4. Теорема о дифференцировании интеграла по верхнему пределу (с доказательством). Теорема о существовании первообразной (с доказательством). Формула Ньютона-Лейбница (с доказательством). Формула замены переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям.

<u>**Теорема 1**</u> Пусть функция f(x) интегрируема на отрезке [a, b] и непрерывна в точке $x_0 \epsilon [a,b]$. Тогда функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ дифференцируема в точке x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$

Доказательство:

Рассмотрим приращение функции $F(x)$ в точке x_0

$$F(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)\,dt$$

$$F(x_0 + \Delta x) = \int_a^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt$$

$$\Delta F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt\,, \quad x_0 \in [a,b]\,, \quad x_0 + \Delta x \in [a,b]$$

Докажем, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)$$

$$\left|\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)\,dx\right| = \frac{1}{\Delta x}\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\big(f(t) - f(x_0)\big)\,dt\right| \le \frac{1}{|\Delta x|}\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}|f(t) - f(x_0)|\,dt\right| \qquad \textbf{(1)}$$

Функция f(x) непрерывна в точке x_0, следовательно, для любого ε > 0 существует δ = δ(ε) такое, что $\forall x$: $|x - x_0| < \delta$, $x \in [a,b]$выполняется неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Рассмотрим Δx такое, что $|\Delta x| < \delta$

Следовательно $|t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ **(2)**

Выберем Δx исходя из условия $\Delta x < \delta$. Тогда в силу непрерывности $f(t)$ в точке x_0 имеем $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$\left|\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| \le \frac{1}{|\Delta x|}\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \varepsilon\,dt\right| = \frac{1}{|\Delta x|}\cdot|\varepsilon|\cdot|\Delta x| = \varepsilon \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} f(x_0)$$

<u>Следовательно</u> $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} f(x_0)$

Замечание:

Функция $G(x)$ тоже дифференцируема в точке x_0, причем $G'(x_0) = -f(x_0)$

$$F(x) + G(x) = \int_a^b f(t)\,dt$$

$$G(x) = \int_a^b f(t)\,dt - F(x)$$

Теорема 2 Всякая непрерывная функция $f(t)$ на $[a, b]$ имеет первообразную. Функции вида $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, $\forall x_0 E[a, b]$ является первообразной функции $f(t)$

Доказательство:

Проверим, что функция $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ является первообразной функции $f(x)$. Если $x > x_0$, $x \in [a, b]$, то

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = -\frac{d}{dx}\int_{x}^{x_0} f(t)\,dt = -\big(-f(x)\big) = f(x)$$

Теорема 3 Формула Ньютона-Лейбница: Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то для любой её первообразной $\phi(x)$ справедлива формула $\int_a^b f(t)\,dt = \phi(b) - \phi(a)$

Доказательство:

Функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ одна из первообразных функции $f(x)$.

Тогда

$$\int_a^x f(t)\,dt = \phi(x) + c => \int_a^a f(t)\,dt = \phi(a) + c => c = -\phi(a)$$

Тогда

$$\int_a^b f(t)\,dt = \phi(b) - \phi(a)$$

Формула замены переменной в определенном интеграле:

Пусть $\varphi: [\alpha, \beta] \to [a, b]$ непрерывно дифференцируема и строго монотонна, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то функция $f\big(\varphi(t)\big)$: $\varphi'(t)$ интегрируема на $[\alpha, \beta]$

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(J^3)} f(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{j^3} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt$$

Формула интегрирования по частям:

Пусть функции $U(x)$, $V(x)$, $U'(x)$, $V'(x)$ непрерывны на $[a, b]$. Тогда справедлива формула: $U(x) \cdot V'(x)\,dx = U(x) \cdot V(x)|_a^b - \int_a^b V(x) \cdot U'(x)\,dx$