Metodologia Box-Jenkins

Rosângela Ballini

Bibliografia Básica:

- Enders, W. *Applied Econometric Time Series*. Cap. 2.
- Bueno, R. L. S. *Econometria de Séries Temporais*. Cap. 2–4.
- Box, G.E., Jenkins, G. M., Reinsel, G. C., & Ljung, G. M.. *Time series analysis: forecasting and control*. Cap. 2–5
- Morettin, P. A. & Toloi, C. *Análise de Séries Temporais.* Cap. 5–9.

Metodologia de Box & Jenkins

Construção do modelo de séries temporais:

1. Identificação: com base na análise de autocorrelação, autocorrelação parcial e outros critérios;
2. Estimação: os parâmetros do modelo identificado são estimados;
3. Verificação do modelo ajustado: por meio de uma análise de resíduos, averigua-se se este é adequado para os fins em vista, no caso, para a previsão.
4. Previsão.

Identificação

Primeiro passo na etapa de identificação: verificação da propriedade de estacionariedade da série a $\{y_t\}$.

Metodologia de Box-Jenkins: restrita à séries estacionárias, porém, é possível aplicá-la à séries que se tornam estacionárias após a aplicação de diferenças.

A partir da série estacionária, o segundo passo na Identificação consiste na construção da FAC e FACP para determinar o tipo e a ordem do modelo.

Processo	FAC	FACP
AR(p)	declinante	truncada em j = p
MA(q)	truncada em j = q	declinante
ARMA(p,q)	declinante após defasagem q	declinante após defasagem p

Em geral, haverá mais de um modelo candidato a gerador da série $\{y_t\}$.

Identificação - Critérios de Informação

Na prática, estimamos modelos correspondentes a vários pares (p,q) para selecionar o modelo que minimiza o critério de informação adotado.

Os critérios de informação mais utilizados são
Akaike (1981):

$$AIC(p,q) = \ln \sigma_\epsilon^2 + (p+q)\frac{2}{N}$$

Schwartz (1978):

$$BIC(p,q) = \ln \sigma_\epsilon^2 + (p+q)\frac{\ln N}{N}$$

em que N é o tamanho da amostra e σ_ϵ^2 é a variância do erro.

Ou seja, ajustamos um conjunto de modelos candidatos e utilizamos critérios de informação (ou de seleção) para a seguir realizar a etapa de verificação do modelo mais adequado.

Modelos parcimoniosos são preferidos a modelos de ordens elevadas.

Estimação

Uma vez determinados os valores p e q, o próximo passo é a estimação dos p parâmetros ϕ, dos q parâmetros θ e da variância do termo erro σ_ϵ^2.

1. Modelos puramente autoregressivos podem ser estimados de maneira consistente por OLS ou por Máxima Verossimilhança.

2. Modelos puramente caracterizados por médias móveis podem ser estimados de maneira consistente por Máxima Verossimilhança.

3. Modelos ARMA podem ser estimados de maneira consistente por Máxima Verossimilhança.

Estimação

O Método de Máxima Verossimilhança estima os parâmetros do modelo, maximizando a função:

$$L(\Phi, \sigma | Y) = \sigma^{n/2} \exp\left\{ \frac{-\sigma}{2} (Y_t - Y_{t-j}\Phi)'(Y_t - Y_{t-j}\Phi) \right\}$$

sendo σ o desvio-padrão do termo de erro, Φ os parâmetros do modelo a ser estimado, supondo que o termo de erro é um ruído branco gaussiano.

Verificação

Objetivo:

Avaliar adequação do modelo identificado/estimado.

Nessa etapa verificamos se o modelo identificado e estimado é adequado:

Se sim, então seguimos para a próxima etapa: previsão;

Se não, escolhemos outro modelo, o que implica refazer as etapas de identificação e estimação.

Verificação

Procedimento:

a) Análise da correlação dos resíduos: modelo bem especificado, resíduos seguem um ruído branco:

   Na prática, a análise das autocorrelações é feita pelo comportamento das FAC e FACP amostrais dos resíduos. Em particular, os coeficientes de autocorrelação devem ser estatisticamente iguais a zero.

b) Se houver mais de um modelo candidato adota-se como critério de desempate:

   - Escolher modelo com menores: σ^2, AIC, BIC

Verificação - Autocorrelação Residual

Utiliza-se a estatística Q de Ljung-Box (1978) para testar se os primeiros k coeficientes de autocorrelação amostrais são estatisticamente iguais a zero:

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{N-j} \hat{\epsilon}_t \hat{\epsilon}_{t-k}}{\sum_{t=1}^{N-j} \hat{\epsilon}_t^2}$$

Lembrando que a comparação de $\hat{\epsilon}_k$ com os limites $\pm 2/\sqrt{(N-(p+q))}$, para 95% de significância, fornece uma indicação geral de possível quebra de comportamento de ruído branco de ϵ_t.

Verificação - Autocorrelação Residual

Sob as hipóteses:

$$H_0 : \sum_{j=1}^{k} \rho_j = 0$$

$$H_1 : \sum_{j=1}^{k} \rho_j \neq 0$$

A estatística do teste de Ljung-Box é:

$$Q = N(N+2) \sum_{j=1}^{k} \frac{\hat{\rho}_j^2}{N-j} \xrightarrow{d} \chi_k^2$$

Verificação - Teste de Normalidade

Teste Jarque-Bera (JB): usado para grandes amostras;

Teste (JB) analisa se os momentos da série estimada (no caso os resíduos) são iguais aos da distribuição normal. Sob essa hipótese, a assimetria (A) é igual a zero e a curtose (C) é igual a 3.
As hipóteses nula e alternativa são, respectivamente:

H_0: os resíduos têm distribuição normal

H_1: os resíduos não têm distribuição normal

A estatística do teste é:

$$JB = N\left[\frac{A^2}{6} - \frac{(C-3)^2}{24}\right] \xrightarrow{d} \chi^2_2$$

Verificação - Teste de Normalidade

Teste de Shapiro-Wilk (1965): pode ser utilizado para amostras de qualquer tamanho.

O teste é baseado no cálculo da estatística W que verifica se uma amostra aleatória de tamanho N provém de uma distribuição normal:

$$W = \frac{b^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

em que x_i são valores da amostra ordenados e b é uma constante determinada a partir das médias, variâncias e covariâncias de uma amostra de tamanho N. As hipóteses nula e alternativa são:

H_0: a amostra provém de uma População Normal

H_1: a amostra não provém de uma População Normal

Teste ARCH-LM - Heterocedasticidade

Objetivo:

Análise de heterocedasticidade condicional.

Regredir a equação:

$$\hat{\epsilon}_t^2 = \beta_1 \hat{\epsilon}_{t-1}^2 + \beta_2 \hat{\epsilon}_{t-2}^2 + \ldots + \beta_h \hat{\epsilon}_{t-h}^2 + u_t$$

Sob as hipóteses

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_h = 0$$

$$H_1 : \beta_1 \neq 0, \text{ou} \beta_2 \neq 0, \text{ou} \ldots \beta_h \neq 0$$

Estatística do teste:

$$ARCH - LM = T \cdot R^2 \xrightarrow{d} \chi_h^2$$

Não rejeitar H_0 significa ausência de heterocedasticidade.

Previsão

Na prática, prefere-se modelos com resíduos ruído branco gaussiano. Seleciona-se entre eles para realizar as previsões o "melhor" indicado pelo critério de informação utilizado.

Previsão

Deixando-se H observações fora da estimação, tem-se as opções:

- **Estática:** previsão um passo à frente;
- **Dinâmica:** previsão vários passos à frente.

Para o tamanho de amostra H, calcula-se os erros de previsão:
Raiz do Erro Quadrático Médio:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{h=1}^{H}(y_{t+h} - \hat{y}_{t+h})^2(h)}{H}}$$

Erro Absoluto Médio:

$$MAE = \frac{\sum_{h=1}^{H}|y_{t+h} - \hat{y}_{t+h}|}{H}$$

Erro Absoluto Percentual Médio:

$$MAPE = \frac{100}{H} * \frac{\sum_{h=1}^{H}|y_{t+h} - \hat{y}_{t+h}|}{y_{t+h}}$$

Exemplo

1. Use a metodologia de Box & Jenkins para os dados do PIB Agropecuária dessazonalizado referente ao primeiro trimestre de 2000 ao quarto trimestre de 2015;
2. Fazer previsão um passo à frente para o período de primeiro trimestre de 2016 ao quarto trimestre de 2018 e salvar previsão;
3. Calcular e salvar erro de previsão;
4. Faça a previsão para o ano de 2019.