Universidade do Minho
Departamento de Matemática

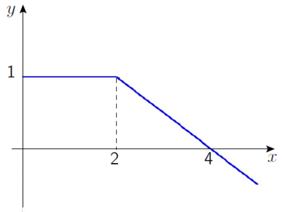
LEInf

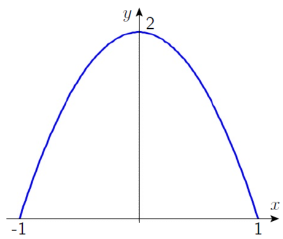
Cálculo para Engenharia

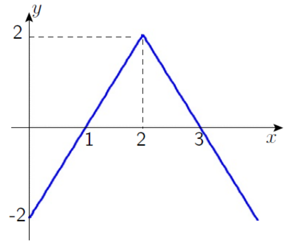
folha 5 — 2023'24

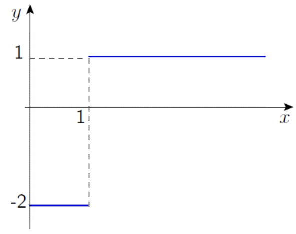
Primitivas.

1. Considere, em cada alínea, a função $f : I :\longrightarrow \mathbb{R}$, I um intervalo, representada graficamente por

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

Esboce, caso exista, uma função F, primitiva de f em I, sabendo que:

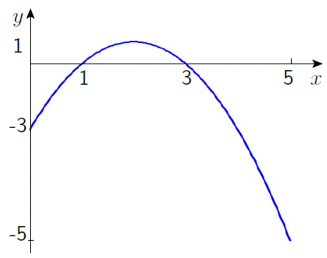
(a) $I = [0, 5]$

(b) $I = [-1, 1]$, $f(x) = 2 - 2x^2$ e $F(0) = 0$

(c) $I = [0, 4]$ e $F(0) = -2$

(d) $I = [0, 4]$ e $F(0) = 1$

2. Seja $f : [0, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$ representada graficamente na figura ao lado. Considere uma função primitiva de f, $F : [0, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$.



(a) Encontre os pontos críticos de F.

(b) Classifique os pontos críticos de F.

3. Sejam f e g funções reais de variável real, tais que $f(x) = \dfrac{d}{dx}(1 - \sqrt{x})$ e $g(x) = \dfrac{d}{dx}(x + 2)$.

(a) $\displaystyle\int f(x)\, dx.$

(b) $\displaystyle\int g(x)\, dx.$

(c) $\displaystyle\int [f(x) - g(x)]\, dx.$

4. Prove que,

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^2}\, dx = -\frac{1}{x+1} + \mathcal{C}.$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^2}\, dx = \frac{x}{x+1} + \mathcal{C}.$

(c) $\forall k \neq -1$, se tem $\displaystyle\int x^k\, dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + \mathcal{C},$

com $\mathcal{C}, k \in \mathbb{R}$.

5. Assinale, justificando, o valor lógico de cada uma das seguintes afirmações.

(a) $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{sen} x + \mathcal{C}.$

(b) $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x\, dx = -x \cos x + \mathcal{C}.$

(c) $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x\, dx = x \cos x + \operatorname{sen} x + \mathcal{C}.$

(d) $\displaystyle\int \frac{-15(x+3)^2}{(x-2)^4} = \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^3 + \mathcal{C}.$

(e) $\displaystyle\int [f(x)\, g(x)]\, dx = \left[\int f(x)\, dx\right] g(x) + f(x) \left[\int g(x)\, dx\right]$, quaisquer que sejam as funções, reais de variável real, f e g definidas em um intervalo I.

6. Tente calcular mentalmente, as antiderivadas de f. Depois, derivando, confirme a sua resposta.

(a) $f(x) = 6x$; $\quad f(x) = x^7$; $\quad f(x) = x^5 - 3x + 8$.

(b) $f(x) = \dfrac{2\sqrt[3]{x}}{3}$; $\quad f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x}}$; $\quad f(x) = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

(c) $f(x) = \pi \cos(\pi x)$; $\quad f(x) = \dfrac{\pi}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$; $\quad f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) + \pi \cos x$.

7. Calcule os seguintes integrais indefinidos

(a) $\displaystyle\int (3x^2 - 2x^5)\, dx$

(b) $\displaystyle\int (\sqrt{x} + 2)^2\, dx$

(c) $\displaystyle\int (2\theta + 10)^{20}\, d\theta$

(d) $\displaystyle\int x^4 (x^5 + 10)^9\, dx$

(e) $\displaystyle\int y^2 e^{y^3}\, dy$

(f) $\displaystyle\int \sqrt{2x+1}\, dx$

(g) $\displaystyle\int (1 + \operatorname{tg}^2 \theta)\, d\theta$

(h) $\displaystyle\int \frac{t}{3 - t^2}\, dt$

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{4 - 3x}\, dx$

(j) $\displaystyle\int \operatorname{tgh} x\, dx$

(k) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{3x}}\, dx$

(l) $\displaystyle\int \frac{-7}{\sqrt{1 - 5x}}\, dx$

(m) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1 + 3\ln a}}{a}\, da$

(n) $\displaystyle\int z \operatorname{sen} z^2\, dz$

(o) $\displaystyle\int \frac{1}{x(\ln^2 x + 1)}\, dx$

(p) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{x} - 3\right)^2 \frac{1}{x^2}\, dx$

(q) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\pi - 2x)\, dx$.

8. Defina F, função real de variável real, sabendo que $x^5 F'(x) + x^3 + 2x = 3$.

9. Considere uma curva, definida por $y = f(x)$ e tal que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6x$, passa pelo ponto $(0, 1)$ e aí admite uma tangente horizontal.

(a) Defina f.

(b) Quantas curvas verificam as condições enunciadas?

10. Usando primitivação por partes calcule os seguintes integrais indefinidos:

(a) $\displaystyle\int x \operatorname{sen}(2x)\, dx$

(b) $\displaystyle\int x \cos x\, dx$

(c) $\displaystyle\int \ln(1 - x)\, dx$

(d) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx$

(e) $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x \cos x\, dx$

(f) $\displaystyle\int \ln^2 x\, dx$

(g) $\displaystyle\int e^x \cos x\, dx$

(h) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x\, dx$

(i) $\displaystyle\int e^{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} x \cos x\, dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

(k) $\displaystyle\int x \operatorname{arctg} x\, dx$

(l) $\displaystyle\int x^2 \ln x\, dx$

(m) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$

(n) $\displaystyle\int \cosh x \operatorname{sen}(3x)\, dx$

(o) $\displaystyle\int x^3 e^{x^2}\, dx$.

11. Calcule as seguintes primitivas usando a substituição indicada.

(a) $\displaystyle\int x\sqrt{x-1}\,dx, \quad x=t^2+1$

(b) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx, \quad x=\operatorname{sen} t$

(c) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx, \quad x=\ln t$

(d) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,dx, \quad x=\operatorname{senh} t$

(e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}, \quad x=u+4$

(f) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^3}, \quad u=1+\sqrt{x}$

12. Calcule os seguinte integrais indefinidos, de funções racionais.

(a) $\displaystyle\int \frac{3x^2-4x-1}{(x^2-1)(x-2)}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+1}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{4x^2+x+1}{x^3-x}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{27}{x^4-3\,x^3}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{x^4-8}{x^3-2\,x^2}\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{x+3}{(x-2)\,(x^2-2\,x+5)}\,dx$

13. Calcule os seguintes integrais indefinidos

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-1}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\ \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{-3}{x\,(\ln x)^3}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1-2e^x}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(7x)}\,dx$

(h) $\displaystyle\int \left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{1+3x}\right)\,dx$

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\ \left(1+\ln^2 x\right)\,dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{2\ +\ \sqrt{\operatorname{arctg}(2x)}}{1+4x^2}\,dx$

(k) $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{arctg}\,x}}{1+x^2}\,dx$

(l) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+\cos x}}\,dx$

(m) $\displaystyle\int \frac{1}{(2+\sqrt{x})^7\,\sqrt{x}}\,dx$

(n) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$

(o) $\displaystyle\int \frac{x+[\operatorname{arcsen}(3x)]^4}{\sqrt{1-9\,x^2}}\,dx$

(p) $\displaystyle\int \frac{x\,e^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(q) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x\ \operatorname{sen}^2 x}\,dx$

(r) $\displaystyle\int \cos^2 x\ \operatorname{sen}^2 x\,dx$

(s) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$

(t) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$

(u) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\,\sqrt{4-x^2}}\,dx.$

Integral de Riemann.

14. (a) Mostre, geometricamente, que

$$\int_0^1 \sqrt{2-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}.$$

(b) Usando o mesmo tipo de raciocínio, deduza o valor de

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}.$$

15. Sejam $k,a,b\in\mathbb{R}$ e $n\in\mathbb{N}$. Nestas condições,

(a) mostre que

i. $\sum_{i=1}^{n} k = kn$ ii. $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$ iii. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(b) calcule, usando a definição de integral definido,

$$\int_{x=a}^{b} \left(k + x + x^2\right)\, dx.$$

16. Escreva $\displaystyle\int_0^1 x^3\, dx$, na forma de um limite de um somatório (de Riemann).

17. Exprima, na forma de um integral definido no intervalo $[\pi, 2\pi]$, o limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} (1+x_i) \cos x_i \, \Delta x_i.$$

18. Nas somas –esquerda, direita e média– de Riemann, as "alturas" dos retângulos calculam-se usando, respetivamente, o extremo esquerdo, o direito e o ponto médio de cada subintervalo. Nestas condições,

(a) usando uma partição do intervalo $[1, 2]$, em 3 subintervalos com a mesma amplitude, calcule

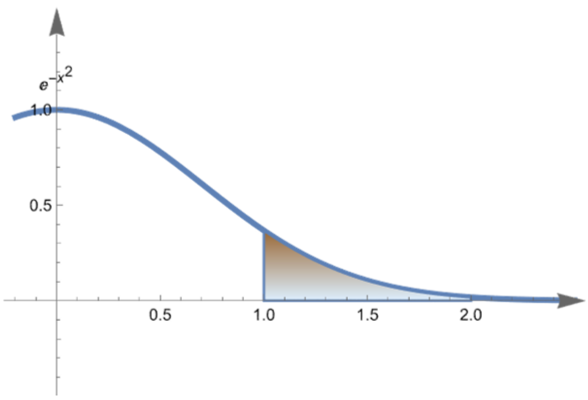
$$\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx,$$

com um erro inferior a $\dfrac{1}{10}$.

(b) estime o valor de $\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$, usando as somas esquerda, direita e média e dois subintervalos de $[1, 2]$.

(c) compare os resultados obtidos nas alíneas anteriores com o valor exato do integral.

19. Seja f uma função real de variável real contínua no intervalo $[a, b]$, com $a \neq b$. Sabendo que $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \neq 0$ e que $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = 1$, prove que $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx > 0$.



20. As funções, reais de variáveis reais, ditas Gaussianas[a] são recorrentemente invocadas como modelos matemáticos de grande utilidade, mas estão entre as funções que, apesar de elementares, não possuem primitivas elementares. Mostre, em particular, que

$$\frac{1}{e^4} \leq \int_{x=1}^{2} e^{-x^2}\, dx \leq \frac{1}{e}.$$

[a] Uma função de Gauss f, real de variável real, define-se como $f(x) = a \cdot e^{-\frac{(x-b)^2}{2c^2}}$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$ e e o número de Euler.

21. Sem efetuar cálculos, indique o sinal de cada um dos seguintes integrais definidos

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^3\, dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x \cos x\, dx$ (c) $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$

22. Em cada alínea e sem efetuar cálculos, indique qual é o maior dos integrais definidos

(a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$ **e** $\displaystyle\int_0^1 x\,dx$ (c) $\displaystyle\int_1^2 e^{x^2}\,dx$ **e** $\displaystyle\int_1^2 e^{x}\,dx$

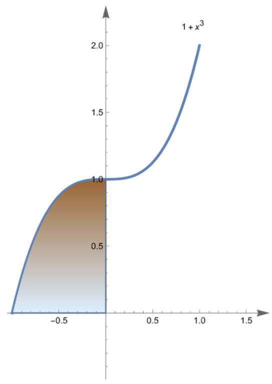
(b) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \operatorname{sen}^2 x\,dx$ **e** $\displaystyle\int_0^1 x \operatorname{sen}^2 x\,dx$

23. Sabendo que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 6$, $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = 4$, $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,dx = 1$; calcule

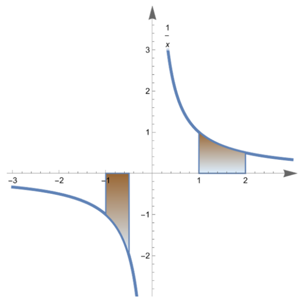
(a) $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,dx$ (c) $\displaystyle\int_1^5 f(x)\,dx$ (e) $\displaystyle\int_2^0 f(x)\,dx$

(b) $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$ (d) $\displaystyle\int_0^0 f(x)\,dx$ (f) $\displaystyle\int_5^1 f(x)\,dx$

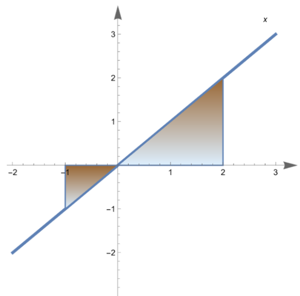
24. Exprima, em termos de integrais adequados, as áreas das regiões sombreadas, em cada uma das figuras.



(a)

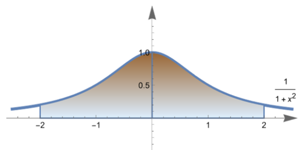


(b)



(c)

(d)



25. Usando a, denominada, fórmula de Barrow, calcule[1]

(a) $\displaystyle\int_0^1 x\,dx$ (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ (g) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{(\ln u)^2}{u}\,du$

(b) $\displaystyle\int_2^3 e^x\,dx$ (e) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{5}} \frac{dt}{\sqrt{3-5t}}$ (h) $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{v}\right)}{v^2}\,dv$

(c) $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$ (f) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen} 3t\,dt$ (i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{z^2}{\sqrt{1-z}}\,dz$

26. Considere as funções g_i, com $i = 1, 4$, definidas por

(i.) $g_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0,1] \\ -3, & \text{se } x \in]1,2] \end{cases}$ (ii.) $g_2(x) = \begin{cases} -4, & \text{se } x \in [-1,0[\\ 2, & \text{se } x \in [0,1] \\ 2, & \text{se } x \in]1,2] \end{cases}$

Expresse, para cada função e usando integrais definidos, a área da região delimitada pelo gráfico da função e pelo eixo das abcissas.

27. Em cada uma das alíneas, calcule a função derivada de F, sendo F definida em $\mathbb{R}$ por:

[1] Observe, em particular, que quando se faz uma substituição –por exemplo $t = g(x)$–, um intervalo $[a,b]$, no eixo xx' (das abcissas), muda para o intervalo $[g(a), g(b)]$, no 'novo' eixo tt' (das abcissas).

(a) $F(x) = \int_0^x (1+t^2)^{-3}\, dt$ (b) $F(x) = \int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3}\, dt$ (c) $F(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{t^6}{1+t^4}\, dt$

28. Seja $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

Defina a função F, sabendo que $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,2] \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

29. Calcule os seguintes integrais

(a) $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\, dx$

(b) $\int_0^\pi (x+2)\cos x\, dx$

(c) $\int_0^2 x^3\, e^{x^2}\, dx$

(d) $\int_0^1 \ln(x^2+1)\, dx$

(e) $\int_0^{\sqrt{2}/2} \operatorname{arcsen} x\, dx$

(f) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen} x|\, dx$

(g) $\int_0^1 g(x)\, dx$, com

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \le x \le 1/2, \\ -x & \text{se } 1/2 < x \le 1. \end{cases}$$

(h) $\int_{-3}^{2} \sqrt{|x|}\, dx.$

30. [Mudança de variável universal]

(a) Mostre que, se $x = 2\operatorname{arctg} t$, então

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

(b) Usando a substituição $x = 2\operatorname{arctg} t$, calcule

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}\, dx.$$

31. Usando a substituição indicada, calcule

(a) $\int_{-1}^{1} e^{\operatorname{arcsen} x}\, dx, \quad x = \operatorname{sen} t$

(b) $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\, dx, \quad x = 3\operatorname{sen} t$

(c) [2] $\int_{3/4}^{4/3} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\, dx, \quad x = \operatorname{senh} t$

(d) $\int_1^2 x\sqrt{x-1}\, dx, \quad t = x-1$

(e) $\int_0^{3/2} 2^{\sqrt{2x+1}}\, dx, \quad x = \frac{t^2-1}{2}$

32. Considere a seguinte definição de "logaritmo"(em termos de uma função algébrica):

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt.$$

Nestas condições, prove (usando a substituição $s = x\,t$) que $\ln x + \ln y = \ln(xy)$.

[2] Salienta-se que, no slide 21, da semana 8, há um exercício $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\, dx$ – que também se poderia abordar com esta mesma substituição.

33. Estude a natureza, em função de α, do integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$.

34. Mostre que o integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-r\,x}\,dx$ é convergente se $r > 0$ e divergente se $r \leq 0$.

(Sug.: comece por estudar o caso $r = 0$.)

35. Estude os seguintes integrais impróprios

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x-1}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ (g) $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\,e^{-x^2}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2\,dx$ (f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos(\pi x)\,dx$ (h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

36. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e tal que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Com $a \in \mathbb{R}^+$, quais das seguintes afirmações são falsas e quais as verdadeiras? Justifique a sua resposta.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} a\,f(x)\,dx$ converge. (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(a+x)\,dx$ converge.

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(ax)\,dx$ converge. (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} (a+f(x))\,dx$ converge.

37. Estude a convergência , justificando, se cada um dos seguintes integrais é convergente ou divergente.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\sqrt{x}\;dx$; (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$. (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

38. Estude a natureza dos seguintes integrais

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$ (e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_0^1 x\ln x\,dx$ (f) $\displaystyle\int_{-3}^1 \frac{1}{x^2-4}\,dx$

39. Usando integrais definidos, calcule

(a) $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$ (b) $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)$

40. Seja $f:[-1,2]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=1+x^2$. Determine o valor médio da função e, se possível, o valor $c\in[-1,2]$ tal que $f(c)$ é o valor médio da função.

41. Sejam f e g duas funções integráveis em $[a,b]$ cujas curvas se intersetam neste intervalo.

Nestas condições, qual o significado geométrico de cada um dos integrais?

(a) $\displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$

(b) $\displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$

42. Determine a área da região limitada por $y = \sqrt{x}$, pela tangente a esta curva em $x = 4$ e pelo eixo das ordenadas.

43. Represente graficamente $\mathcal{A}$ e calcule a sua área, sabendo que $\mathcal{A}$ é

(a) a região do plano delimitada pelas retas definidas por $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ e pela curva definida por $f(x) = \sqrt{x}$.

(b) o lugar geométrico dos pontos definido por $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1 \quad \text{e} \quad \sqrt{x} \le y \le -x + 2\}$.

(c) a região do plano delimitada superiormente pela parábola definida por $y = -x^2 + \dfrac{7}{2}$ e inferiormente pela parábola definida por $y = x^2 - 1$.

(d) o conjunto de todos os pontos (x, y) em $\mathbb{R}^2$ tais que $x^2 - 1 \le y \le x + 1$.

44. Em cada alínea calcule a área da região limitada pelas curvas de equações:

(a) $x = 0, \quad x = 1, \quad y = 3x, \quad y = -x^2 + 4$

(b) $x = 0, \quad x = \pi/2, \quad y = \text{sen } x, \quad y = \cos x$

(c) $x = -1, \quad y = |x|, \quad y = 2x, \quad x = 1$

(d) $y = 0, \quad x = 2 - y - y^2$

45. Defina a reta horizontal que divide a área da região entre $y = x^2$ e $y = 9$ em duas partes iguais.

46. Encontre o comprimento do segmento de reta definido por $y = 2x$, com $1 \le x \le 2$, usando

(a) um integral definido em ordem a x;

(b) um integral definido em ordem a y;

47. Considere a curva definida por $y = x^{2/3}$.

(a) Esboce o arco desta curva, entre $x = -1$ e $x = 8$.

(b) Explique porque razão não pode usar um integral definido em ordem a x para calcular o comprimento de arco esboçado na alínea 47a.

(c) Calcule o comprimento da curva da 47a.

48. Determine o comprimento da curva definida pelas equações apresentadas, entre os pontos A e B indicados:

(a) $y = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}$, $A = (1, \frac{2}{3})$, $B = (8, \frac{8}{3})$

(b) $y = 5 - \sqrt{x^3}$, $A = (1, 4)$, $B = (4, -3)$

(c) $y = 6\sqrt[3]{x^2} + 1$, $A = (-1, 7)$, $B = (-8, 25)$

(d) $y = \frac{1}{4x} + \frac{x^3}{3}$, $A = (-2, \frac{67}{24})$, $B = (-3, \frac{109}{12})$.

49. *Se as funções positivas f e g, contínuas em $[a, +\infty[$. são tais que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$, então os integrais impróprios $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ são ambos convergentes ou ambos divergentes.* Nestas condições,

(a) Mostre que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1 - e^{-}x}{x}\,dx$ diverge, por comparação com $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

(b) Mostre que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2}$ converge, por comparação com $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

Prove, ainda, que embora $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, estes integrais convergem para valores diferentes.

50. Considere $\mathcal{R}$ a região definida por $y = e^{-x}$ com $x \ge 0$ e o eixo das abcissas. Determine, se possível,

(a) a área de $\mathcal{R}$.

(b) os volumes dos sólidos de revolução gerados por $\mathcal{R}$, em torno de xx e em torno de yy.

(c) o comprimento da curva que limita $\mathcal{R}$ superiormente.