Universidade do Minho
Departamento de Matemática

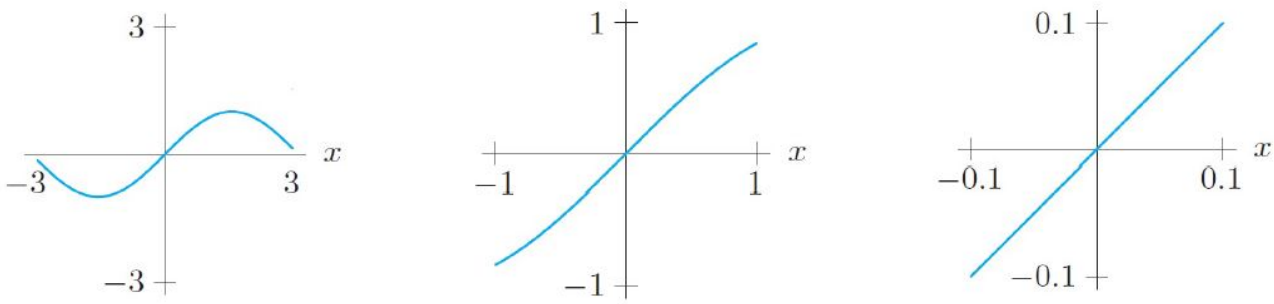
LEInf

Cálculo para Engenharia

folha 4 — 2023'24

Derivadas

1. Na figura seguinte representa-se graficamente a função definida por $y = \operatorname{sen} x, x \in \mathbb{R}$, em domínios/ escalas cada vez menores (análogo ao efeito de ampliação em torno do ponto de coordenadas $(0, 0)$).



(a) Explique porque é que, partindo destas imagens, se pode conjeturar que $\operatorname{sen}'(0) = 1$.

(b) Recorrendo à definição de função derivada num ponto, verifique que $\operatorname{sen}'(0) = 1$.

(c) Consultando o formulário das derivadas, constate que $(\operatorname{sen} x)'\big|_{x=0} = 1$.

(d) Recorrendo à primeira imagem, o que se pode dizer sobre o sinal de $\operatorname{sen}'(-\pi)$, $\operatorname{sen}'(\frac{\pi}{4})$ e $\operatorname{sen}'(\frac{\pi}{2})$.

(e) A fórmula, conforme tabelado, de que a derivada do seno é o cosseno, exige que o ângulo seja medido em radianos.

- Demonstre-se, a partir de $\operatorname{sen}(x+h) = \operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h$, que
$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \cos x.$$
- Uma vez que $180^\circ = \pi$ radianos, tem-se que $x^\circ = \dfrac{\pi\, x}{180}$ radianos (com x° a medida do ângulo, em graus). Nestas condições, usando a 'regra da cadeia', conclua
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}(x^\circ)) = \frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi\, x}{180}\right)\right) = \cdots$$

2. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

(a) Encontre, usando a definição, o declive da curva[1] que representa graficamente a função, em $x = a$, com $a \in \mathcal{D}_f$.

(b) Descreva o comportamento da reta tangente à curva, no ponto de coordenadas $\left(a, \dfrac{1}{a}\right)$, à medida que a percorre o seu domínio.

(c) Defina todas as retas, tangentes à curva e cujo declive é igual a $-\dfrac{1}{4}$.

[1] O **declive da curva** em um ponto é o declive da reta tangente à curva nesse ponto.

3. Usando a definição, calcule as derivadas das funções, nos pontos indicados

(a) $f(x) = 4 - x^2; \quad x_0 = 0.$ (b) $g(t) = \dfrac{1}{t^2}; \quad t_0 = \sqrt{3}.$ (c) $r(\theta) = \sqrt{3\theta}; \quad \theta_0 = 1.$

4. Para quais das funções, reais de variável real (a seguir definidas), se define uma reta tangente na origem?

(a) $f(x) = x^{1/3}$;

(b) $g(x) = x^{2/3}$;

(c) $h(x) = \begin{cases} -1, & \text{se} \quad x < 0 \\ 0, & \text{se} \quad x = 0 \\ 1, & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$;

(d) $t(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0 \\ 1, & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$

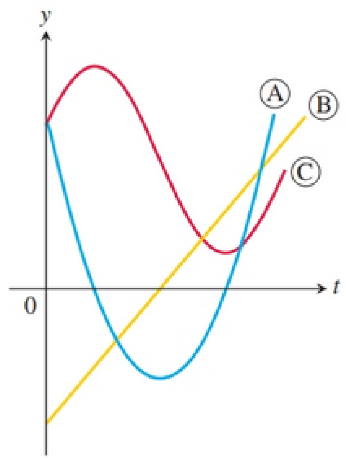
5. Estude a derivabilidade de f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 2 - x, & \text{se} \quad x \text{ é irracional} \end{cases}$$

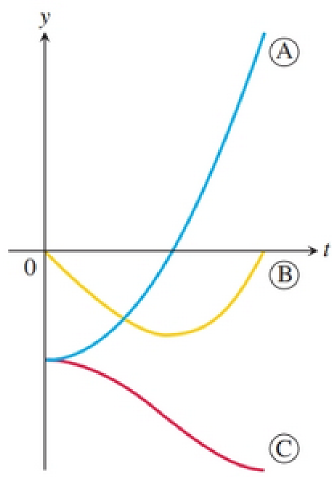
6. Seja $A = \pi r^2$, a função real de variável real que permite calcular a área de um círculo de raio r. Qual a taxa de variação da área de um círculo cujo raio é 3?

7. Mostre que uma boa aproximação para $\dfrac{1}{1+x}$, quando x é pequeno, é $1 - x$.

8. Em cada figura, as representações gráficas correspondem a uma função f, real de variável real, e às suas duas primeiras derivadas, f' e f''. Estabeleça as correspondências devidas.



(a)



(b)

9. Calcule a derivada de cada uma das seguintes funções (definidas no maior domínio possível):

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x + 2}$;

(b) $f(x) = 3^x$;

(c) $f(x) = x^x$;

(d) $f(x) = \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{4}{x^2} - 3 + 5x$;

(e) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$;

(f) $f(x) = \sqrt{x} + x^{\pi}$;

(g) $f(x) = \cos(\ln x)$;

(h) $f(x) = \operatorname{sen}(e^{x^2})$;

(i) $f(x) = \ln(\cosh(x+1))$;

(j) $f(x) = \ln\sqrt{1 + \cos^2 x}$;

(k) $f(x) = \operatorname{arctg}(\ln x)$;

(l) $f(x) = \sqrt{x^x + \cos^2\sqrt{x}}$;

(m) $f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x)$;

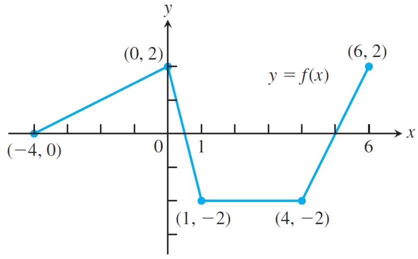
(n) $f(x) = \dfrac{e^x \operatorname{sen} x}{\ln x}$;

(o) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$;

(p) $f(x) = x^{-\frac{2}{3}} e^x \operatorname{sen} x$.

10. Seja f uma função real, de variável real, definida no intervalo $\mathcal{D} = [-4, 6]$ e representada na figura.

Analise, a partir da figura,



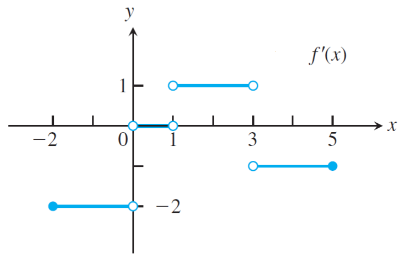
(a) a continuidade de f.

(b) a existência de $f'(a)$, com $a \in \mathcal{D}$.

(c) esboce a representação gráfica de f'.

11. Seja f uma função real, de variável real, definida no intervalo $[-2, 5]$.

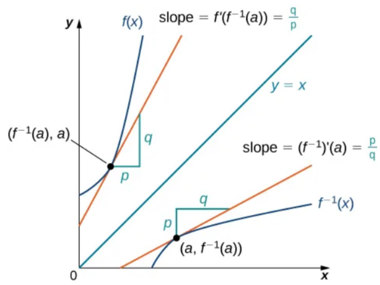
Use a seguinte informação para representar graficamente f:



(a) O gráfico de f é uma linha quebrada, com início no ponto de coordenadas $(-2, 3)$.

(b) A representação gráfica de f' é a da figura ao lado.

12. As retas tangentes, em um ponto $(x_0 = a)$, de uma função e da sua inversa estão relacionadas, conforme ilustrado na figura



(a) Indique, a partir da figura, os declives em $(f^{-1}(a), a)$ e $(a, f^{-1}(a))$.

(b) A partir de $f(f^{-1}(x)) = x$, prove que $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

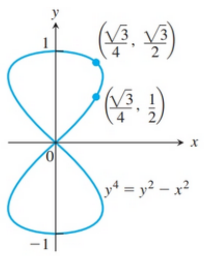
13. Nas alíneas seguintes, considere a função g, real de variável real, definida por $y = g(x)$ e use o teorema da derivada da respetiva função inversa para definir g'.

Sugestão: Confirme o resultado encontrado derivando diretamente g.

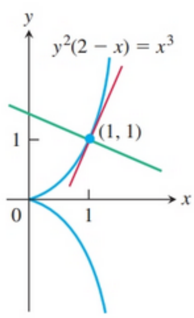
(a) $g(x) = \dfrac{x+2}{x}$.

(b) $g(x) = \sqrt[5]{x}$.

14. Derivando implicitamente



(a) determine os declives da curva, definida por $y^4 = y^2 - x^2$, nos pontos assinalados na figura.



(b) defina as retas tangente e normal, no ponto de coordenadas $(1, 1)$, da Cissóide de Diocles (sec II a. C).

15. Nas alíneas seguintes, apenas um dos cálculos apresentados está correto. Qual?

(a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{6}$. **OU** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-3} = \dfrac{0}{6} = 0$.

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-2x}{x^2-\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x-2}{2x-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{2+\operatorname{sen} x} = \dfrac{2}{2+0} = 1$. **OU**
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-2x}{x^2-\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x-2}{2x-\cos x} = \dfrac{-2}{0-1} = 2$.

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x \ln x) = 0 \times (-\infty) = 0$. **OU** $\lim\limits_{x\to 0^+} (x \ln x) = 0 \times (-\infty) = -\infty$. **OU** $\lim\limits_{x\to 0^+} (x \ln x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right) = \dfrac{-\infty}{+\infty} = -1$. **OU** $\lim\limits_{x\to 0^+} (x \ln x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x) = 0$.

16. Nas alíneas seguintes, prove que

(a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{r}{x}\right)^x = e^r$.

(b) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{1/x^n} = 1$.

17. Calcule $f'(0)$, sabendo que f é uma função, real de variável real, definida por $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

18. Calcule, se existirem,

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x+x^2}$.

(c) $\lim\limits_{x\to (\pi/2)^-} \dfrac{\sec x}{1+\operatorname{tg} x}$.

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}$.

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$.

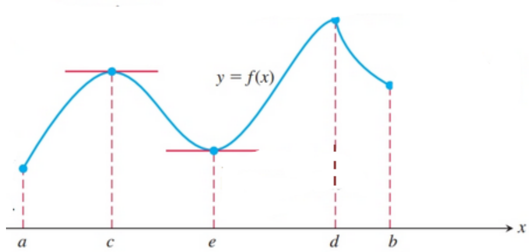
(f) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sqrt{x}\ln x)$.

(g) $\lim\limits_{x\to 1^+} x^{1/(1-x)}$.

(h) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\operatorname{cosec} x - \dfrac{1}{x}\right)$.

(i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(1+x)^{1/x}$.

19. Classifique, a partir da representação gráfica da função f definida no intervalo $[a,b]$, os extremos globais e locais de f. Determine ainda os intervalos abertos onde f' é positiva ou negativa, bem como os intervalos onde f'' é positiva ou negativa.



20. Estabeleça as correspondências devidas entre as tabelas e as representações gráficas.

T1

x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	5

T3

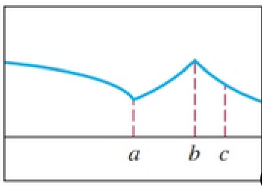
x	$f'(x)$
a	não existe
b	não existe
c	-1.7

T2

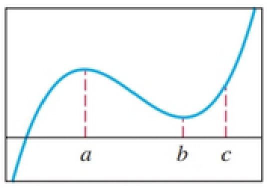
x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	-5

T4

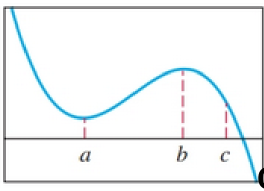
x	$f'(x)$
a	não existe
b	0
c	-2



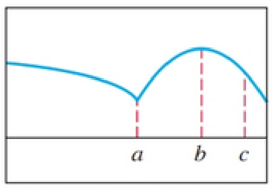
G1



G3



G2



G4

21. Seja f, função real de variável real, definida por $f(x) = (x-a)^{2/3}$.

(a) Existe $f'(a)$?

(b) Prove que o único extremante é $x = a$.

(c) O resultado da alínea anterior contraria o Teorema dos Valores Extremos?

22. Identifique e classifique os pontos críticos da função f, definida no domínio $\mathcal{D}$.

Determine ainda os intervalos abertos, de $\mathcal{D}$, onde f é monótona e estude a concavidade de f.

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ e $\mathcal{D} = [-1, 2]$.

(b) $f(t) = t^4 - 4t^3 + 10$ e $\mathcal{D} = [-1, 4]$.

(c) $f(x) = x^{1/3}$ e $\mathcal{D} = [-2, 3]$.

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ e $\mathcal{D} = [-0.5, 2]$.

(e) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $\mathcal{D} = [-1, 8]$.

(f) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ e $\mathcal{D} = [-2, 1]$.

(g) $f(x) = \operatorname{cosec} x$ e $\mathcal{D} = \left[-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right]$.

(h) $f(t) = 2 - |t|$ e $\mathcal{D} = [-1, 3]$.

(i) $f(x) = x^{2/3}(x-4)$ e $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

(j) $f(\theta) = \operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta - 1$ e $\mathcal{D} = [0, 2\pi]$.

(k) $f(x) = \begin{cases} 4 - 2x, & x \leq 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$ e $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

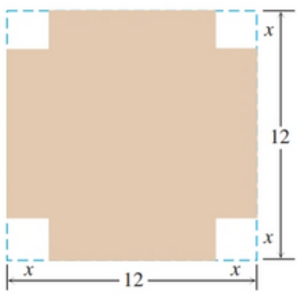
(l) $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 4, & x \leq 1 \\ x^3 - 6x^2 + 8x, & x > 1 \end{cases}$ e $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

23. Estude (com vista ao esboço do gráfico) a função f, real de variável real, definida por

(a) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{1+x^2}$.

(b) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{2x}$

24. Construir-se-á uma caixa sem tampa recortando quadrados congruentes nos vértices de um quadrado com $12\,cm$ de lado e dobrando os lados (Vd. figura).
Quais são as dimensões dos quadrados, que se removem, que maximizam o volume da caixa?



25. Defina o polinómio de Taylor de ordem 4, gerado pela função f, em torno de a, quando:

(a) $f(x) = \operatorname{sen} x$; $\quad a = 0$.

(b) $f(x) = e^{2x}$; $\quad a = 1$.

(c) $f(x) = \ln x$; $\quad a = 1$.

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $\quad a = 2$.

(e) $f(x) = \sqrt{x}$; $\quad a = 4$.

(f) $f(x) = \operatorname{tg} x$; $\quad a = \dfrac{\pi}{4}$.

(g) $f(x) = 2^x$; $\quad a = 1$.

(h) $f(x) = x^3 - 2x + 4$; $\quad a = 2$.