Teoria 4

26 de junho de 2024 00:05

Limite(s) e Continuidade de uma função real de variável real

$D_f: \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $\qquad f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

Como se comporta a função 'proximo' de x = 1?
f(1) não está definido, mas podemos definir f(x), <u>tão próximo quanto queiramos</u> de 2, desde que tomemos x (no domínio) suficientemente próximos de 1; por exemplo:

x	.9	1.1	.999999
f(x)	1.9	2.1	...

$a \in \mathbb{R}$ diz-se PONTO DE ACUMULAÇÃO DE D e escreve-se $a \in D'$ quando

$$\forall_{r>0} \ \exists_{x \in D} : 0 < |x - a| < r$$

$$0 < |1.9999 - 2| < r$$

- *a* ser um ponto de acumulação de D não significa que *a* pertença a D
- *a* é um ponto de acumulação de D quando estiver "rodeado de pontos de D
- Ao conjunto de D', dos pontos de acumulação de D, chamamos de <u>conjunto derivado</u> de D

<u>LIMITE</u>

$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in D'$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, quando

$$\forall_{\delta>0},\ \exists_{\varepsilon>0} : (x \in D \wedge 0 < |x-a| < \varepsilon) \Rightarrow |f(x) - l| < \delta$$

↳ qualquer l

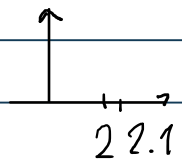
l pode ser 0 (zero) mas não pode infinito

$$|f(x) - \infty| = |-\infty| < \delta$$

$$\delta > +\infty$$

↳ Impossível se $\delta \in \mathbb{R}$

pode ler-se da seguinte forma:
"dado um número positivo δ, arbitrariamente pequeno, existe um número real positivo ε, suficientemente pequeno, tais que x pertencente a D, x != *a* e a distância de x a *a* é menor do que ε, então a distância do correspondente f(x) a *l* é menor do que δ



$$|2.1 - 2| < 0.23$$

$$\Rightarrow |f(2.1) - l| < 0.000\ldots01$$

para qualquer δ > 0, existe *um* ε > 0, tal que:
d(x, a) é menor do que um ε > 0,
então a distância da imagem de x a *l* é menor do que δ

$$T \Rightarrow F \Leftrightarrow F$$

tem de se encontrar um ε que resulte para qualquer δ, mantendo as condições de distâncias

Verifique-se (por definição) que:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

(por definição)

$$\Leftrightarrow (\forall \ldots \exists \ldots : (x \in D \wedge 0 < |x - 1| < \varepsilon)$$

(por definição)

$\Leftrightarrow \left(\forall_{\delta>0}, \exists_{\varepsilon>0} : (x \in D \wedge 0 < |x-1| < \varepsilon) \Rightarrow \left| \frac{x^2-1}{x-1} - 2 \right| < \delta \right)$

Demonstração $\exists \varepsilon$?

$\forall_{\delta \in \mathbb{R}}, \left| \frac{x^2-1}{x-1} - 2 \right| < \delta$

$\Leftrightarrow \left| \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} \right| < \delta$

$\Leftrightarrow \frac{|\cancel{(x-1)}||(x+1)|}{|\cancel{(x-1)}|} < \delta, \quad 0 < |x-1| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow |x-1| < \delta$

Faça-se, pois, $\varepsilon = \delta$
(Verifica-se sempre que é verdade quando $\varepsilon = \delta$, $\forall_{\delta>0}$)

Teorema (Unicidade do limite)

Sejam $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in D'$

Se

$$\lim_{x \to a} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} f(x) = l_2$$

então

$$l_1 = l_2$$

Sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in D'$

Se

$\lim_{x \to a} g(x) = 0$ e f é limitada em $D \setminus \{a\}$

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$$

Teorema (Enquadramento de limites)

$f, g, h : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in D'$:

$\forall x \in D \setminus \{a\}$, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$

Se $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = l \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} = l$

Teorema (Aritmética dos limites)

$f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in D'$

$l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ e $m = \lim\limits_{x \to a} g(x)$

$\lim\limits_{x \to a} (f \pm g)(x) = l \pm m$

$\lim\limits_{x \to a} (f \times g)(x) = lm$

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{l}{m}$, $m \neq 0$

LIMITES NO INFINITO

$f : D \to \mathbb{R}$ e D um conjunto <u>não</u> limitado

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, quando

$\forall \delta > 0, \exists A > 0 : (x \in D \wedge x > A)$
$\Rightarrow |f(x) - l| < \delta$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$, quando

$\forall \delta > 0, \exists A > 0 : (x \in D \wedge x < -A)$
$\Rightarrow |f(x) - l| < \delta$

$\forall \delta > 0, \exists A > 0 : (x \in D \wedge x < -A)$
$\Rightarrow |f(x) - \ell| < \delta$

INDETERMINAÇÕES:

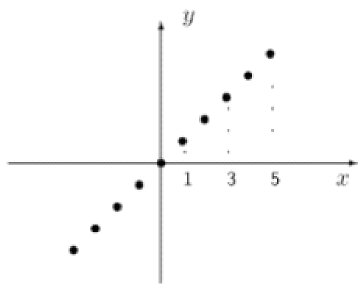
$0 \cdot \infty, \ \frac{\infty}{\infty}, \ \frac{0}{0}, \ 1^{\infty}, \ 0^{0}, \ \infty^{0}$

NÃO EXISTE $\lim_{x \to a} f(x)$ quando, por exemplo,

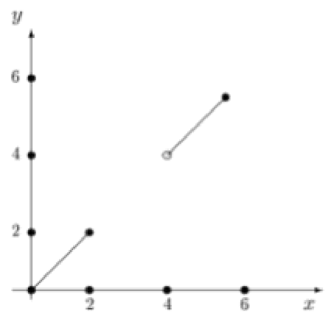
- $\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x)$
- $f(x) \to \infty$ quando $x \to a$

CONTINUIDADE

$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x$



$g : [0,2] \cup]4,6] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x$



↳ Ambas são contínuas

Ponto isolado: $\exists r > 0$
$]x - r, x + r[\cap D = \{x\}$

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in D$,
f é contínua em $a \in D$ quando
- a é ponto isolado de D, ou

f é contínua em $a \in D$ quando

- a é ponto isolado de D, ou
- $a \in D'$ e $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

$a \xleftarrow{+} b$, $a \xrightarrow{-} b$

Diz-se que:

- $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em a quando $f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$;
- $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em b quando $f(b) = \lim_{x \to b^-} f(x)$;
- f é contínua em D quando f é contínua em qualquer (todos) $x \in D$.

- [Continuidade da função inversa]

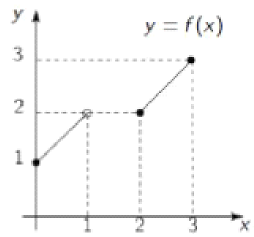
  Se I e J são intervalos reais e $f : I \longrightarrow J$ é uma função bijetiva e contínua, então f^{-1} existe e é contínua.

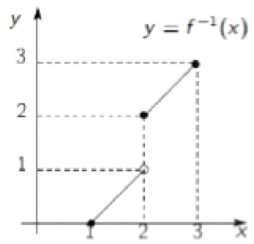
Exemplo Contradição com o teorema?

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \qquad f^{-1}(x) = \begin{cases} x-1, & 1 \leq x < 2 \\ x, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

f é contínua

f^{-1} é descontínua





$$\lim_{x \to 2^+} f^{-1}(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f^{-1}(x)$$

- Diz-se que $a \in D$ é um ponto de descontinuidade de f, ou que f possui uma descontinuidade no ponto $a \in D$, quando se verificar uma das seguintes condições:

  - $a \in D'$ e não existe $\lim_{x \to a} f(x)$;
  - $a \in D'$ existe $\ell = \lim_{x \to a} f(x)$ e $\ell \neq f(a)$.