Teórica 1

22 de junho de 2024 14:09

Dízima finita : $a_0, a_1 a_2 \cdots a_n$

$a_0 \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ e

$a_1, a_2, \cdots, a_n \in \{0, 1, 2, \cdots 9\}$

Irracional : $\sqrt{2}$, π, ϕ

$1 < \sqrt{2} < 2$

$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

$1,4 < \sqrt{2} < 1,41$

$\cdots$

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{números irracionais}\}$

PROVA DE QUE $\sqrt{2}$ é irracional :

Qualquer inteiro multiplicado por 2 é par
Multiplicar dois números pares resulta num número par
"If a number is even and is a square of an integer, then its square root must be even"
Rational numbers or fractions must have a simplest form

$$\sqrt{2} = p/q$$

$$\Leftrightarrow 2 = p^2/q^2$$

$$\Leftrightarrow 2q^2 = \boxed{p^2} \longrightarrow \text{Tem de ser par!}$$

$\Rightarrow p$ é par

$p = 2m$

$$\Rightarrow 2q^2 = (2m)^2$$

$$\Leftrightarrow 2q^2 = 4m^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{q^2} = 2m^2$$

$\Leftrightarrow \underbrace{q^2} = 2m^2$

$\hookrightarrow$ q é par!
$q = 2n$

$$\sqrt{2} = 2m/2n = \underbrace{m/n}$$

Obtemos uma fração mais simples que p/q

etc. etc.

Um número racional não poderia ser simplificado para sempre.

Logo, é irracional.

$\mathbb{R}$ é um CORPO, ORDENADO e COMPLETO

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$$

$\hookrightarrow$ Entre quaisquer dois números reais distintos há sempre uma infinidade de números racionais e uma infinidade de números irracionais

Valor Absoluto ("norma")

$\hookrightarrow$ Interpreta-se geometricamente como a distância do número à origem (Zero) - e pode definir-se como:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0 \\ \underbrace{-a}, & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

↳ "inverter" o número negativo

ou $|a| := \max\{a, -a\}$

$|-3| := \max\{-3, 3\} = 3$

$|4| := \max\{4, -4\} = 4$

ou $|a| := \sqrt{a^2}$

$|-3| := \sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$

Assim, $|a| \geq 0$

$|a| = 0$ sse $a = 0$

$|a \times b| = |a| \times |b|$

$|a + b| \leq |a| + |b|$

—— // ——

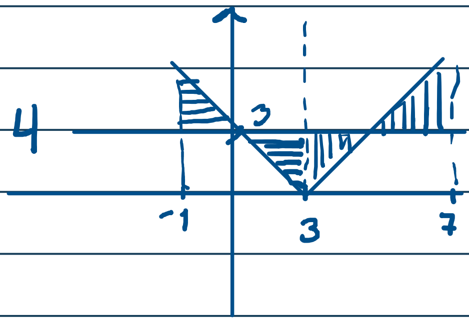
$x, a \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$

$|x - a| < \varepsilon$ sse $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$

$|x - a| > \varepsilon$ sse $x < a - \varepsilon$

ou $x > a + \varepsilon$

$|x - 3| < \varepsilon$



$3 - 4 < x$

$-1 < x$

$x < 3 + 4$

$x < 7$

$|x - a| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - a, & \text{se } x - a \geq 0 \\ -(x - a), & \text{se } x - a < 0 \end{cases}$$

$x - a < \varepsilon$ $\quad$ $-(x-a) < \varepsilon$

$\Leftrightarrow x < a + \varepsilon$ $\quad$ $x - a > -\varepsilon$

$x > a - \varepsilon$

Assim, $\underbrace{a - \varepsilon < x < a + \varepsilon}_{\text{"}}$

Intervalo aberto de dois números reais a e b, sendo $a < b$, escreve-se $]a, b[$ e é $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

Extremidades

Pontos Interiores

Um conjunto A, não vazio, de números reais é

- MAJORADO, quando $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in A, x \leq M$
- MINORADO, quando $\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in A, m \leq x$
- LIMITADO, quando é majorado e minorado

Exemplo

$$A = \{ \underbrace{|n^2 + \operatorname{sen}(\tfrac{n\pi}{2})|}_{\geq 0} : n \in \mathbb{N}_0 \}$$

Qualquer número não positivo
é minorante de A.
Ínfimo de A = 0
0 pertence a A ⇒ Mínimo de A = 0

$$\forall M \in \mathbb{R}^+, \exists n \in \mathbb{N}_0 : |n^2 + \operatorname{sen}(\tfrac{n\pi}{2})| > M$$

Logo, não é majorado.