Vetor Auto-Regressivo - VAR

Profa. Rosângela Ballini

Bibliografia:

- Enders, W. *Applied Econometrics*, 3a. Edição, Wiley, 2010. Cap. 5: 5-9.
- Bueno, R. L. S..*Econometria de Séries Temporais*, 2a. Edição, Cengage Learning, 2011. Cap. 6: 6.1-6.8.

Exemplo:

Vamos considerar um modelo bivariado:

$$y_t = b_{10} - a_{12} z_t + b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + \sigma_y \varepsilon_{yt} \qquad (1)$$

$$z_t = b_{20} - a_{21} y_t + b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + \sigma_z \varepsilon_{zt} \qquad (2)$$

sendo que:

1. y_t e z_t são estacionárias;
2. $\varepsilon_{yt} \sim RB(0,1)$ e $\varepsilon_{zt} \sim RB(0,1)$;
3. $\varepsilon_{yt} \perp \varepsilon_{zt} \Longrightarrow cov(\varepsilon_{yt}, \varepsilon_{zt}) = 0$.

As equações (1) e (2) constituem um VAR(1), sendo denominado de VAR estrutural.

Exemplo:

Representação matricial da forma estrutural:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & a_{12} \\ a_{21} & 1 \end{bmatrix}}_{\equiv A} \underbrace{\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix}}_{\equiv X_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \end{bmatrix}}_{\equiv B_0} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}}_{\equiv B_1} \underbrace{\begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix}}_{\equiv X_{t-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{bmatrix}}_{\equiv B} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix}}_{\equiv \varepsilon_t}$$

Ou,

$$AX_t = B_0 + B_1 X_{t-1} + B\varepsilon_t$$

Forma reduzida do modelo:

$$\begin{aligned} X_t &= \Phi_0 + \Phi_1 X_{t-1} + e_t \\ \Phi_0 &= A^{-1} B_0; \\ \Phi_1 &= A^{-1} B_1; \\ Ae_t &= B\varepsilon_t. \end{aligned}$$

Exemplo:

Ou seja, na forma reduzida:

$$y_t = \phi_{10} + \phi_{11} y_{t-1} + \phi_{12} z_{t-1} + e_{yt} \tag{3}$$

$$z_t = \phi_{20} + \phi_{21} y_{t-1} + \phi_{22} z_{t-1} + e_{zt} \tag{4}$$

em que:

$$E(e_{it}) = 0$$

$$Var(e_{it}) = 1$$

$$cov(e_{it}, e_{it-j}) = 0, j \neq 0$$

para $i = \{y, z\}$. Devemos notar que, em geral,

$$cov(e_{yt}, e_{zt}) \neq 0$$

Identificação

Modelo VAR(p):

$$X_t = \Phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \Phi_i X_{t-i} + e_t \tag{5}$$

em que:

X_t: vetor $n \times 1$ contendo cada uma das n variáveis do modelo;

Φ_0: vetor $n \times 1$ de termos constantes;

Φ_i: matriz $n \times n$ dos coeficientes

e_t: vetor $n \times 1$ de termos de erros;

- $c = n + n^2 p$ coeficientes que devem ser estimados
- Muitas vezes os coeficientes estimados são estatisticamente insignificantes

Identificação – Critérios de Informação

$$AIC(p) = \ln(\det(\hat{\Sigma})) + \frac{2}{T}c \tag{6}$$

$$BIC(p) = \ln(\det(\hat{\Sigma})) + \frac{\ln T}{T}c \tag{7}$$

$$HQ(p) = \ln(\det(\hat{\Sigma})) + \frac{\ln \ln T}{T}2c \tag{8}$$

$$FPE(p) = \left(\det(\hat{\Sigma})\right)\left(\frac{T + np + 1}{T - np - 1}\right)^n \tag{9}$$

em que $\hat{\Sigma}$: matriz das variâncias covariâncias do modelo; $c = pn^2$: número total de parâmetros estimados em todas as equações do modelo; T: tamanho da amostra.

Estimação

- Mínimos Quadrados Ordinários aplicados a cada equação do modelo: número de variáveis em todas as equações deve ser igual

- Propriedades dos estimadores:

  1. Consistência;
  2. Eficiência assintótica;
  3. Normalidade assintótica.

Opções de Especificação

- **Seleção de variáveis:** inclusão de acordo com a teoria econômica e/ou evidência empírica
- **Variáveis exógenas:** podem ser incluídas como constante, tendências, dummies sazonais, ou outras variáveis explicativas adicionais;
- **Dados não estacionários:** geralmente são transformados (log, log-diferenças, taxas de crescimento, etc)
- O modelo deve ser **parcimonioso**

Exemplo 6.11 Adaptado (Bueno,2011)

O Banco Central do Brasil (BC) utiliza em suas projeções para inflação quatro modelos VAR, descritos no Relatório de Inflação 2T04.

Com base no modelo VAR1, vamos verificar o impacto que variáveis como a variação da taxa de câmbio nominal e a taxa de juros Selic real têm sobre os preços livres.

Período: Setembro de 1994 a Maio de 2007.

Exemplo 6.11 (Bueno,2011)

Variáveis endógenas utilizadas:

1. Variação da taxa de câmbio nominal;
2. Variação da taxa Selic real;
3. Inflação dos preços livres;
4. Inflação dos preços administrados.

Variáveis exógenas utilizadas:

1. 11 dummies sazonais;
2. Uma dummy de tendência para o período de desinflação (1994:9 a 1997:7)

Verificação do Modelo

1. Estabilidade do modelo;
2. Correlograma;
3. Testes de Autocorrelação: Teste de Portmanteau;
4. Teste de Normalidade.

Aplicações do Modelo

1. Previsão;
2. Teste de Causalidade de Granger;
3. Função Resposta ao Impulso;
4. Decomposição da Variância do Erro de Previsão.

Previsão

- Análogo aos processos univariados.

Vamos considerar o modelo VAR(1):

$$X_t = \Phi_0 + \Phi_1 X_{t-1} + e_t \tag{10}$$

Previsão 1 passo à frente é dada por:

$$E(X_{t+1}) = \Phi_0 + \Phi_1 X_t$$

Previsão 2 passos à frente:

$$E(X_{t+2}) = \Phi_0 + \Phi_1 E(X_{t+1})$$

Previsão h passos à frente:

$$E(X_{t+h}) = \Phi_0 + \Phi_1 E(X_{t+h-1})$$

Teste de Causalidade de Granger

Definição:

y 'Granger-causa' z se o valor de z em t pode ser predito com maior precisão se forem considerados valores passados de y, além dos valores passados de z.

Pergunta:

O escalar y ajuda a *prever* o escalar z?

Se isso não acontece, então diz-se que y *não Granger causa* z

- Resposta: usar um teste F convencional, válido quando os coeficientes de interesse puderem ser escritos de modo a multiplicar variáveis estacionárias.

Teste de Causalidade de Granger

Considere o sistema na forma reduzida, associado a um modelo VAR(p) bivariado:

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{10} \\ \phi_{20} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{p} \begin{bmatrix} \phi_{11,i} & \phi_{12,i} \\ \phi_{21,i} & \phi_{22,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-i} \\ z_{t-i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{yt} \\ e_{zt} \end{bmatrix} \tag{11}$$

Teste de Causalidade de Granger

Passos para o teste, considerando uma das equações:

1. Estime $z_t = \phi_{20} + \sum_{i=1}^{p} \phi_{21,i} y_{t-i} + \sum_{i=1}^{p} \phi_{22,i} z_{t-i} + e_{zt}$
2. Teste se y não Granger causa z usando o teste F sob as hipóteses:

$$H_0 : \phi_{21,1} = \phi_{21,2} = \ldots = \phi_{21,p} = 0$$

$$H_1 : \phi_{21,i} \neq 0, \text{para algum } i = 1, \ldots, p$$

em que a estatística do teste é dada por:

$$F = \frac{\left(\hat{e}_r^2 - \hat{e}_u^2\right)/p}{\hat{e}_u^2/(T - 2p - 1)} \rightarrow F(p, T - 2p - 1)$$

sendo $\hat{e}_r$ e $\hat{e}_u$ resíduos do modelos restrito e irrestrito. Se $F > F_c$, rejeita-se H_0 de que y não Granger causa z.

Teste de Causalidade de Granger

- Teste de causalidade de Granger não é o mesmo que teste de exogeneidade
- Para que z_t seja exógeno a y_t, é preciso que z_t não seja afetado contemporaneamente por y_t. A forma reduzida do VAR não permite que se faça esse tipo de teste. O teste de causalidade de Granger inclui valores correntes e passados de y_t sobre z_t.
- Pode-se fazer o mesmo teste em contextos de mais variáveis, e seu nome é teste de bloco-exogeneidade. Estima-se o modelo com e sem restrição e utiliza-se o teste F, como visto anteriormente.

Função Impulso-Resposta

Identificação

A partir da forma reduzida, consegue-se recuperar as informações contidas na forma estrutural? Ou seja, o sistema na forma estrutural é identificável dada as estimativas de OLS do modelo VAR reduzido?

- Não, pois o número de parâmetros do sistema na forma estrutural é diferente do número de parâmetros do sistema "recuperado" a partir do VAR estimado.
- O modelo VAR não permite identificar todos os parâmetros da forma estrutural, a menos que se imponham restrições adicionais

Identificação

Sistema reduzido:

$$y_t = \phi_{10} + \phi_{11} y_{t-1} + \phi_{12} z_{t-1} + e_{yt} \tag{12}$$

$$z_t = \phi_{20} + \phi_{21} y_{t-1} + \phi_{22} z_{t-1} + e_{zt} \tag{13}$$

Número de parâmetros a serem estimados: 9

$(a_{10}, a_{20}, \phi_{11}, \phi_{12}, \phi 21, \phi_{22}, Var(e_{yt}), Var(e_{zt}), cov(e_{yt}, e_{zt}))$

Sistema estrutural (ou primitivo):

$$y_t = b_{10} - a_{12} z_t + b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + \epsilon_{yt} \tag{14}$$

$$z_t = b_{20} - a_{21} y_t + b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + \epsilon_{zt} \tag{15}$$

Número de parâmetros a serem estimados: 10

$\left(b_{10}, b_{20}, a_{12}, a_{21}, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}, \sigma_y^2, \sigma_z^2\right)$

Identificação

- Sims (1980) sugere um sistema recursivo para identificar o modelo: trata-se de impor restrições no modelo primitivo.

Supor uma restrição ao sistema primitivo, tal que $a_{12} = 0$:

$$y_t = b_{10} + b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + \epsilon_{yt} \tag{16}$$

$$z_t = b_{20} - a_{21} y_t + b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + \epsilon_{zt} \tag{17}$$

Os erros reduzidos são:

$$\begin{bmatrix} e_{yt} \\ e_{zt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{yt} \\ \epsilon_{zt} \end{bmatrix} \tag{18}$$

- Trata-se de uma forma triangular de decompor os resíduos: decomposição de Choleski

Apresentação Alternativa do VAR

Vamos considerar o modelo VAR(1), restrito:

$$X_t = \Phi_0 + \Phi_1 X_{t-1} + e_t \tag{19}$$

Resolvendo recursivamente, temos:

$$\begin{aligned}
t = 1: \quad & X_1 = \Phi_0 + \Phi_1 X_0 + e_1 \\
t = 2: \quad & X_2 = \Phi_0 + \Phi_1 X_1 + e_2 = \Phi_0 + \Phi_1(\Phi_0 + \Phi_1 X_0 + e_1) + e_2 \\
& X_2 = (I + \Phi_1)\Phi_0 + \Phi_1^2 X_0 + \Phi_1 + e_2 \\
\ldots \quad & \ldots
\end{aligned}$$

$$X_t = (I + \Phi_1 + \Phi_1^2 + \ldots + \Phi_1^{t-1})\Phi_0 + \Phi_1^t X_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \Phi_1^i e_{t-i}$$

Apresentação Alternativa do VAR

Ou,

$$X_t = \Phi_0 \sum_{i=0}^{t-1} \Phi_1^i + \Phi_1^t X_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \Phi_1^i e_{t-i}$$

para $t \to \infty$, temos $\sum_{i=0}^{\infty} \Phi_1^i = \frac{1}{(I-\Phi_1)}$ e $\Phi_1^t \to 0$ se $|\Phi_1| < 1$.

Logo,

$$X_t = \frac{\Phi_0}{(I - \Phi_1)} + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_1^i e_{t-i}$$

- Se os autovalores da polinomial $(I - \sum_{i=1}^{p} A_i L^i)$ estiverem fora do círculo unitário, podemos representar um $VAR(p)$ por um $VMA(\infty)$:

$$X_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_1^i e_{t-i}$$

em que $\mu = \frac{\Phi_0}{(I-\Phi_1)}$.

Função Impulso Resposta

Lembrando que,

$$\begin{bmatrix} e_{yt} \\ e_{zt} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} 1 & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{yt} \\ \epsilon_{zt} \end{bmatrix}$$

Ou, em relação ao erro $\epsilon_t = [\epsilon_{yt}, \epsilon_{zt}]'$:

$$X_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i \epsilon_{t-i}$$

em que

$$\Psi_i = \begin{bmatrix} \psi_{11,i} & \psi_{12,i} \\ \psi_{21,i} & \psi_{22,i} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} 1 & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

Função Impulso Resposta

- Os elementos de Ψ_i são os multiplicadores de impacto de um choque sobre as variáveis endógenas
- O impacto total de um choque ϵ_{yt} sobre y_{t+h} é dado pela soma dos coeficientes $\psi_{11,i}, i = 1, \ldots, h$;
- O impacto total de um choque ϵ_{yt} sobre z_{t+h} é dado pela soma dos coeficientes $\psi_{21,i}, i = 1, \ldots, h$;

Os coeficientes, quando desenhados em um gráfico contra i, geram a função resposta ao impulso.

A soma dos coeficientes, quando desenhados em um gráfico contra i, geram a função resposta ao impulso acumulada.

Função Impulso Resposta

- Representa o mecanismo de transmissão dos choques aleatórios
  - Impulso: choque em uma variável
  - Resposta: alteração que o impulso provoca em todas as variáveis do modelo
  - Função impulso resposta: descreve o impacto de um determinado choque sobre uma determinada variável ao longo do tempo
  - Depende da ordenação das variáveis

Intervalo de Confiança

- A função resposta ao impulso é calculada mediante coeficientes estimados.
- Existe um intervalo de confiança a ser considerado nessas estimativas
- Esse intervalo pode ser calculado de forma analítica ou por métodos de experimentos de Monte Carlo.

Cálculo do IC:

- Forma analítica: ver Lütkerpohl (2005) ou Hamilton (1994)
  - Torna-se complicado em razão das covariâncias cruzadas.
- Simulação de Monte Carlo

Decomposição da Variância do Erro de Previsão

Objetivo

Determinar qual a porcentagem da variância do erro de previsão decorre de cada variável endógena ao longo do horizonte de previsão

- Indica a parcela com que cada choque contribui para a variação de uma determinada variável ao longo do tempo.
- Também depende da ordenação das variáveis

Decomposição da Variância do Erro de Previsão

Vamos considerar o erro de previsão dado abaixo:

$$x_{t+h} - E(x_{t+h}) = \sum_{i=0}^{h-1} \Psi_i \epsilon_{t+h-i}$$

Considerando apenas y_{t+h}:

$$\begin{aligned} y_{t+h} - E(y_{t+h}) = \quad & \psi_{11,0}\epsilon_{y_{t+h}} + \ldots + \psi_{11,h-1}\epsilon_{y_{t+1}} + \\ & + \psi_{12,0}\epsilon_{z_{t+h}} + \ldots + \psi_{12,h-1}\epsilon_{z_{t+1}} \end{aligned}$$

Logo,

$$\sigma_y^2(h) = \sigma_y^2(\psi_{11,0}^2 + \ldots + \psi_{11,h-1}^2) + \sigma_z^2(\psi_{12,0}^2 + \ldots + \psi_{12,h-1}^2)$$

Decompondo a variância do erro de previsão:

$$1 = \frac{\sigma_y^2(\psi_{11,0}^2 + \ldots + \psi_{11,h-1}^2)}{\sigma_y^2(h)} + \frac{\sigma_z^2(\psi_{12,0}^2 + \ldots + \psi_{12,h-1}^2)}{\sigma_y^2(h)}$$

- Mesmo efeito para a variável z_{t+h}, ou seja,

$$1 = \frac{\sigma_y^2(\psi_{21,0}^2 + \ldots + \psi_{21,h-1}^2)}{\sigma_z^2(h)} + \frac{\sigma_z^2(\psi_{22,0}^2 + \ldots + \psi_{22,h-1}^2)}{\sigma_z^2(h)}$$