# Teórica 5

27 de junho de 2024 21:40

<u>Quando $f$ é derivável em $a$</u>

i) a curva definida por $y = f(x)$ é "suave" em $x = a$, isto é, o ponto $(a, f(a))$ não é um ponto anguloso;

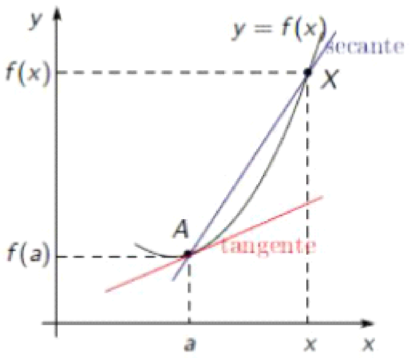
Ex.: $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$; $a = 0$.

ii) a reta tangente definida por $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ "confunde-se" com a curva (que representa $f$), numa vizinhança de $a$;

iii) <u>o polinómio definido por $f(a) + f'(a)(x - a)$, de grau $\leq 1$,</u> pode usar-se como aproximação para $f$ perto de $a$.

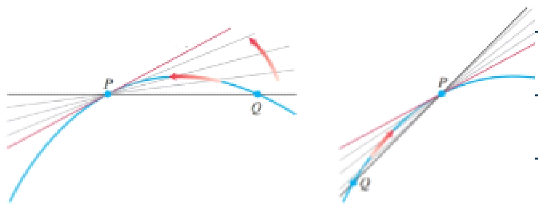
O declive $m$ da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto de coordenadas $(a, f(a))$ é o limite dos sucessivos declives das retas secantes definidas por $A$ e $X$, à medida que $X$ se aproxima de $A$,

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} .$$




**Nota**

*O ponto $X$ pode estar à direita ou à esquerda.*



Seja $f\colon D\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $a,b\in D$ e $A\subset D$.

- Diz-se que
  - $f$ é derivável em $[a,b]$ quando $f$ é derivável em qualquer $x\in\,]a,b[$ e existem as derivadas laterais $f'_+(a)$ e $f'_-(b)$;
  - $f$ é derivável em $A$ quando $f$ é derivável em qualquer $a\in A$;
  - $f$ é derivável quando $f$ é derivável em todo o domínio $D$.
- Se $f$ é derivável, a função

$$\begin{array}{rccc} f' : & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

diz-se a função derivada de $f$.

**Teorema (Continuidade de funções deriváveis)**

Se $f: D\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ é derivável em $a\in D\cap D'$, então $f$ é contínua em $a$.

[Regras básicas de derivação]

Sejam $f,g: D\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ funções de domínio $D$, deriváveis no ponto $a\in D$.

Então:

(a) $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$;

(b) $(f\cdot g)'(a)=f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a)$;

(c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a)=\dfrac{f'(a)\cdot g(a)-f(a)\cdot g'(a)}{g^2(a)}$, desde que $g(a)\neq 0$.

Para $x \in \mathbb{R}$ tem-se

- $\operatorname{senh}' x = \cosh x$ ;
- $\operatorname{cosech}' x = -\operatorname{cosech} x \coth x$ ;
- $\cosh' x = \operatorname{senh} x$ ;
- $\operatorname{sech}' x = -\operatorname{sech} x \operatorname{tgh} x$
- $\operatorname{tgh}' x = \dfrac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x$ ;
- $\operatorname{cotgh}' x = \dfrac{1}{\operatorname{senh}^2 x} = \operatorname{cosech}^2 x$ , $\quad x \neq 0$ .

**Teorema (Derivada da função composta)**

Sejam $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$, com $u(D) \subset B \subset \mathbb{R}$, $a \in D \cap D'$ e $b = u(a) \in B$ .

Se $u$ é derivável em $a$ e $g$ é derivável em $b$,

então $g \circ u$ é derivável em $a$, tendo-se

$$(g \circ u)'(a) = g'(u(a)) \cdot u'(a)$$

**Teorema (Derivada da função inversa)**

Seja $f\colon D \longrightarrow B$, com $D, B \subset \mathbb{R}$, uma função bijectiva.

Se $f$

- é derivável no ponto $a \in D \cap D'$,
- $f'(a) \neq 0$ ,
- $f^{-1}$ é contínua em $b = f(a)$,

então $f^{-1}$ é derivável em $b$, tendo-se

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} \, .$$

- $\operatorname{arcsen}' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in ]-1,1[\,;$
- $\operatorname{arccosec}' x = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad x \notin [-1,1]\,;$
- $\arccos' x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in ]-1,1[\,;$
- $\operatorname{arcsec}' x = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad x \notin [-1,1]\,;$
- $\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}\,;$
- $\operatorname{arccotg} x = \dfrac{-1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$

**Teorema (Fermat)**

Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em $a \in D \cap D'$.
Se $a$ é um extremante de $f$,

então $f'(a) = 0$.

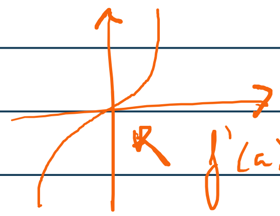
**Nota**

- O recíproco do Teorema de Fermat é falso, isto é,

$$f'(a) = 0 \;\not\Rightarrow\; f(a) \text{ extremo local de } f\,.$$

- Exemplo?

↳ $x^3$

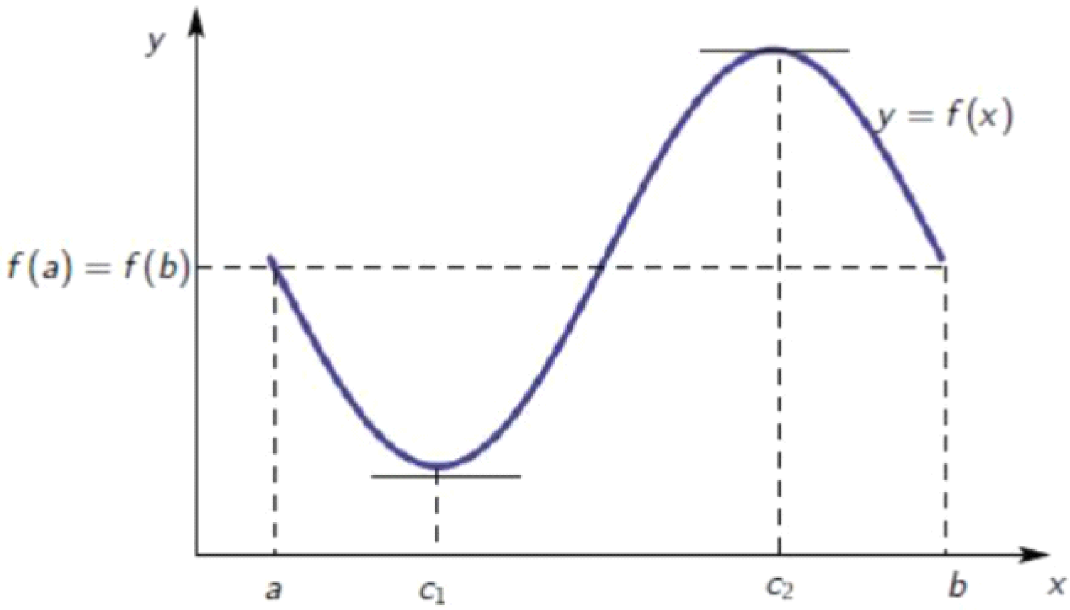


$f'(a) = 0$ e não é um extremante

**Teorema (Rolle)**

Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que é derivável em $]a,b[$.
Se $f(a) = f(b)$, então

$$\exists c \in ]a,b[ : \quad f'(c) = 0\,.$$




Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e derivável em $]a, b[$.

1. Entre dois zeros de $f$ existe, pelo menos, um zero de $f'$.

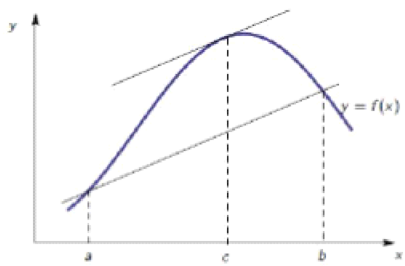
2. Entre dois zeros consecutivos de $f'$ existe, quando muito, um zero de $f$.

3. Não há mais do que um zero de $f$ inferior ao menor zero de $f'$, nem mais do que um zero de $f$ superior ao maior zero de $f'$.

**Teorema (Lagrange)**

Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua que é derivável em $]a, b[$, então

$$\exists c \in ]a, b[ : \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



1. Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $f'(x) = 0$, $\forall x \in ]a, b[$, então $f$ é constante.

2. Se $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas e tais que $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in ]a, b[$, então existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + C$, $\forall x \in ]a, b[$.

3. [Monotonia das funções reais]

   Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável no intervalo $I$. Tem-se:

   1. $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$, se e só se $f$ é crescente em $I$
   2. $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$, se e só se $f$ é decrescente em $I$
   3. se $f'(x) > 0, \forall x \in I$, então $f$ é estritamente crescente em $I$
   4. se $f'(x) < 0, \forall x \in I$, então $f$ é estritamente decrescente em $I$.