Universidade do Minho
Departamento de Matemática

LEInf

Cálculo para Engenharia

Folha 2 — 2023'24

Generalidades sobre funções reais de uma variável real.

1. Quais das seguintes equações definem uma função, real, de uma variável real x?

(i) $y = -(x+1)^2$

(ii) $x - y = \dfrac{1}{x}$

(iii) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

(iv) $y\,(x^2+1) = x^2 - 1$

2. Estabeleça a correspondência devida entre as leis que definem as funções e as representações gráficas.

Para cada uma das funções, determine também o domínio e o contradomínio.

(a) $y = \dfrac{2x^2-3}{7x+4}$

(b) $y = \dfrac{5x^2-8x-3}{3x^2+2}$

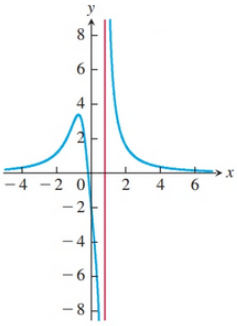
(c) $y = \dfrac{11x+2}{2x^3-1}$

(d) $y = x^{-2}$

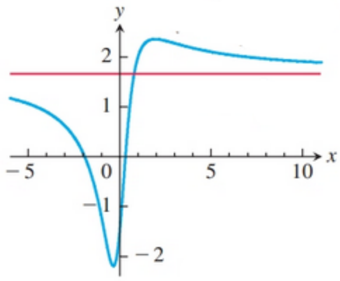
(e) $y = \sqrt[3]{x}$

(f) $y = \sqrt{x^3}$

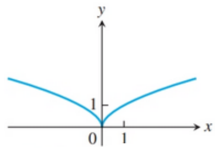
(g) $y = \sqrt[3]{x^2}$



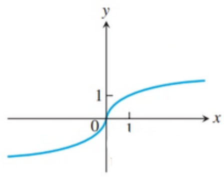
(1)



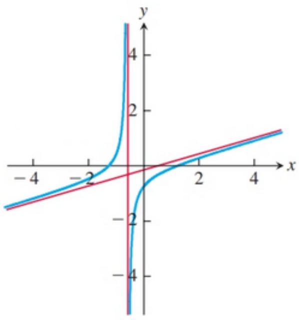
(3)



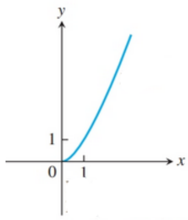
(5)



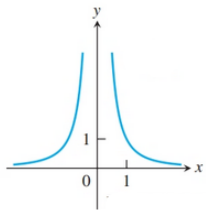
(6)



(2)



(4)



(7)

3. As alturas (em "polegadas") atingidas, na modalidade de salto à vara, nos Jogos Olímpicos de 1900, 1904, de 1908 e de 1912 tabelam-se a seguir:

t	1900	1904	1908	1912
a	130	138	146	154

(a) Esboce graficamente a função a, real de uma variável real t.

(b) Defina o domínio e o contradomínio da função a.

(c) Se a característica linear da função a se tivesse mantido após 1912 qual teria sido o recorde de salto com vara (masculino) atingido nos últimos Jogos Olímpicos?

4. Determine o domínio das funções $f+g, f-g, fg, f/g$ quando

(a) $f(x)=\sqrt{x+5}, \quad g(x)=\sqrt{x+5}$ (b) $f(x)=\sqrt{3-2x}, \quad g(x)=\sqrt{x+4}$

5. Defina $f\circ f$, $f\circ g$, $g\circ f$ e $g\circ g$; e, em cada caso, determine o respetivo domínio, quando

(a) $f(x)=x^2-3x, \quad g(x)=\sqrt{x+2}$ (b) $f(x)=\sqrt{x+15}, \quad g(x)=x^2+2x$

6. Seja $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=|x|$. Esboce o gráfico de g quando:

(a) $g(x)=f(x)-1$ (b) $g(x)=f(x+2)$ (c) $g(x)=\max\{f(x),1\}$

7. Seja $D_n=\{1.25, 2, 2.3, \pi, 4.5, 6.7\}$ o domínio de uma função 'tecto' f, definida por $f(x)=\lceil x\rceil$

(a) Represente f numa tabela.

(b) Considere um prolongamento, g, de f a $\mathcal{D}=[-2,7]$, de tal forma que $g(x)=\begin{cases}\lceil x\rceil, & \text{se } x\geq 0\\ \lfloor x\rfloor, & \text{se } x<0.\end{cases}$

Represente graficamente g.

(c) Para que valores de $x\in\mathbb{R}$ se tem $\lceil x\rceil=0$? E $\lfloor x\rfloor=0$?

8. Expresse a área e o perímetro de um triângulo equilátero, como função do comprimento do lado do triângulo.

9. Considere um ponto $\mathcal{P}$, de coordenadas (x,y), na curva definida $2x+4y=5$ e seja L a distância do ponto $\mathcal{P}$ ao ponto de coordenadas $(0,0)$. Defina L, como função de x.

10. Para cada uma das funções $f:D\longrightarrow E$ que se segue, assuma que D é o maior conjunto em que a lei faz sentido e que o conjunto de chegada é igual ao contradomínio. Identifique as funções invertíveis e determine a sua inversa:

(a) $f(x)=x$

(b) $f(x)=x^2$

(c) $f(x)=x-3$

(d) $f(x)=x^3$

(e) $f(x)=\sqrt{x+2}$

(f) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+5}$

(g) $f(x)=\dfrac{1}{x^3+2}$.

11. Estabeleça a correspondência devida entre as leis que definem as funções e as representações gráficas. Para as funções s, p, c e q determine também o domínio e os contradomínio, sabendo que o domínio das funções f e g é $[0,1]$.

(a) $f(x)=\sqrt{x}$.

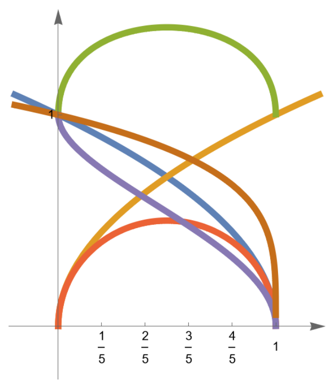
(b) $g(x)=\sqrt{1-x}$.

(c) $s(x)=(f+g)(x)$.

(d) $p(x)=(f\cdot g)(x)$.

(e) $c(x)=(f\circ g)(x)$.

(f) $q(x)=\dfrac{f}{g}(x)$.



Funções trigonométricas diretas e inversas

12. Expresse, usando o conceito de função composta, a diferença entre $\cos x^2$, $\cos^2 x$ e $\cos(\cos x)$.

13. Estabeleça as seguintes igualdades, válidas para qualquer $x\in\mathbb{R}$:

(a) $\cos^2 x=\dfrac{\cos 2x+1}{2}$ (b) $\operatorname{sen}^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$ (c) $\cos(3x)=4\cos^3 x-3\cos x$

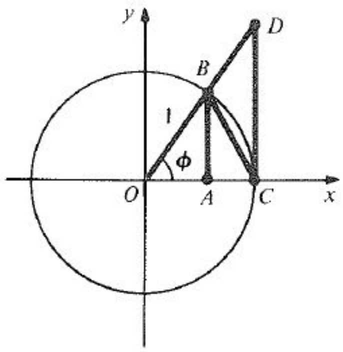
14. Resolva as equações seguintes (fazendo eventualmente uso de algumas das igualdades estabelecidas no exercício anterior):

(a) $\operatorname{sen}(2x) = \dfrac{1}{2}$ (b) $\sqrt{3}\operatorname{sen}(3x) + \cos(3x) = 2$ (c) $4\cos^3 x - 3\cos x = \dfrac{1}{2}$

15. A partir da informação recolhida da figura, prove que

(a) $\cos\phi < \dfrac{\operatorname{sen}\phi}{\phi} < 1$

(b) $\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\phi\cos\phi < \dfrac{\phi}{2} < \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\phi$



16. Determine o período de cada uma das funções definidas por

(a) $f(x) = \cos \pi x.$ (b) $f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ (c) $f(t) = -\operatorname{tg}\left(\dfrac{t}{2}\right).$

17. Calcule

(a) $\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(b) $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

(c) $\operatorname{arctg}(-1)$

(d) $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$

(e) $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\left(7\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$

(f) [1] $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{Sen}\left(7\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$

(g) $\cos\left(\arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

(h) $\sec\left(\arccos\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$

(i) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsen}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$

18. Deduza as seguintes igualdades em domínios que deverá especificar:

(a) $\operatorname{sen}(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$

(b) $\operatorname{tg}(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

(c) $\arccos x + \arccos(-x) = \pi$

(d) $\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$

Funções exponenciais e logarítmicas.

19. Qual dos números é maior?

(a) $2^{\sqrt{5}}$ ou $4^{\sqrt{2}}$? (b) $8^{\sqrt{\pi}}$ ou $2^{3\pi}$? (c) $2^{\sqrt{3}}$ ou $3^{\sqrt{2}}$? (d) $3^{\sqrt{2}}$ ou $9^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$?

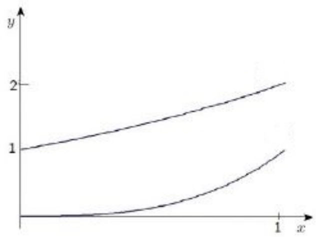
20. Que relação existe entre $\log_b c$ e $\log_c b$?

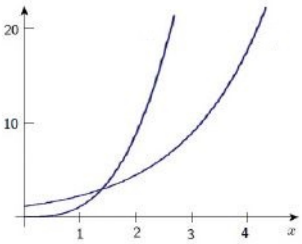
21. Em linguagem corrente usa-se a expressão "crescimento exponencial" como sinónimo de um crescimento muito rápido. Analise as seguintes representações gráficas e

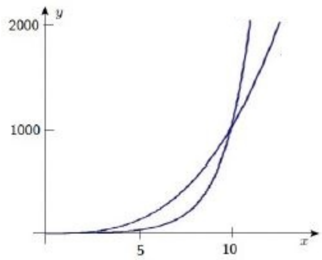
(a) selecione, para cada uma das figuras, a curva que representa graficamente a função potência (definida, neste caso, por $y = x^3$) e a função exponencial (definida, neste caso, por $y = 2^x$).

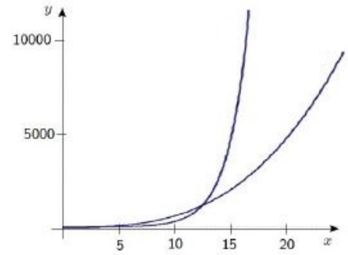
(b) reflita sobre o que pode, em rigor, ser dito quando comparamos uma função exponencial com uma função potência.

[1]Sempre que haja lugar a dúvidas, usar-se-á **letra maiúscula** na identificação das restrições-padrão bijetivas para as funções trigonométricas.



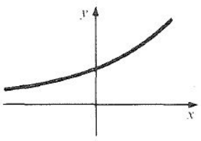
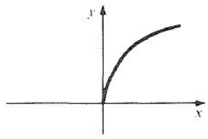
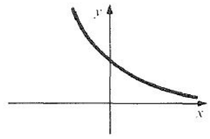
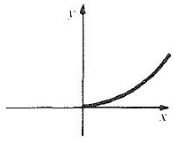






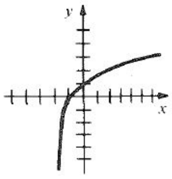
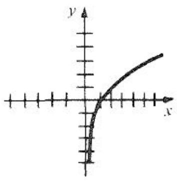
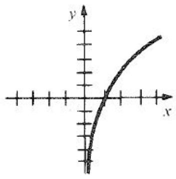
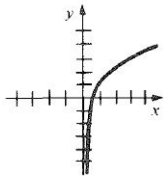
22. Estabeleça a correspondência devida entre as leis que definem as funções e as representações gráficas

(a) $y = x^{\sqrt{3}}$ (b) $y = x^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$ (c) $y = \sqrt{3}^x$ (d) $y = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$

(A) 
(B) 
(C) 
(D) 

23. Estabeleça a correspondência devida entre as leis que definem as funções e as representações gráficas

(a) $y = \log_2(x)$ (b) $y = 2\,\log_2(x)$ (c) $y = \log_2(x+2)$ (d) $y = \log_2(2x)$

(A) 
(B) 
(C) 
(D) 

24. Resolva as seguintes equações:

(a) $3^y = 2^{y+1}$

(b) $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$

(c) $e^{3x} - 2e^{-x} = 0$

(d) $\log_x 5 = 0$

(e) $\log_2(x^2) = 4$

(f) $\ln(10\,\ln y) = \ln(5x)$, em ordem a y.

Funções hiperbólicas diretas e inversas.

25. Demonstre as seguintes igualdades:

(a) $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

(b) $\cosh\, x + \operatorname{senh}\, x = e^x$

(c) $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh}\, x$

(d) $\cosh(-x) = \cosh\, x$

(e) $\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh}\, x\ \cosh\, y + \cosh\, x\ \operatorname{senh}\, y$

(f) $\cosh(x+y) = \cosh\, x\ \cosh\, y + \operatorname{senh}\, x\ \operatorname{senh}\, y$

26. Reescreva as seguintes igualdades, em termos de funções exponenciais e simplifique o resultado

(a) $2\cosh(\ln x)$

(b) $\operatorname{senh}(2\ln x)$

(c) $2\cosh(5x) + \operatorname{senh}(5x)$

(d) $\ln(\cosh x + \operatorname{senh} x) + \ln(\cosh x - \operatorname{senh} x)$

27. Demonstre as seguintes igualdades, registando o domínio onde se verificam:

(a) $\operatorname{argcosech}\, x = \ln\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}\right)$

(b) $\operatorname{argcosh}\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

(c) $\operatorname{argtanh}\, x = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

(d) $\operatorname{argcotanh}\, x = \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$