Análise de Sinais

PDF: ft2.pdf
Data: 02-12-2022
Tags: #SoftwareEngineering #FCD
Other notes: Espectro de um sinal

A análise espetral de sinais utiliza as séries e as transformadas de Fourier da análise matemática, formalismos que constituem uma das ferramentas fundamentais da engenharia de telecomunicações.

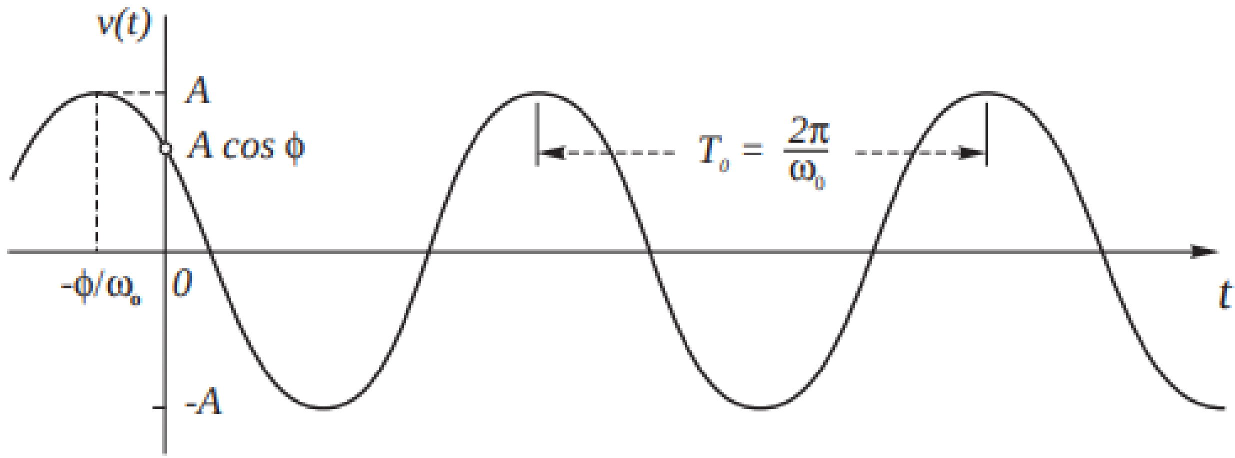
Estes formalismos permitem tratar grandes classes de sinais que possuam propriedades semelhantes no domínio da frequência **independentemente** dos detalhes que os distingam no domínio do tempo.

Sinais periódicos: Espetros de Linhas

Fasores e Espetros de Linhas

$$v(t) = A \cdot cos(w_0 t + \phi)$$

Onde A é o valor de pico ou amplitude, w_0 é a frequência angular, em radianos por segundo, e ϕ o ângulo de fase.
Este ângulo tem a ver com o instante escolhido para origem dos tempo e representa o facto de o valor mais próximo estar **desviado** dessa origem de um valor $t = -\phi/w_0$.
A equação significa que $v(t)$ se repete indefinidamente com um *período* de repetição $T_0 = 2\pi/w_0$.



O inverso do período é a frequência cíclica

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{w_0}{2\pi}$$

medida em ciclos por segundo, ou Herts (Hz).
Evidentemente que nenhum sinal *real* existe indefinidamente mas esta equação constitui um *modelo* razoável para uma forma de onda sinusoidal com uma duração muito maior do que o seu período.

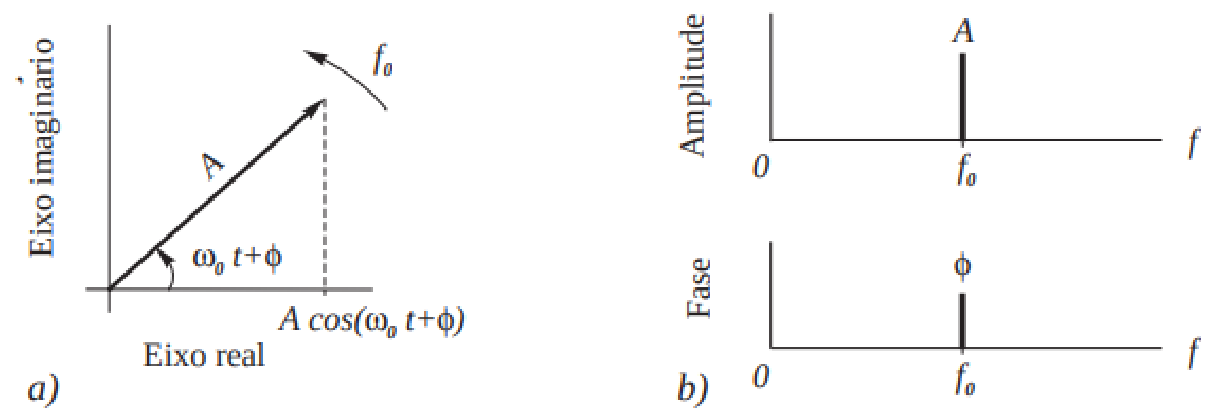
Esta sinusoide pode ser representada no plano complexo por uma exponêncial ou *fasor*. Esta representação baseia-se no teorema de Euler segundo o qual

$$e^{\pm j\theta} = cos(\theta) \pm j \cdot sen(\theta)$$

em que $j = \sqrt{-1}$ e θ é um ângulo arbitrário. Fazendo $\theta = w_0 t + \phi$ pode representar-se qualquer sinusoide como sendo a parte real de uma exponencial complexa

$$A\cos(w_0 t + \phi) = A \cdot \Re\left[e^{j(w_0 t+\phi)}\right] = \Re\left[Ae^{jw_0 t} \cdot e^{j\phi}\right]$$

designada de *representação por fasor* (porque o termo dentro de parêntesis retos pode ser considerado como um vetor rotativo no plano complexo).

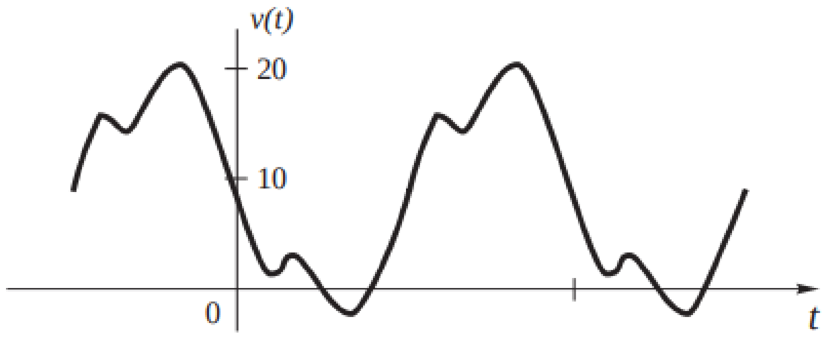


Na representação espetral adotaremos as seguintes convenções:

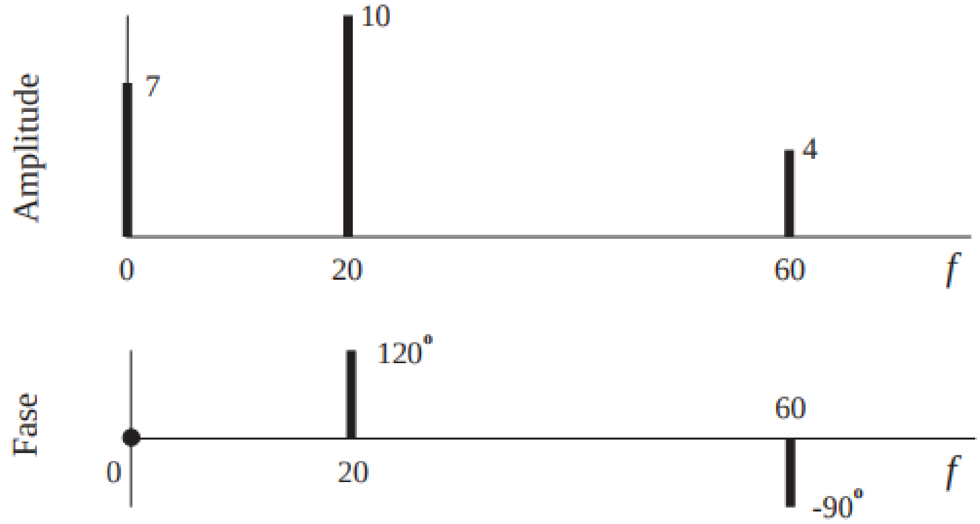
1. A variável independente é a frequência f. A frequência angular w é uma notação sintética para o valor $2\pi f$
2. Os ângulos de fase são medidos relativamente a funções *cosseno*. Os senos serão convertidos a cosseno através da identidade $\sin(wt) = \cos(wt \pm 180^\circ)$
3. A amplitude é sempre uma quantidade positiva. Quando aparecerem sinais com amplitude negativa, esta será absorvida na fase, isto é, $-A\cos(wt) = A\cos(wt \pm 180^\circ)$.
4. Os ângulos de fase são expressos em *graus* embora ângulos tais como wt sejam inerentemente em radianos.

Uma outra representação espetral ainda mais valiosa, embora envolva frequências negativas, é o espetro de linhas bilateral

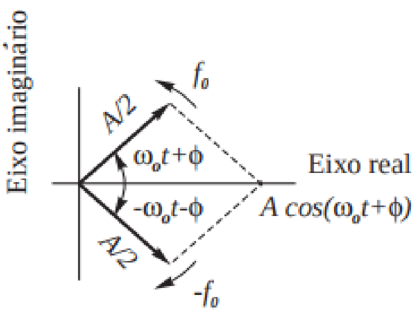
$$A\cos\left(2\pi f_0 t+\phi\right)=\frac{A}{2}e^{j2\pi f_0 t}\cdot e^{j\phi}=\frac{A}{2}e^{-j2\pi f_0 t}\cdot e^{-j\phi}$$



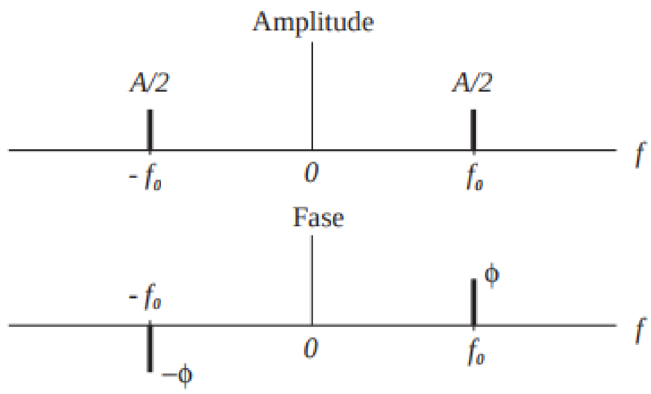
a) Representação no tempo do sinal *v(t) = 7 - 10 cos(40π t-60°) + 4 sen(120π t)*



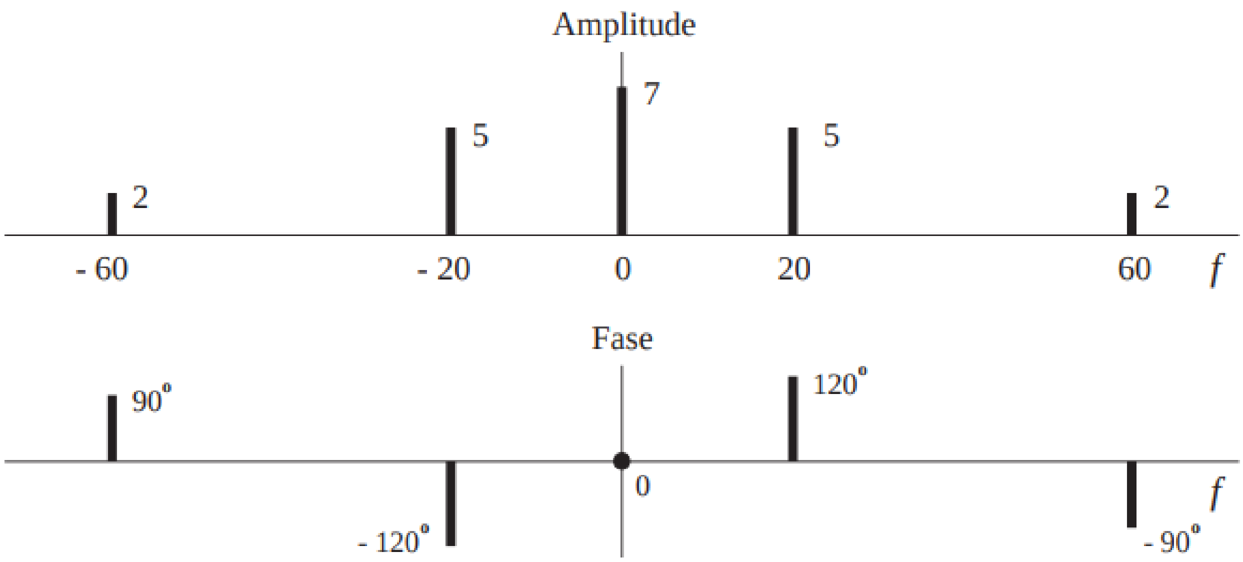
b) Espectro do mesmo sinal escrito sob a forma
v(t) = 7 cos(2π 0t) + 10 cos(2π 20t+120°) + 4 cos(2π 60t-90°)



a)



b)



Sinais Periódicos e Potência Média

O *valor médio* de $v(t)$ ao longo de todo o tempo é definido por

$$[v(t)] = \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v(t)\; dt$$

No caso de um sinal periódico, o valor médio para todo o tempo é igual ao valor médio num periódo

$$[v(t)] = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} v(t)\; dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t)\; dt$$

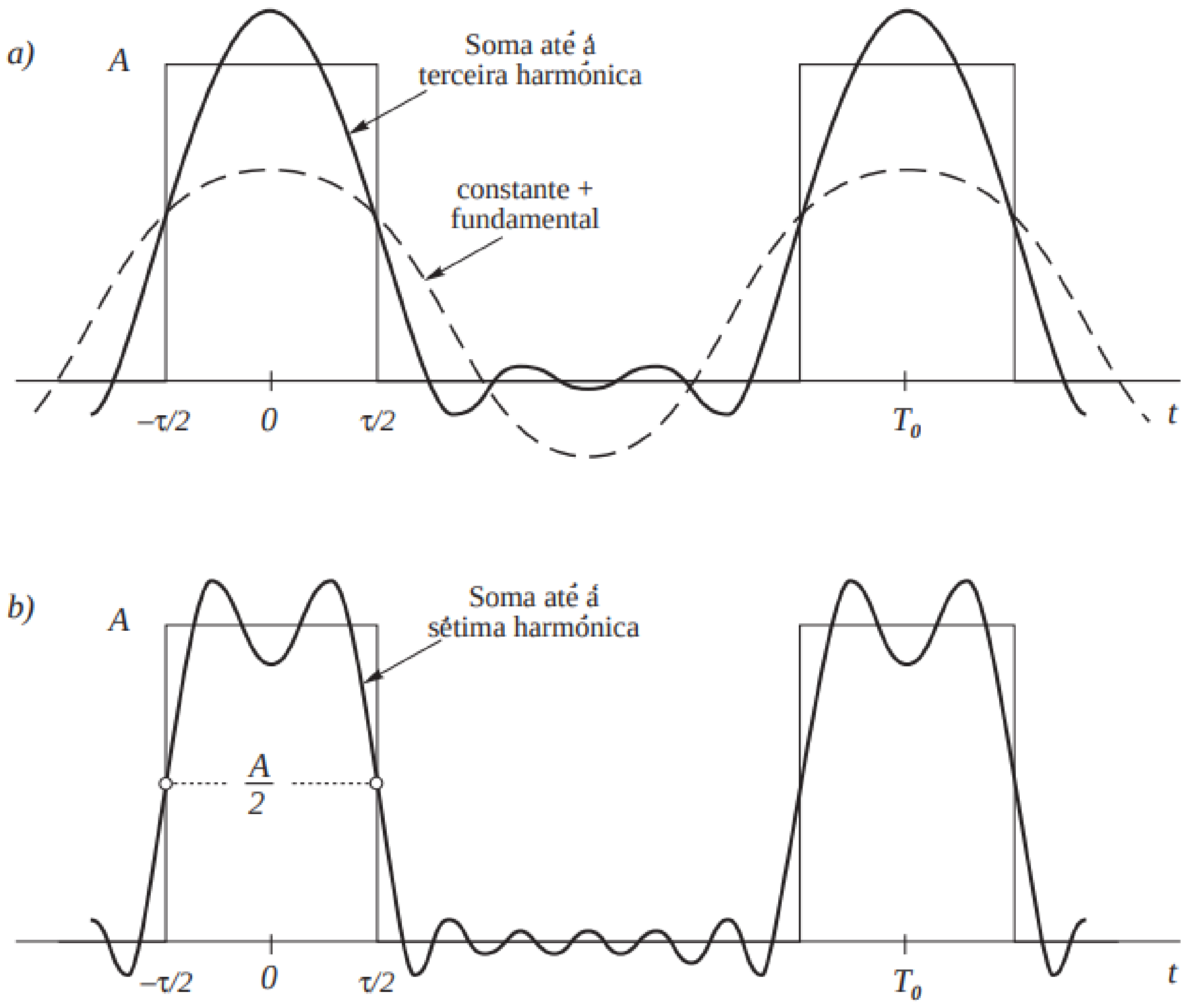
Suponhamos que $v(t)$ é a voltagem aos terminais de uma resistência de valor R Ohms. O sinal $v(t)$ dará origem a uma corrente eléctrica $i(t) = \frac{v(t)}{R}$. Pode-se então calcular a potência média dissipada na resistência calculando o valor médio da potência instantânea $s_v(t) = v(t) \cdot i(t) = \frac{v^2(t)}{R}$. Na realidade, por vezes, não se sabe se um sinal é uma tensão ou uma corrente. Por isso se convenciona *normalizar* a potência supondo que $R = 1\,\Omega$. Nestas condições, define-se *potência média*, S, associada a um sinal periódico arbitrário pela expressão

$$S = \langle |v(t)|^2 \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |v(t)|^2\; dt \qquad (2.8)$$

> Note
>
> O componente constante de amplitude $C(0)$ da série de Fourier é o valor médio de $v(t)$.

Teorema da Potência

Este teorema relaciona a potência média S de um sinal periódico com os seus coeficientes de Fourier.



Se se admitir que $v(t)$ é uma função complexa – o caso mais geral – pode escrever-se

$$|v(t)|^2 = v(t) \cdot v^*(t)$$

onde $v^*(t)$ é o complexo conjugado de $v(t)$. A potência média de $v(t)$ é

$$S = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |v(t)|^2 \, dt \quad \Leftrightarrow \quad S = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) \cdot v^*(t) \, dt$$

Substituindo $v^*(t)$ pela sua série exponencial vem,

$$S = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^* \, e^{-\jmath 2\pi n f_0 t} \right] dt$$

$$S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) \, e^{-\jmath 2\pi n f_0 t} \, dt \right] C_n^*$$

Tem-se portanto,

$$S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n C_n^* = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2$$

Teorema da Energia

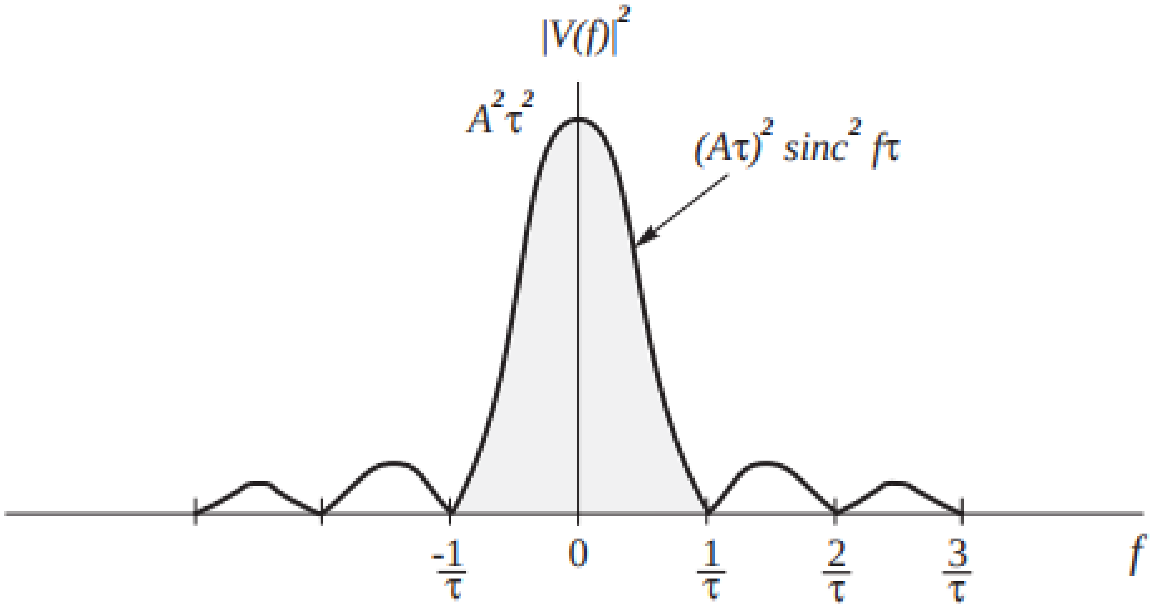
O teorema da energia (ou teorema de Rayleigh) de sinais não-periódicos é análogo ao teorema da potência de Parseval para sinais periódicos. Diz que a energia, E, de um sinal $v(t)$ está relacionada com o seu espetro, $V(f)$, por

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{+\infty} V(f) \cdot V^*(f)\, df \\ E &= \int_{-\infty}^{+\infty} |V(f)|^2\, df \end{aligned}$$

o que significa que a energia total de um sinal pode ser calculada integrando o quadrado do espetro de amplitude no intervalo de menos infinito a mais infinito.

Largura de Banda

A interpretação dada acima a $|V(f)|^2$ fornece uma justificação quantitativa à noção de largura de espetral no sentido em que a maior parte da energia de um dado sinal deverá estar contida no intervalo de frequência que se tomar como sendo *banda* do sinal, intervalo esse cuja amplitude define a *largura de banda* do sinal.



A energia, $E_{1/\tau}$, na banda $]-\frac{1}{\tau}, +\frac{1}{\tau}[$ é dada pela área sombreada na figura 2.12, situada entre o primeiro zero negativo e o primeiro zero positivo.

$$
\begin{aligned}
E_{1/\tau} &= \int_{-\frac{1}{\tau}}^{+\frac{1}{\tau}} |V(f)|^2 \, df \\
E_{1/\tau} &= \int_{-\frac{1}{\tau}}^{+\frac{1}{\tau}} (A\tau)^2 \, \mathrm{sinc}^2(f\tau) \, df \\
E_{1/\tau} &= 0.92 \; A^2 \, \tau
\end{aligned}
$$

Modulação

Modulação de Amplitude

A multiplicação de um sinal $v(t)$ por uma onda sinusoidal dá origem a um novo sinal $v_m(t)$ cujo espetro é o de $v(t)$ transladado na frequência de um valor igual à frequência do sinal sinusoidal.
Demonstração do *Teorema da modulação*:

Seja $v(t) \leftrightarrow V(f)$, isto é, $V(f) = \mathcal{F}[v(t)]$.

Calculemos o espectro de $v_m(t) = v(t) \cdot \cos(2\pi f_p t)$:

$$
\begin{aligned}
V_m(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} v_m(t) \, e^{-\jmath 2\pi f t} \, dt \\
V_m(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \cdot \cos(2\pi f_p t) \cdot e^{-\jmath 2\pi f t} \, dt
\end{aligned}
$$

como $\cos(2\pi f_p t) = \frac{e^{\jmath 2\pi f t} + e^{-\jmath 2\pi f t}}{2}$ tem-se

$$
\begin{aligned}
V_m(f) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \cdot e^{\jmath 2\pi f_p t} \cdot e^{-\jmath 2\pi f t} \, dt \; + \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-\jmath 2\pi f_p t} \cdot e^{-\jmath 2\pi f t} \, dt \\
V_m(f) &= \frac{1}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \, e^{-\jmath 2\pi (f - f_p) t} \, dt}_{(1)} + \frac{1}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \, e^{-\jmath 2\pi (f + f_p) t} \, dt}_{(2)}
\end{aligned}
$$

O integral (1) é o espectro de $v(t)$ transladado na frequência e centrado em f_p e o integral (2) é o espectro de $v(t)$ centrado em $-f_p$, donde resulta sintéticamente

$$
v(t) \cdot \cos(2\pi f_p t) \leftrightarrow \frac{1}{2} \left[V(f - f_p) + V(f + f_p) \right] \qquad (2.23)
$$