Teórica 7 e 8

1 de julho de 2024 12:07

$f : I \to \mathbb{R}$
$g : I \to \mathbb{R}$

$$g(x) = f'(x)$$

Encontrar $F : I \to \mathbb{R}$, tal que:
$F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$

↳ Problema da primitivação

- f é primitivável em I
- F é primitiva / antiderivada de f em I
- O conjunto de todas as primitivas de f é o integral indefinido de f e escrevemos

$$\boxed{F(x) = \int f(x)\, dx}$$

Se, no intervalo I, f e F são uma função e uma sua primitiva (respetivamente), então:

$$\frac{d}{dx} F(x) = \left(dx \left[\int f(x)\, dx \right] \right) dx$$

Se F é uma primitiva de f no intervalo I então qualquer função definida por $F(x) + C$, $\forall x \in I$ e com C uma constante real arbitrária, também é uma função primitiva de f.

NOTE:

❸ a função definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{se } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

não admite primitiva no intervalo $[0, 4]$ porque não é a derivada de alguma função.

Primitivas Fundamentais

Função f	Primitivas: $\int f(x)\,dx$
e^x	$e^x + C$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x + C$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x + C$
x^k	$\frac{x^{k+1}}{k+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$

com $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

PROPRIEDADES DO INTEGRAL INDEFINIDO

- Primitivação por decomposição

① $\int [\alpha f(x)]\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$

② $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Exemplo:

$$\int (3x^2 - 2x^5)\,dx \overset{②}{=} \int 3x^2\,dx - \int 2x^5\,dx$$

$$\overset{①}{=} 3\int x^2\,dx - 2\int x^5\,dx$$

$$= 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 2\,\frac{x^6}{6}$$

$$= x^3 - \frac{x^6}{3} + C$$

$$\int \frac{3}{\sqrt{x}} + \cos 2x\,dx$$

$$= 3\int x^{-\frac{1}{2}} + \int \cos 2x\,dx \quad , \quad u = 2x$$

$$\Rightarrow du = 2\,dx$$

$$= 3\,\frac{\sqrt{x}}{1/2} + \int \cos(u)\,\frac{1}{2}\,du \quad \Rightarrow dx = \frac{1}{2}\,du$$

$$= 6\sqrt{x} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + C$$

- Primitivação "imediata"

$$[g(f(x))]' = g'[f(x)] \times f'(x)$$

$$\Rightarrow \int [g'(f(x)) \times f'(x)]\,dx = g[f(x)] + C$$

Exemplo:

① $\int (2x+10)^{20}\,dx$

$= \int u^{20} \times \frac{1}{2}\,du$, $(2x+10)' = 2$

$\Rightarrow du = 2dx$

$\Rightarrow dx = \frac{du}{2}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{u^{21}}{21}$

$= \frac{1}{42} \times (2x+10)^{20} + C$

A regra da cadeia, 'invertida'

1. a 'regra da cadeia' permite-nos concluir que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u^{k+1}}{k+1}\right) = u^k \frac{du}{dx}$$

2. Por outro lado, a mesma equação também pode ser lida como afirmando que

$$\int u^k \frac{du}{dx}\,dx = \left(\frac{u^{k+1}}{k+1}\right) + C$$

3. que é equivalente a uma forma mais 'simples'

$$\int u^k\,du = \frac{u^{k+1}}{k+1} + C$$

- [Primitivação "por substituição"]:[i]

Teorema

Se a função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é primitivável –isto é $F(x) = \int f(x)\,dx$ existe– e φ é uma função derivável e invertível no intervalo J, com $\varphi(J) \subset I$, então fazendo (encontrando) $x = \varphi(t)$ tem-se

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

① $\int (x^3+x)^5(3x^2+1)\,dx$, $t = x^3 + x$

$\int u^5 (3x^2+1)\frac{1}{3x^2+1}\,du$

$= \int u^5\,du$

$= \frac{u^6}{6} + C = \frac{(x^3+x)^6}{6} + C$

④ $\int \frac{\ln^3(x)}{x} = \int \frac{u^3}{x} x\,du = \int u^3\,du$

④ $\int \frac{\ln^3(x)}{x} = \int \frac{u^3}{x} x \, du = \int u^3 \, du$

$= \frac{u^4}{4} + C = \frac{\ln^4 x}{4} + C$

• Primitivação POR PARTES

$$\int [f'(x) \times g(x)] \, dx$$

$$= f(x) \times g(x) - \int [f(x) \times g'(x)] \, dx$$

Simplificado: $\int u v' = uv - \int u' v$

Exemplo:

① $\int (x \cos x) \, dx$, $u = x$; $u' = 1$

$v' = \cos x$; $v = \int \cos(x) \, dx = sen(x)$

$= x \times sen(x) - \int 1 \times sen(x)$

$= x \times sen(x) + \cos(x) + C$

② $\int \boxed{(e^x \cos x)} \, dx$, $u = e^x \to u' = e^x$

$v' = \cos x \to v = \int \cos(x) \, dx = sen(x)$

$= e^x \cdot sen(x) - \int e^x sen(x) \, dx$, $u = e^x \to u' = e^x$

$v' = sen(x) \to v = -\cos(x)$

$= \underbrace{e^x \cdot sen(x) + e^x \cdot \cos(x)} - \boxed{\int e^x \cos(x)}\,)$

$\Rightarrow 2 \int e^x \cos x \, dx = e^x \cdot sen(x) + e^x \cdot \cos(x)$

$= \int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (sen(x) + \cos(x)) + C$

③ $\int \cos^2 x \, dx$, $u = \cos^2(x) \to u' = 2u \; (u')$

$v' = 1$ $\quad = -2 \cos(x) \, sen(x) = -sen(2x)$

$v = \int 1 \, dx = x$

$= \cos^2 x \cdot x + \int sen(2x) \, x$, $v' = sen(2x) \to v = \int sen(u) \frac{1}{2} du = -\frac{1}{2} \cos(2x)$

$u = x \to u' = 1$

$= \cos^2 x \cdot x + \left(-\frac{1}{2} \cos(2x) \times x - \int 1 \times -\frac{1}{2} \cos(2x) \, dx \right)$

$= \underbrace{\cos^2 x \cdot x}_{u \, v'} - \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4} sen(2x)$

④ $\int \ln(x) \, dx$

$u \quad v'$

(4) $\int \ln(x)\, dx$

$= x\ln(x) - \int \frac{1}{x} \times x = x\ln(x) - \int 1\, dx$

$= x\ln(x) - x + C$

• Primitivação de funções racionais

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

Teorema

Fundamental da Álgebra (sobre os números reais):
Qualquer polinómio (de coeficientes reais) de grau ≥ 1 é fatorizável na forma de um produto de uma constante por fatores lineares de tipo $(x-a)$ e por fatores quadráticos irredutíveis do tipo $(x^2 + bx + c)$.

A determinação de $\int \frac{N(x)}{D(x)}\, dx$, onde N, D são polinómios e $D \neq 0$, divide-se nas seguintes etapas:

1. Usar uma *fracção própria*; se necessário, recorrer à divisão de polinómios para escrever
$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$
2. Calcular os zeros de D e –usando o Teorema Fundamental da Álgebra– decompor D em fatores irredutíveis
3. Decompor a fração $\frac{R(x)}{D(x)}$ em frações simples
4. Determinar as primitivas das frações simples
5. Adicionar a primitiva de Q e as primitivas das frações simples

- Considerem-se os seguintes casos,

com $A, B, \alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

  - Caso 1: $\int \frac{A}{x-\alpha}\, dx = \ln|x-\alpha| + C$
  - Caso 2: $\int \frac{A}{(x-\alpha)^n}\, dx = A\frac{(x-\alpha)^{(-n+1)}}{-n+1} + C$
  - Caso 3: $\int \frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta}\, dx = \int \frac{Ax}{(x-\alpha)^2+\beta}\, dx + \int \frac{B}{(x-\alpha)^2+\beta}\, dx$
  - Caso 4: $\int \frac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2+\beta]^n}\, dx$

Caso 3_i: $\frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$

$[\operatorname{arctg} u(x)]' = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$!

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta} dx = \int \frac{1}{\beta\left[\left(\frac{x-\alpha}{\sqrt{\beta}}\right)^2+1\right]} dx$$

$$= \frac{\sqrt{\beta}}{\beta} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{\beta}}}{\ldots} dx$$

$$\int \frac{\ }{(x-\alpha)^2+\beta} \quad \int \frac{\ }{\beta\left[\left(\frac{x-\alpha}{\sqrt{\beta}}\right)^2+1\right]}$$

$$= \frac{\sqrt{\beta}}{\beta}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{\beta}}}{\left(\frac{x-\alpha}{\sqrt{\beta}}\right)^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\beta}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-\alpha}{\sqrt{\beta}}\right)+\mathcal{C}, \quad \mathcal{C}\in\mathbb{R}.$$

INTEGRAL DEFINIDO

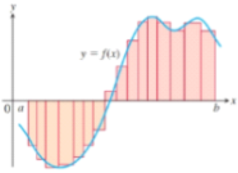
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

- Chamamos soma(s) de Riemann de f no intervalo $[a,b]$, para a partição $\mathcal{P}$, a

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\tilde{x}_k)\,(x_{k+1}-x_k), \qquad \text{onde} \quad \tilde{x}_k \in [x_k, x_{k+1}]$$

ou

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\tilde{x}_k)\,\Delta\, x_{k+1}, \qquad \text{com} \quad \Delta\, x_{k+1} = x_{k+1}-x_k$$



- [Integral definido] O integral definido de f em $[a,b]$ é o limite da(s) soma(s) de Riemann de f, quando $n \longrightarrow \infty$, isto é

$$\boxed{\lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tilde{x}_k)\,\Delta\, x_{k+1}}$$

  - O integral definido de f em $[a,b]$ representa-se por

$$\boxed{\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx}$$

  - A função f diz-se integrável no intervalo $[a,b]$ (segundo Riemann).
  - Observe-se que: $n \longrightarrow \infty$ equivale a $\Delta\, x_{k+1} \longrightarrow 0$.

Teorema (Fundamental do Cálculo)

Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua.

1) A função $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

é derivável em $[a,b]$, tendo-se

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a,b].$$

2) Fórmula de Barrow: Sendo F uma primitiva de f em $[a,b]$, tem-se

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(t)\Big|_a^b \overset{\text{def.}}{=} F(b)-F(a).}$$

Note: f pode não ser contínua e

Nota: f pode não ser contínua e mesmo assim integrável

❷ Para $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, 2\right] \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\qquad F(x) = \ldots$

Para $x \in [0, 1/2[$

$$F(x) = \int_0^x 1 \, dt = x$$

Para $x \in]1/2, 2]$

$$F(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} 1 \, dt + \int_{\frac{1}{2}}^{x} 1 \, dt = \frac{1}{2} + \left(x - \frac{1}{2}\right) = x$$

$F(x) = x$ em $x \in [0, 2]$

Sejam $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, F uma sua primitiva e $\varphi : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ derivável.

- Então f é integrável, em particular, entre a e $\varphi(x)$, tendo-se

$$\int_a^{\varphi(x)} f(t) \, dt = F(\varphi(x)) - F(a)$$

- Pelo teorema da derivação da função composta tem-se, então

$$\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t) \, dt\right)' = [F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x)) \, \varphi'(x) \, .$$

- Por 1) do teorema fundamental do cálculo $F' = f$, pelo que se conclui que

$$\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t) \, dt\right)' = f(\varphi(x)) \, \varphi'(x) \, .$$

Sendo $\varphi, \psi : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ funções deriváveis, tem-se

$$\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) \, dt\right)' = f(\psi(x)) \, \psi'(x) - f(\varphi(x)) \, \varphi'(x)$$

Basta notar que

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) \, dt = \int_a^{\psi(x)} f(t) \, dt - \int_a^{\varphi(x)} f(t) \, dt = F(\psi(x)) - F(\varphi(x))$$

e conjugar o teorema fundamental do cálculo com o teorema da derivação de funções compostas.