Aula Teórica 2 - Anotações

25 de setembro de 2023 20:40

$(f \cdot g)\, a = f(g\, a)$ (2.6) $a \rightarrow \boxed{g} \xrightarrow{ga} \boxed{f} \rightarrow f(g\, a)$

Composição de funções

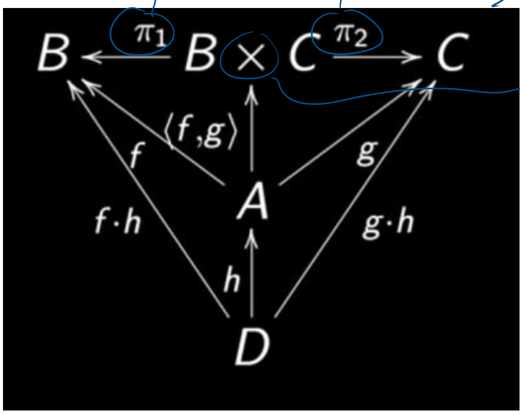
Split de funções : $\langle f, g \rangle \overset{(2.20)}{=} (f\, a, g\, a)$ $a \begin{cases} \rightarrow \boxed{f} \rightarrow f a \\ \rightarrow \boxed{g} \rightarrow g a \end{cases}$

$f \times g = \langle f \cdot \pi_1, g \cdot \pi_2 \rangle$

par conceptual $\begin{cases} c \rightarrow \boxed{f} \rightarrow f c \\ d \rightarrow \boxed{g} \rightarrow g d \end{cases}$

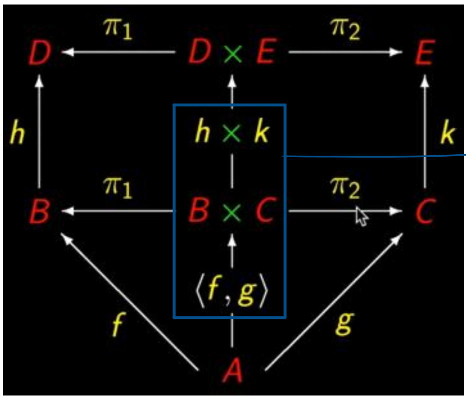
$\langle f, g \rangle \cdot h \Leftrightarrow \langle f \cdot h, g \cdot h \rangle$ (2.26) FUSÃO-×

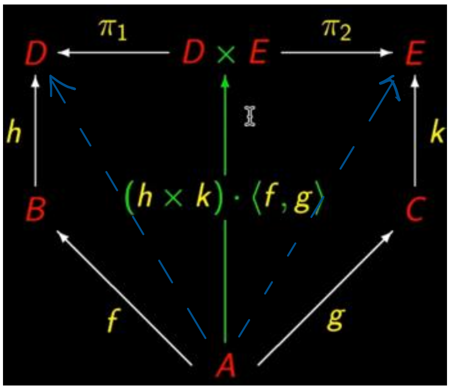
Projeções



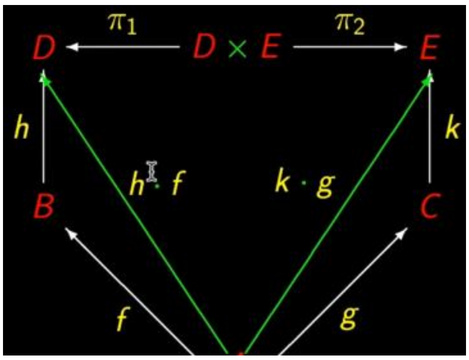
Produto cartesiano

$\{1,2,3\} \times \{1,2\}$

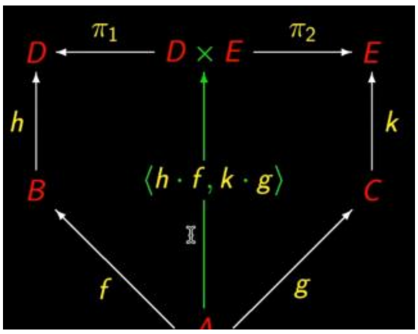


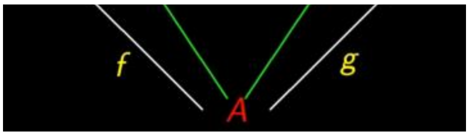


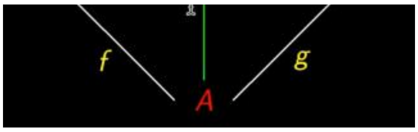
Produto cartesiano de (funções) $h \times k$ após split $\langle f, g \rangle$



$\Longrightarrow$







LEI

Absorção-$\times$

$$(h \times k) \cdot \langle f, g \rangle = \langle h \cdot f, k \cdot g \rangle \qquad (2.27)$$

$$\begin{tikzcd}
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \\
D \arrow[u, "h"] & D \times E \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[u, "h \times k"'] & E \arrow[u, "k"'] \\
& C \arrow[ul, "f"] \arrow[u, "\langle f,g \rangle"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

HASKELL one writes (A, B) to denote $A \times B$, for A and B two pre-defined datatypes, fst to denote π_1 and snd to denote π_2. In the C programming language this datatype is called the "struct datatype",

```
struct {
  A first;
  B second;
};
```

$$\begin{tikzcd}
D & D \times E \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & E \\
B \arrow[u, "h"] & B \times C \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[u, "h \times k"] & C \arrow[u, "k"']
\end{tikzcd}$$

LEIS: Natural-π_1 (2.28)

$$\underbrace{\pi_1 \cdot (h \times k)}_{(1)} = \underbrace{h \cdot \pi_1}_{(2)}$$

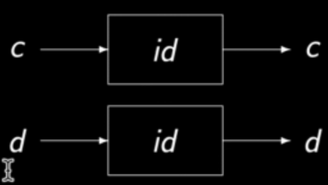
Natural-π_2 (2.29)

$$\underbrace{\pi_2 \cdot (h \times k)}_{(1)} = \underbrace{k \cdot \pi_2}_{(2)}$$

Functor-id-$\times$

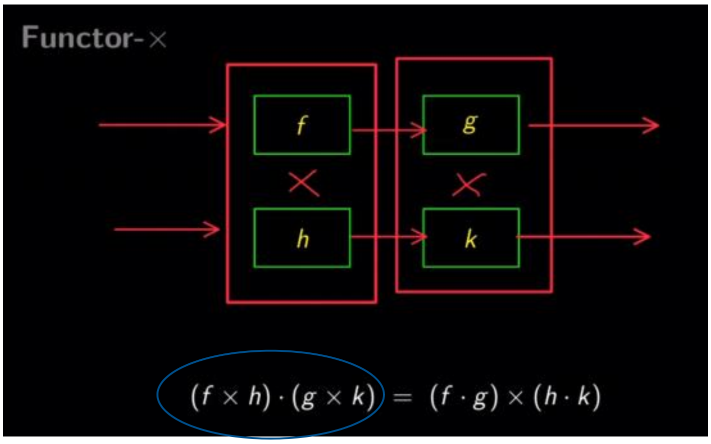
→ conceito importante

$$id \times id = id \qquad (2.31)$$

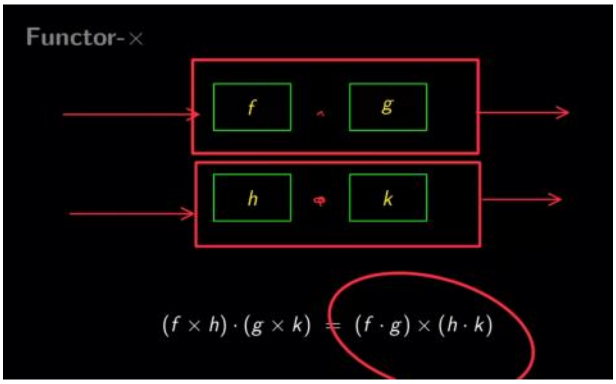


Produto de identidades é a identidade.

$(g\times h)\cdot(g\times k) = (g\cdot h)\times(h\cdot k)$ (2.30)

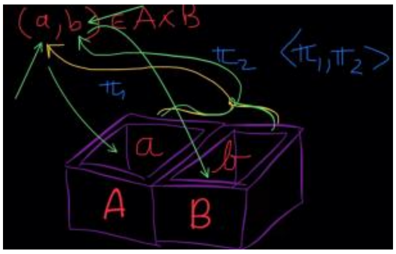


$=$



Reflexão-× $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = id$ (2.32)

Eq-× $\langle i, j \rangle = \langle f, g \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} i = f \\ j = g \end{cases}$ (2.64)



$$\begin{tikzcd} A & A\times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \\ & \underbrace{A\times B}_{\text{Par}} \arrow[ul] \arrow[u, "\boxed{\langle \pi_1, \pi_2 \rangle}"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$\Leftrightarrow id$

Split gera pares

$(a,b) \in A\times B$

$f, g : B \leftarrow A$

$\underbrace{f = g}_{\text{Sem variáveis}}$ iff $\underbrace{\langle \forall a : \overbrace{a \in A}^{\text{Entrada}} : f\,a \overset{\text{Saída}}{\underset{\text{em } B}{=_B}} g\,a \rangle}_{\text{Com variáveis}}$

⇒ Point-free

Expressões lógicas

Propriedade Universal

Universal-×

Existência

$$k = \langle f, g \rangle \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 \cdot k = f \\ \pi_2 \cdot k = g \end{cases}$$

"Existe uma solução — $k = \langle f, g \rangle$ — para as equações da direita"

VS

Universal-×

Unicidade

$$k = \langle f, g \rangle \Leftarrow \begin{cases} \pi_1 \cdot k = f \\ \pi_2 \cdot k = g \end{cases}$$

"As equações da direita só têm uma solução: $k = \langle f, g \rangle$"

Existência de uma solução VS Unicidade de uma solução

$$id = \langle f, g \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{cases}$$

Dedução da propriedade Reflexão-X a partir da propriedade Universal deste combinador.

$\langle h, k \rangle = \langle f, g \rangle$

(1 eq., 4 incógnitas)

$$\begin{aligned}
& \langle h, k \rangle = \langle f, g \rangle \\
\Leftrightarrow \quad & \{ \text{universal-}\times \} \\
& \begin{cases} \pi_1 \cdot \langle h, k \rangle = f \\ \pi_2 \cdot \langle h, k \rangle = g \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \{ \text{cancelamento-}\times \} \\
& \begin{cases} h = f \\ k = g \end{cases}
\end{aligned}$$

Dedução do Eq-X

$$\begin{tikzcd}
B & B \times A \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & A \\
& A \times B \arrow[ul, "\pi_2"] \arrow[u, "\langle \pi_2, \pi_1 \rangle"] \arrow[ur, "\pi_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Equação

$\langle \pi_2, \pi_1 \rangle \circ k = id$

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[r, bend left, "\langle \pi_2, \pi_1 \rangle"] & B \times A \arrow[l, bend left, "k = \langle \pi_2, \pi_1 \rangle"]
\end{tikzcd}$$

$= SWAP$

Universal-X

$$\left\{ k = \langle f, g \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 \cdot k = f \\ \pi_2 \cdot k = g \end{cases} \right.$$

$SWAP \circ SWAP = id$

$\langle \pi_2, \pi_1 \rangle \cdot k = id$

$\Leftrightarrow \langle \pi_2 \cdot k, \pi_1 \cdot k \rangle = id$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi_2 \cdot k = \pi_1 \\ \pi_1 \cdot k = \pi_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 \cdot k = \pi_2 \\ \pi_2 \cdot k = \pi_1 \end{cases}$$

Universal-X

$$\Leftrightarrow \left\{ \pi_1 \cdot k = \pi_2 \right. \quad \Leftrightarrow \left\{ \pi_2 \cdot k = \pi_1 \right. \quad \text{Universal-}\times$$

$$\Leftrightarrow k = \langle \pi_2, \pi_1 \rangle \quad \text{YEP}$$

$f \cdot g$ Composição sequencial

Composição paralela $\langle f, g \rangle$

Associatividade

$$(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$$

Associatividade ?

$$\langle \langle f, g \rangle, h \rangle = \langle f, \langle g, h \rangle \rangle \;? \longrightarrow \text{NÃO}$$

Mas existe uma relação entre as duas expressões funcionais.

$$\begin{tikzcd} A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \\ & D \arrow[ul, "f"] \arrow[u, "\langle f, g \rangle"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B & B \times C \arrow[l, "\pi_2"'] \arrow[r, "\pi_1"] & C \\ & D \arrow[ul, "g"] \arrow[u, "\langle g, h \rangle"] \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \times B & (A \times B) \times C \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & C \\ & D \arrow[ul, "\langle f, g \rangle"] \arrow[u, "\langle \langle f, g \rangle, h \rangle"] \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd} \quad \neq \quad \begin{tikzcd} A & A \times (B \times C) \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \times C \\ & D \arrow[ul] \arrow[u, "\langle f, \langle g, h \rangle \rangle"] \arrow[ur, "\langle g, h \rangle"'] & \end{tikzcd}$$

Diferentes,
mas relacionadas.

$$\begin{tikzcd} (A \times B) \times C \arrow[rr, bend left, "k"] & & A \times (B \times C) \\ & D \arrow[ul, "\langle \langle f, g \rangle, h \rangle"] \arrow[ur, "\langle f, \langle g, h \rangle \rangle"'] & \end{tikzcd}$$

Portanto, $k \cdot \underbrace{\langle \langle f, g \rangle, h \rangle}_{id\,?} = \langle f, \langle g, h \rangle \rangle$

$$\langle \langle f, g \rangle, h \rangle = id$$

Universal-× $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = \langle f, g \rangle \\ \pi_2 = h \end{array} \right.$ — Universal-× $k = \langle f, g \rangle \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot k = f \\ \pi_2 \cdot k = g \end{array} \right.$

Universal-× $\Leftrightarrow \boxed{\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot \pi_1 = f \\ \pi_2 \cdot \pi_1 = g \\ \pi_2 = h \end{array} \right.}$

$$k = \langle \pi_1 \cdot \pi_1, \langle \pi_2 \cdot \pi_1, \pi_2 \rangle \rangle$$

$$\Leftrightarrow \{ \pi_2 = id \cdot \pi_2 \}$$

$$k = \langle \pi_1 \cdot \pi_1, \langle \pi_2 \cdot \pi_1, id \cdot \pi_2 \rangle \rangle$$

$$\begin{tikzcd} B & B \times C \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & C \\ & \arrow[ul, "f"] \arrow[u, "\langle f, g \rangle"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \longrightarrow \{ f \times g = \langle f \cdot \pi_1, g \cdot \pi_2 \rangle \}$$

(tirar o da esquerda e aplicar f, tirar o da direita e aplicar g)

$$\begin{tikzcd} B & A\times B \arrow[l] \arrow[r] & C \\ & A \arrow[ul, "f"] \arrow[u, "\langle f,g\rangle"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} C & C\times D \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & D \\ A \arrow[u, "f"] & A\times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] \arrow[u, "f\times g"] & B \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} C & C\times D \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & D \\ A \arrow[u, "f"] & A\times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] \arrow[u, "f\times g"] & B \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \quad f\times g = \langle f\cdot\pi_1,\ g\cdot\pi_2\rangle$$

$$\{\, f\times g = \langle f\cdot\pi_1,\ g\cdot\pi_2\rangle \,\}$$

(tirar o da esquerda e aplicar f, tirar o da direita e aplicar g) é equivalente a f x g (a, b) = (f a, g b)

$$\Leftrightarrow \quad k = \langle \pi_1\cdot\pi_1,\ \pi_2\times id\rangle$$

$\langle \pi_1\cdot\pi_1,\ \pi_2\times id\rangle$ Exercício

$$\begin{tikzcd} (A\times B)\times C \arrow[rr, bend left, "\langle \pi_1\cdot\pi_1,\ \pi_2\times id\rangle"] & & A\times(B\times C) \arrow[ll, bend left, "j"] \\ & D \arrow[ul, "\langle\langle f,g\rangle,h\rangle"] \arrow[ur, "\langle f,\langle g,h\rangle\rangle"'] & \end{tikzcd}$$

$$j\cdot\underbrace{\langle f,\langle g,h\rangle\rangle}_{id\,?} = \langle\langle f,g\rangle,h\rangle \quad\Rightarrow\quad j\cdot id = j$$

$$\langle f,\langle g,h\rangle\rangle = id$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 = f \\ \pi_2 = \langle g,h\rangle \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 = f \\ \pi_1\cdot\pi_2 = g \\ \pi_2\cdot\pi_2 = h \end{cases}$$

$$j = \langle\langle \pi_1,\ \pi_1\cdot\pi_2\rangle,\ \pi_2\cdot\pi_2\rangle$$
$$= \langle\langle \underline{id\times\pi_1},\ \underline{\pi_1\cdot\pi_2}\rangle,\ \pi_2\cdot\pi_2\rangle$$
$$= \langle id\times\pi_1,\ \pi_2\cdot\pi_2\rangle$$

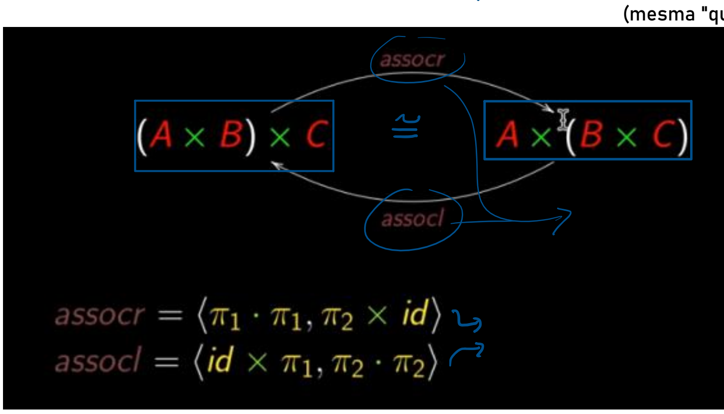
(mesma "quantidade de

" em ambos os

s

do

da



Inversas uma da outra

$$assocr\cdot assocl = id \quad (\text{esquerda})$$
$$assocl\cdot assocr = id \quad (\text{direita})$$

$\Rightarrow$ Não há perda de informação. Isomorfismo. (Exemplo: SWAP)

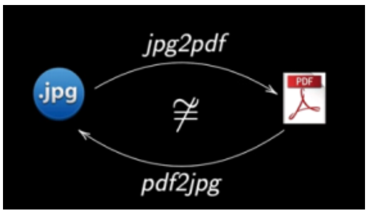
$\underline{\text{ISO}}$ + $\underline{\text{MORFISMO}}$

a mesma — forma

"FORMA SEMELHANTE"

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & B \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

$$f\cdot g = id$$
$$g\cdot f = id$$



Neste caso, há perda de informação, logo não há isomorfismo.

$$jpg2pdf\cdot pdf2jpg \neq id$$
$$pdf2jpg\cdot jpg2pdf \neq id$$

Apesar de poder haver isomorfismo a nível visual (avaliação humana).

Conversão de formatos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "exporta"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "(\cong)"] & C \arrow[d, "r"] \\ {} & {} \end{tikzcd}$$

Para valer a pena, tanto a exportação como a importação têm de custar pouco em termos de recursos.

GESTÃO E REUTILIZAÇÃO

Para valer a pena, tanto a exportação como a importação têm de custar pouco em termos de recursos.

GESTÃO E REUTILIZAÇÃO DE CÓDIGO

Necessidade

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "g"'] \arrow[r, phantom, "(\cong)"] & C \arrow[d, "r"] \\ B & D \arrow[l, "importa"] \end{tikzcd}$$

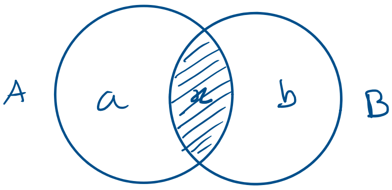
Reutilizável

$$g = importa \cdot r \cdot exporta$$

EM HASKELL:

```
Prelude> split f g a = (f a , g a)
Prelude> f>< g = split (f.p1)(g.p2)
Prelude>
Prelude> swap = split p2 p1
Prelude> assocl = split (id >< p1) (p2.p2)
Prelude> assocr = split (p1.p1) (p2 >< id)
Prelude>
Prelude> assocl ("Texto",(10, False))
(("Texto",10),False)
Prelude> (assocr.assocl) ("Texto",(10, False))
("Texto",(10,False))
```

$A \cup B = \{a | a \in A\} \cup \{b | b \in B\}$



↳ A ou B?

Reunião disjunta

$\{(1, a) | a \in A\} \cup \{(2, b) | b \in B\} = A + B$

"Etiqueta 1 e etiqueta 2"

↳

$A + B = \{i_1\, a \,|\, a \in A\} \cup \{i_2\, b \,|\, b \in B\}$
$i_1 a = (1, a) \wedge i_2 b = (2, b)$

$m : A + B \to C$
$i_1 : A \to A + B$
$i_2 : B \to A + B$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "f"'] & A + B \arrow[d, "m"] & B \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

$f = m \cdot i_1$
$g = m \cdot i_2$

O "m" quanto tem entradas do tipo A vai "ativar o f", e quando tem entradas do tipo B vai "ativar o g".

$$\begin{tikzcd} A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \\ & C \arrow[ul, "f"] \arrow[u, "\langle f, g\rangle"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Funções correm em paralelo.
Projeções p1 e p2.
Produto de A e B.

PRODUTO

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "f"'] & A + B \arrow[d, "\boxed{[f, g]}"] & B \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Lê-se "ou f, ou g"

Funções correm em alternativa.
Injeções i1 e i2.
Soma de A e B.

CO-PRODUTO

UNIVERSAL-+

$$k = [f, g] \Leftrightarrow \begin{cases} k \cdot i_1 = f \\ k \cdot i_2 = g \end{cases}$$

Comparar com

$$k = \langle f, g\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 \cdot k = f \\ \pi_2 \cdot k = g \end{cases}$$

Aula 2, parte 2, 31:05

https://www.di.uminho.pt/~jno/media/cp/