п. 3 Собственные значения и собственные векторы

Пусть φ - линейный оператор, матрица которого в нек-ром базисе $b_1, \dots, b_n$ ($n = \dim V$) имеет диагональный вид:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Действие этого оператора на векторы следующее:

$$\varphi(b_1) = \lambda_1 b_1, \ \varphi(b_2) = \lambda_2 b_2, \dots, \varphi(b_n) = \lambda_n b_n$$

Если $b = k_1 b_1 + \ldots + k_n b_n \in V$, то $\varphi(b) = \lambda_1 k_1 b_1 + \ldots + \lambda_n k_n b_n$

Опр. Пусть $\varphi : V \to V$ — линейный оператор.
Скаляр $\lambda \in F$ называется собственным значением линейного оператора φ, если существует такой ненулевой вектор $x \in V$, что $\varphi(x) = \lambda x$

Опр. Вектор $x \in V$, $x \neq 0$ называется собственным вектором, принадлежащим собственному значению λ, если $\varphi(x) = \lambda x$

Примеры

1. Если $\varphi : V \to V$ — линейный оператор с матрицей

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

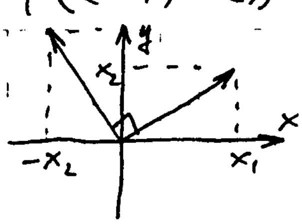
то скаляры $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ являются собственными значениями оператора φ

Соответственно, собственные векторы — векторы $b_1, \ldots, b_n$

Можно показать, что других собственных значений нет.

2. Рассмотрим оператор поворота на $90°$ в $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi((x_1, x_2)) = (-x_2, x_1)$$



Ясно, что этот линейный оператор не имеет собственных значений.

Это легко следует из геометрического смысла оператора поворота, но может быть доказано и непосредственными вычислениями.

Пусть $x = (x_1, x_2)$ — собственный вектор, принадлежащий собственному значению λ, $x \neq 0$.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

или

$$(-1)^n \lambda^n + \ldots = 0$$

Это алгебраическое ур-ие n-ой степени. Из теории многочленов следует, что корней этого ур-ия не более n, значит собственных значений любого линейного оператора не более $n = \dim V$.

Опр. Пусть $\lambda \in F$ — нек-рое собственное значение линейного оператора $\varphi : V \to V$.

Мн-во всех собственных векторов, принадлежащих собственному значению λ вместе с нулевым вектором, образует подпр-во, называемое собственным подпр-вом, соответствующим собственному значению λ

Это подпр-во есть $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ — тождественный линейный оператор (тождественное преобразование).

Обозначение

$$L_\lambda = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \mathcal{E})$$

собственное подпр-во оператора $\varphi : V \to V$, соотв. собственному значению λ.

Опр Если линейный оператор $\varphi : V \to V$ в нек-ром базисе может быть задан диагональной матрицей, то говорят, что φ — диагонализируемый линейный оператор.

Легко видеть, что любой диагонализируемый оператор имеет $n = \dim V$ линейно независимых собственных векторов.

Обратно, если линейный оператор диагонализируемый, то он имеет n линейно независимые собственные векторы.