Processos Estocásticos

Introdução

Bacharelado em Ciência da Computação

2012 - 2

Variável aleatória

Quando realizamos um experimento aleatório estamos geralmente interessados em alguma medida ou atributo numérico deste experimento.

- Número de caras obtidas no lançamento de uma moeda 10 vezes;
- Número de bolas vermelhas obtidas ao extrair duas bolas, sem reposição, de uma urna contendo duas bolas brancas e três bolas vermelhas.

Variável aleatória

Podemos definir uma função que associa um valor numérico ao resultado do experimento aleatório. Desde que os resultados são aleatórios, os resultados das medidas também o serão. Desta forma faz sentido falar em probabilidades dos eventos numéricos resultantes.

Definição

Uma variável aleatória X é uma função que associa um número real x_i a cada resultado i no espaço amostral de um experimento aleatório.

Variável aleatória

O espaço amostral de um experimento que consiste em jogar uma moeda três vezes é

$$\Omega = \{CCC, CCK, CKC, CKK, KCC, KCK, KKC, KKK\},$$

onde C representa cara e K representa coroa.

Definindo X como o número de caras em três jogadas da moeda, X associa a cada resultado $i \in \Omega$ um número do conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$:

i	CCC	CCK	CKC	CKK	KCC	KCK	KKC	KKK
x_i	3	2	2	2	1	1	1	0

Associamos a cada valor x_i da v.a. X sua probabilidade de ocorrência.

No exemplo anterior:

- $P(X = 3) = \frac{1}{8}$
- $P(X = 2) = \frac{3}{8}$
- $P(X = 2) = \frac{3}{8}$
- $P(X = 0) = \frac{1}{8}$

Variável aleatória discreta

Definição

Uma função X, definida no espaço amostral Ω e com valores num conjunto discreto de pontos da reta é dita uma variável aleatória discreta .

Definição

Chama-se função de probabilidade da v.a. discreta X, que assume os valores $x_1, x_2, .., x_n, ...$ a função $\{(x_i, p(x_i)), i = 1, 2, ...\}$, que a cada valor de x_i associa a sua probabilidade de ocorrência, isto é,

$$p(x_i) = P(X = x_i), \; i = 1, 2, ...$$

Variável aleatória discreta

Definição

Dada a variável X, chama-se função de distribuição acumulada (f.d.a ou simplesmente f.d.) F(x) à função

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Neste caso

$$P(X \leq x_k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = x_i).$$

O contradomínio desta função é o intervalo $[0, 1]$.

Uma v.a. discreta que será muito importante neste curso é a variável aleatória de Poisson . Ela é empregada quando se deseja contar o número de eventos de certo tipo que ocorrem num intervalo de tempo.

- número de chamadas recebidas por um telefone durante cinco dias;
- número de falhas de um computador num dia de operação.

Variável aleatória discreta

Definição

A v.a. N tem uma distribuição de Poisson com parâmetro λ se

$$P(N = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

λ representa o número médio de eventos ocorrendo no intervalo considerado.

- $\mathrm{E}(N) = \lambda$
- $\mathrm{Var}(N) = \lambda$

Variável aleatória discreta

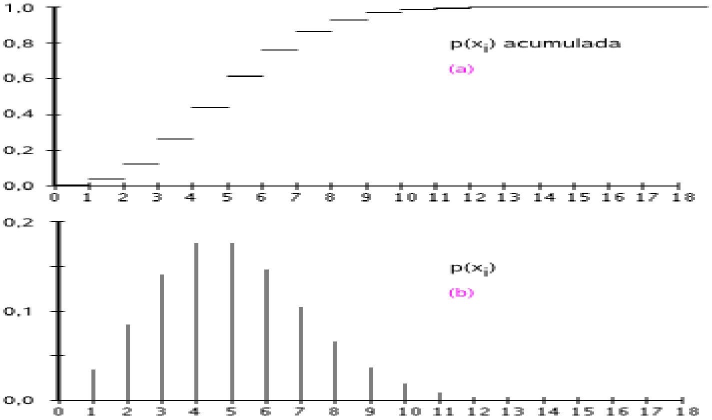


Figura: Distribuição de Poisson: Distribuição Acumulada - Densidade

Variável aleatória discreta

Um telefone recebe, em média, cinco chamadas por minuto. Supondo que a distribuição de Poisson seja adequada nessa situação, obter a probabilidade de que o telefone não receba chamadas durante um intervalo de um minuto.

Um telefone recebe, em média, cinco chamadas por minuto. Supondo que a distribuição de Poisson seja adequada nessa situação, obter a probabilidade de que o telefone não receba chamadas durante um intervalo de um minuto.

Segue $\lambda = 5$ e

$$P(N = 0) = \frac{5^0 \mathrm{e}^{-5}}{0!} = 0,0067.$$

Um telefone recebe, em média, cinco chamadas por minuto. Supondo que a distribuição de Poisson seja adequada nessa situação, obter a probabilidade de que o telefone não receba chamadas durante um intervalo de um minuto.

Por outro lado, se quisermos a probabilidade de obter no máximo duas chamadas em quatro minutos, teremos $\lambda = 20$ chamadas em quatro minutos, logo

$$P(N \leq 2) = P(N = 0) + P(N = 1) + P(N = 2).$$

Variável aleatória contínua

Definição

Uma função X, definida no espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais, é dita uma variável aleatória contínua .

- Tempo entre chegadas de clientes em um banco;
- O peso ou altura das pessoas de uma cidade;
- O tempo de vida de uma lâmpada.

Variável aleatória contínua

Definição

Uma função X, definida no espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais, é dita uma variável aleatória contínua .

Como existem infinitos valores que a v.a. contínua pode assumir, não tem muito sentido falar na probabilidade de que a variável X seja igual a certo valor, pois essa será sempre igual a zero. Mas podemos determinar a probabilidade de que X esteja compreendida entre dois valores quaisquer.

Variável aleatória contínua

Para isto precisamos conhecer a função densidade de probabilidade (f.d.p.) $f(x)$ pois,

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\mathrm{dx}.$$

A f.d.p é um indicador da concentração de ”massa” (probabilidade) nos possíveis valores de X.

Definição

Dada a variável X, chama-se função de distribuição acumulada (f.d.a ou simplesmente f.d.) F(X) à função

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{dt}$$

Para todos os valores de x para os quais $F(x)$ é derivável temos

$$F^{'}(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Variável aleatória contínua

Neste curso, as principais v.a contínuas usadas serão as varíaveis Normal e Exponencial.

Definição

Dizemos que a v.a. X tem distribuição normal com parâmetros μ e σ^2, $-\infty < \mu < +\infty$ e $0 < \sigma^2 < +\infty$, se sua densidade é dada por

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

- $\mathrm{E}(X) = \mu$
- $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$
- $F(y) = \int_{-\infty}^{y} f(x;\mu,\sigma^2)\mathrm{dx}$, $y \in \mathbb{R}$.

Variável aleatória contínua

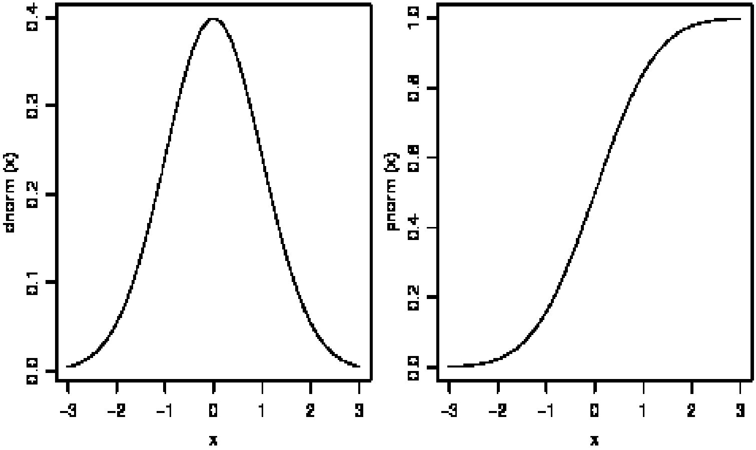


Figura: Distribuição Normal: Densidade - Distribuição Acumulada

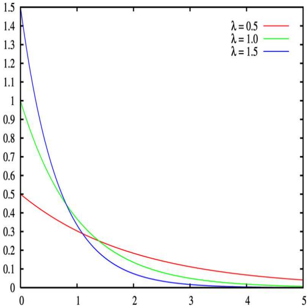
Definição

Dizemos que a v.a. T tem distribuição exponencial com parâmetro $\beta > 0$ se sua densidade é dada por

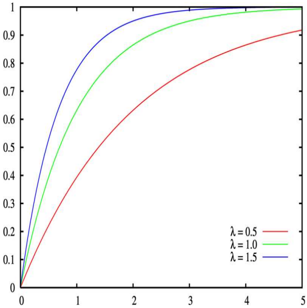
$$f(t;\beta) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0 \\ \frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\beta}}, & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

- $\mathrm{E}(T) = \beta$
- $\mathrm{Var}(T) = \beta^2$
- $$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\beta}}, & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

Variável aleatória contínua



(a) Função Densidade



(b) Distribuição Acumulada

Figura: Distribuição Exponencial

Processos Estocásticos

- Considere a temperatura X de uma certa cidade ao meio dia. A temperatura X é uma v.a. e toma valores diferentes a cada dia. Para obter as estatísticas completas de X, precisamos armazenar valores de temperatura durante vários dias.
- Mas a temperatura é também função do tempo. À uma da tarde, por exemplo, a temperatura pode ter uma distribuição totalmente diferente daquela obtida para o meio dia.
- Então a v.a X é uma função do tempo.

Definição

Uma v.a. que é uma função do tempo é chamada de um *processo estocástico* *.*

Os processos estocásticos representam sistemas nos quais o estado muda ao longo do tempo.

Uma pequena loja de equipamentos eletrodomésticos vende um certo tipo de máquina de lavar roupa. No entanto, ela somente pode ter em estoque no máximo cinco unidades. Então, se no final do dia a loja tem no estoque somente uma unidade ou nenhuma, o gerente manda buscar tantas unidades quantas sejam necessárias para ter cinco na loja no dia seguinte antes de começar o expediente.

- Vamos chamar de X_t à quantidade de unidades na loja no final do t-ésimo dia.
- Cada X_t pode ser considerada uma variável aleatória, pois é razoável supor que não temos como prever a quantidade de máquinas que serão compradas cada dia.

Definição

Chamaremos de processos estocásticos a qualquer família de variáveis aleatórias X_t, com $t \in \mathbb{T}$ e sendo $\mathbb{T}$ algum espaço de parâmetros.

Na maioria das situações reais, o espaço de parâmetros representa o tempo, mas nem sempre isto é assim.

Os produtos finais de uma cadeia de montagem, após uma supervisão à que são submetidos, podem ser considerados defeituosos ou não.

- Se o n-ésimo produto não tiver defeito, fazemos $X_n = 1$, caso contrário $X_n = 0$.
- Neste exemplo, o parâmetro representa o número de produtos montados.