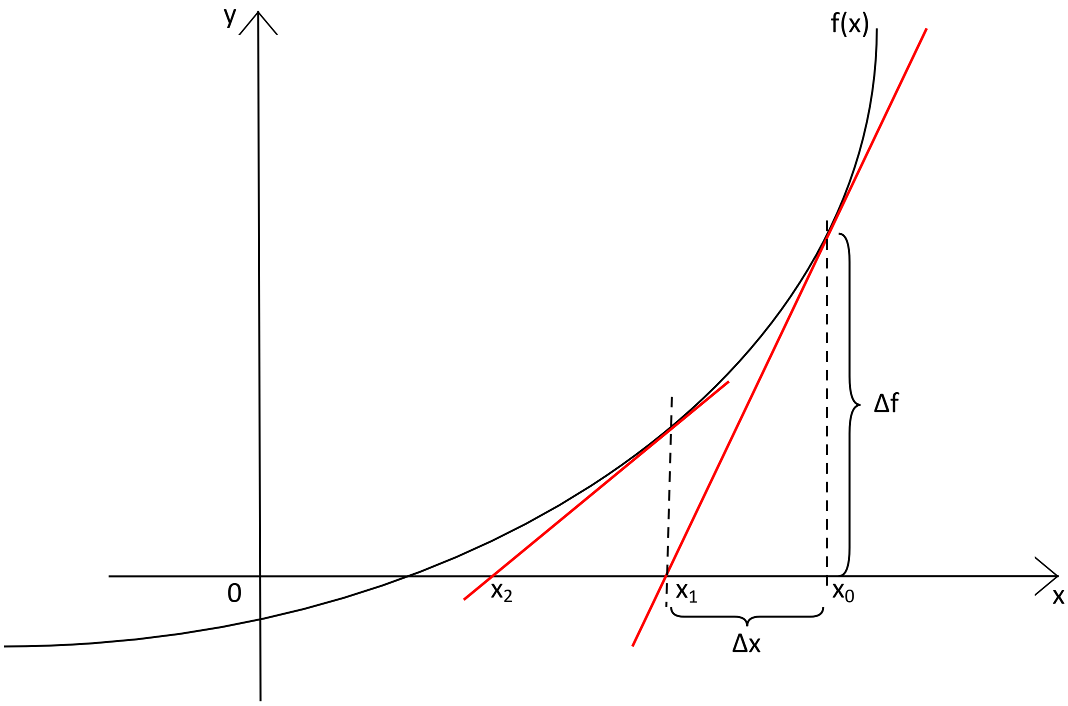
Método de Newton

O método de Newton (também conhecido por método de Newton-Raphson) é um método numérico para encontrar as raízes (ou zeros) de uma função.

Considere a função $f(x)$ e uma primeira aproximação, x_0, como mostra a figura a seguir, onde r é a raiz de $f(x)$:



Podemos obter uma segunda aproximação, x_1:

$$f'(x_0) \sim \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{0 - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$(x_1 - x_0) f'(x_0) \sim -f(x_0)$$

$$x_1 - x_0 \sim -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Analogamente, obtemos uma terceira aproximação, x_2:

$$f'(x_1) \sim \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{0 - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$(x_2 - x_1)f'(x_1) \sim -f(x_1)$$

$$x_2 - x_1 \sim -\frac{f(x_1)}{f'(1)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Repetindo esse processo, obtemos uma sequência de aproximações $x_0, x_1, x_2, \ldots$ Assim, se x_n for a n-ésima aproximação, de modo que $f'(x_n) \neq 0$, então temos que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Se os números x_n ficarem cada vez mais próximos da raiz, r, à medida que n aumenta, então temos que a sequência de aproximações converge para a raiz da função, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = r.$$

Vale observar que o procedimento para ir de n para n+1 é o mesmo, para todos os valores de n, o que caracteriza o método de Newton como um método iterativo. Logo, dada uma precisão, um critério de parada é quando duas aproximações sucessivas, x_n e x_{n+1}, apresentarem os mesmos valores na dada precisão (isso significa que se a precisão for de 10^{-4}, quatro casas decimais, no momento em que as duas aproximações sucessivas, x_n e x_{n+1}, são iguais até a quarta casa decimal, então o método pára).

Referâncias Bibliográficas:

- BURDEN, R. L.; FAIRES, D. *Análise Numérica*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

- STEWART, J. *Cálculo: volume 1*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002.

Implementar o Método de Newton e fazer os seguintes teste:

1. Determinar a terceira aproximação da raiz da equação $x^5 + 2 = 0$, considerando a primeira aproximação $x_0 = -1$.

2. Determinar as raízes de $x^6 - x^4 + 3x^3 - 2x = 0$, com precisão de três casas decimais.

3. Determinar as raízes de $2x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0$, no intervalo $[2; 3]$, com precisão de cinco casas decimais.

4. Determinar as raízes de $x^7 - 3x^5 + 4x^2 - 2 = 0$, no intervalo de $[0; 2]$, com precisão 10^{-4}.

5. Faça uma análise para caso $x^3 - 3x + 6 = 0$, com $x_0 = 1$.