Universidade do Minho
Departamento de Matemática

LEInf

Cálculo para Engenharia

Formulário — 2022'23

Funções importantes

Omite-se o domínio das funções.

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$	$\text{senh}\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
$1 + \text{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
$1 + \text{cotg}^2 x = \dfrac{1}{\text{sen}^2 x}$	$\cosh^2 x - \text{senh}^2 x = 1$
$\text{sen}(-x) = -\text{sen}\, x$ (a função é ímpar)	$\cosh x + \text{senh}\, x = e^x$
$\cos(-x) = \cos x$ (a função é par)	$\text{tgh}^2 x + \dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1$
$\text{sen}(x+y) = \text{sen}\, x \cos y + \text{sen}\, y \cos x$	$\text{cotgh}^2 x - \dfrac{1}{\text{senh}^2 x} = 1$
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \text{sen}\, y\, \text{sen}\, x$	$\text{senh}(-x) = -\text{senh}\, x$ (a função é ímpar)
$\text{sen}\, x - \text{sen}\, y = 2\, \text{sen}\, \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$	$\cosh(-x) = \cosh x$ (a função é par)
$\cos x - \cos y = -2\, \text{sen}\, \frac{x-y}{2}\, \text{sen}\, \frac{x+y}{2}$	$\text{senh}(x+y) = \text{senh}\, x \cosh y + \text{senh}\, y \cosh x$
$\text{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$	$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \text{senh}\, y\, \text{senh}\, x$
$\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$	
$\text{sen}(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$	$\cos(\text{arcsen}\, x) = \sqrt{1-x^2}$
$\text{tg}(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\text{tg}(\text{arcsen}\, x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\text{sen}\, x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Critérios sobre séries de números reais

[Condição necessária de convergência] Se $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente então $\lim u_n = 0$.

[Condição suficiente de divergência] Se $\lim u_n \neq 0$ então $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente.

[1.º critério de comparação] Sejam $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ séries de termos não negativos tais que, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n$.

i) $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge. ii) $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge.

[2.º critério de comparação] Sejam $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ séries de termos positivos tais que $\ell = \lim\limits_n \dfrac{u_n}{v_n}$, onde $\ell \in [0, +\infty]$.

i) $\ell \neq 0$ ou $\ell \neq +\infty$ $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ têm a mesma natureza.

ii) Se $\ell = 0$
  (a) $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.
  (b) $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge.

iii) Se $\ell = +\infty$
  (a) $\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.
  (b) $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge.

[Critério da razão (ou D'Alembert)] Sejam $\sum_{n\geq 1} u_n$ uma série de termos positivos e $\ell = \lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

i) $\ell < 1$ $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente.

ii) $\ell > 1$ $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente.

iii) $\ell = 1$ $\Longrightarrow$ nada se pode concluir sobre a natureza de $\sum_{n\geq 1} u_n$.

[Critério da raiz (ou de Cauchy)] Sejam $\sum_{n\geq 1} u_n$ uma série de termos não negativos e $\ell = \lim \sqrt[n]{u_n}$.

i) $\ell < 1$ $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente.

ii) $\ell > 1$ $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente.

iii) $\ell = 1$ $\Longrightarrow$ nada se pode concluir sobre a natureza de $\sum_{n\geq 1} u_n$.

[Critério do integral] Se $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, positiva, decrescente e, para cada $n \in \mathbb{N}$ seja, $f(n) = u_n$ então $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ têm a mesma natureza.

[Convergência absoluta] Se $\displaystyle\sum_{n\geq 1} |u_n|$ é convergente então $\sum_{n\geq 1} u_n$ também é convergente.

[Critério de Leibnitz] Seja $(a_n)_n$ uma sucessão decrescente tal que $\lim a_n = 0$. Então $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n a_n$ é convergente.

Tabela de derivadas

Omite-se o domínio das funções e considera-se a uma constante.

$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$	$(f\,g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$
$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$	$(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$
$(f \circ u)'(x) = f'(u(x))\,u'(x)$	$(x^a)' = a\,x^{a-1}$
$a' = 0$	
$(a^x)' = a^x \ln a$	$\log_a' x = \dfrac{1}{x \ln a}$
$\operatorname{sen}' x = \cos x$	$\cos' x = -\operatorname{sen} x$
$\operatorname{tg}' x = \sec^2 x$	$\operatorname{cotg}' x = -\operatorname{cosec}^2 x$
$\sec' x = \sec x \operatorname{tg} x$	$\operatorname{cosec}' x = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$
$\operatorname{senh}' x = \cosh x$	$\cosh' x = \operatorname{senh} x$
$\operatorname{tgh}' x = \operatorname{sech}^2 x$	$\operatorname{cotgh}' x = -\operatorname{cosech}^2 x$
$\operatorname{sech}' x = -\operatorname{sech} x \operatorname{tgh} x$	$\operatorname{cosech}' x = -\operatorname{cosech} x \operatorname{cotgh} x$
$\operatorname{arcsen}' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos' x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg}' x = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arccotg}' x = \dfrac{-1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcsec}' x = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arccosec}' x = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{argsenh}' x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{argcosh}' x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{argtgh}' x = \dfrac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{argcotgh}' x = \dfrac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{argsech}' x = \dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{argcosech}' x = \dfrac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$

Tabela de primitivas

$u: I \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável num intervalo I, a é uma constante real apropriada e $\mathcal{C}$ denota uma constante real arbitrária.

$\int a\,dx = ax + \mathcal{C}$	$\int u'\,u^\alpha\,dx = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathcal{C}\ \ (\alpha \neq -1)$
$\int \dfrac{u'}{u}\,dx = \ln\lvert u\rvert + \mathcal{C}$	$\int u'\,a^u\,dx = \dfrac{a^u}{\ln a} + \mathcal{C}\ \ (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
$\int u' \cos u\,dx = \operatorname{sen} u + \mathcal{C}$	$\int u' \operatorname{sen} u\,dx = -\cos u + \mathcal{C}$
$\int u' \operatorname{tg} u\,dx = -\ln\lvert\cos u\rvert + \mathcal{C}$	$\int u' \operatorname{cotg} u\,dx = \ln\lvert\operatorname{sen} u\rvert + \mathcal{C}$
$\int u' \sec^2 u\,dx = \operatorname{tg} u + \mathcal{C}$	$\int u' \operatorname{cosec}^2 u\,dx = -\operatorname{cotg} u + \mathcal{C}$
$\int u' \sec u\,dx = \ln\lvert\sec u + \operatorname{tg} u\rvert + \mathcal{C}$	$\int u' \operatorname{cosec} u\,dx = \ln\lvert\operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg} u\rvert + \mathcal{C}$
$\int \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} u + \mathcal{C}$	$\int \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}\,dx = \arccos u + \mathcal{C}$
$\int \dfrac{u'}{1+u^2}\,dx = \operatorname{arctg} u + \mathcal{C}$	$\int \dfrac{-u'}{1+u^2}\,dx = \operatorname{arccotg} u + \mathcal{C}$
$\int u' \cosh u\,dx = \operatorname{senh} u + \mathcal{C}$	$\int u' \operatorname{senh} u\,dx = \cosh u + \mathcal{C}$
$\int u' \operatorname{tgh} u\,dx = \ln(\cosh u) + \mathcal{C}$	$\int u' \operatorname{cotgh} u\,dx = \ln(\operatorname{senh} u) + \mathcal{C}$
$\int u' \operatorname{sech}^2 u\,dx = \operatorname{tgh} u + \mathcal{C}$	$\int u' \operatorname{cosech}^2 u\,dx = -\operatorname{cotgh} u + \mathcal{C}$
$\int \dfrac{u'}{\sqrt{u^2+1}}\,dx = \operatorname{argsenh} u + \mathcal{C}$	$\int \dfrac{u'}{\sqrt{u^2-1}}\,dx = \operatorname{argcosh} u + \mathcal{C}$
$\int \dfrac{u'}{1-u^2}\,dx = \operatorname{argtgh} u + \mathcal{C}$	$\int \dfrac{u'}{1-u^2}\,dx = \operatorname{argcotgh} u + \mathcal{C}$