Decomposição de Séries Temporais
Processos Estocásticos

Profa. R. Ballini

Bibliografia Básica:

- Pesaran, M. H. (2015). *Time Series and Panel Data Econometrics*. Cap. 16 – 16.2.

Decomposição Clássica

Considere uma série temporal $\{Z_t,\ t = 1, \ldots, N\}$ que pode ser representada como a soma dos componentes:

- Tendência (T_t): componente de longo prazo associado ao movimento da variável no tempo;
- Ciclo (C_t): componente de médio prazo associado a períodos de expansão ou recessão econômica;
- Sazonalidade (S_t): componente de curto prazo associado a variações provocadas pelas épocas do ano (feriados, estação do ano, etc);
- Resíduo (ϵ_t): componente que não se pode explicar, variável aleatória, também denominada de ruído.

Decomposição de Tendência e Ciclo

Decomposição a partir da remoção das flutuações cíclicas de uma série temporal, o que resulta em uma série temporal que representa as flutuações de longo prazo mais evidentemente que as de curto.

Suponha a série Z_t como a soma de um componente cíclico, um componente de crescimento e um componente aleatório:

$$Z_t = T_t + C_t + \epsilon_t \tag{1}$$

O filtro Hodrick-Prescott, ou simplesmente filtro HP[1], é um método comumente utilizado na hora de retirar tendências de longo prazo de séries macroeconômicas.

[1] Hodrick, R. e Prescott, E. (1997) Postwar business cycles. Jornal of Money, Credit and Banking.

Filtro Hodrick-Prescott

Hodrick-Prescott sugeriram uma forma de isolar C_t a partir da série Z_t minimizando a seguinte função:

$$\min \left[\sum_{t=1}^{N} (Z_t - T_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{N-1} (\Delta^2 T_{t+1})^2 \right]$$

Reescrevendo:

$$\min \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} (Z_t - T_t)^2 + \frac{\lambda}{N} \sum_{t=2}^{N-1} [(T_{t+1} - X_t) - (X_t - X_{t-1})]^2 \right]$$

em que λ é um parâmetro que representa a variância relativa do componente de tendência ao componente cíclico.

Filtro Hodrick-Prescott

Considera-se $\lambda = 1600$ para dados trimestrais; $\lambda = 100$ para dados anuais; e $\lambda = 14400$ para dados mensais. Para uma discussão dos valores de λ para diferentes frequencias ver Ravn and Uhlig (2002)[2] e Maravall and Rio (2007)[3].

Nota: É necessário precaução na aplicação do filtro, dado que, por suavizar a tendência da série, o filtro pode apresentar flutuações na parte irregular do processo que de fato não existem.

---

[2] Ravn, M. O. and H. Uhlig (2002). on adjusting the Hodrick-Prescott filter for the frequency of observations. Review of Economics and Statistics, 84, 371–376.

[3] Maravall, A. and A. D. Rio (2007). Temporal aggregation, systematic sampling, and the Hodrick-Prescott filter. Computational Statistics and Data Analysis, 51, 975–998.

Exemplo Hiato do Produto

O hiato do produto é um indicador que mensura as oscilações cíclicas da economia. Para fazer isso, esse indicador divide o PIB em dois componentes:

1. A tendência de médio/longo prazo (produto potencial);
2. O ciclo de curto prazo.

Hiato do Produto: estimado pela diferença do produto em si e do produto potencial.

Exemplo R

Considere a série do Produto Interno Bruto Real (DadosAula2.xlsx), dos USA, com ajuste sazonal, de 1947 a 2009, com frequencia trimestral. Estime o produto potencial a partir do filtro HP e o hiato do produto.

Processo Estocástico

Definição:

Seja T um conjunto arbitrário. Um *processo estocástico* é uma família $\{Y(t), t \in T\}$ tal que, para cada $t \in T$, $Y(t)$ é uma variável aleatória.

Definição

Formalmente, uma série temporal é definida como um processo estocástico:

$$\{Y(t, \omega), t \in T, \omega \in \Omega\} \tag{2}$$

em que para cada $t \in T$, $Y(t, \cdot)$ é uma variável aleatória no espaço amostral Ω.

Série Temporal

A série temporal observada é uma realização de um processo estocástico (o **processo gerador de dados**):

$$\{y\}_{t=1}^{T} = \{y_1, y_2, \ldots, y_T\} \tag{3}$$

Nesse sentido, uma série temporal é uma trajetória ou realização de um processo estocástico.

Modelagem de Série Temporal

Determinar qual é o processo gerador da série que se está estudando, ou seja, qual o modelo que traduz o mecanismo de geração da série.

Série Temporal

1. Séries temporais podem ser **estacionárias** ou **não estacionárias**.

   Estacionária: se desenvolve no tempo ao redor de uma média constante, refletindo alguma forma de equilíbrio. Caso contrário é **não estacionária**.

2. Séries temporais podem ser **determinísticas** ou **estocásticas**.

   Determinística: valores da série podem ser escritos por uma função matemática perfeitamente determinada por uma ou mais variáveis

   Estocástica: valores da série incluem um termo aleatório (= estocástico).

A série temporal estacionária determinística mais simples é uma constante $c \in \Re$, isto é:

$$y_t = c \tag{4}$$

A série dada por (4) será estacionária e estocástica se acrescentarmos um componente aleatório independente e identicamente extraído de uma distribuição normal, $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$:

$$y_t = c + \epsilon_t \tag{5}$$

Uma série temporal é não estacionária com tendência determinística se:

$$y_t = \beta_1 t + \beta_0 + \epsilon_t \tag{6}$$

Processo Estocástico Estritamente Estacionário

Definição:

Um processo estocástico $\{Y(t), t \in T\}$ diz-se estritamente estacionário se todas as distribuições finito dimensionais permanecem as mesmas sob translações do tempo, ou seja,

$$F(y_{1+s}, \ldots, y_{n+s}) = F(y_1, \ldots, y_n)$$

para quaisquer t de T.

Em particular, isto significa que todas as distribuições são invariantes sob translações do tempo.

Processo Estocástico Fracamente Estacionário

Definição:

Um processo estocástico $\{Y(t), t \in T\}$ diz-se fracamente estacionário (ou estacionário de segunda ordem) se e somente se:

(i) $E\{Y(t)\} = \mu(t) = \mu$, constante, para todo $t \in T$;

(ii) $E\{Y^2(t)\} < \infty$, para todo $t \in T$;

(iii) $\gamma(t_1, t_2) = Cov\{Y(t_1), Y(t_2)\}$ é uma função apenas de $|t_1 - t_2|$.

Estes processos são denominados *processos estacionários*.

Propriedade de estacionaridade: fundamental para inferências estatísticas e para previsão.

Autocovariância e Autocorrelação

Dada uma particular realização, ω, de um processo estocástico, a função de autocovariância é definida como:

$$\gamma_j \equiv E[(Y(t) - \mu(t))(Y(t-j) - \mu(t-j))] \tag{7}$$

A variância $\sigma^2(t)$ é repsentada por γ_0.

A autocorrelação de um processo estocástico é dada por:

$$\rho_j \equiv \frac{\gamma_j}{\gamma_0} \tag{8}$$

Coeficientes de Autocovariância e Autocorrelação

Propriedades:

1. A correlação entre y_t e y_{t+k} é igual à y_t e y_{t-k}:

$$\rho(k) = \rho(-k)$$

2. $-1 \leq \rho \leq 1$.

Funções de Autocovariância e Autocorrelação

- O gráfico de γ_k versus k é chamado de função de autocovariância $\{\gamma_k\}$ do processo estocástico.
- O gráfico de ρ_k como função do intervalo k é chamado de função de autocorrelação (f.a.c.) ou correlograma $\{\rho_k\}$ do processo estocástico.

Correlograma

O coeficiente de autocorrelação amostral ρ_k é assintoticamente normalmente distribuído, com média e variância dados por:

$$E(\rho_k) \approx -1/n \quad \text{e} \quad Var(\rho_k) \approx 1/n$$

sendo n o número de observações.
Portanto, limites de confiança aproximados de 95% são dados por

$$-1/n \pm 1,96/\sqrt{n}$$

que são frequentemente aproximados para $\pm 2/\sqrt{n}$.

Propriedade de Ergodicidade

A ergodicidade é uma propriedade de independência assintótica.

Para haver ergodicidade, a série deve ser fracamente estacionária.

Formalmente, um processo estocástico fracamente estacionário é ergódico se:

$$\lim_{t \mapsto \infty} \left\{ \frac{1}{T} \sum_{j=1}^{T} E[y_t - \mu][y_{t-j} - \mu] \right\} = 0$$

Essa condição é satisfeita se as autocovariâncias tendem a zero, suficientemente rápido, com o aumento de j.

Processos Estocásticos Não Estacionários

Séries não estacionárias têm uma tendência que pode ter uma natureza determinística ou estocástica.

A série não estacionária determinística, acrescida de um componente aleatório extraído de uma distribuição normal, flutua em torno de uma tendência temporal.
Exemplo **Tendência Determinística**:

$$y_t = c + \delta t + \epsilon_t$$

Exemplo **Passeio aleatório com deslocamento**:

$$y_t = c + y_{t-1} + \epsilon_t$$

Ruído Branco

Um processo estocático ϵ_t é chamado de ruído branco se

$$\begin{aligned} E(\epsilon_t) &= 0 \\ E(\epsilon_t^2) &= \sigma_\epsilon^2 \\ \gamma_j &= E(\epsilon_t \epsilon_{t-j}) = 0, \text{todo } j \neq 0 \end{aligned}$$

Este processo é representado por $RB(0, \sigma_\epsilon^2)$.

Se ϵ_t é distribuído normalmente, tal que o processo caracterizado por

$$\epsilon_t \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$$

chamamos o processo de **ruído branco gaussiano**.

Exemplos de Geração de séries

Para cada um dos processos abaixo gere 200 observações. Faça o gráfico da série e o correlograma.

a) Ruído branco gaussiano com média 0 e variância 1;

b) Série com tendência determinística: $y_t = 0.5 + 0.1t + N(0,1)$;

c) Série com tendência estocástica: $y_t = y_{t-1} + N(0,5^2)$;

d) Série com correlação de curto-prazo: $y_t = 0,7y_{t-1} + N(0,1)$;

e) Série com correlações negativas: $y_t = -0,8y_{t-1} + N(0,1)$;

f) Passeio aleatório com deslocamento: $y_t = 1 + y_{t-1} + N(0,1)$;

g) Passeio Aleatório com deslocamento e tendência determinística: $y_t = 3.0 + 0.5t + y_{t-1} + N(0,1)$.

Comando auxiliares no R

`rep(k,N)`: valor k será repetido N vezes

`rnorm(N,m,s)`: gera N valores aleatórios com distribuição normal com média 0 e desvio-padrão s

`cumsum(x)`: calcula a soma acumulada de x

`set.seed(XXX)`: fixa a semente (valor inicial) em XXX

`acf(x)`: obtém a função de autocovariância da série x