Universidade do Minho
Departamento de Matemática

LEInf

Cálculo para Engenharia

Formulário 4 — 2021'22

Critérios sobre séries de números reais

[Condição necessária de convergência] Se $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente então $\lim u_n = 0$.

[Condição suficiente de divergência] Se $\lim u_n \neq 0$ então $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente.

[1.º critério de comparação] Sejam $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ séries de termos não negativos tais que, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n$.

i) $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

ii) $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge.

[2.º critério de comparação] Sejam $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ séries de termos positivos tais que $\ell = \lim\limits_{n} \dfrac{u_n}{v_n}$, onde $\ell \in [0, +\infty]$.

i) $\ell \neq 0$ ou $\ell \neq +\infty$ $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ têm a mesma natureza.

ii) Se $\ell = 0$

(a) $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

(b) $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge.

iii) Se $\ell = +\infty$

(a) $\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.

(b) $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge.

[Critério da razão (ou D'Alembert)] Sejam $\sum_{n\geq 1} u_n$ uma série de termos positivos e $\ell = \lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

i) $\ell < 1$ $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente.

ii) $\ell > 1$ $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente.

iii) $\ell = 1$ $\Longrightarrow$ nada se pode concluir sobre a natureza de $\sum_{n\geq 1} u_n$.

[Critério da raiz (ou de Cauchy)] Sejam $\sum_{n\geq 1} u_n$ uma série de termos não negativos e $\ell = \lim \sqrt[n]{u_n}$.

i) $\ell < 1$ $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente.

ii) $\ell > 1$ $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente.

iii) $\ell = 1$ $\Longrightarrow$ nada se pode concluir sobre a natureza de $\sum_{n\geq 1} u_n$.

[Critério do integral] Se $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, positiva, decrescente e, para cada $n \in \mathbb{N}$ seja, $f(n) = u_n$ então $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ têm a mesma natureza.

[Convergência absoluta] Se $\displaystyle\sum_{n\geq 1} |u_n|$ é convergente então $\sum_{n\geq 1} u_n$ também é convergente.

[Critério de Leibnitz] Seja $(a_n)_n$ uma sucessão decrescente tal que $\lim a_n = 0$. Então $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n a_n$ é convergente.