# HO-236 – Econometria de Séries Temporais
# Structural Vector Autoregression - SVAR


**Bibliografia:**

- Enders, W. *Applied Econometrics*, 3a. Edição, Wiley, 2010. Cap. 5: 10.
- Bueno, R. L. S..*Econometria de Séries Temporais*, 2a. Edição, Cengage Learning, 2011. Cap. 6: 6.9.

# Modelo VAR

- VAR: permite que se expressem modelos econômicos completos e se estimem os parâmetros desse modelo.
- Modelos econômicos expressos como um VAR definem restrições entre as equações do modelo. Estudas essas restrições e usá-las para identificar os parâmetros estruturais do VAR constitui um objetivo fundamental da metodologia
- Diferente dos modelos univariados, o VAR busca responder qual a trajetória da série, dado um choque estrutural.
- Por trajetória, deseja-se conhecer o tempo que um choque afeta uma série, se a série muda de patamar ou não, entre outras informações

# Modelo VAR

Seja um modelo VAR(1) bivariado, na forma estrutural ou primitiva:

$$y_t = b_{10} - a_{12}z_t + b_{11}y_{t-1} + b_{12}z_{t-1} + \sigma_y \epsilon_{yt}$$
$$z_t = b_{20} - a_{21}y_t + b_{21}y_{t-1} + b_{22}z_{t-1} + \sigma_z \epsilon_{zt}$$

em que $\epsilon_{yt}$ e $\epsilon_{zt}$ são denominadas inovações estruturais em $y_t$ e em $z_t$, respectivamente.

Representação matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & a_{12} \\ a_{21} & 1 \end{bmatrix}}_{\equiv A} \underbrace{\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix}}_{\equiv X_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \end{bmatrix}}_{\equiv B_0} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}}_{\equiv B_1} \underbrace{\begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix}}_{\equiv X_{t-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{bmatrix}}_{\equiv B} \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon_{yt} \\ \epsilon_{zt} \end{bmatrix}}_{\equiv \epsilon_t}$$

Ou,

$$AX_t = B_0 + B_1 X_{t-1} + B\epsilon_t$$

# Modelo VAR

Modelo VAR na forma padrão ou reduzida:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix}}_{\equiv X_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_{10} \\ \phi_{20} \end{bmatrix}}_{\equiv \Phi_0} + \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}}_{\equiv \Phi_1} \underbrace{\begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix}}_{\equiv X_{t-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix}}_{\equiv e_t}$$

Ou, na forma equivalente:

$$\begin{aligned} &X_t = \Phi_0 + \Phi_1 X_{t-1} + e_t \\ &\Phi_0 \equiv A^{-1} B_0 \\ &\Phi_1 \equiv A^{-1} B_1 \\ &A e_t \equiv B \epsilon_t \end{aligned}$$

Observe que $e_t$ são os erros do modelo VAR na sua forma reduzida (correlacionados) enquanto que $\epsilon_t$ são os erros da forma estrutural (não correlacionados).

# Função Resposta ao Impulso

- O modelo VAR não permite identificar todos os parâmetros da forma estrutural, a menis que se imponham restrições adicionais
- Sims(1980) sugere um sistema recursivo para identificar o modelo. Trata-se de impor que alguns coeficientes sejam iguais a zero. Geralmente, usam-se argumentos econômicos para definir quais deles são iguais a zero.

**Exemplo:** VAR(1) bivariado devemos impor uma restrição ao sistema primitivo. Suponha $a_{12} = 0$, ou seja:

$$y_t = b_{10} + b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + \sigma_y \epsilon_{yt}$$
$$z_t = b_{20} - a_{21} y_t + b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + \sigma_z \epsilon_{zt}$$

- A hipótese de que $a_{12} = 0$ equivale a supor que uma inovação em $y_t$ não tem efeito contemporâneo em $z_t$.

# Função Resposta ao Impulso

Essa restrição torna os demais parâmetros estruturais identificáveis.

Ou seja, com $a_{12} = 0$, as duas inovações podem ser recuperadas como:

$$\begin{aligned} e_{1t} &= \sigma_y \epsilon_{yt} \\ e_{2t} &= \sigma_z \epsilon_{zt} - a_{21} \sigma_y \epsilon_{yt} \end{aligned} \tag{1}$$

de modo que:

$$Var(e_1) = \sigma_y^2 \; ; \quad cov(e_1, e_2) = -a_{21} \sigma_y^2$$
$$Var(e_2) = \sigma_z^2 + a_{21} \sigma_y^2$$

Essas três equações combinam com as demais estimativas $\Phi_0$ e $\Phi_1$ do modelo.

# Função Resposta ao Impulso

- A metodologia proposta por Sims pode ser generalizada para um vetor com $n$ variáveis endógenas. Trata-se de uma maneira triangular de decompor os resíduos, chamada de decomposição de Choleski.
- Para identificar um modelo estrutural com $n$ variáveis a partir de um VAR estimado é necessário impor $(n^2 - n)/2$ restrições no modelo estrutural.
- O problema dessa imposição é definir a ordenação das variáveis, que é arbitrária, ainda que atribuída a razões econômicas.
- A ordenação das variáveis define a forma das restrições, de modo que diferentes ordenações geram diferentes restrições.

# VAR Estrutural - SVAR

- Existem outras formas de definir restrições sobre as matrizes $A$ e $B$ (Lembrando que: $Ae_t = B\epsilon_t$), de modo a identificar os parâmetros estruturais.

- Sims (1986) e Bernanke (1986) propuseram modelar as inovações usando análise econômica; ou seja, estimar as relações entre os choques estruturais usando um modelo econômico.

- Com base em $Ae_t = B\epsilon_t$ e dependendo das restrições impostas, três tipos de modelos SVAR podem ser definidos.

# Modelo SVAR

## Modelo A

Neste modelo a ideia é tratar as relações contemporâneas entre as variáveis diretamente pela matriz $A$ considerando $B = I_n$, isto é:

$$Ae_t = \epsilon_t$$

Neste caso o número mínimo de restrições para identificação será $n(n-1)/2$.

# Exemplo

Seja,

$P_{c,t}$: o índice de preços de commodities

$Y_t$ o produto

$R_t$ a taxa de juros nominal de curto prazo

Representação do SVAR(1) com 3 variáveis:

$$
\begin{aligned}
1\Delta logP_{c,t} + 0,0\Delta logY_t + a_{13}R_t &= b_{10} + b_{11}\Delta logP_{c,t-1} + b_{12}\Delta logY_t + b_{13}R_t + \epsilon_{1t} \\
a_{21}\Delta logP_{c,t} + 1\Delta logY_t + 0,0R_t &= b_{20} + b_{21}\Delta logP_{c,t-1} + b_{22}\Delta logY_t + b_{23}R_t + \epsilon_{2t} \\
a_{31}\Delta logP_{c,t} + b_{32}\Delta logY_t + 1R_t &= b_{30} + b_{31}\Delta logP_{c,t-1} + b_{32}\Delta logY_t + b_{33}R_t + \epsilon_{3t}
\end{aligned}
$$

# Modelo SVAR

## Modelo B

Neste modelo, ao invés de modelar diretamente as relações contemporâneas entre as variáveis, especifica-se as relações entre os erros identificando-se os choques estruturais diretamente pelos choques da forma reduzida. A matriz $A$ é considerada identidade, isto é, $A = I_n$. Logo,

$$e_t = B\epsilon_t$$

Ou seja, os erros da forma reduzida são funções lineares dos erros estruturais. O número mínimo de restrições para identificação também é $n(n-1)/2$.

# Modelo SVAR

## Modelo AB

É o modelo que considera os dois tipos de restrições simultâneamente, ou seja:

$$Ae_t = B\epsilon_t$$

Como $A$ e $B$ têm $n^2$ elementos cada, temos que impor no mínimo $n^2 + n(n-1)/2$ restrições para identificação.