(x_0)]| < \varepsilon,$$

что означает непрерывность ф-ии $S(x)$ в (·) x_0 ▣

<u>Замечание 1</u> В условиях Т.1 для ряда (1) в (·) $x_0 \in X$ возможен переход к пределу:

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x)$$

<u>Т.2</u> (интегрирование ряда)

Пусть даны вещественнозначные ф-ии $u_n(x) \in C[a, b]$, $n = 1, 2, \dots$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на $[a, b]$. Тогда для любой точки $x_0 \in [a, b]$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)\,dt$ также равномерно сходится на $[a, b]$ и

$$\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)\,dt \quad (2)$$

Равенство (2) означает, что ряд из непрерывных ф-ий в условиях Т.2 можно почленно интегрировать.

<u>Т.3</u> (дифференцирование ряда)

Пусть вещественнозначные ф-ии $u_n(x) \in C^1[a, b]$ и ряд, составленный из производных $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ равномерно сходится на $[a, b]$. Тогда, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in [a, b]$, то он сходится равномерно на всем $[a, b]$, его сумма $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ является непрерывно дифференцируемой ф-ей и $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$. Таким образом, в условиях Т.3 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ можно почленно дифференцировать.

11. Степенные ряды (определение). Первая теорема Абеля (с док-вом). Радиус и круг (интервал) сходимости степенного ряда (опр.). Понятие аналитической ф-ии (опр.). Теорема о представлении аналитической ф-ии рядом Тейлора.

Опр.1 Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad z \in \mathbb{C}, \; z_0 \in \mathbb{C} \quad (2)$$

$a_n \in \mathbb{C}$ - коэффициент ряда z_0 - центр ряда

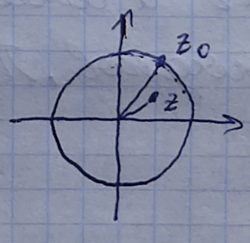
Т.4 (первая теорема Абеля).

Если степенной ряд (2) ~~то~~ сходится при $z = z_0$, то при любом $z: |z| < |z_0|$ ряд (2) сходится абсолютно.

Д) Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ сходится, тогда $\lim_{n\to\infty} a_n z_0^n = 0$. Это значит, что $\exists\; c > 0: |a_n z_0^n| \le c \;\forall_n\; n \in N$. При $z_0 \neq 0$ имеем:

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \le c \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \quad (3)$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c\left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ сходится при условии $|z| < |z_0|$, тогда по признаку сравнения (3) сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$, т.е. ряд (3) абсолютно сходится в круге $|z| < |z_0|$



Опр.2 Число $R \geqslant 0$ называется радиусом сходимости ряда (2), если для всех $z: |z - z_0| < R$, ряд (2) сходится, а для всех $z: |z - z_0| < R$ - расходится.

Круг $|z - z_0| < R$ в комплексной пл-ти называется кругом сходимости ряда (2)

Понятие аналитической функции.

<u>Опр. 1</u> Ф-я f называется аналитической в точке z_0, если в некотором круге $|z - z_0| < r$ с центром в этой точке ф-я f раскладывается в степенной ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Радиус сходимости больше нуля.

<u>Т. 3</u> (теорема о представлении аналитической ф-ции рядом Тейлора)

Если ф-ция $f(x)$ аналитическая в (.) x_0, т. е. представима в окрестности этой точки степенным рядом $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ с радиусом сходимости R, то

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2 \ldots, \text{ т. е.}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (1)$$

<u>Опр. 2</u> Пусть ф-я f определена в некоторой окр-ти точки x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков. Тогда ряд (1) называется рядом Тейлора.