Teórica 6

27 de junho de 2024 22:46

Quando $\boxed{\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}}$

- [Teorema/Regra de L'Hôpital]
  Sejam $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis num intervalo aberto I exceto, eventualmente, no ponto $c \in I$ e tais que

$$\lim_{x \to c} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to c} g(x) = 0.$$

  Admita-se que $\forall x \in I$, $g'(x) \neq 0$, exceto, eventualmente, no ponto c.
  Se o limite

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, \qquad L \in \mathbb{R},$$

  então o limite $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ também existe e

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Não é aplicável quando os limites do numerador ou do denominador existem, mas não são iguais a zero.

- Se $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{0}{0}$$

- [Exercício] $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x}$?

- Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0 \wedge \lim_{x\to a} g(x) = \infty$, então

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0}$$

  - [Exercício] $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x}\cdot\frac{x+1}{x^2-4x+4}\right)$?

- Se $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \wedge \lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, então

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a}\left[\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} + \frac{1}{\frac{1}{g(x)}}\right] =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)} + \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \times \frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0}$$

  - [Exercício] $\lim_{x\to 0^+}\left(\operatorname{cosec} x - \frac{1}{x}\right)$?

- Como encontrar os extremantes de uma função?

Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ –com I um intervalo fechado– uma função derivável

Nota (Sobre a deteção de extremantes)

[Teste da 1.ª derivada]

- *Sendo x_0 um ponto crítico de f.*
  - *Se f' muda de sinal negativo para positivo em x_0, então x_0 é um minimizante local de f (e $f(x_0)$ diz-se um mínimo)*
  - *Se f' muda de sinal positivo para negativo em x_0, então x_0 é um maximizante local de f (e $f(x_0)$ diz-se um máximo)*

Nota

[Teste da 2.ª derivada]

- *Seja* x_0 *um ponto crítico de* f.
  - *Se* $f''(x_0) > 0$, *então* f *tem um mínimo local em* x_0.
  - *Se* $f''(x_0) < 0$, *então* f *tem um máximo local em* x_0.
  - *Se* $f''(x_0) = 0$, *então nada se pode concluir.*

- [Polinómio de Taylor]

Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in I$ tal que a n-ésima derivada de f existe em a. O polinómio

$$P_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

é chamado polinómio de Taylor de f, de ordem n, em torno do ponto a.