

# Linguagens - 1 e 2

19 de maio de 2024 15:42

## Introdução

**Alfabeto:** conjunto finito de símbolos cujas combinações formam os elementos da linguagem

**Sintaxe:** Diz quais, de todas as combinações de símbolos do alfabeto, pertencem à linguagem

**Semântica:** descreve o significado dos elementos da linguagem

Ao conjunto de todas as strings sobre um alfabeto  $T$  chama-se  $T^*$

Sejam  $L_1$  e  $L_2$  subconjuntos de  $T^*$ . Define-se a concatenação de duas linguagens

$$L = L_1 \cdot L_2 = \{\mu \in T^* \mid \mu = \mu_1 \cdot \mu_2 \wedge \mu_1 \in L_1 \wedge \mu_2 \in L_2\}$$

Ist é, é o conjunto das strings que se obtêm concatenando strings de  $L_1$  com strings de  $L_2$ .

## Expressões Regulares

1.  $\phi$  caracteriza a linguagem  $\{\}$  (linguagem vazia - a que não pertence qualquer string).
2.  $\varepsilon$  caracteriza a linguagem  $\{\varepsilon\}$  (linguagem cuja única string é a string vazia. É de notar a diferença com a anterior!).
3.  $a$  caracteriza a linguagem  $\{a\}$
4.  $p + q$  caracteriza a linguagem  $L_p \cup L_q$
5.  $p q$  caracteriza a linguagem  $L_p \cdot L_q$
6.  $(p)$  caracteriza a linguagem  $L_p$
7.  $p^*$  caracteriza a linguagem  $L_p^*$
8.  $p^+$  caracteriza a linguagem  $L_p^+$

a)  $e = (a)^+$

b)  $e = (a)^+ (b)^*$

c)  $e = ('+' + '-' + \varepsilon) ('0' + \dots + '9')^+$

d)

$e = \text{ sinal } \cdot \text{ mantissa } \cdot \text{ expoente }$

$\text{ sinal } = ('+' + '-' + \varepsilon)$

$\text{ mantissa } = \text{ digitos } \cdot (\text{ digito } \cdot '.' + '.' \cdot \text{ digito } + \varepsilon) \cdot \text{ digitos }$

$\text{ expoente } = \varepsilon + ('E' \cdot \text{ sinal } \cdot \text{ digitos } \cdot \text{ digitos })$

$\text{ digitos } = \text{ digito } = ('0' + \dots + '9')$

↓  
pode ser  $\varepsilon$

- 321.2E-123

# • Álgebra das expressões regulares

$$1. (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

$$2. \alpha + \beta = \beta + \alpha$$

$$3. \alpha + \phi = \phi + \alpha = \alpha$$

$$4. \alpha + \alpha = \alpha$$

$$5. (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$$

$$6. \alpha \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot \alpha = \alpha$$

$$7. \alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

$$8. (\beta + \gamma) \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha + \gamma \cdot \alpha$$

Normal

$$9. \alpha^+ = \alpha \cdot \alpha^* = \alpha^* \cdot \alpha$$

$$10. \alpha^* = \varepsilon + \alpha^+$$

$$11. (\alpha + \varepsilon)^+ = (\alpha + \varepsilon)^* = \alpha^*$$

$$12. \text{ se } X = \beta + \alpha \cdot X \text{ então } X = \alpha^* \cdot \beta$$

$$13. \text{ se } X = \beta + X \cdot \alpha \text{ então } X = \beta \cdot \alpha^*$$

Mais interessante

$$X_1 = \beta + \alpha \cdot X$$

$$X_2 = \beta + \alpha \cdot (\beta + \alpha \cdot X) \\ = \beta + \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \alpha \cdot X$$

$$X_3 = \beta + \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot X$$

$$\Rightarrow X = (\varepsilon + \alpha + \alpha \cdot \alpha + \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \dots) \cdot \beta \\ = \alpha^* \cdot \beta$$

$$X_1 = \beta + X \cdot \alpha$$

$$X_2 = \beta + (\beta + X \cdot \alpha) \alpha \\ = \beta + \beta \cdot \alpha + X \cdot \alpha \cdot \alpha$$

$$X_3 = \beta + \beta \cdot \alpha + (\beta + X \cdot \alpha) \cdot \alpha \alpha \\ = \beta + \beta \cdot \alpha + \beta \cdot \alpha \cdot \alpha + X \cdot \alpha \alpha \\ = \beta \cdot (\varepsilon + \alpha + \alpha \cdot \alpha + \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha + \dots)$$

$$\Rightarrow X = \beta \cdot \alpha^*$$

Exercício 1.2)

- a execução da tarefa **A** seguida da execução da tarefa **B** se representa pela expressão regular **A.B**
- a execução da tarefa **se c então A senão B** se representa pela expressão regular **c.A + ¬c.B**
- a execução da tarefa **skip** se representa pela expressão regular  $\epsilon$ .
- a execução da tarefa **abort** se representa pela expressão regular  $\phi$ .

a)

- enquanto c fazer A
- repetir A até c

i) A primeira ação a executar é o cálculo da condição c; se esta for falsa não se executa mais nada; senão executa-se a ação A e depois voltamos ao mesmo ponto. Isto é,

$$\begin{aligned}
 & \neg c. \epsilon + c.A. (\neg c. \epsilon + c.A. (\dots)) \\
 = & \neg c. \epsilon + c.A. \neg c + c.A. c.A. \neg c + \dots \\
 = & (c.A)^* . \neg c
 \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$  faz sentido

$$\begin{aligned}
 \text{ii)} \quad & A. (c. \epsilon + \neg c. (A. (c. \epsilon + \neg c. A. \dots))) \\
 = & A. c + A. \neg c. A. c + A. \neg c. A. \neg c. A. \neg c + \dots \\
 = & (A. \neg c)^* . A. c
 \end{aligned}$$

(b) Usando as propriedades de expressões regulares ( e o facto de  $\neg\neg c = c$ ) mostre que:

- (enquanto c fazer A) = (Se c então (repetir A até  $\neg c$ ) senão skip)
- (repetir A até c) = (A; enquanto  $\neg c$  fazer A)

$$\begin{aligned}
 (c.A)^* . \neg c &= c. (A. c)^+ . A. \neg c + \neg c. \epsilon \\
 &= (c.A)^+ . \neg c + \neg c. \epsilon \\
 &= ((c.A)^+ + \epsilon) . \neg c \\
 &= (c.A)^* . \neg c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii)} \quad & (A. \neg c)^* . A. c \\
 = & A. ((c. \neg A)^* . c) \\
 = & (A. \neg c)^* . A. c
 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
 & A. (c. \epsilon + \neg c. (A. (c. \epsilon + \neg c. A. \dots))) \\
 = & A. c + A. \neg c. A. c + A. \neg c. A. \neg c. A. c + \dots
 \end{aligned}$$

$$= (A \cdot \neg C)^* \cdot A \cdot C$$

(c) Considere o procedimento  $P$  definido como

$$P = \text{se } c \text{ então } A \text{ senão } (B; P)$$

- (i) Determine uma expressão regular que caracterize a sua execução.  
(ii) Usando as propriedades das expressões regulares, determine uma versão iterativa (usando **enquanto**) do procedimento  $P$ .

$$P = \text{se } c \text{ então } A \text{ senão } (B; P)$$

$$C.A + \neg C.B.P$$

$$C.A + \neg C.B.(C.A + \neg C.B.P)$$

$$= C.A + \neg C.B.C.A + \neg C.B.\neg C.B.P + \dots$$

$$= (\neg C.B)^* \cdot C.A$$

$$\begin{array}{l} \text{ii)} \quad (C.A)^* \cdot \neg C \\ \quad \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad (C.A)^* \cdot \neg C \end{array}$$

$$= (\text{enquanto } \neg C \text{ fazer } B); A$$

## 1.2 GRAMÁTICAS

$T$  : conjunto finito de símbolos terminais (alfabeto)

$N$  : conjunto de símbolos não terminais

$S$  : símbolo não terminal especial chamado símbolo inicial

$P$  : é um conjunto de produções, sendo que:

Uma produção é um par  $(\alpha, \beta)$ , e escrevemos  $\alpha \rightarrow \beta$ , em que  $\alpha$  e  $\beta$  são seqüências finitas de símbolos terminais e não terminais. Dada uma produção  $\alpha \rightarrow \beta$  dizemos que  $\alpha$  é o lado direito e que  $\beta$  é o lado esquerdo da produção.

$$\alpha \in (T \cup N)^* \text{ e } \beta \in (T \cup N)^*$$

Dizemos que  $\alpha$  deriva imediatamente em  $\beta$  e notamos  $\alpha \Rightarrow \beta$  se e só se

$$\exists \Phi, \Psi \in (N \cup T)^*, (\delta_1 \rightarrow \delta_2) \in P \cdot \alpha$$

$$= \Phi \delta_1 \Psi \wedge \beta = \Phi \delta_2 \Psi$$

Isto é, existe uma produção em que

- o lado esquerdo é uma substring de  $\alpha$
- $\beta$  pode ser obtida substituindo  $\delta_1$  por  $\delta_2$  em  $\alpha$ .

$$\alpha \rightarrow \text{lado direito}$$

- $\beta$  pode ser obtida substituindo  $\delta_1$  por  $\delta_2$  em  $\alpha$ .

$\alpha \rightarrow$  lado direito  
 $\beta \rightarrow$  lado esquerdo

$$G = (T, N, S, P)$$

$$L = \{ \mu \in T^* . S \Rightarrow \mu \}$$

(conjunto de strings que se podem derivar do símbolo inicial S)

## Exercício 1.3

**Exercício 1.3** Escreva gramáticas para especificar a sintaxe das seguintes linguagens:

- (a) strings constituídas por um ou mais  $a$ 's

$$\begin{aligned} S &\rightarrow a \\ S &\rightarrow aS \end{aligned} \quad \text{ou} \quad S \rightarrow a \mid aS$$

- (b) strings constituídas por um ou mais  $a$ 's seguidas de zero ou mais  $b$ 's

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow a \mid aA \\ B &\rightarrow \epsilon \mid bB \end{aligned}$$

- (c) strings que representam os números inteiros

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow \epsilon \mid '+' \mid '-' \\ B &\rightarrow D \mid DB \\ D &\rightarrow '0' \mid '1' \mid \dots \mid '9' \end{aligned}$$

- (d) strings que representam os números reais (em Pascal, i.e., com parte inteira, parte decimal e expoente opcionais mas tem de existir parte inteira ou parte decimal)

$$\begin{aligned} S &\rightarrow ABE \mid ABDBE \\ A &\rightarrow \epsilon \mid '+' \mid '-' \\ B &\rightarrow C \mid CB \\ C &\rightarrow '0' \mid \dots \mid '9' \\ D &\rightarrow '.' \\ E &\rightarrow 'E' AB \mid \epsilon \end{aligned}$$

~~~~~

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \text{Sinal} \text{ Mantissa } \text{Expoente} \\ \text{Sinal} &\rightarrow '+' \mid '-' \mid \epsilon \end{aligned}$$

$S \rightarrow \text{Sinal Mantissa Expoente}$   
 $\text{Sinal} \rightarrow '+' \mid '-' \mid \epsilon$   
 $\text{Mantissa} \rightarrow \text{Digitos Meio Digitos}$   
 $\text{Digitos} \rightarrow \epsilon \mid \text{Digito Digitos}$   
 $\text{Meio} \rightarrow \text{Digito} '.' \mid '' \text{Digito} \mid \epsilon$   
 $\text{Digito} \rightarrow '0' \mid \dots \mid '9'$   
 $\text{Expoente} \rightarrow \epsilon \mid 'E' \text{ Sinal } \underbrace{\text{Digito Digitos}}_{\text{Pelo menos 1 digito}}$

Uma das ideias chaves na escrita de gramáticas é identificar os blocos constituintes das strings a caracterizar e associar-lhes um símbolo não terminal, como no exemplo acima.

**Exercício 1.4** Escreva gramáticas para especificar a sintaxe das seguintes linguagens:

- (a) strings constituídas por zero ou mais  $a$ 's seguidas de zero ou mais  $b$ 's sendo o número de  $a$ 's igual ao número de  $b$ 's.

$S \rightarrow a S b \mid \cancel{ab} \mid \epsilon$   
 $\hookrightarrow$  não é preciso  
 $S \rightarrow a S b \mid \epsilon$

- (b) strings constituídas por zero ou mais  $a$ 's seguidas de zero ou mais  $b$ 's seguidas de zero ou mais  $c$ 's sendo o número de  $a$ 's mais o número de  $b$ 's igual ao número de  $c$ 's.

$a^* b^* c^*$   
 $\text{len}(a^* + b^*) = \text{len}(c^*)$   
 $S \rightarrow a S c \mid b S c \mid \epsilon$

- (c) strings constituídas por  $a$ 's e  $b$ 's sendo o número de  $a$ 's igual ao número de  $b$ 's.

~~$S \rightarrow A n n c \mid \epsilon$~~   
 ~~$A n n c \rightarrow a b \mid a A n n b$~~   
 $\hookrightarrow a$ 's e  $b$ 's podem estar misturadas

$S \rightarrow a B \mid b A \mid \epsilon$   
 $A \rightarrow a S \mid b A A$  (strings com mais um  $a$  do que  $b$ 's)

(strings com um b a mais do que a's)

$aB \rightarrow aBB \rightarrow [b]S$

$\rightarrow aBB \rightarrow aBB \rightarrow [b]S$

$\rightarrow [b]S \rightarrow [b]S \rightarrow \epsilon$

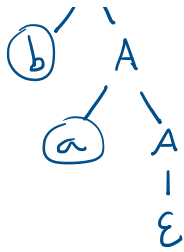
$\rightarrow \epsilon$

$$a(aBB)(aBB)$$
$$\alpha M_Y I_0 \in L \Rightarrow \alpha M_Y - I_0 \in L$$

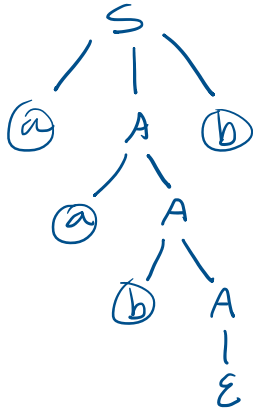
fele haver sempre um  
maior número de —

```

graph TD
    S --> a1((a))
    S --> A1[A]
    S --> b1((b))
    A1 --> b2((b))
    A1 --> A2[A]
    A2 --> a2((a))
    A2 --> b3((b))
    style a1 stroke:#000,stroke-width:2px
    style A1 stroke:#000,stroke-width:2px
    style b1 stroke:#000,stroke-width:2px
    style b2 stroke:#000,stroke-width:2px
    style A2 stroke:#000,stroke-width:2px
    style a2 stroke:#000,stroke-width:2px
    style b3 stroke:#000,stroke-width:2px
  
```



b) aabb



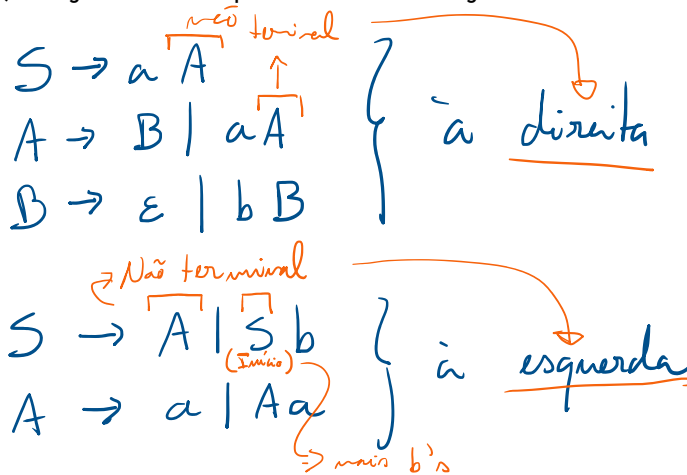
## 2 Linguagens Regulares

### 2.1 Gramáticas Regulares

Uma gramática independente do contexto  $G=(T,N,S,P)$  diz-se regular à direita, quando todas as produções são da forma:  
 $A \rightarrow \mu$   
 ou  $A \rightarrow \mu B$   
 em que  $A, B \in N$  e  $\mu \in T^*$

2.1

(a) strings constituídas por um ou mais a's seguidas de zero ou mais b's





à direita quando todas as produções são da forma:

$$A \rightarrow \mu$$

ou  $A \rightarrow \mu B$

e em que  $A, B \in N$  e  $\mu \in T^*$

Isto é, todas as produções têm do lado direito, no máximo **um** símbolo não terminal (e este é o último símbolo do lado direito).

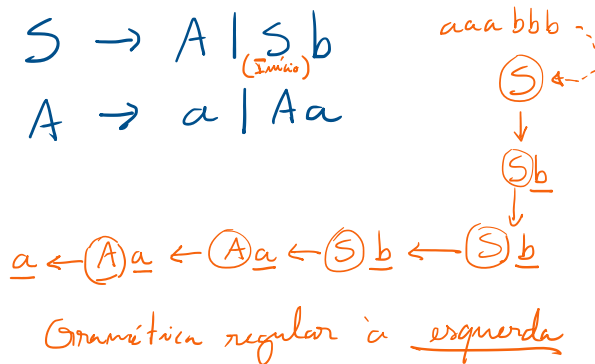
à esquerda quando todas as produções são da forma:

$$A \rightarrow \mu$$

ou  $A \rightarrow B \mu$

e em que  $A, B \in N$  e  $\mu \in T^*$

Isto é, têm do lado direito, no máximo **um** símbolo não terminal (e este é o primeiro símbolo do lado direito).



b) strings que representam números inteiros

à direita:

$$S \rightarrow '+' N \mid '-' N \mid N$$

$$N \rightarrow '0' \mid \dots \mid '9'$$

$$N \rightarrow '0' N \mid \dots \mid '9' N$$

à esquerda

+ 12

$$S \rightarrow S \text{ sinal} \mid S N$$

$$\text{Sinal} \rightarrow '+' \mid '-' \mid \epsilon$$

$$N \rightarrow '0' \mid \dots \mid '9'$$

ou

$$S \rightarrow A '0' \mid A '1' \mid \dots \mid A '8' \mid A '9'$$

$$S \rightarrow S '0' \mid S '1' \mid \dots \mid S '8' \mid S '9'$$

$$A \rightarrow '+' \mid '-' \mid \epsilon$$

Exercício 2.2)

a) Escreva uma gramática regular à direita para caracterizar a sintaxe dessa linguagem

$$S \rightarrow I \mid E$$

$$I \rightarrow A \mid + A \mid - A$$

$$A \rightarrow \dots$$

à direita

$$\left. \begin{array}{l} S \rightarrow A | + A | - A \\ A \rightarrow d | d A \\ E \rightarrow F | + F | - F \\ F \rightarrow d F | d . A \end{array} \right\} \text{ à direita}$$

$$\left. \begin{array}{l} S \rightarrow A d \\ A \rightarrow \varepsilon | '+' | '-' | A d | F d '.' \\ F \rightarrow \varepsilon | '+' | '-' | F d \end{array} \right\} \text{ à esquerda}$$

## 2.2 CONVERSÃO DE GRAMÁTICAS EM EXPRESSÕES REGULARES

### Exercício 2.3

- $S \rightarrow \text{Sinal RealSemSinal}$
- $\text{Sinal} \rightarrow \varepsilon | + | -$
- $\text{RealSemSinal} \rightarrow \text{Inteiro ParteDecimal}$
- $\text{Inteiro} \rightarrow \text{digito} | \text{digito Inteiro}$
- $\text{ParteDecimal} \rightarrow \varepsilon | '.' \text{Inteiro}$

Determine uma expressão regular equivalente.

$$\begin{aligned} S &= \text{Sinal RealSemSinal} \\ \text{Sinal} &= \varepsilon + '+' + '-' \\ &\dots \end{aligned}$$

Solução:

$$S = (\varepsilon + '+' + '-') (\text{digito})^+ (\varepsilon + '.' (\text{digito})^+)$$

### 2.2.1 Gramáticas Simplesmente Regulares

Asímbolo  $Z$  chama-se  
símbolo final

## 2.2.2 Conversão de GR em GSR

Seja  $G_1 = (T_1, N_1, S_1, P_1)$  uma gramática regular à direita. Então é possível escrever uma gramática  $G_2 = (T_2, N_2, S_2, P_2)$  simplesmente regular à direita tal que a linguagem gerada é a mesma.

Um processo standard para atingir este objectivo é o seguinte:

- $S_2 = S_1$
  - $T_2 = T_1 \rightarrow$  terminais  $\rightarrow$  não terminais
  - $N_2 = N_1 \cup \{X_1, X_2, \dots, X_n\} \cup Z$
  - $Z \rightarrow \varepsilon \in P_2 \rightarrow$  conjunto de produções
  - se  $A \rightarrow B \in P_1$  então  $A \rightarrow B \in P_2$
  - se  $A \rightarrow a B \in P_1$  então  $A \rightarrow a B \in P_2$  } igual
  - se  $A \rightarrow a \in P_1$  então  $A \rightarrow a Z \in P_2$  } igual + Z
  - se  $A \rightarrow a_1 a_2 \dots a_m B \in P_1$  então
    - $A \rightarrow a_1 X_1 \in P_2$
    - $X_1 \rightarrow a_2 X_2 \in P_2$
    - .....
    - $X_{m-2} \rightarrow a_{m-1} X_{m-1} \in P_2$
    - $X_{m-1} \rightarrow a_m B \in P_2$
  - se  $A \rightarrow a_1 a_2 \dots a_m \in P_1$  então
    - $A \rightarrow a_1 X_1 \in P_2$
    - $X_1 \rightarrow a_2 X_2 \in P_2$
    - .....
    - $X_{m-2} \rightarrow a_{m-1} X_{m-1} \in P_2$
    - $X_{m-1} \rightarrow a_m Z \in P_2$
- } separação

## Exercício 2.4

$$S \rightarrow I \mid E$$

$$I \rightarrow A \mid +A \mid -A$$

$$A \rightarrow d \mid dA$$

$$E \rightarrow F \mid +F \mid -F$$

$$F \rightarrow dF \mid d \cdot A$$

GR para GSR

$$S \rightarrow I \mid E$$

$$I \rightarrow A \mid '+'A \mid '-'A$$

$$A \rightarrow dZ \mid dA$$

$$E \rightarrow F \mid '+'F \mid '-'F$$

$$F \rightarrow dF \mid dX_1$$

$$X_1 \rightarrow ' \cdot A$$

$$Z \rightarrow \varepsilon$$

$$S \rightarrow A d$$

$$A \rightarrow \varepsilon \mid '+' \mid '-' \mid A d \mid F X_1$$

$$F \rightarrow \varepsilon \mid '+' \mid '-' \mid F d$$

$$X_1 \rightarrow d \cdot$$

$$Z \rightarrow \varepsilon$$

## 2.3 Autómatos

$$A = (T, Q, S, Z, \delta)$$

## 2.2.1 Gramáticas Simplesmente Regulares (GSR)

Uma gramática  $G = (T, N, S, P)$  diz-se **simplesmente regular**

**à direita** quando todas as produções são da forma:

$$A \rightarrow a B$$

em que  $A, B \in N$  e  $a \in T$ , com excepção para a produção

$$Z \rightarrow \varepsilon$$

**à esquerda** quando todas as produções são da forma:

$$A \rightarrow B a$$

em que  $A, B \in N$  e  $a \in T^*$ , com excepção para a produção

$$Z \rightarrow \varepsilon$$

Ao símbolo  $Z$  chama-se o **símbolo final**.

T é o alfabeto  
 Q é um conjunto de estados  
 $S \in Q$  é um estado especial chamado estado inicial  
 $Z \in Q$  é um conjunto de estados chamados estados finais  
 $\delta$  é uma função de transição de estados

Representamos graficamente um automato da seguinte forma:

- a cada estado fazemos corresponder um círculo com o identificador de estado;
- os estados finais são assinalados fazendo-lhes corresponder um círculo diferente;
- sempre que para um dado estado q, existe um símbolo a do alfabeto tal que  $\delta(q, a) = q'$ , então marcamos uma seta do círculo correspondente ao estado q para o símbolo q' com a etiqueta a.
- o estado inicial é marcado fazendo-lhe chegar uma seta sem origem

Dado um autômato,  $\gamma$  é uma string da linguagem caracterizada por esse autômato sse existir um caminho do estado inicial para um estado final tal que a concatenação das etiquetas de todos os seus ramos é igual a  $\gamma$

### 2.3.1 Autômatos Não Determinísticos (AND)

$$\delta: Q \times (T \cup \{\epsilon\}) \rightarrow P(Q) \cup \{\perp\}$$

A função de transição de estado é uma função que dado um estado e um símbolo do alfabeto dá como resultado um conjunto de estados. Esta função é parcial, i.e., existem pares de valores (q,s) tais que  $\delta(q, s) = \perp$ .

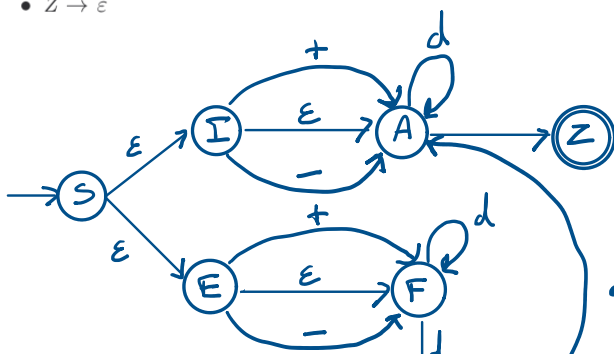
### 2.3.2 Conversão de GSR em AND

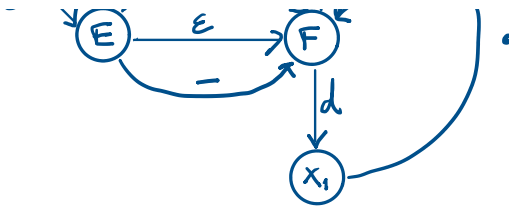
Dada um gramática simplesmente regular à direita o autômato não determinístico correspondente pode ser obtido da seguinte forma:

- a cada símbolo não terminal corresponde um estado.
- o estado a que corresponde o símbolo S (símbolo inicial da gramática) é o estado inicial do autômato.
- o estado correspondente ao símbolo Z é o estado final do autômato.
- para cada produção da forma  $(A \rightarrow B) \in P$  coloca-se uma seta do estado correspondente a A para o estado correspondente a B com etiqueta  $\epsilon$ .  $(A \xrightarrow{\epsilon} B)$
- para cada produção da forma  $(A \rightarrow a A) \in P$  coloca-se uma seta do estado correspondente a A para o estado correspondente a B com etiqueta a.  $(A \xrightarrow{a} A)$

#### Exercício 2.5

- $S \rightarrow I \mid E$
- $I \rightarrow A \mid '+' A \mid '-' A$
- $A \rightarrow d Z \mid d A$
- $E \rightarrow '+' F \mid '-' F \mid F$
- $F \rightarrow d F \mid d X_1$
- $X_1 \rightarrow '.' A$
- $Z \rightarrow \epsilon$

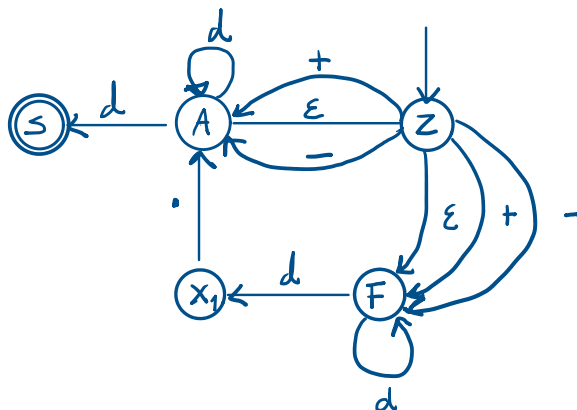




Dada uma gramática simplesmente regular à esquerda, o autômato não determinístico correspondente pode ser obtido da seguinte forma:

- a cada símbolo não terminal corresponde um estado.
- o estado a que corresponde o símbolo S (símbolo inicial da gramática) é o estado final do autômato.
- o estado correspondente ao símbolo Z é o estado inicial do autômato.
- para cada produção da forma  $(A \rightarrow B) \in P$  coloca-se uma seta do estado correspondente a B para o estado correspondente a A com etiqueta  $\varepsilon$ .
- para cada produção da forma  $(A \rightarrow a A) \in P$  coloca-se uma seta do estado correspondente a B para o estado correspondente a A com etiqueta **a**.

- $S \rightarrow A d$
- $A \rightarrow Z \mid Z '+' \mid Z '-' \mid A d \mid X_1 '.'$
- $X_1 \rightarrow F d$
- $F \rightarrow Z \mid Z '+' \mid Z '-' \mid F d$
- $Z \rightarrow \varepsilon$



### 2.3.3 Autômatos Determinísticos

$$\delta: Q \times T \rightarrow Q \cup \{\perp\}$$

Um autômato determinístico A é um autômato em que a função de transição de estado é uma função que dado um estado e um símbolo do alfabeto dá como resultado um estado.

Esta função é parcial, i.e., existem pares de valores  $(q,s)$  tais que  $\delta(q,s) = \perp$ .

### 2.3.4 Conversão de AND em AD

Seja  $N = (T, Q, S, Z, \delta)$  um autômato determinístico.

Considere-se a seguinte função:

$\text{fecho} : P(Q) \rightarrow P(Q)$

$\text{fecho}(X) = X \cup \bigcup_{x \in X} \text{fecho}(\delta(x, \varepsilon))$

isto é, o fecho de um conjunto de estados  $X$  é o conjunto de estados a que se pode chegar dos estados de  $X$  através de transições por  $\varepsilon$ .

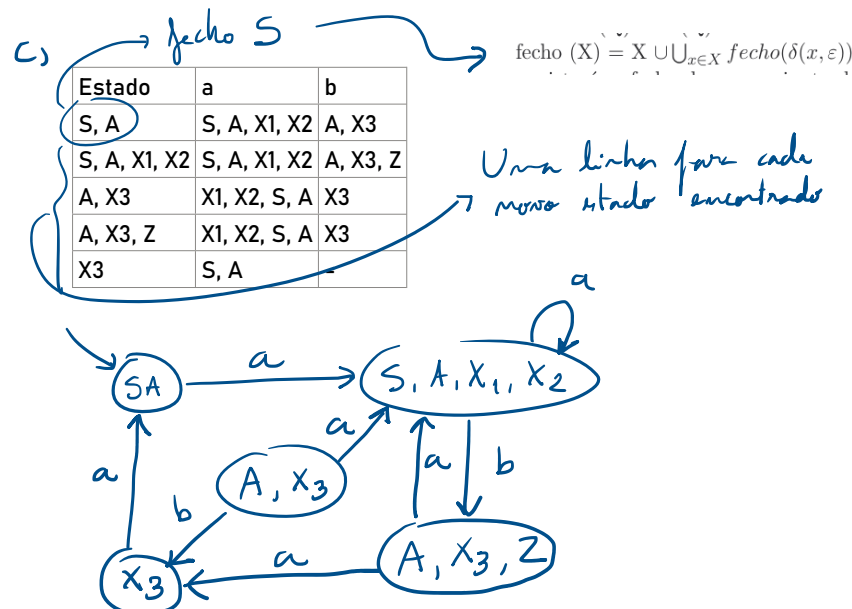
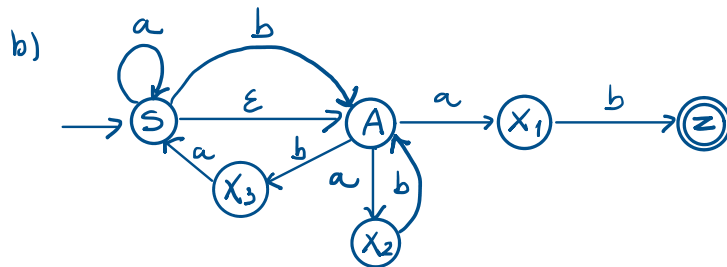
Para a partir de  $N = (T, Q, S, Z, \delta)$  se obter o autômato  $D = (T', Q', S', Z', \delta')$  correspondente procede-se da seguinte forma:

- $T' = T$
- $S' = \text{fecho}(\{S\})$
- $\delta'(X, t) = \text{fecho}(\bigcup_{q \in X} (\delta(q, t)))$
- $Q'$  define-se recursivamente da seguinte forma:
  - (i)  $\text{fecho}(\{S\}) \in Q'$
  - (ii) se  $q \in Q'$  então  $\delta'(q, t) \in Q'$

### Exercício 2.8

$S \rightarrow A \mid aS \mid bA$   
 $A \rightarrow ab \mid abA \mid baS$

a)  $S \rightarrow A \mid aS \mid bA$   
 $A \rightarrow aX_1 \mid aX_2 \mid bX_3$   
 $X_1 \rightarrow bZ$   
 $X_2 \rightarrow bA$   
 $X_3 \rightarrow aS$   
 $Z \rightarrow \varepsilon$



## 2.3.5 Conversão de ER em AND

4.  $e = p + q$  sendo  $p$  e  $q$  expressões regulares



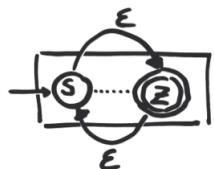
5.  $e = p \cdot q$  sendo  $p$  e  $q$  expressões regulares



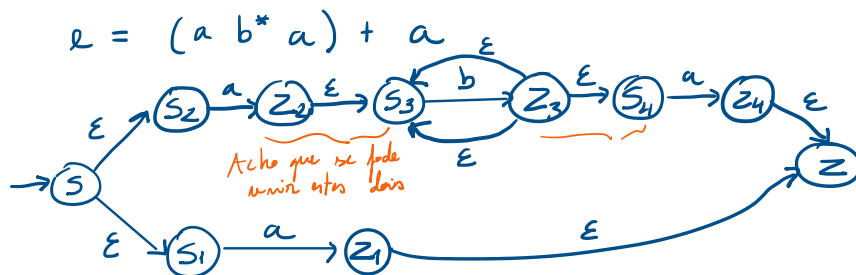
6.  $e = p^+$  sendo  $p$  uma expressão regular



7.  $e = p^*$  sendo  $p$  uma expressão regular



### Exercício 2.9



## 2.4 Reconhecedores Baseados em AD

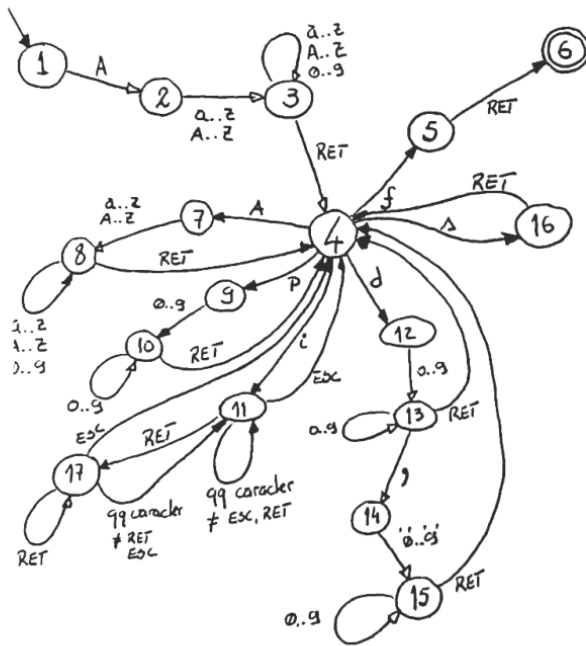
### 2.5 Análise de um exemplo

Vamos tentar escrever um editor de texto muito simples que permita:

- abrir um ficheiro **A** *ficheiro*
- posicionar numa determinada linha **P** *linha*
- inserir texto terminado por ESC **i** *texto* **esc**
- apagar a linha atual **d**
- apagar as linhas desde uma posição a outra **d** *linha<sub>1</sub> linha<sub>2</sub>*
- escrever o ficheiro **s**
- terminar a edição **f**

Todos os comandos (excepto o de inserção de texto) devem ser terminados com RETURN.

S → Comando S | Fim  
 Comando → ComAbr | ComPos | ComIns | ComApa | ComEsc  
 ComAbr → A nome RETURN  
 ComPos → P inteiro RETURN  
 ComIns → i texto ESC  
 ComApa → d RETURN | d inteiro ',' inteiro RETURN  
 ComEsc → s RETURN  
 Fim → f RETURN  
 nome → alfabético | nome alfanumérico  
 inteiro → dígito | dígito inteiro  
 texto → ε | linha texto  
 linha → RETURN | char linha  
 numérico → '0' | '1' | ... | '9'  
 alfanumérico → numérico | alfabético  
 alfabético → 'a' | 'b' | ... | 'z' | 'A' | 'B' | ... | 'Z'  
 char → qualquer carater diferente de ESC e de RETURN



makes sense

| Est \ Simb | ... | RET | ... | ESC | ... | A  | ... | P  | ... | Z  | ... | ,  | ... | a  | ... |
|------------|-----|-----|-----|-----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|
| 1          |     |     |     |     |     | 2  |     |    |     |    |     |    |     | 3  | 3   |
| 2          |     |     |     |     |     | 3  | 3   | 3  | 3   | 3  |     |    |     | 3  | 3   |
| 3          |     | 4   |     |     |     | 3  | 3   | 3  | 3   | 3  |     |    |     | 3  | 3   |
| 4          |     |     |     |     |     | 7  |     | 9  |     |    |     |    |     |    |     |
| 5          |     | 6   |     |     |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |     |
| 6          |     |     |     |     |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |     |
| 7          |     |     |     |     |     | 8  | 8   | 8  | 8   | 8  |     |    |     | 8  | 8   |
| 8          |     | 4   |     |     |     | 8  | 8   | 8  | 8   | 8  |     |    |     | 8  | 8   |
| 9          |     |     |     |     |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |     |
| 10         |     |     |     |     |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |     |
| 11         | 11  | 17  | 11  | 4   | 11  | 11 | 11  | 11 | 11  | 11 | 11  | 11 | 11  | 11 | 11  |
| 12         |     |     |     |     |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |     |
| 13         |     | 4   |     |     |     |    |     |    |     |    |     | 14 |     |    |     |
| 14         |     |     |     |     |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |     |
| 15         |     | 4   |     |     |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |     |
| 16         |     | 4   |     |     |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |     |
| 17         | 11  | 17  | 11  | 4   | 11  | 11 | 11  | 11 | 11  | 11 | 11  | 11 | 11  | 11 | 11  |

| Est \ Simb | ... | d  | ... | f  | ... | i  | ... | s  | ... | x  | ... | 0  | ... | 9  | ... |
|------------|-----|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|
| 1          |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |     |
| 2          | 3   | 3  | 3   | 3  | 3   | 3  | 3   | 3  | 3   | 3  |     |    |     |    |     |
| 3          | 3   | 3  | 3   | 3  | 3   | 3  | 3   | 3  | 3   | 3  |     |    |     |    |     |
| 4          |     | 12 |     | 5  |     | 11 |     | 16 |     |    |     |    | 3   | 3  | 3   |
| 5          |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |     |
| 6          |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |     |
| 7          | 8   | 8  | 8   | 8  | 8   | 8  | 8   | 8  | 8   | 8  |     |    |     |    |     |
| 8          | 8   | 8  | 8   | 8  | 8   | 8  | 8   | 8  | 8   | 8  |     |    |     |    |     |
| 9          |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |     |
| 10         |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |     | 10 | 10  | 10 | 10  |
| 11         | 11  | 11 | 11  | 11 | 11  | 11 | 11  | 11 | 11  | 11 | 11  | 11 | 11  | 11 | 11  |
| 12         |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |     | 13 | 13  | 13 | 13  |
| 13         |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |     | 13 | 13  | 13 | 13  |
| 14         |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |     | 15 | 15  | 15 | 15  |
| 15         |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |     | 15 | 15  | 15 | 15  |
| 16         |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |     |
| 17         | 11  | 11 | 11  | 11 | 11  | 11 | 11  | 11 | 11  | 11 | 11  | 11 | 11  | 11 | 11  |