Teórica 2

23 de junho de 2024 13:33

Funções reais de uma variável real

Uma função real de variável real é um <u>terno</u> D, E e f onde:

- D e E são dois subconjuntos, não vazios, de R e
- f é uma lei de formação que a cada elemento x de D associa um único elemento f(x) de E

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \to E \subseteq \mathbb{R}$$

$$\underbrace{x}_{\text{Variável independente / objeto}} \rightsquigarrow \overbrace{f(x)}^{\text{Variável dependente / imagem}}$$

D : Domínio / Conjunto de partida

E : Conjunto de chegada

$$CD_f = \{ f(x) \in \mathbb{R} : x \in D \}$$

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $D = [-1, 1]$

$CD = [0, 1]$

$E = \mathbb{R}$

Classes particulares de funções

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$

$n \in \mathbb{N}_0$, $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

→ Função polinomial de grau n

grau 0 ⇒ CONSTANTE

grau 1 ⇒ LINEAR

Função racional : $g(x) = \frac{p(x)}{}$

Função racional: $g(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$

Função Valor Absoluto

$$|x| := \begin{cases} -x, & \text{se } x < 0 \\ x, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Função chão: $\lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$

Função teto: $\lceil x \rceil = \min\{m \in \mathbb{Z} : x \leq m\}$

Operações algébricas com funções

$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Composição de funções

$f : D_f \to B$ e $g : D_g \to C$

$g \circ f : D \longrightarrow C$

$x \rightsquigarrow (g \circ f)(x) = g(f(x))$

onde $D = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$

Restrição de uma função

$f|_X(x) = f(x), \forall x \in X$

Prolongamento de uma função

$f|_X(x) = g(x), \forall x \in X$

$g : X \to \mathbb{R}$, $A \supset X$

$f : A \to \mathbb{R}$

$f : A \to \mathbb{R}$

$f : [0,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

↳ Restrição : $X = [1,2]$

$h = f|_X$

↳ Prolongamento de f a $A = [-5,5]$

$g : [-5,5] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$

$\ell : [-5,5] \to \mathbb{R}$,

$$\ell(x) = \begin{cases} x^2 , & x \in [0,5] \\ 0 , & x \in [-5,0[\end{cases}$$

Características geométricas das funções

f é Par quando $\forall x \in D$, $(-x) \in D$ e $f(-x) = f(x)$

Ímpar quando $\forall x \in D$, $(-x) \in D$ e $f(-x) = -f(x)$

Periódica quando $\forall x \in D$, $(x+p) \in D$ e $f(x+p) = f(x)$

- $f : [0,5] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ não é par
- $h : [-1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^2$ não é par
- $g : [-5,5] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ é par
- $\ell : [-5,5] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\ell(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,5]; \\ 0, & x \in [-5,0[\end{cases}$ não é par

LIMITAÇÃO

- majorada $\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M$, $\forall x \in D$
- minorada $\exists m \in \mathbb{R} : f(x) \geq m$, $\forall x \in D$
- limitada $\exists A \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in D \ |f(x)| \leq A$

- crescente $\forall x, y \in D : x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- decrescente $\forall x, y \in D : x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
- monótona : crescente ou decrescente

- decrescente $\forall x, y \in D: x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$
- monótona : crescente ou decrescente

BIJETIVIDADE , $f: D \to E$

- injetiva $\forall x, y \in D \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
- sobrejetiva $\forall y \in E \quad \exists x \in D : f(x) = y$
- bijetiva : injetiva e sobrejetiva

- Não é injetiva nem sobrejetiva a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x^2 \end{aligned}$$

- Não é injetiva mas é sobrejetiva a função

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow [0, +\infty[\\ x &\longmapsto g(x) = x^2 \end{aligned}$$

- É injetiva e sobrejetiva, logo bijetiva, a função

$$\begin{aligned} h :]-\infty, 0] &\longrightarrow [0, +\infty[\\ x &\longmapsto h(x) = x^2 \end{aligned}$$

FUNÇÃO INVERSA (Bijetiva)

$f: D \to E \quad , \quad f^{-1}: E \to D$

$y \in E \quad , \quad x \in D$

Nota : $\neq$ inverso de f : $\frac{1}{f}$

$\left.\begin{aligned} f &: D \to E \\ g &: E \to D \end{aligned}\right\}$ Bijetivas

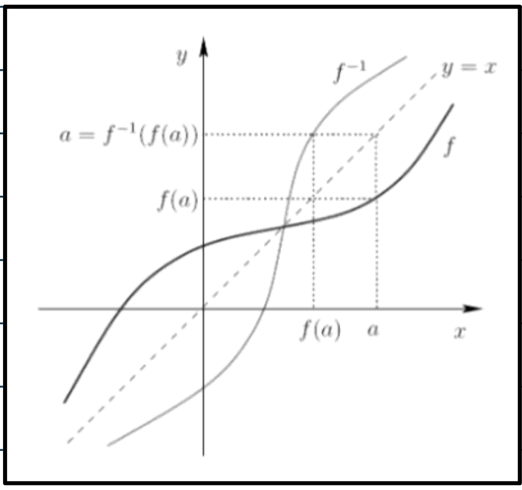
g é f^{-1} sse :

- $g(f(x)) = x \quad \forall x \in D$
- $f(g(y)) = y \quad \forall y \in E$

Se g é f^{-1}, então

- $D_f = CD_g$
- $CD_f = D_g$
- $g^{-1} = f$

Representação gráfica



FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

→ **SENO**

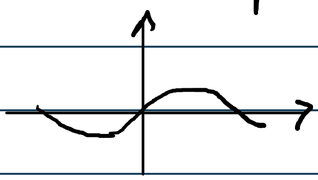
$y = \operatorname{sen} x$

$D = \mathbb{R}$

$CD = [-1, 1]$

Período $= 2\pi$

Paridade = Ímpar



→ **COSSECANTE**

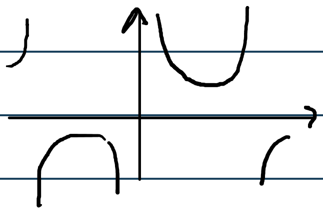
(inverso do seno)

$y = \operatorname{cosec} x := 1/\operatorname{sen} x$

$D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$CD = \mathbb{R} \setminus]-1, 1[$

2π, Ímpar



COSSENO

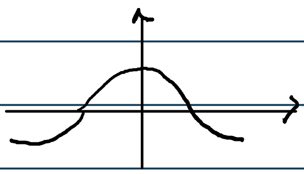
$y = \cos x$

$D = \mathbb{R}$

$CD = [-1, 1]$

Período: 2π

Paridade: Par



SECANTE (inverso do cosseno)

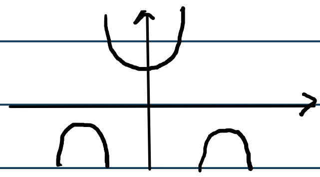
$y = \sec x := \frac{1}{\cos x}$

$D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$

$CD = \mathbb{R} \setminus]-1, 1[$

Período: 2π

Paridade: Par



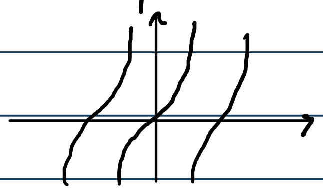
TANGENTE

$y = tg\, x := \dfrac{sen x}{\cos x}$

$D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$CD = \mathbb{R}$

π, Ímpar



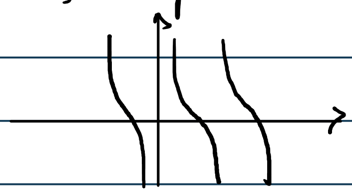
COTANGENTE (inverso da tangente)

$y = cotg\, x \; (:= 1/tg\, x)$

$D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$CD = \mathbb{R}$

π, Ímpar



- Fórmula fundamental da trigonometria:

$$\cos^2\theta + sen^2\theta = 1$$

- $1 + tg^2\theta = sec^2\theta$

  $1 + cotg^2\theta = cosec^2\theta$

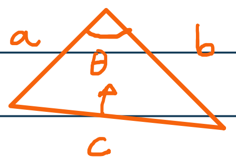
- $\cos(A+B) = \cos A \cos B - sen A\, sen B$

  $sen(A+B) = sen A\, sen B - \cos A \cos B$

- $sen^2\theta = (1 - \cos 2\theta)/2$

  $\cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta)/2$

- Lei dos cossenos



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
...	...	...	...		

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{sen} x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$		

Sejam f, uma função trigonométrica e a, b, c e d números reais. A função, real de variável real, definida por

$$y = a\, f(b(x+c)) + d,$$

é tal que

- $|a|$ determina a amplitude: estiramento ou compressão verticais.
- $|b|$ determina o período: estiramento ou compressão horizontais.
- c determina um deslocamento horizontal.
- d determina um deslocamento vertical.