Cálculo de Programas
Algebra of Programming

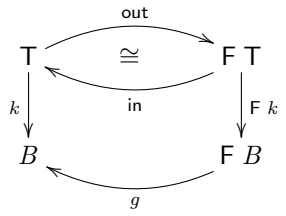
UNIVERSIDADE DO MINHO
Lic. em Engenharia Informática (3º ano)
Lic. Ciências da Computação (2º ano)

2023/24 - Ficha *(Exercise sheet)* nr. 7

O quadro abaixo representa a **propriedade universal** que define o combinador **catamorfismo**, com duas instâncias — números naturais $\mathbb{N}_0$ e listas finitas A^*, onde $\widehat{f}$ abrevia $\mathsf{uncurry}\, f$.

*The table below depicts the **universal property** that defines the **catamorphism** combinator, with two instances — natural numbers $\mathbb{N}_0$ and finite lists A^*, where $\widehat{f}$ abbreviates $\mathsf{uncurry}\, f$:*

Catamorfismo *(Catamorphism)*:



$$k = (\!|\, g \,|\!) \;\Leftrightarrow\; k \cdot \mathsf{in} = g \cdot \mathsf{F}\; k \qquad \text{(F1)}$$

Listas *(Lists)*:

$$\begin{cases} \mathsf{T} = A^* \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{in} = [\mathsf{nil}\,, \mathsf{cons}] \\ \mathsf{nil}\ \_ = [\,] \\ \mathsf{cons}\ (h, t) = h : t \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{F}\ X = 1 + \mathbb{N}_0 \times X \\ \mathsf{F}\ f = id + id \times f \end{array} \right. \end{cases} \qquad \mathsf{foldr}\ f\ i = (\!|\, [\underline{i}\,, \widehat{f}] \,|\!)$$

Números naturais *(Natural numbers)*:

$$\begin{cases} \mathsf{T} = \mathbb{N}_0 \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{in}_{\mathbb{N}_0} = [\underline{0}\,, \mathsf{succ}] \\ \mathsf{succ}\ x\ n = n + 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{F}\ X = 1 + X \\ \mathsf{F}\ f = id + f \end{array} \right. \end{cases} \qquad \mathsf{for}\ b\ i = (\!|\, [\underline{i}\,, b] \,|\!)$$

1. Fazendo $\mathsf{T} = \mathbb{N}_0$, codifique — recorrendo à biblioteca Cp.hs e à definição de out feita numa ficha anterior — o combinador:

   Taking $\mathsf{T} = \mathbb{N}_0$, encode — loading the Cp.hs library and using out *defined in a previous exercise sheet, the combinator:*

   $$(\!|\, g \,|\!) = g \cdot (id + (\!|\, g \,|\!)) \cdot \mathsf{out} \qquad \text{(F2)}$$

   De seguida implemente e teste a seguinte função:

   Then implement and test de following function:

   $$rep\ a = (\!|\, [\mathsf{nil}\,, (a:)] \,|\!) \qquad \text{(F3)}$$

O que faz ela?

What is its purpose?

---

2. Na sequência da questão anterior, codifique

As follow up of the previous question, encode

$$f = \pi_2 \cdot aux \ \textbf{where} \ aux = \mathsf{for} \ \langle \mathsf{succ} \cdot \pi_1, \mathsf{mul} \rangle \ (1, 1) \qquad \text{(F4)}$$

e inspecione o seu comportamento. Que função f é essa?

and inspect its behavior. Which function is f?

---

3. Identifique como catamorfismos de listas ($k = (\!| g |\!)$) as funções seguintes, indicando o gene g para cada caso (apoie a sua resolução com diagramas):

   (a) k é a função que multiplica todos os elementos de uma lista.

   (b) $k = \mathsf{reverse}$

   (c) $k = \mathsf{concat}$

   (d) k é a função $\mathsf{map}\ f$, para um dado $f : A \to B$.

   (e) k é a função que calcula o máximo de uma lista de números naturais ($\mathbb{N}_0{}^*$).

   (f) $k = \mathsf{filter}\ p$ onde:

Identify as list catamorphisms ($k = (\!| g |\!)$) the following functions, indicating the corresponding 'gene' g for each case (support your answer with diagrams):

   (a) k is the function that multiplies all elements of a list.

   (b) $k = \mathsf{reverse}$

   (c) $k = \mathsf{concat}$

   (d) k is the function $\mathsf{map}\ f$, for a given $f : A \to B$.

   (e) k is the function that calculates the maximum of a list of natural numbers ($\mathbb{N}_0{}^*$).

   (f) $k = \mathsf{filter}\ p$ where:

$$\mathsf{filter}\ p\ [\,] = [\,]$$
$$\mathsf{filter}\ p\ (h : t) = x +\!\!+ \mathsf{filter}\ p\ t \ \textbf{where}\ x = \textbf{if}\ (p\ h)\ \textbf{then}\ [h]\ \textbf{else}\ [\,]$$

---

4. Apresente justificações para a seguinte dedução da lei de fusão-cata a partir de (F1) para o caso de ciclos-for ($\mathsf{T} = \mathbb{N}_0$):

Justify the following calculation of the cata-fusion law from (F1) valid for for-loops ($\mathsf{T} = \mathbb{N}_0$):

$$
\begin{array}{ll}
& f \cdot (\!| g |\!) = (\!| h |\!) \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& f \cdot (\!| g |\!) \cdot \mathsf{in} = h \cdot \mathsf{F}\ (f \cdot (\!| g |\!)) \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& f \cdot g \cdot (id + (\!| g |\!)) = h \cdot (id + f \cdot (\!| g |\!)) \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& f \cdot g \cdot (id + (\!| g |\!)) = h \cdot (id \cdot id + f \cdot (\!| g |\!)) \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& f \cdot g \cdot (id + (\!| g |\!)) = h \cdot (id + f) \cdot (id + (\!| g |\!)) \\
\Leftarrow & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& f \cdot g = h \cdot (id + f)
\end{array}
$$

Em suma: *Summing up:*

$$f \cdot (\!|\, g \,|\!) = (\!|\, h \,|\!) \quad \Leftarrow \quad f \cdot g = h \cdot (id + f) \tag{F5}$$

---

5. A função seguinte, em Haskell *The following function, in Haskell*

$$\begin{aligned} &sumprod\ a\ [\,] = 0 \\ &sumprod\ a\ (h : t) = a * h + sumprod\ a\ t \end{aligned}$$

é o catamorfismo de listas *is the list-catamorphism*

$$sumprod\ a \quad = \quad (\!|\, [\mathsf{zero}\ , \mathsf{add} \cdot ((a*) \times id)] \,|\!) \tag{F6}$$

onde $\mathsf{zero} = \underline{0}$ e $\mathsf{add}\ (x, y) = x + y$. Como exemplo de aplicação da propriedade de **fusão-cata** para listas, demonstre a igualdade

where $\mathsf{zero} = \underline{0}$ *and* $\mathsf{add}\ (x, y) = x + y$. *As an example of application of* ***cata-fusion****, prove the equality*

$$sumprod\ a \quad = \quad (a*) \cdot \mathsf{sum} \tag{F7}$$

onde $\mathsf{sum} = (\!|\, [\mathsf{zero}\ , \mathsf{add}] \,|\!)$. **NB:** não ignore propriedades elementares da aritmética que lhe possam ser úteis.

where $\mathsf{sum} = (\!|\, [\mathsf{zero}\ , \mathsf{add}] \,|\!)$. ***NB:*** *take into account elementary arithmetic properties that may be useful.*

---

6. Sabendo que $\mathsf{for}\ f\ i = (\!|\, [\underline{i}\ , f] \,|\!)$, recorra à lei de fusão-cata para demonstrar a propriedade:

Knowing that $\mathsf{for}\ f\ i = (\!|\, [\underline{i}\ , f] \,|\!)$, *use the law of cata-fusion to prove the property:*

$$f \cdot (\mathsf{for}\ f\ i) = \mathsf{for}\ f\ (f\ i) \tag{F8}$$

---

7. Mostre que as funções *Show that functions*

$$\begin{aligned} f &= \mathsf{for}\ id\ i \\ g &= \mathsf{for}\ \underline{i}\ i \end{aligned}$$

são a mesma função. (Qual?) *are the same function. (Which one?)*

---

8. A função $\mathsf{foldr}\ \overline{\pi_2}\ i$ é necessariamente uma função constante. Qual? Justifique com o respectivo cálculo.

Function $\mathsf{foldr}\ \overline{\pi_2}\ i$ *is a constant function, for any* i *– which constant function? Write down your calculations.*

---

9. Qualquer função $k = \mathsf{for}\ f\ i$ pode ser codificada em sintaxe C escrevendo

Any function $k = \mathsf{for}\ f\ i$ *can be encoded in the syntax of C by writing:*

```
int k(int n) {
  int r=i;
  int j;
  for (j=1;j<n+1;j++) {r=f(r);}
  return r;
};
```

Escreva em sintaxe C as funções $(a*) = \mathsf{for}\ (a+)\ 0$ e outros catamorfismos de naturais de que se tenha falado nas aulas da UC.

Encode function $(a*) = \mathsf{for}\ (a+)\ 0$ *in C and other catamorphisms that have been discussed in the previous classes.*