



Universidade Federal do ABC

BACHARELADO EM ENGENHARIA AEROESPACIAL

LABORATÓRIO DE GUIAGEM NAVEGAÇÃO E CONTROLE

RODRIGO VIDAL CABRAL

RA: 11059314

PROBLEMA DE DOIS CORPOS

São Bernardo do Campo

2018

1. INTRODUÇÃO

O problema de dois corpos é um estudo clássico da mecânica celeste. Com o desenvolvimento do modelo heliocêntrico a partir dos principais astrônomos modernos, tais como Nicolau Copérnico, Tycho Brahe, Johannes Kepler, Galileu Galilei e Isaac Newton era primordial o estudo da interação entre os corpos do sistema solar. Particularmente no problema de dois corpos, adotamos apenas atração gravitacional como forma de interação entre eles, desprezando todas as possíveis perturbações que possam influenciar esse movimento. Corpos artificiais como satélites, também descrevem trajetórias em volta de corpos celestes, as chamadas órbitas. Vale lembrar que o corpo de maior massa tem por objetivo exercer uma força atrativa em relação ao corpo de menor massa, tais como satélites que orbitam em torno da Terra com diversas finalidades tecnológicas usuais em nosso planeta. O problema de dois corpos possui solução fechada, ou seja, conseguimos representar tanto numericamente quanto analiticamente. No entanto, na mecânica celeste, assim como na engenharia no geral, nos deparamos com diversos problemas impossíveis de obter soluções analíticas, por conta disso é de fundamental importância partir para a solução numérica e analisar se o fenômeno está sendo representado corretamente. Com isso, o objetivo desse trabalho é conhecer e visualizar a órbita que um veículo espacial descreve em torno da Terra em coordenadas cartesianas considerando o problema dinâmico de dois corpos [1].

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Em meados de 1680, Isaac Newton, conseguiu obter a expressão analítica do problema de dois corpos, a chamada Lei da Gravitação Universal, que já possuía anteriormente os resultados empíricos realizados por Kepler.

Para a solução deste problema algumas particularidades devem ser estritamente respeitadas, tais como a adoção de massas pontuais referente aos dois corpos que interagem entre si, além de, como citado anteriormente, o corpo de menor massa orbitar em torno do de maior massa, a partir apenas da influência da força gravitacional. Como forma de solução do problema iremos

adotar a segunda lei de Newton, explicitando as forças que podem influenciar o movimento orbital, como gravidade, arrasto, impulso, influência de um terceiro corpo, e outras não conhecidas. $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{grav} + \vec{F}_{arrasto} + \vec{F}_{impulso} + \vec{F}_{3corpo} + \vec{F}_{outras} = m\vec{a}$

(1)

No entanto, para o nosso problema de dois corpos ideal, , adotaremos algumas condições, tais como:

O V/E se encontra a uma altitude suficiente para que o arrasto seja desprezível (acima de 1000 Km). O movimento orbital é realizado consideravelmente próximo a Terra , logo a força de um terceiro corpo (Lua, Sol ou planetas) é negligenciável. V/E não possui motores para efetuar manobras, descartando a força devido ao impulso. Forças eletromagnéticas, radiação solar, dentre outras, são desprezíveis em comparação com a força gravitacional. A massa da Terra muito maior que do V/E e é considerada constante. Para que a gravidade da Terra atue a partir do seu centro, deve ser considerada uma esfera, simétrica e com densidade constante. Com isso, pode-se criar uma relação entre a segunda e a terceira lei de Newton (Lei da Gravitação Universal).

Aplicando as suposições na eq. (1), temos: $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{grav} = m\vec{a}$ (2)

Para o modelamento do problema é primordial definir o sistema referencial, neste trabalho foi usado o sistema inercial geocêntrico, ou seja, o eixo de coordenadas centrado na Terra, onde o eixo X está apontado para o ponto vernal, Z coincidente ao eixo de rotação da Terra (Polo Norte), Y completando o sistema destrógeno. Do ponto de vista da interação entre os corpos, a força gravitacional que a Terra exerce sobre o satélite descreve analiticamente um sentido contrário ao eixo referencial adotado, resultando em um sinal negativo, característico também da força central que é definida como positiva para repulsão e atrativa para atração. Adotando dois corpos de massas M_1 e M_2 , em um determinado instante de tempo nos pontos P_1 e P_2 , onde o índice 1 classifica o corpo de maior massa (Terra) e 2 o corpo de menor massa (Satélite), ou seja, corpo 2 orbitando em torno do corpo 1, a distância do ponto P de cada corpo até a origem de referencia é descrita por vetores posição \vec{R}_1 e \vec{R}_2 . No entanto, por definição vetorial tem-se que a relação $\vec{R} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1$, como o sistema referencial está centrado na Terra $\vec{R}_1 = 0$, conseqüentemente $\vec{V}_1 = 0$ e $\vec{a}_1 = 0$. Aplicando as simplificações descritas acima, tem-se:

$$\vec{F}_{grav} = M_2 \cdot \vec{a}_2 = \frac{-G \cdot M_1 \cdot M_2}{r^2} \cdot \hat{r} \quad (3)$$

Explicitando a aceleração na forma diferencial da variação da posição em relação ao tempo, obtém-se:

$$\vec{a}_2 = \frac{-G \cdot M_1}{r^2} \cdot \hat{r} = \dot{\vec{r}} \quad (4)$$

A partir da literatura, usa-se a constante μ para simplificação, onde relaciona o produto entre a massa da Terra e sua constante gravitacional, sendo $\mu = 3.986.105 \text{ km}^3/\text{s}^2$.

$$\dot{\vec{r}} = -\mu \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} \quad (5)$$

Para a solução desta função (obter posição r) é necessário integrar duas vezes, como a função é indefinida são necessárias duas constantes de integração. Como condição de contorno usa-se dois parâmetros constantes da órbita: momento angular específico e energia específica, conforme definições abaixo:

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \frac{\vec{H}}{m} = \vec{h} = Cte \quad (6) \quad (\text{Momento angular específico})$$

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = Cte \quad (7) \quad (\text{Energia específica})$$

Através de manipulações algébricas, presente na literatura [3], chega-se a equação polar da cônica, onde p é o *semilatus rectum*, e a excentricidade e v a anomalia verdadeira da cônica.

$$r = \frac{p}{1+e \cdot \cos(v)} \quad (8)$$

A eq. (8) representa cônicas (círculo, elipse e hipérbole) em um sistema de coordenadas polares onde a Terra está centrada no foco da cônica próxima ao perigeu. Considerando a órbita como uma elipse ($0 < e < 1$), temos $p = a(1 - e^2)$, onde a refere-se ao semi-eixo maior que define o tamanho da órbita. Sendo assim, como citado anteriormente, consegue-se descrever a órbita do satélite em torno da Terra em coordenadas cartesianas, com o intuito de determinar a velocidade e posição em relação ao tempo.

3. Estudo Numérico

O problema de dois corpos possui solução fechada, ou seja, solução analítica (detalhada no tópico anterior) e solução numérica que será explicitada neste capítulo. Retomando a equação diferencial não linear de 2ª ordem (x), e abrindo em coordenadas cartesianas x, y e z, onde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \Leftrightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, tem-se:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{-\mu}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\mu \times x}{r^3} \\ \dot{y} = \frac{-\mu}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\mu \times y}{r^3} \\ \dot{z} = \frac{-\mu}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\mu \times z}{r^3} \end{cases} \quad (9)$$

No entanto, o MATLAB® (que será o software utilizado neste trabalho), assim como a maioria dos softwares comerciais, trabalham com manipulações de matrizes, ou seja, torna-se necessário a linearização das equações, além da necessidade de redução de ordem da EDO para 1ª ordem, condição necessária dos integradores. Para isso, utiliza-se variáveis de estado, transformando –se um sistema com **seis** variáveis e **seis** equações.

$$\begin{cases} 1 = \dot{x} \\ 1 = \dot{y} \\ 1 = \dot{z} \\ x \quad y \quad z \quad \dot{x}_1 = \dot{x} = \frac{-\mu}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\mu \times x}{r^3} \\ \dot{y}_1 = \dot{y} = \frac{-\mu}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\mu \times y}{r^3} \\ \dot{z}_1 = \dot{z} = \frac{-\mu}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\mu \times z}{r^3} \end{cases} \quad (10)$$

Um dos pontos primordiais para definição da órbita é o período orbital (T). Para obter o valor de um período orbital, é necessário os valores iniciais de velocidade e posição, como tem-se 6 variáveis de estado, são necessários 6 condições iniciais, e são elas: $x_0 = (rx, ry, rz, vx, vy, vz)$. Logo, a partir dos dados fornecidos pelo problema, tem-se: $\dot{r} = 10016,34i - 17012,52j + 7899,28k$ (Km) e $\dot{v} = 2,50i - 1,05j + 3,88k$ (Km/s). São necessárias também algumas definições advinda da literatura [3], como energia específica (ε) e semi-eixo maior (a).

$$a = \frac{-\mu}{2\varepsilon} \text{ (m)} \quad (11) \quad ; \quad \varepsilon = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} \text{ (kg m}^2\text{/s}^2\text{)} \quad (12) \quad \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \text{ (s)} \quad (13)$$

Para obter a órbita que o satélite descreve é necessário integrar as equações (10) para o tempo variando de zero até o valor de uma órbita (T). O integrador a ser utilizado será o Runge-Kutta-Fehlberg de quarta e quinta ordem, representado pela função ODE45 do MATLAB®.

Representando graficamente a órbita descrita pelo satélite pode-se utilizar a função wgs84Ellipsoid, que representa uma norma cartográfica definida em 1984 utilizada em sistemas de navegação. A finalidade dessa função é representar a Terra em 3D, facilitando a compreensão da plotagem da órbita a partir de escalas nas três coordenadas cartesianas.

Abaixo, temos o fluxograma que soluciona o problema de dois corpos.

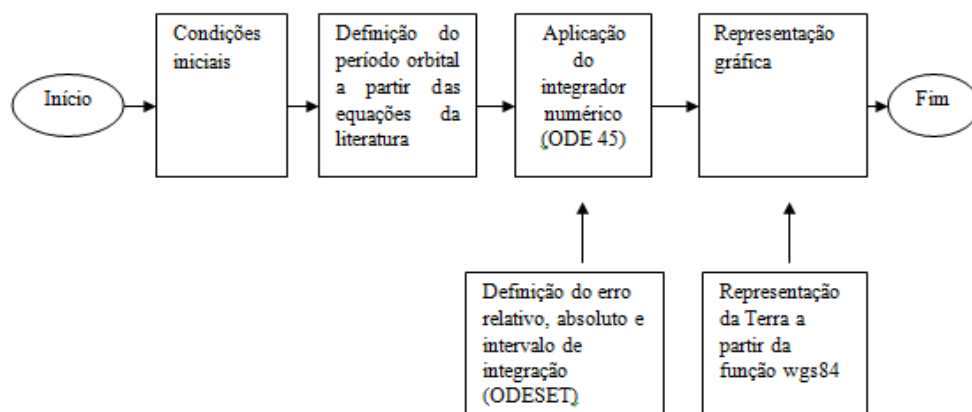


Figura 1: Fluxograma do código em MATLAB

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Partindo do pressuposto do problema de dois corpos ideal com as hipóteses adotadas, a expectativa se dá pela conservação da órbita independente do período orbital. Para comprovar essa adoção, foi simulado um problema com uma órbita completa e outro com 50 órbitas. Ao analisar graficamente o plot para 50 órbitas foi identificado um comportamento diferente do esperado fisicamente. Foi notada uma defasagem das órbitas no sentido radial em direção a terra, característico da perda de energia em problemas reais, algo incoerente com o nosso problema que é ideal. No entanto, essa defasagem está relacionada ao erro numérico do integrador, que está sendo acumulado ao longo das iterações. Esses erros são denominados relativos e absolutos,

decorrentes do truncamento das iterações. O erro absoluto é definido como a diferença em módulo do valor exato e valor aproximado, já o erro relativo é o quociente entre o absoluto e o valor aproximado. Ao utilizar a função ODE45 em suas condições iniciais, os erros são 10^{-3} para o relativo e 10^{-6} para o absoluto. Tendo isso em vista, pode-se concluir que a cada iteração o erro relativo está se aproximando do valor mais preciso, e tem uma influência maior para a convergência dos valores reais. Sendo assim, pode-se calibrar os erros até chegar na órbita fisicamente desejada. A partir da função ODESET, aumentou-se de forma progressiva a precisão do erro relativo até o valor 10^{-6} , valor este que representou cordialmente 50 órbitas semelhante a um único período orbital, conforme figura 2.

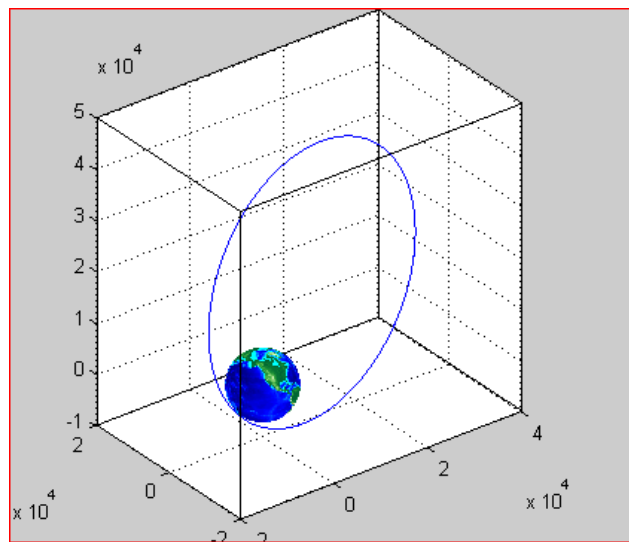


Figura 2 – Representação de cinquenta períodos orbitais utilizando a função odeset do ODE45.

Aplicando uma análise mais qualitativa podemos definir a partir de características da órbita, sua representatividade real. A inclinação e excentricidade elevada são evidentes, o período orbital aproximadamente metade do período da Terra, algo que indica a similaridade da órbita Molniya, aplicada a maior parte do tempo de operação no hemisfério norte.

5. CONCLUSÃO

A implementação numérica do problema de dois corpos, proporciona não só o acréscimo do conhecimento de um problema clássico da mecânica celeste, mas a análise crítica do resultado em comparação ao fenômeno físico, evidenciando a importância dos erros numéricos presente nas simulações de navegação espacial.

6. REFERÊNCIAS

- [1] CELESTINO, C. C. **Notas de Aulas da disciplina ESTS006-17 – Laboratório de Guiagem Navegação e Controle (pdf)**. UFABC, 2018.
- [2] CELESTINO, C. C. **Notas de Aulas da disciplina ESZS029-17 – Dinâmica Orbital (pdf)**. UFABC, 2018.
- [3] CURTIS, H. **Orbital Mechanics for Engineering Students**. Elsevier Aerospace Engineering Series, Elsevier, 2004.
- [4] MATHWORKS DOCUMENTATION. **Ode45 Function**. Disponível em: [.<https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/ode45.html>](https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/ode45.html). Acessado em: 16 de Junho de 2018.
- [5] SELLERS, J. J. **Understanding Space. An Introduction to Astronautics**. USA: McGraw-Hill, 2004.
- [6] **N2YO, MOLNIYA 1-91**. Disponível em: [.<https://www.n2yo.com/satellite/?s=25485>](https://www.n2yo.com/satellite/?s=25485). Acesso em 18 de Junho de 2018.