

$x_i$	$P_i$	Código I	Código II	Código III	Código IV
A	1/2	00	0	0	0
B	1/4	01	1	01	10
C	1/8	10	10	011	110
D	1/8	11	11	0111	111
$\bar{N}$	2.0	1.25	1.875	1.75	
Kr	1.0	1.5	0.9375	1.0	

• Código I

$$\bar{N} = \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{8} \times 2 + \frac{1}{8} \times 2 \\ = 2 \text{ dígitos binários}$$

$$H(x) = 1.75 \text{ bits / símbolo}$$

$$R = 3500 \text{ bits / seg}$$

$$P = \frac{1.75}{2} \times 100 = 87.5\%$$

• Código II

A entropia é maior do que o comprimento médio

O número de bits por símbolo recebidos é maior do que o comprimento médio do símbolo

$\Rightarrow$  Não é decodável

## Digitalização:

Sinais analógicos contínuos  
 $\Rightarrow$  sequência limitada de números

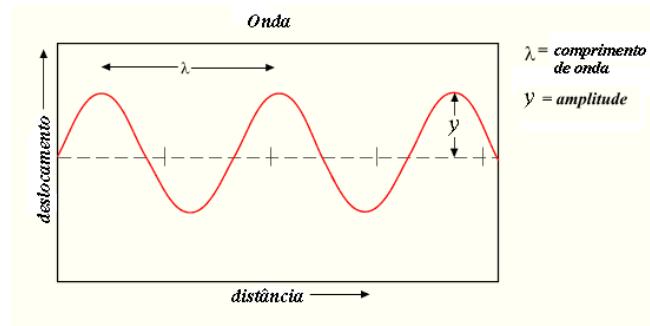
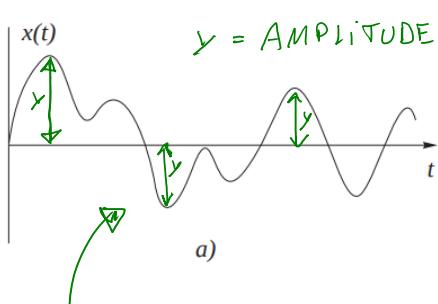
A amplitude analógica passa a tomar alguns valores.

- (i) Amostragem  $\Rightarrow$  Recolha periódica de valores do sinal
- (ii) Quantização  $\rightarrow$  amplitudes aproximadas
- (iii) Conversão  $\rightarrow$  representação numérica das amplitudes (base 2)
- (iv) Codificação de linha

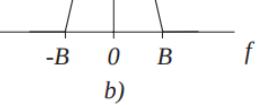
## Sinal

### • TEORIA DA AMOSTRAGEM

Sinal de informação analógico  $x(t)$



Efeito limitado à banda  
 $[-B, +B]$



$|X(f)| = 0$  para  
 $|f| > B$

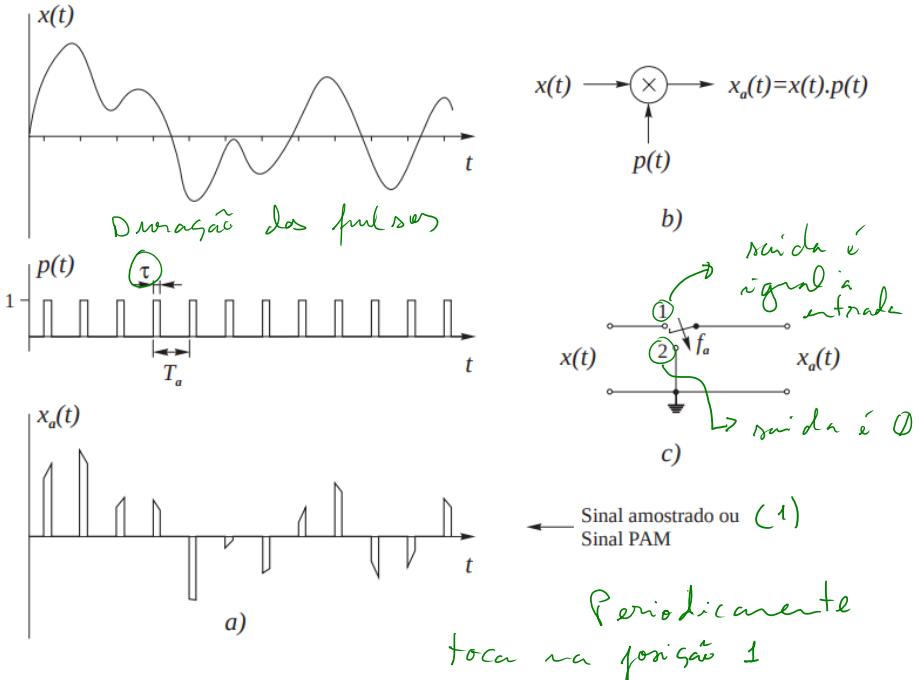
Límite das frequências

$$f = \frac{1}{T}$$

## AMOSTRAGEM

A operação de amostragem do sinal  $x(t)$  consiste em tomar os valores do sinal em instantes regularmente espaçados no tempo e considerar que nos intervalos de tempo entre esses instantes o sinal tem amplitude nula.

o período de amostragem que designaremos por  $T_a$  e cujo inverso é a frequência de amostragem em Hertz,  $f_a = 1/T_a$  Hz.



### (1) Pulse Amplitude Modulation

## ESPECTRO

→ Define representation of general signal as a sum of sinusoids

Any  $x(t)$  can be described on  $0 \leq t < T$  using a sum of sinusoids

$$x(t) = A_0 + A_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) + \dots + A_N \cos(2\pi f_N t + \phi_N)$$

Amplitudes  $\leftarrow$   $A_0 + \sum_{k=0}^N A_k \cos(2\pi f_k t + \phi_k)$   $\rightarrow$  phases  
 (may require  $N$  large)

$$x(t) \longleftrightarrow A_0, (f_1, A_1, \phi_1), \dots, (f_N, A_N, \phi_N)$$

Varies w. time  $t$  varies w. frequency  $f_k$

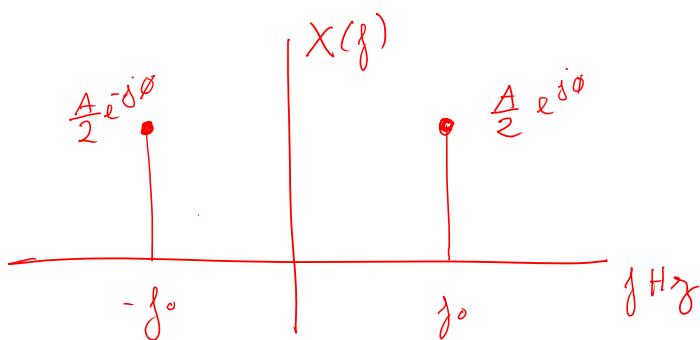
Spectrum  $X(f)$  uses  $A_k, \phi_k$  to represent  $x(t)$  as a function of frequency

EXAMPLE :

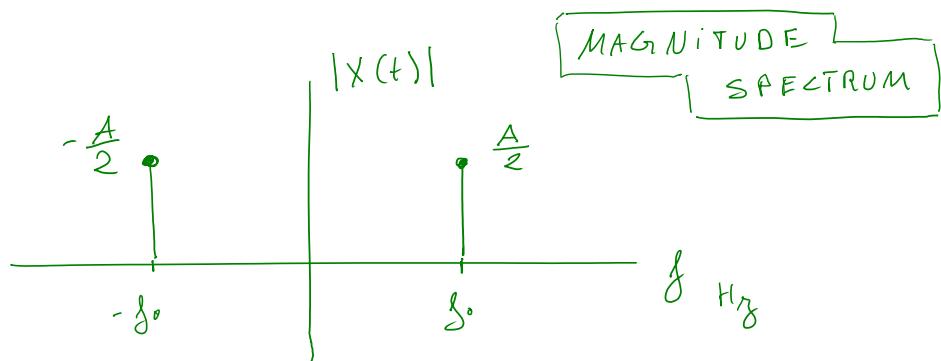
$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

Graph Spectrum  $X(f)$   
Decompose  $x(t)$  (EULER EXPANSION)

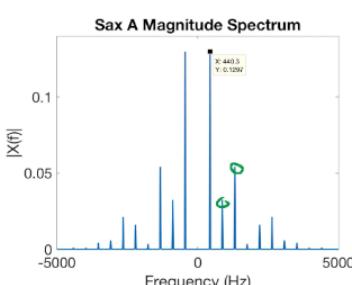
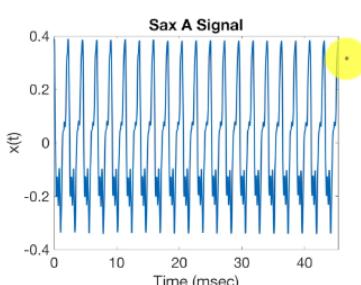
$$\begin{aligned} \text{Write } x(t) &= \frac{A}{2} e^{j(2\pi f_0 t + \phi)} + \frac{A}{2} e^{-j(2\pi f_0 t + \phi)} \\ &= \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j2\pi f_0 t} \\ X(f) &= \begin{cases} \frac{A}{2} e^{j\phi}, & f = f_0 \\ \frac{A}{2} e^{-j\phi}, & f = -f_0 \end{cases} \end{aligned}$$



Now, without  $\phi$  (phase) :

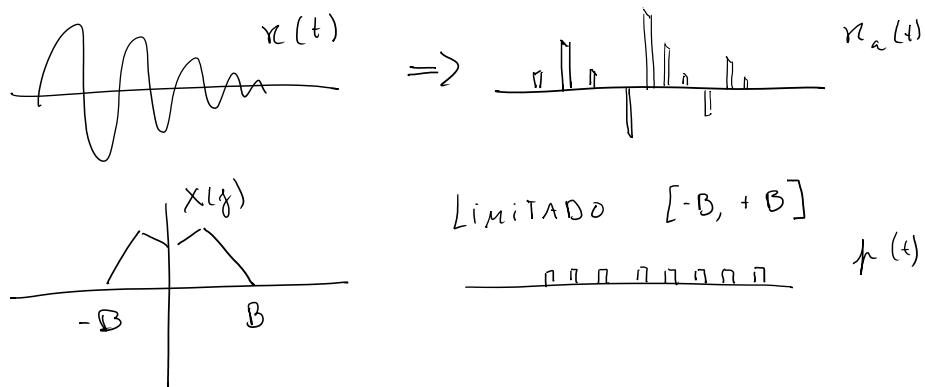


Example: Saxophone Concert A (440 Hz) 5



frequency components at 440,  
880, 1320, etc  
amplitude of 1320 > amplitude of 880

# TEOREMA DA AMOSTRAGEM



Portanto,  $x_a(t) = x(t) \times f(t)$ .

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C(mf_a) e^{j2\pi m f_a t}$$

→ Série de Fourier

$f_a = 1/T_a$  : frequência de amostragem

COEFICIENTES DA SÉRIE :

$$C(mf_a) = \frac{1}{T_a} \int_{-T_a/2}^{+T_a/2} f(t) e^{-j2\pi mf_a t} dt$$

$$= f_a \tau \operatorname{sinc}(mf_a \tau)$$

ESPECTRO DO SINAL

AMOSTRADO :

$$X_a(j) = \mathcal{F}[x(t) \times f(t)]$$

(\*\*\*)

$$(1) \quad X_a(j) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C(mf_a) \cdot X(j - mf_a)$$

(1)

A última destas relações (5.4) diz que o espectro do sinal amostrado,  $X_a(f)$  é a soma de infinitas réplicas do espectro  $X(f)$  do sinal original cada uma delas deslocada na frequência de um múltiplo inteiro  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  da frequência de amostragem, incluindo  $n = 0$ , ou seja, o espectro do sinal original. Cada réplica vem multiplicada por um factor de escala em amplitude de valor igual a  $C(nf_a)$  mas como se está a supôr que  $\tau$  é muito pequeno, a equação 5.3 dá  $C(nf_a)$  praticamente constante.

Se a frequência de amostragem  $f_a$  fôr igual ou superior ao dobro da largura de banda  $B$  do sinal analógico  $x(t)$  então as referidas réplicas do espectro de  $x(t)$  encontram-se separadas umas das outras e o espectro de amplitude do sinal amostrado definido pela equação 5.4 tem a representação gráfica que se mostra na figura 5.3 Nestas condições, o sinal original pode efecti-

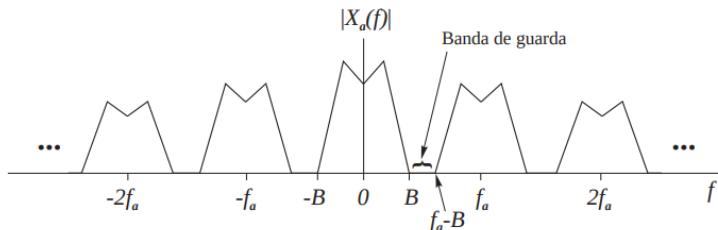
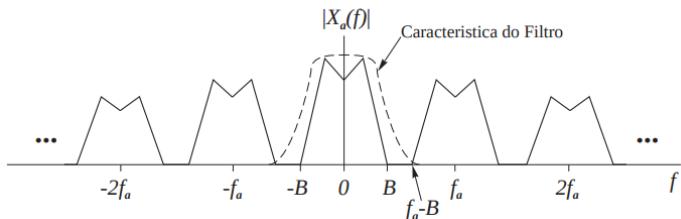


Figura 5.3: Espectro de amplitude do sinal amostrado  $x_a(t)$ , com  $f_a > B$

vamente ser recuperado do sinal amostrado  $x_a(t)$  bastando para isso que este seja filtrado por um filtro passa-baixo de largura de banda  $B_T = B$ . Deste modo, todas as réplicas serão eliminadas excepto a réplica central a que corresponde  $n = 0$  que é exactamente o espectro do sinal analógico original  $x(t)$ . A figura 5.4 ilustra a operação de filtragem

## OPERAÇÃO DE FILTRAGEM



$$X(j) = X_a(j) \cdot \text{PI} \left( \frac{j}{2B} \right)$$

$$\implies f_a \geq 2B$$

Poderão, assim, o sinal ser recuperado através de filtragem.

Caro contrário, as réplicas do sinal original ficarão sobrepostas não sendo possível recuperá-lo

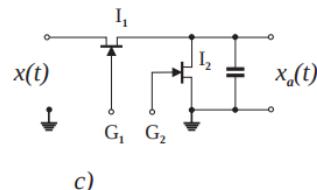
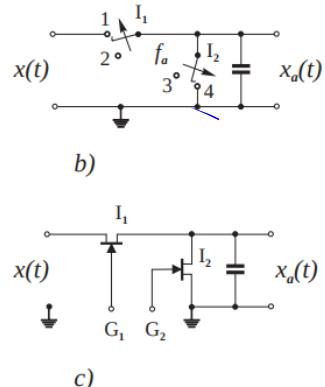
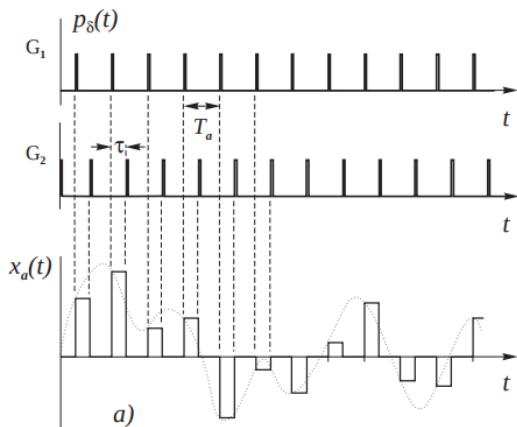
No entanto, na prática não se consegue um espetro limitado a uma banda de largura  $B$  Hz por duas razões:

- (i) Não se conseguem realizar filtros ideais e
- (ii) Os sinais na prática não possuem espectros de banda limitada. Por serem limitados no tempo, são ilimitados na frequência.

pelo que a frequência de amostragem utilizada é normalmente

$$f_a > 2B$$

## QUANTIZAÇÃO



Para codificar as amplitudes das amostras em números, estes só podem tomar um número finito de valores dentro do intervalo contínuo de variação do sinal.

$\hookrightarrow$  Quantização

## Multiplexagem

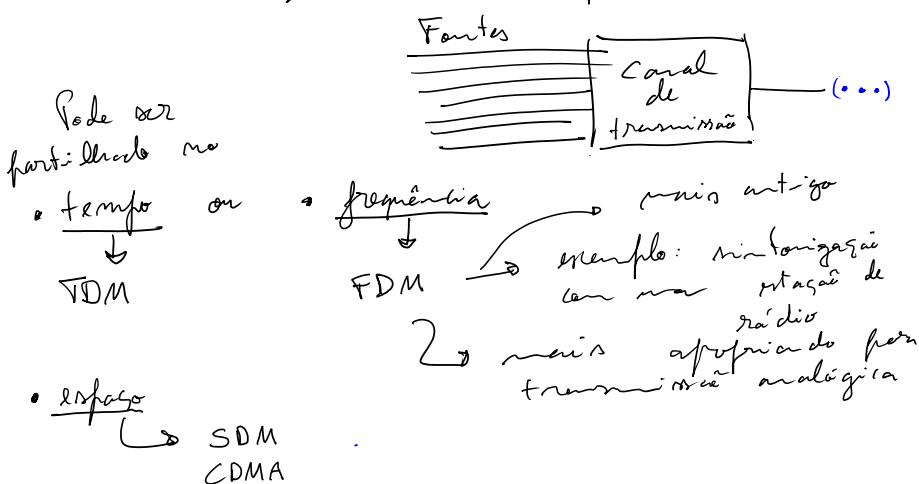
Canal de transmissão

↳ capacidade muito superior ao débito da fonte

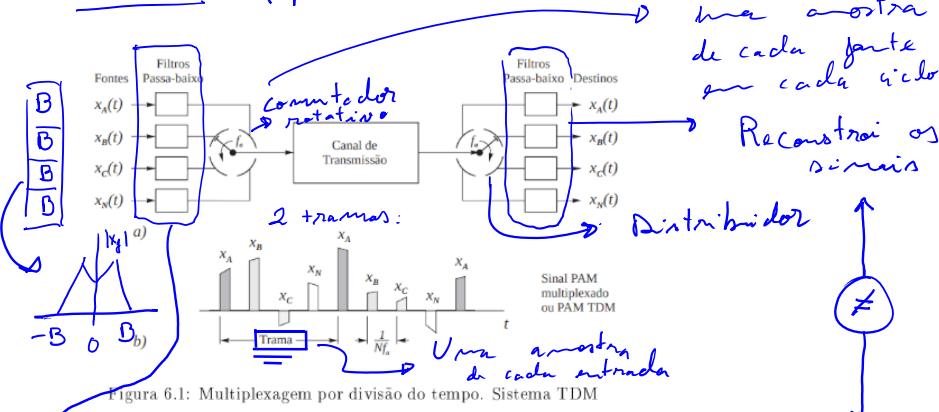
$$B_T \gg B \text{ ou } B_T \gg R_s / 2$$

⇒ pode utilizar-se esse canal para transportar os sinais de mais de uma fonte

↳ canal Multiplexado



### 6.1 TDM (por divisão de tempo)



↓ Transmissão de sinais de outras fontes nos intervalos de amostragem maiores  
↓ limita a Bandeira de Sinal

(fontes com menor largura de banda B)

$$\Rightarrow \text{ritmo do contador} = f_a \geq 2B \text{ ciclos/seg}$$

$$T_a = 1/f_a$$

$$N \text{ fontes} \Rightarrow \text{Espaçamento temporal entre as amostras} = \frac{1}{Nf_a}$$

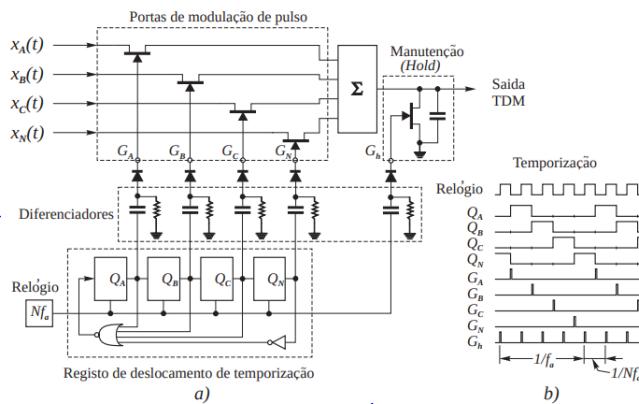
Portanto, o ritmo de pulsos PAM:

$$R_c = Nf_a \geq 2NB$$

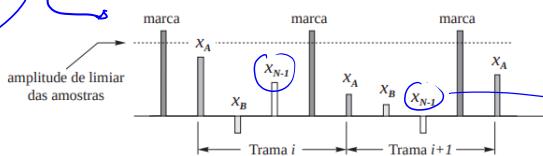
↳ ritmo de transmissão do sinal TDM

## 6.1.1 Sincronização

Cada amostra tem de ser entregue ao destino correto e no instante certo.



Detectar marcos antes do distribuidor



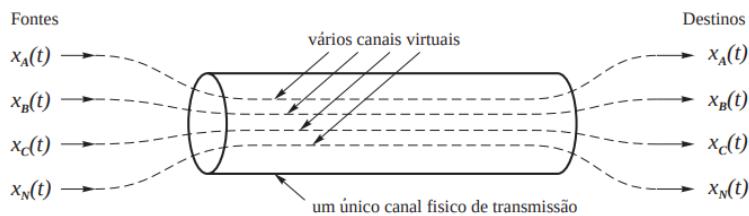
permite relogio no circuito lógico do distribuidor

definir a frequência,  $f_a$ , no receptor  
[mas o número de pares fonte/destino é reduzido a  $N-1$ ]

## 6.1.2 CONCEITO DE CANAL VIRTUAL

$N$ -caminhos distintos sobre um único canal físico.

Canal Virtual fonte - destino



Os símbolos sucedem-se regularmente no tempo. As tramas também são contíguas no tempo, não havendo interrupções.

Se uma determinada fonte deixar de transmitir, os intervalos de tempo que lhe são atribuídos têm de decorrer, apesar de não estarem a ser utilizados.

TDM      Síncrono

## 6.2 TDM SÍNCRONO

Estrutura menos adequada a outros serviços  
 → televisão digitalizada, internet...

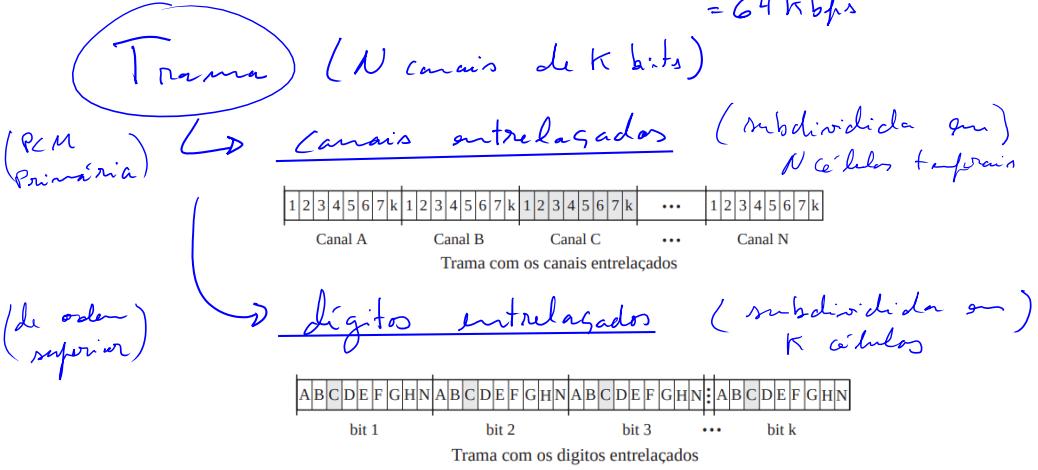
Surgiram: SDH e SONET

### 6.2.1 Organização das tramas

$$B = 4 \text{ KHz}$$

Quantizado a 8 bits/amostra

$$\Rightarrow \text{velocidade digital de: } R_{\text{básico}} = 2 \times B \times K \\ = 2 \times 4 \times 8 \\ = 64 \text{ kbps}$$



### 6.2.2 Alinhamento de tramas

Sincronização do distribuidor (a freq. e fase)  
 a sequência de símbolos que recebe

Isto é, na detecção do início da trama

→ Esta operação é necessária, pelo menos, cada vez que o receptor entra em operação

Para além disso, precisa de uma referência temporal periódica.

- ↳ [ - padrão de alinhamento agrupado: constituído por  $\nu$  bits consecutivos no início de cada trama;
- padrão de alinhamento distribuído: os  $\nu$  bits do padrão estão espalhados por determinadas posições dentro de uma trama ou ao longo de várias tramas. ]

Barra antacorrelação

Substituindo os canais por sequências determinísticas

SINALIZAÇÃO

Designa-se por sinalização a transmissão de informação auxiliar entre os equipamentos de multiplexagem de modo a estes se poderem controlar entre si. Por exemplo, pode desejar-se que o sinal da entrada número 3 seja entregue à saída número 7, situação típica de uma função de comutação.

A informação de sinalização trocada entre os equipamentos deverá, portanto, possuir uma semântica própria, o que não acontece com a informação transportada entre as fontes e destinos ligados aos equipamentos a qual é transferida de forma transparente (não interpretada), e é digital por natureza constituindo comandos, confirmações, etc.

Podem conceber-se várias soluções para a transferência de informação de sinalização:

- sinalização dentro-do-octeto<sup>5</sup>, também chamada por roubo de bit<sup>6</sup>, pela qual o bit (dígito) menos significativo do octeto da amostra codificada é periodicamente utilizado para a sinalização (por exemplo, de 6 em 6 tramas). O resultado é uma degradação imperceptível da correspondente transmissão quando esta é analógica mas uma grave restrição à utilização desse canal digital para transmissão de dados.
- sinalização fora-do-octeto, pela qual, a cada canal de  $k$  dígitos de informação são associados, num canal separado, um ou mais dígitos de sinalização. Os dígitos do canal de sinalização respeitante a cada um dos  $N$  canais de informação poderão estar distribuídos ao longo da trama, isto é, seguirem-se imediatamente aos dígitos de informação do canal correspondente, ou estar agrupados numa ranhura temporal única especificamente reservada para esse efeito, a qual é ciclicamente atribuída a cada um dos  $N$  canais de informação da trama.

Em qualquer dos casos a atribuição dos dígitos de sinalização é feita de uma forma fixa, segundo uma regra pré-estabelecida.

No primeiro caso o ritmo de sinalização é de pelo menos 8 Kbps por canal e, no segundo caso, de até  $64/N$  Kbps por canal.

- sinalização em canal comum, pela qual é reservado um canal por trama para sinalização, o qual é atribuído ocasionalmente e de acordo com as necessidades, a um ou a outro canal. A sinalização é então efectuada através de mensagens etiquetadas, isto é, numa determinada trama o valor dos  $k$  dígitos do canal de sinalização constituem a etiqueta, que identifica o canal a que a sinalização (mensagem) das tramas subsequentes se refere.

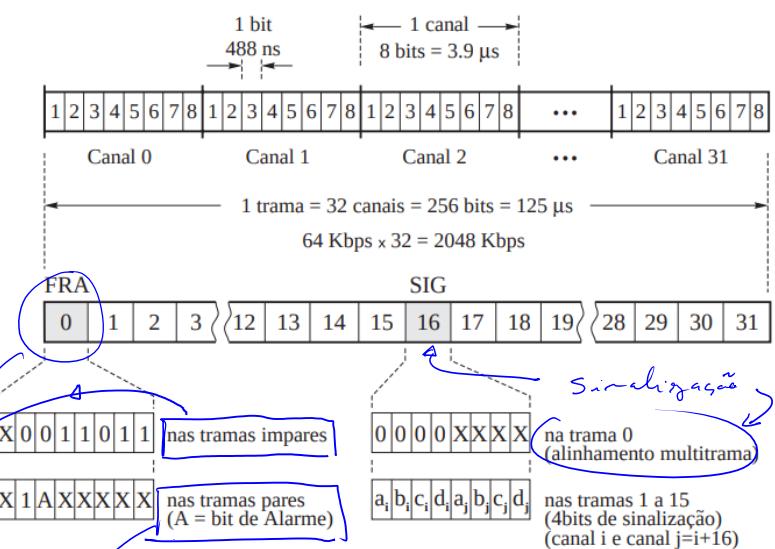
O que deve estar pré-estabelecido é apenas em que tramas é que o valor do canal de sinalização deve ser interpretado como etiqueta.

O ritmo de sinalização instantâneo disponível, neste caso para um canal de cada vez, é de 64 Kbps.

→ Técnica mais utilizada atualmente

## ESTRUTURA DA TRAMA PCM PRIMÁRIA DE 2 Mb/s

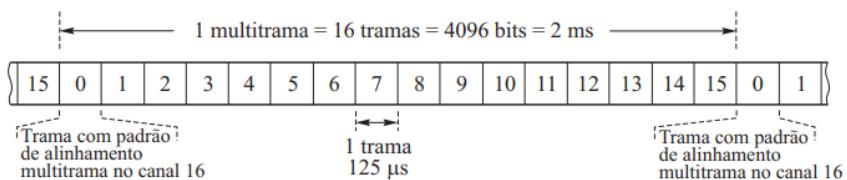
- Rítmo total de 2048 Kbps  $\approx$  2 Mb/s
- Trama de 125 µs (32 canais)



e sob o ponto de vista do utilizador  
estão numerados de 1 a 30, razão pela qual este sistema primário se designa  
por MIC30®.

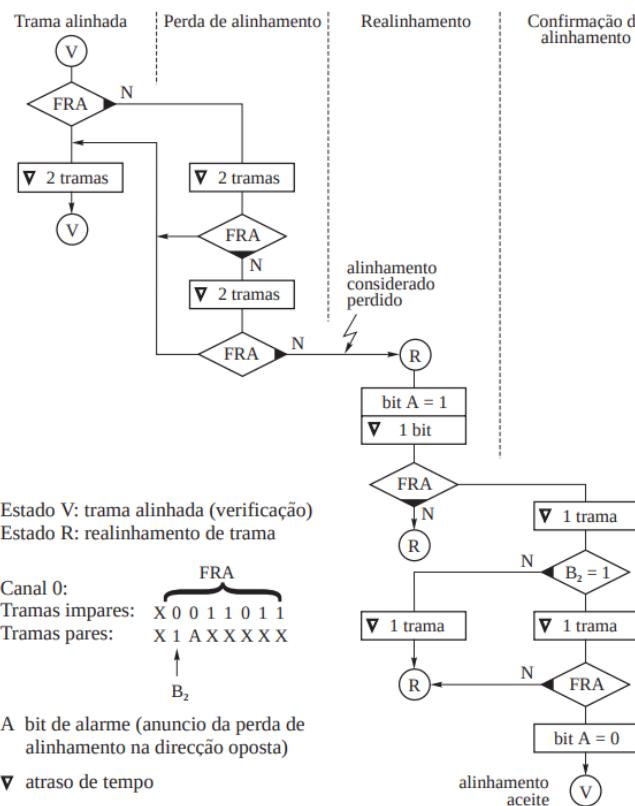
- transmissão (em tramas alternadas) do padrão de alinhamento de trama
- Anuncia a perda de alinhamento de trama na direção oposta
- Sinalização fora-do-octeto

### Alinhamento multitrama



15 tramas para transportar a sinalização dos 30 canais

$$1111_2 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15$$



### Alinhamento e interpretação da trama

A figura 6.8 representa o algoritmo completo do procedimento de sincronização, verificação de alinhamento e re-alignamento, tal como se encontra especificado na Recomendação G.732 da ITU. São de salientar os seguintes pontos:

- a histerese do processo de monitorização: só se considera ter ocorrido perda de alinhamento após três ausências consecutivas do padrão de alinhamento, FRA;
- a confirmação de alinhamento pela presença de um valor diferente do bit da segunda posição ( $B_2$ ) do canal 0 da trama seguinte àquela em que o padrão FRA foi reconhecido;
- o anúncio da perda de alinhamento através do bit de alarme A, emitido na direcção oposta.

Dependendo da situação, o realinhamento demora entre 250  $\mu s$  e 375  $\mu s$ .

## Funções de transferência

A questão fundamental que se coloca é a seguinte: Quais os  $x(t)$  que passam pelo sistema sem alteração de forma? Isto é, quais os  $x(t)$  tais que

$$y(t) = H \cdot x(t) \quad (3.4)$$

em que  $H$  é um escalar, independente de  $t$ . Os sinais  $x_i(t)$  que satisfazem esta condição constituem as funções próprias ou invariantes do sistema. Vamos mostrar que se o sistema é LIT os invariantes são da forma

$$x_i(t) = e^{st} \quad (3.5)$$

$\hookrightarrow$  Só é uma constante, em geral, complexa.

$$\forall x_i(t) = e^{st} \rightarrow y_i(t)$$

Propriedade linear:  $\rightarrow x_i(t) \cdot H(e^{-st_1})$

$$e^{-st_1} \cdot x_i(t) = e^{s(t-t_1)} \rightarrow e^{-st_1} \cdot y_i(t)$$

$$r_i(t-t_1) = e^{s(t-t_1)} \rightarrow y_i(t-t_1)$$

$$e^{-st_1} \cdot y_i(t) = y_i(t-t_1)$$

$$y_i(t) = H \cdot e^{st}$$

com  $H$  independente de  $t$  mas eventualmente dependente da constante complexa  $s = a + jb$ . O resultado (3.10) mostra que tem de ser  $x_i(t) = e^{st}$ . Se na constante complexa se fizer  $a = 0$  e  $b = 2\pi f$ , a família de sinais  $x_i(t)$  pode ser escrita sob a forma

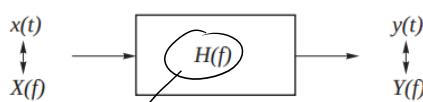
$$x_i(t) = e^{-j2\pi ft} \quad \text{ou}$$

$$x_i(t) = \cos(2\pi ft) + j \sin(2\pi ft) \quad (3.11)$$

as exponenciais complexas, ou seja, os sinais oscilatórios no tempo são invariantes do sistema (LIT), e passam através dele sem alteração (a menos de um fator multiplicativo constante  $|H|$ )  $\rightarrow$  atua na amplitude e na fase

Portanto qualquer sinal vê cada uma das suas componentes espectrais passar no sistema sem alteração de forma mas com alteração de amplitude consoante a frequência. Isto é, se  $x(t) \rightarrow y(t)$  a relação entre os respectivos espectros é

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f) \quad (3.12)$$



$\rightarrow$  Resposta em frequência do sistema

$|H(f)| \rightarrow$  Característica de amplitude

$$|Y(f)| = |H(f)| \times |X(f)|$$

Se  $x(t)$  for um sinal de energia, então  $y(t)$  é também um sinal de energia cuja densidade espectral de energia e energia total normalizadas são dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} |Y(f)|^2 &= |H(f)|^2 \cdot |X(f)|^2 \\ E_y &= \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 |X(f)|^2 df \end{aligned} \quad (3.15)$$

e se  $x(t)$  for um sinal de potência, tem-se igualmente

$$\begin{aligned} |C_y(nf_0)|^2 &= |H(nf_0)|^2 \cdot |C_x(nf_0)|^2 \\ S_y &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |H(nf_0)|^2 \cdot |C_x(nf_0)|^2 df \end{aligned}$$

## Largura de Banda de transmissão

→ A potência de cada componente (sinusoidal) do sinal de entrada de  $f_n = kf_0$ , isto é, o quadrado da sua amplitude  $|C_x(f_n)|^2$ , é afeita multiplicativamente pelo valor do quadrado da função de transferência a essa frequência  $|H(f_n)|^2$ .

atenuação de 5

$\Rightarrow$   
ganho de  $\frac{1}{5}$

### Definição 3.1 — Banda de transmissão de um sistema

É o intervalo de frequências positivas no qual o ganho do sistema é não inferior a  $\frac{1}{2}$  do ganho máximo.

A banda de transmissão de um sistema também é designada de *banda passante* do sistema (ver figura 3.13).

### Definição 3.2 — Largura de Banda de um sistema

É a amplitude da banda de transmissão desse sistema.

### Definição 3.3 — Frequências de corte de um sistema

São as frequências positivas limites da banda de transmissão do sistema.

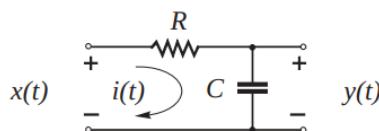
Assim, por exemplo, um sistema cuja banda de transmissão é  $B_T = [85 \text{ KHz}, 110 \text{ KHz}]$  tem largura de banda  $B_T = 25 \text{ KHz}$  e frequências de corte  $f_{c_i} = 85 \text{ KHz}$  e  $f_{c_s} = 110 \text{ KHz}$ .

# Sistema de primeira ordem

Linha de transmissão  $\Rightarrow$  Capacidade  
 Par de fios condutores  $\hookrightarrow$  Total:  $C$  Farads

Resistência:  $R$  Ohms  
 elétrica

Tensão elétrica de entrada:  $x(t)$   
 $\hookrightarrow$  de saída:  $y(t)$



$$R_i(t) + y(t) = x(t) \quad \text{carga instantânea}$$

$$y(t) = \frac{q(t)}{C} \quad \text{e} \quad i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad \left[ \begin{array}{l} \text{variação} \\ \text{de carga} \\ \text{instantânea} \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow i(t) = C \frac{dy(t)}{dt} \quad \text{corrente que flui no condensador}$$

$$\Rightarrow RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

Equação diferencial linear de primeira ordem

## 3.5.1 Função de transferência do sistema de 1ª ordem

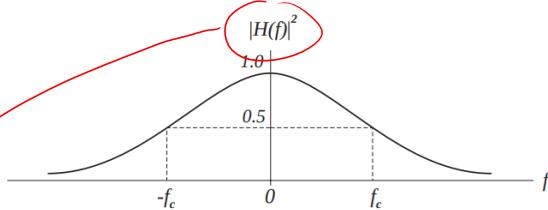
A função de transferência,  $H$ , deste sistema determina-se então resolvendo a equação 3.19 para o sinal de entrada invariante do sistema, isto é,  $x_i(t) = e^{j2\pi ft}$  que produz à saída o sinal  $y_i(t) = H \cdot e^{j2\pi ft}$  conforme se mostrou na secção 3.3

$$\begin{aligned} RC \frac{d}{dt} [H \cdot e^{j2\pi ft}] + H \cdot e^{j2\pi ft} &= e^{j2\pi ft} \\ H \cdot j2\pi f RC e^{j2\pi ft} + H \cdot e^{j2\pi ft} &= e^{j2\pi ft} \\ H \cdot [1 + j2\pi f RC] &= 1 \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde resulta imediatamente a expressão para a função de transferência

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f RC} \quad (3.21)$$

A característica de amplitude, também designada por resposta de am-



*Relaciona a potência  
dos sinais de entrada e saída*

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + (2\pi f RC)^2}$$

No caso concreto deste sistema, todas as componentes de um sinal de entrada de frequência superior a  $f_c$  vêm a sua potência (ou energia) *atenuadas* de um factor de valor superior a  $\frac{1}{2}$  e todas as componentes de frequência inferior a  $f_c$  atenuadas de um factor de valor inferior àquele.

A frequências de corte do sistema são 0 e  $f_c$ , a banda de transmissão é  $B_T = [0, f_c]$  Hz e a largura de banda é  $B_T = f_c$  Hz.

Para o caso do sistema de primeira ordem, caracterizado pela função de transferência 3.21, as frequências de corte são dadas pelas raízes da equação

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{2} |H(0)|^2$$

$$\text{ou seja } \frac{1}{1 + (2\pi f_c RC)^2} = \frac{1}{2} \quad \text{onde} \quad f_c = \pm \frac{1}{2\pi RC}$$

pelo que, de acordo com a definição, a largura de banda de transmissão deste sistema será  $B_T = |f_c - 0|$ , ou seja

$$B_T = \frac{1}{2\pi RC} \quad (3.23)$$

A função de transferência do sistema de primeira ordem representado pela equação 3.21 pode então escrever-se da seguinte forma

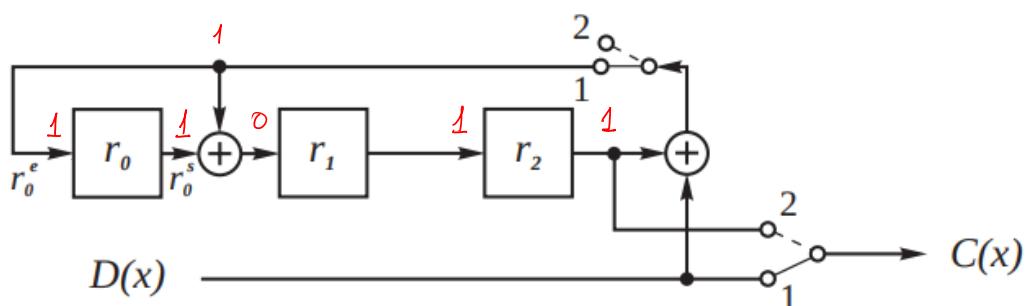
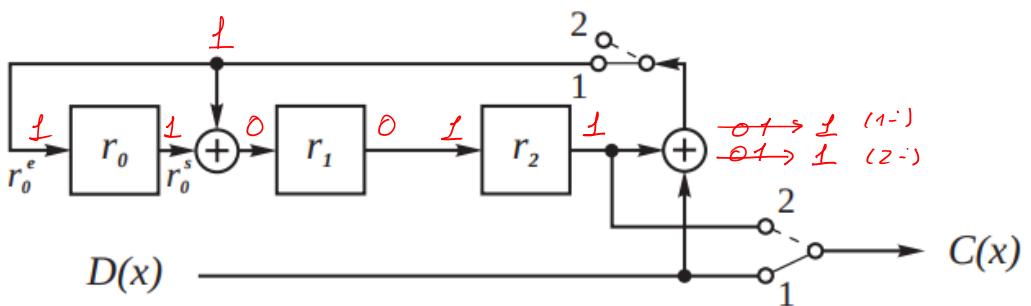
$$H(f) = \frac{1}{1 + j\frac{f}{B_T}} \quad (3.24)$$

Um sinal digital consiste numa sequência de escalões positivos e negativos de tensão entre amplitudes discretas (rectângulos) representando níveis lógicos, não necessariamente binários, que designamos por símbolos e que se repetem a um ritmo  $r_s$  símbolos por segundo. O ritmo de símbolos é igual ao inverso do tempo de duração do símbolo,  $T_s$  segundos, isto é

$$r_s = \frac{1}{T_s} \quad (3.25)$$

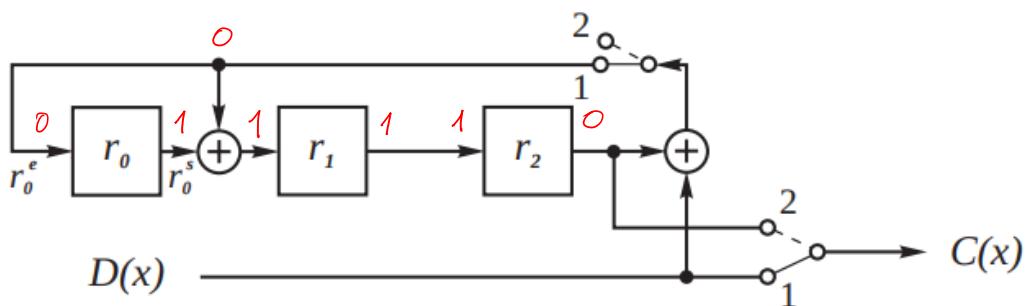
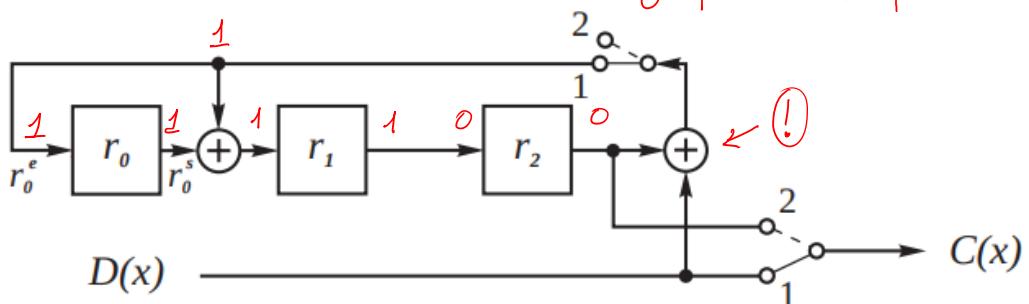
$$x_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \leq 0 \\ 1 & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

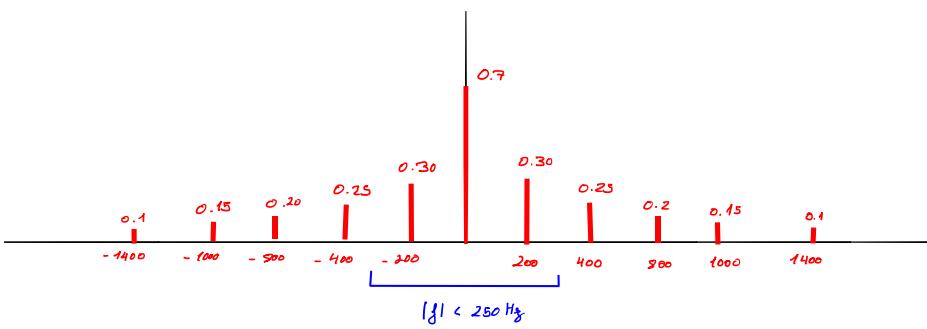
	$0$	$1$	$2$	$0$	$1$	$2$
$-$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$
$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$
$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$
$1$	$1$	$1$	$0$	$1$	$1$	$0$
$1$	$1$	$0$	$1$	$1$	$0$	$1$



WY...  
 $(0101)$

$r_0$	$r_1$	$r_2$	$r_0$	$r_1$	$r_2$
$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$
$1$	$1$	$0$	$1$	$1$	$0$
$0$	$1$	$1$	$0$	$1$	$1$
$1$	$0$	$1$	$0$	$0$	$1$
$0$	$1$	$0$	$1$	$1$	$0$





$$f_0 = 200 \text{ Hz} \Rightarrow T_0 = \frac{1}{200} = 5 \text{ ms}$$

$$y(t) = 0.7 + 0.6 \cos(400\pi t)$$

$$\text{MAX : } 0.7 + 0.6 = 1.3$$

$$\text{MIN : } 0.7 - 0.6 = 0.1$$

