ДГВА

§1. Кольцо многочленов $K[x_1, \ldots, x_n]$

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – переменные ($n > 1$), K – нек-рая область целостности

Опр Выражение вида

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(k_1, \ldots, k_n) \in A} a_{k_1, \ldots, k_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$$

где $a_{k_1, \ldots, k_n} \in K$ (т н коэффициенты),

A – конечное мн-во упорядоченных наборов $(k_1, \ldots, k_n)$ целых неотрицательных чисел

называется многочленом от $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из K

Выражение под знаком суммы наз одночленом

Обозначение

Мн-во всех многочленов $f(x_1, \ldots, x_n)$ будем обозначать $K[x_1, \ldots, x_n]$.

Операции сложения и умножения многочленов из $K[x_1, \ldots, x_n]$ вводятся естественным образом

Так, например, чтобы перемножить два многочлена $f(x)$ и $g(x)$ нужно „раскрыть скобки и привести подобные", при этом

$$(a x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n})(b x_1^{l_1} \ldots x_n^{l_n}) = ab\, x_1^{k_1+l_1} \ldots x_n^{k_n+l_n}$$

подобными считаются одночлены $a x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ и $b x_1^{l_1} \ldots x_n^{l_n}$, если

$$(k_1, \ldots, k_n) = (l_1, \ldots, l_n)$$

т е

$$k_1 = l_1, \ldots, k_n = l_n$$

Опр Степенью одночлена $a x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ называется целое неотрицательное число $k_1 + \ldots + k_n$

Степень многочлена определяется стандартным образом, т е равна максимуму степеней входящих в него одночленов

Обозначение $\deg f(x_1, .., x_n)$

Заметим, что ~~старш~~

$$\deg (a(x_1,..,x_n)\ b(x_1, ..,x_n)) =$$
$$= \deg (a(x_1,..,x_n)) + \deg (b(x_1, ..,x_n))$$

где $a(x_1, .., x_n)$, $b(x_1,..,x_n)$ – одночлены

Теорема 1

Множество $K[x_1,..,x_n]$ является областью целостности и называется кольцом мн-в от переменных $x_1, .., x_n$ над K

~~Доказа~~
Доказательство теоремы 1

Неочевидным является лишь целостность этого кольца, т.е. отсутствие в нем делителей нуля. Для док-ва последнего необходимо понятие лексикографического порядка, указанное ниже

Опр Говорят, что одночлен $a x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ старше $b x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n}$, если $k_1 > l_1$, или, если $k_1 = l_1$, $k_2 > l_2$ и т.д.

Обозначение

$$a x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} \succ b x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n}$$

Заметим, что всякий многочлен $f(x_1, .., x_n)$ можно записать по старшинству входящих в его состав одночленов единственным образом

Лемма

Старший член произведения 2 многочленов равен произведению старших членов этих многочленов

Доказательство

Пусть $f = u_1 + .. + u_s$, $g = v_1 + v_2 + .. + v_t$, где v_i, u_i – одночлены, причем $u_1 \succ u_2 \succ .. \succ u_s$, $v_1 \succ v_2 \succ .. \succ v_t$

Тогда $f g = \sum_{i,j} u_i v_j = u_1 v_1 + .. + u_i v_j + ..$, при этом

$$u_1 v_1 \succ u_i v_j$$

т.к. либо $i>1$, либо $j>1$

Доказательство теоремы 1 (продолжение)

Пусть $f\neq 0$, $g\neq 0$. Тогда $u\neq 0$, $v\neq 0$ — их старшие одночлены

По лемме $uv\neq 0$ — старший член произведения $f\cdot g$

Значит, $fg\neq 0$, т.е. Теорема 1 доказана

Опр Многочлен $f(x_1,\dots,x_n)\in K[x_1,\dots,x_n]$ называется однородным, если все составляющие его одночлены имеют одинаковую степень

Значение этой степени наз. степенью однородности этого многочлена

Пример $K=\mathbb{Z}$, $n=3$

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$$
$$g(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3^2+x_1^2x_2x_3$$

однородные мн-ны степени 2 и 3 соотв

Очевидно, что всякий многочлен можно представить и притом единственным образом, в виде суммы его однородных компонент

Пример $K=\mathbb{Z}$, $n=3$

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^5x_2-x_1x_3^2-x_1^2x_2^2+x_1x_2x_3+2x_2^4x_3^2+$$
$$+x_1^2x_2^2x_3^2$$

Имеем $\deg f(x_1,x_2,x_3)=6$, поэтому

$$f_1(x_1,x_2,x_3)=x_1^5x_2+2x_2^4x_3^2+x_1^2x_2^2x_3^2$$
$$f_2(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2x_2^2$$
$$f_3(x_1,x_2,x_3)=-x_1x_3^2+x_1x_2x_3$$

Нетрудно видеть, что произведение двух однородных многочленов степени k и l есть однородный многочлен степени $k+l$ (при док-ве используется отсутствие делителей нуля в $K[x_1,\dots,x_n]$

Отсюда следует, что ~~степень произведения~~

$$\deg fg=\deg f+\deg g$$

(достаточно, разбив f и g в суммы однородных компонент, перемножить старшие однородные компоненты и воспользоваться предыдущим свойством

Замечание

Многочлен $f(x_1, \dots, x_n) \in K[x_1, \dots, x_n]$ можно представлять себе как многочлен относительно переменной x_n с коэффициентами из $K[x_1, \dots, x_{n-1}]$

Пример

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^5 x_2 - x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2 x_3 + 2 x_2^4 x_3^2 + x_1^2 x_2^2 x_3^2 =$$
$$= (2x_2^4 + x_1^2 x_2^2) x_3^2 + (x_1 x_2) x_3 + (x_1^5 x_2 - x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2^2) =$$
$$= F(x_3) \in (K[x_1, x_2])[x_3]$$

Это позволяет строить кольцо многочленов от $x_1, \dots, x_n$ индуктивно

Свойства кольца многочленов от $x_1, \dots, x_n$ с коэффициентами из нек-рого поля F во многом напоминают св-ва кольца $F[x]$ (есть понятие НОД, НОК, неприводимости, а также верна теорема о факторизации (точнее, ее аналог))

Но есть и принципиальные отличия. Так, например, НОД и НОК нельзя находить по алгоритму Евклида. Еще одним примером является то, что многочлены над $\mathbb{C}$ степени более 1 могут быть неприводимыми, несмотря на то, что $\mathbb{C}$ – алгебраически замкнутое поле

Пример

$x_1^2 + \dots + x_n^2 + (-1)$ неприводим над $\mathbb{C}$ при $n \geq 2$