Teórica 10

5 de julho de 2024 18:44

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

- Estabelece-se, no [intervalo de amplitude zero], que
  - $\int_a^a f(x)\,dx = 0$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$
- Por convenção, estabelece-se ainda a [ordem de integração]
  - $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$

- $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$, para qualquer $k \in \mathbb{R}$.
- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$.

Se f tem um Máximo e um Mínimo em $[a,b]$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Monotonicidade : $g(x) \leq f(x)$

$$\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Teoremas:

1. Se f é contínua em $[a,b]$ ou aqui tem, quando muito, um número finito de decontinuidades de salto, então

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{existe e} \quad f \quad \text{é integrável em} \quad [a,b].$$

2. Se f é limitada em $[a, b]$, anulando-se em todos os pontos de $[a, b]$ exceto, eventualmente, num número finito de pontos de $[a, b]$, então

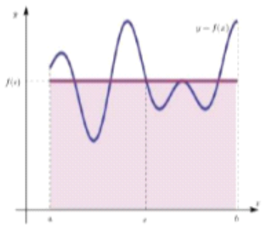
$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

3. Se f é integrável em $[a, b]$ e g é uma função que difere de f apenas num número finito de pontos $[a, b]$, então

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

O valor médio de f em $[a, b]$ é

$$vm(f) := \frac{\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx}{b-a}$$



- **Exercício** Calcule-se o valor médio da função, real de variável real, definida no intervalo $[-2, 2]$ por

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}.$$

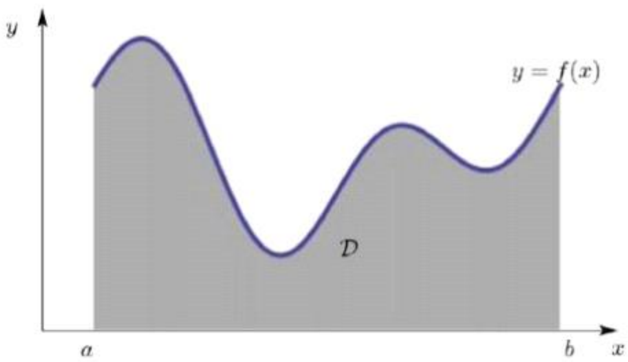
↳ não é necessariamente o ponto médio

Nota

Observação: O ponto c não é necessariamente o ponto médio do intrevalo $[a, b]$, nem é necessariamente único. A $f(c)$ chamamos valor médio da função f, em $[a, b]$.

Sendo $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, neste caso com $f(x) > 0, \quad \forall x \in [a, b]$,

Que número representa a área de $\mathcal{D}$?



$F(b) - F(a) = D$

Comprimento de curva

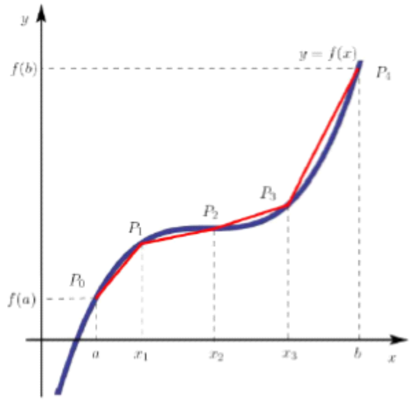
Sejam

- f de classe $\mathcal{C}^1$ em $[a, b]$;
- $\mathcal{P}$ uma partição de $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b;$$

- P_k o ponto de coordenadas

$$(x_k, f(x_k)).$$



- A medida do comprimento da linha poligonal definida pelos pontos P_k é a soma da medida dos comprimentos dos segmentos de reta $\overline{P_k P_{k+1}}$, isto é

$$\sum_{k=0}^{n-1} \overline{P_k P_{k+1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{[x_{k+1} - x_k]^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}.$$

- Pelo teorema do valor médio de Lagrange, existe $\widetilde{x_k} \in]x_k, x_{k+1}[$ tal que

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = f'(\widetilde{x_k})(x_{k+1} - x_k)$$

pelo que

$$\begin{aligned}[x_{k+1} - x_k]^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2 &= [x_{k+1} - x_k]^2 + [f'(\widetilde{x_k})(x_{k+1} - x_k)]^2 \\ &= (x_{k+1} - x_k)^2 \left(1 + [f'(\widetilde{x_k})]^2\right).\end{aligned}$$

- Assim,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \overline{P_k P_{k+1}} &= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 (1 + [f'(\widetilde{x_k})]^2)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + [f'(\widetilde{x_k})]^2}\ (x_{k+1} - x_k)\end{aligned}$$

- Mas

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1+(f'(\tilde{x_k}))^2}\,(x_{k+1}-x_k)$$

é a soma de Riemann para a função

$$g(x) = \sqrt{1+[f'(x)]^2}.$$

- A função $g(x) = \sqrt{1+[f'(x)]^2}$ é contínua logo integrável.

- Fazendo $n \to \infty$, a medida do comprimento da linha poligonal (soma de Riemann) tende para a medida do comprimento da curva (integral).

- [Comprimento de uma curva]

Seja f de classe $\mathcal{C}^1$ em $[a,b]$. A medida do comprimento L da curva definida pelo gráfico de f do ponto $(a, f(a))$ ao ponto $(b, f(b))$ é dado por

$$\boxed{L = \int_{x=a}^{b} \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.}$$