

① 12ª Aula

Análise amortizada

- Útil para analisar sequências de operações ou iterações, que normalmente envolve estruturas de dados
- Serve para melhorar análises de pior caso que baseiam-se no pior caso de uma operação ou iteração
- Diferente de análise de caso médio

② Técnicas de análise amortizada

- Agregado
- Contábil
- Potencial

Lembre-se que análise amortizada não envolve probabilidade!

③ Método agregado

- $T(n)$ é o custo de uma sequência de n operações
- Custo amortizado é dado por $\frac{T(n)}{n}$
- Cada operação recebe o mesmo custo amortizado, mesmo se são diferentes

④ Exemplo da pilha

- Considere uma pilha com operações usuais
 - * $\text{push}(x, S) = \text{"empilha } x \text{ em } S"$
 - * $\text{pop}(S) = \text{"desempilha do topo de } S"$
- Cada operação executa em $O(1)$
- O custo de uma sequência de n operações $\text{push}(x, S)$ e $\text{pop}(S)$ é $T(n) = n$.

⑦ Análise "ingênua"

- Considere uma sequência de n operações push, pop e multipop em uma pilha inicialmente vazia
- Custo do pior caso do push e pop é n
- Custo de pior caso do multipop em uma operação é n , pois a pilha tem no máximo n elementos.
- Podemos ter n operações multipop na sequência, então o custo total é $O(n^2)$

⑧ Aplicando o método agregado

- Embora uma operação multipop possa ser cara, qualquer sequência de n operações push, pop e multipop executa no máximo em $O(n)$. Por que?
- n push's $\Rightarrow n$ pop's
- Custo total é $2n = O(n)$
- Custo amortizado para cada operação da sequência: $\frac{2n}{n} = 2 = O(1)$

⑨ Método contábil

- Atribui "cobranças" diferentes às operações diferentes
- Custo amortizado = preço cobrado
- Se custo amortizado > custo atual, armazena a diferença como crédito
- Use o crédito depois para pagar por operações cujo custo atual > custo amortizado

⑩

- c_i é o custo atual da i -ésima operação
- \hat{c}_i é o custo amortizado da i -ésima operação

→ Então,
$$\sum_{i=1}^n \hat{c}_i \geq \sum_{i=1}^n c_i$$

→ Crédito armazenado:
$$\sum_{i=1}^n \hat{c}_i - \sum_{i=1}^n c_i \geq 0$$

⑪ Exemplo da pilha

operação	custo atual	custo amortizado
push	1	2
pop	1	0
multipop	$\min\{K, S \}$	0

Intuição envolvida: Cobra R\$ 2 para empilhar

→ R\$ 1 para o push

→ R\$ 1 é pré-pagamento para quando desempilhar com pop ou multipop

⑫

→ Como cada objeto tem R\$ 1, que é crédito, o crédito nunca fica negativo

→ Portanto, para n operações o custo é $2n = O(n)$

13) Método potencial

- Estrutura inicial D_0 , onde n operações são realizadas, resultando em uma sequência D_0, D_1, \dots, D_n
- c_i é o custo real (atual) da i -ésima operação
- Uma função potencial ϕ , atribui a cada estrutura D_i um número real $\phi(D_i)$

14)

- O custo amortizado da i -ésima operação é definida por:

$$\hat{c}_i = c_i + \underbrace{\phi(D_i) - \phi(D_{i-1})}_{\text{Energia Potencial}}$$

- O custo amortizado total é:

$$\sum_{i=1}^n \hat{c}_i = \left(\sum_{i=1}^n c_i \right) + \phi(D_n) - \phi(D_0)$$

- Se $\phi(D_n) - \phi(D_0) \geq 0$, então $\sum_{i=1}^n \hat{c}_i$ é um limitante superior para o custo real (atual).

⑮ Exemplo da pilha

→ $\phi(D_i)$ = Número de elementos na pilha ($|D_i|$)

→ $\phi(D_0) = 0$ (início)

→ $\phi(D_n) = |D_n|$ (final)

→ Note que $\phi(D_n) - \phi(D_0) \geq 0$

→ Quando uma operação push é executada em uma pilha com $|D_{i-1}| = s$ elementos, a variação de energia potencial é:

$$\phi(D_i) - \phi(D_{i-1}) = (s+1) - s = 1$$

⑯

→ Lembremos que o custo real (atual) da operação é $c_i = 1$

→ Custo amortizado da operação push:

$$\hat{c}_i = c_i + \phi(D_i) - \phi(D_{i-1}) = 1 + 1 = 2$$

→ Custo amortizado da operação pop:

0 (zero)

(17)

→ Suponha que a i -ésima operação execute $\text{multi-pop}(K, S)$ e assim $K' = \min\{K, |S|\}$ são desempilhados

→ Custo real (atual) da operação é $c_i = K'$

→ A variação de energia potencial é:

$$\phi(D_i) - \phi(D_{i-1}) = (|S| - K') - |S| = -K'$$

→ Custo amortizado:

$$\hat{c}_i = c_i + \phi(D_i) - \phi(D_{i-1}) = K' - K' = 0$$

(18)

→ O custo amortizado total de n operações é $O(n)$

→ Portanto, o custo real de n operações no pior caso é $O(n)$

→ Lembre-se que o custo amortizado é um limite superior do custo real.