Ficha 3

26 de junho de 2024 19:53

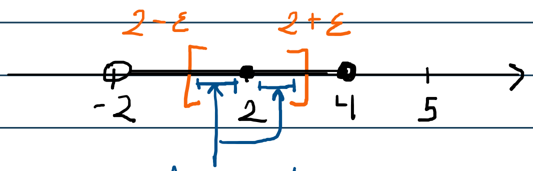
1. a) $\mathbb{N}$; $x \leq M, \forall x \in \mathbb{N}$ ✗
$m \leq m, \forall x \in \mathbb{N}$ ✓

↳ minorador
Ínfimo = Mínimo = 0

$D' = \{0\}$

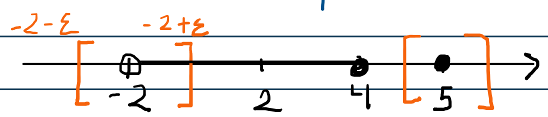
x_1 é p.a. do conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ se
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists x_2 \in A : 0 < |x_1 - x_2| < \varepsilon$

Exemplo: $A =]-2, 4] \cup \{5\}$



$x_2 \in A$ tem de estar aqui

⇒ é ponto de acumulação



tbm são pontos de acumulação

↳ não é ponto de acumulação

$D'_{\mathbb{N}} = \emptyset$

b) Não tem majorantes ou minorantes

$D'_{\mathbb{Z}} = \emptyset$

c) $D'_{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

d) $\{1\} \cup] 2.23\ldots, 9 [$ ← ≥ a ∀ elemento de

Majorantes = $[9, +\infty[$. Minorantes = $]-\infty, 1]$
Supremo = 9 , Máximo = Não tem
Ínfimo = 1 . Mínimo = 1

Supremo $= 9$, Máximo = Não tem
Ínfimo $= 1$, Mínimo $= 1$

e) $[\sqrt{5}, 9] \cap \mathbb{Q}$

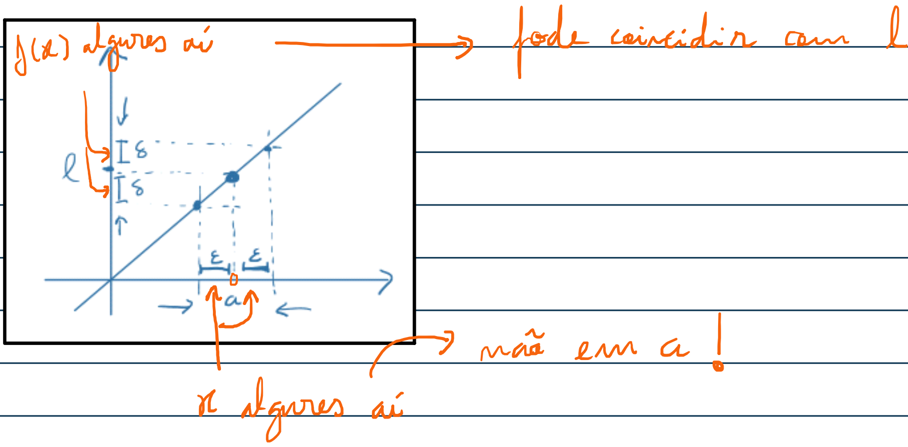
Majorantes $= [9, +\infty[$; Supremo = Máximo $= 9$
Minorantes $=]-\infty, \sqrt{5}[$; Ínfimo $= \sqrt{5}$; Mínimo = Não tem

2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ $\qquad D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
$\qquad D' = \mathbb{R}$

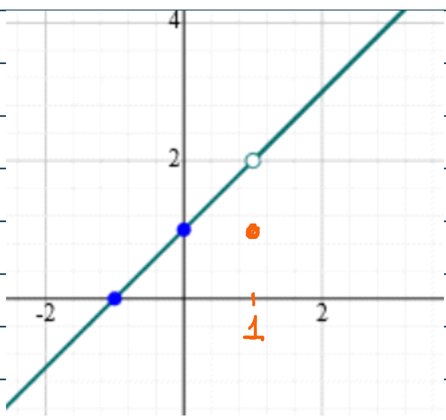
Conjetura: $l = 2$

$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : (x \in D \wedge 0 < |x - 1| < \varepsilon)$
$$\Rightarrow \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \delta$$
$$\Leftrightarrow \left| \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} - 2 \right| < \delta \quad , \quad |x - 1| > 0$$
$$\Leftrightarrow |x - 1| < \delta$$

Faça-se $\varepsilon = \delta$



$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$



$D_g = \mathbb{R}$, $D'_g = \mathbb{R}$

Conjetura: $l = 2$

Conjetura: $l = 2$

$\forall_{\delta > 0}, \exists_{\varepsilon > 0} : (x \in D \wedge 0 < |x - 1| < \varepsilon)$

$\Rightarrow \left| \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \delta$

$\Leftrightarrow \left| \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} - 2 \right| < \delta \quad , \quad |x - 1| > 0$

$\Leftrightarrow |x - 1| < \delta \quad , \quad \boxed{x \neq 1 \text{ pois } |x-1| > 0}$

$h(x) = x + 1$

$D = \mathbb{R} \quad , \quad D' = \mathbb{R}$

Conjetura: $l = 2$

$\forall_{\delta > 0}, \exists_{\varepsilon > 0} : (x \in D \wedge 0 < |x - 1| < \varepsilon)$

$\Rightarrow |x + 1 - 2| < \delta$

$\Rightarrow |x - 1| < \delta$

Faça-se $\varepsilon = \varepsilon$

3. $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x - 1} = 2$

Encontrar $\varepsilon > 0$: $\delta =$ funcione

$|\sqrt{x-1} - 2| < 1$

$\Leftrightarrow -1 < \sqrt{x-1} - 2 < 1$

$\Leftrightarrow 1 < \sqrt{x-1} < 3$

$\Leftrightarrow 1 < x - 1 < 9$

$\Leftrightarrow 2 < x < 10$

$|x - 5| > 0 \Leftrightarrow x \neq 5$

$\Rightarrow]2, 5[\cup]5, 10[$

$|x - 5| < \varepsilon$

$5 - \varepsilon < x < 5 + \varepsilon$

$\varepsilon = 3 \Rightarrow 5 - 3 < x < 5 + 3$

$\Leftrightarrow 2 < x < 8 \qquad x \in]2, 8[$

4. $h : D \to \mathbb{R} \quad , \quad a \in D'$

a) $h(x) = k,\ k \in \mathbb{R} \implies \lim_{x \to a} h(x) = k$

$\forall_{\delta>0}\ \exists_{\varepsilon>0} : (x \in D \wedge 0 < |x - a| < \varepsilon)$
$\implies |k - k| < \delta \iff 0 < \delta$

$(F \text{ ou } V) \Rightarrow V \iff V$

δ não depende de x logo a implicação é sempre verdadeira

b) $h = id \implies \lim_{x \to a} h(x) = a$

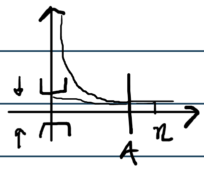
$|a - a| < \delta \iff 0 < \delta$, mesma coisa

c) $\lim_{x \to 2} (2x - 1) = 3$

$\forall_{\delta>0}, \exists_{\varepsilon>0} : (x \in D \wedge 0 < |x - 2| < \varepsilon)$
$\implies |(2x - 1) - 3| < \delta$
$\iff |2x - 4| < \delta$
$\iff 2|x - 2| < \delta$
$\iff |x - 2| < \delta/2$

$\varepsilon = \delta/2$

5. a) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$



$\left(\forall_{\delta>0}, \exists A>0 : (x \in D \wedge x > A) \implies |f(x) - l| < \delta\right)$ DEFINIÇÃO

$\forall_{\delta>0}, \exists_{A>0} : (x \in D \wedge x > A)$
$\implies \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \delta$

$\iff \frac{1}{|x|} < \delta$

$\iff \frac{1}{\delta} < |x| \iff -\frac{1}{\delta} > x > \frac{1}{\delta}$

$\therefore A = 1/\delta$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} \right) = +\infty$

$0 < |x| < \varepsilon$

$\forall_{A>0}, \exists_{\varepsilon>0} : (x \in D \land 0 < |x - 0| < \varepsilon)$

$\Rightarrow \frac{1}{x} > A \;, x \neq 0^{+}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{A} > x$

$\hookrightarrow \varepsilon = \frac{1}{A}$

6. a) $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0 \neq \lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} g(x)$ não existe

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \;, \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x)$ não existe $\rightarrow$ não existe

$\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = 0$

$c = 0, x_n = \frac{1}{2n\pi}, y_n = \frac{2}{\pi(4n+1)}$

$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2n\pi} \right) = 0$

$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{2}{\pi(4n+1)} \right) = 0$

$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} y_n = c = 0$

$\lim_{n \to \infty} \left(\sin\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2n\pi}\right)} \right) \right) = 0$

$\lim_{n \to \infty} \left(\sin\left(\frac{1}{\left(\frac{2}{\pi(4n+1)}\right)} \right) \right) = 1$

$\lim_{n \to \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \to \infty} f(y_n)$

Therefore $\lim_{x \to 0} \left(\sin\left(\frac{1}{x} \right) \right)$ is divergent at $x \to 0$

Limit Divergence Criterion Test:

If two sequences exist, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ and $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ with

$x_n \neq c$ and $y_n \neq c$

$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} y_n = c$

$\lim_{n \to \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \to \infty} f(y_n)$

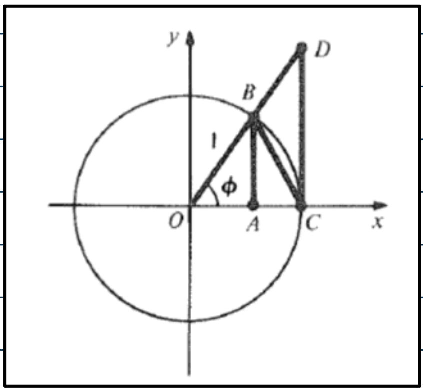
Then $\lim_{x \to c} f(x)$ does not exist

7. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 1$

$$\frac{\lim\limits_{x \to 4} f(x) - \lim\limits_{x \to 4} 5}{\lim\limits_{x \to 4} x - \lim\limits_{x \to 4} 2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to 4} f(x) = 1 \times 2 + 5$$

8.



$$u(\phi) = \frac{\text{sen}(\phi)}{\phi}$$

$$\lim_{\phi \to 0} u(\phi) = ?$$

$$\cos \phi < \frac{\text{sen}\, \phi}{\phi} < 1$$

$$\lim_{\phi \to 0} \cos \phi = \lim_{\phi \to 0} 1 = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{\phi \to 0} \frac{\text{sen}\, \phi}{\phi} = 1$$, Teorema de enquadramento de limites

7. a) $h(x) = -|x| \leq f(x) = \text{sen}\, x \leq g(x) = |x|$

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \text{sen}\, x = 0$$

b) $h(x) = 0 \leq f(x) = -\cos(x) + 1 \leq g(x) = |x|$

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$$

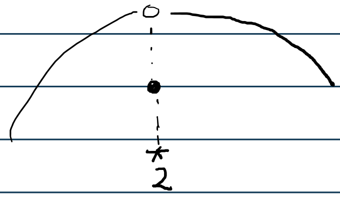
$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} -\cos x + 1 = 0$$

$1 \Rightarrow -\left(\lim_{x \to 0} \cos x\right) = -1$

$2 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \cos x = 1$

10. $\forall x \neq 5, \; g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} h(x) = -5$$



a) 2 é um ponto de acumulação, e se estiver no domínio terá como imagem -5 caso as funções sejam contínuas

b) Sim

c) Não, $\lim_{x \to 2} f(x) = -5$

(a) → constante
(b) → identidade

11. a)
$$\frac{\lim_{x \to 3} 3^{(a)}}{\lim_{x \to 3} x^{(b)} + \lim_{x \to 3} 1^{(a)}} = \frac{3}{3+1} = 3/4$$

b)
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x + 2x - 2}{x(x-1)}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1) + 2(x-1)}{x(x-1)}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x(x-1)} \quad , x \to 1, x \neq 1$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x} = \left(\lim_{x \to 1} x + 2\right) / \lim_{x \to 1} x = 3$$

c)
$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{\left(\lim_{x \to 0} x\right)^2 + 100} - 10}{\left(\lim_{x \to 0} x\right)^2} = \frac{\sqrt{0 + 100} - 10}{0} = \frac{0}{0} \;\times$$

c)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 100} - 10\right)\left(\sqrt{x^2 + 100} + 10\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2 + 100} + 10\right)}$$

c) $\lim_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{x^2+100} - 10)(\sqrt{x^2+100} + 10)}{x^2(\sqrt{x^2+100} + 10)}$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{x^2+100})^2 - 10^2}{x^2(\sqrt{x^2+100} + 10)}$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+100} + 10} = \dfrac{\lim_{x \to 0} 1}{\sqrt{(\lim_{x \to 0} x)^2 + 100} + 10}$

$= \dfrac{1}{10+10} = \dfrac{1}{20}$

d) $\lim_{x \to 0} \left(1 + \dfrac{x}{|x|}\right)$

$\lim_{x \to 0^-} \left(1 + \dfrac{x}{-x}\right)$ $\qquad$ $\lim_{x \to 0^+} \left(1 + \dfrac{x}{x}\right)$

$= 1 - 1 = 0 \quad \neq \quad = 1 + 1 = 2$

$\Rightarrow$ não existe limite

e) $\lim_{x \to 1} \dfrac{|x-1|}{x-1}$ $\qquad$ $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{-(x-1)}{x-1} = -1$

$\neq \quad \Rightarrow$ Não existe

$\lim_{x \to 1^+} \dfrac{x-1}{x-1} = 1$

f) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{2x+1} = \dfrac{(x-1)^2}{(2x+1)(x-1)} = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1}$

$= \dfrac{x^2 - x - x + 1}{2x^2 - 2x + x - 1}$

$= \dfrac{x(x-1) - 1(x-1)}{2x(x-1) + (x-1)}$

$= \dfrac{(x-1)(x-1)}{(2x+1)(x-1)}$

$= \dfrac{x-1}{2x+1}$ $\times$ BRUH

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{x-1}{x}}{\frac{2x+1}{x}} = \dfrac{1 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x}} \Rightarrow \dfrac{1 - \frac{1}{\infty}}{2 + \frac{1}{\infty}} = \dfrac{1}{2}$

ou

$$\begin{array}{l|l} x - 1 & 2x + 1 \\ \cline{2-2} -x - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 0 - \frac{3}{2} & \end{array}$$

$$-\frac{2}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{x-1}{2x+1} = \frac{1}{2} + \frac{-\frac{3}{2}}{2x+1}$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{-\frac{3}{2}}{2x+1} \right) = \frac{1}{2}$$

g) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{4x^3 - x^2 + x + 2}$$

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 + 2x^2 + 1 & 4x^3 - x^2 + x + 2 \\ \cline{2-2} -3x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{6}{4} & \frac{3}{4} \\ \hline 0 + \frac{11}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} & \end{array}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{\frac{11}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}}{4x^3 - x^2 + x + 2}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{\frac{11}{4} - \frac{3}{4x} - \frac{1}{2x^2}}{4x - 1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} \quad \frac{11/4 - 0 - 0}{\infty - 1 + 0 + 0}$$

$$= \frac{3}{4}$$

h) $$\lim_{x \to 3} \sqrt{|x - 3|}$$

$$\sqrt{\lim_{x \to 3^+} x - 3} = \sqrt{3 - 3} = 0$$

$$\sqrt{\lim_{x \to 3^-} -x + 3} = \sqrt{-3 + 3} = 0$$

i) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{x}{x^2\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x^2}}$

$= 0/1+0 = 0$

j) $\lim_{x \to 4} f(x)$, $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \neq 4 \\ x & , x = 4 \end{cases}$

$\lim_{x \to 4} x^2 = \left(\lim_{x \to 4} x\right)^2 = 16$

k) $\lim_{x \to 1} f(x)$, $f(x) = \begin{cases} 2x & , x \text{ é racional} \\ 2 & , x \text{ é irracional} \end{cases}$

↳ não é contínua
⇒ limite não existe

12. $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$

Vertical: $x = -2$
Horizontal: grau do denominador = grau do numerador
⇒ coef numerador / coef denominador
$= 1/1 = 1$

$\lim_{x \to -2^+} (x+3) \times \lim_{x \to 2^+} \left(\frac{1}{x+2}\right) = +\infty$

+

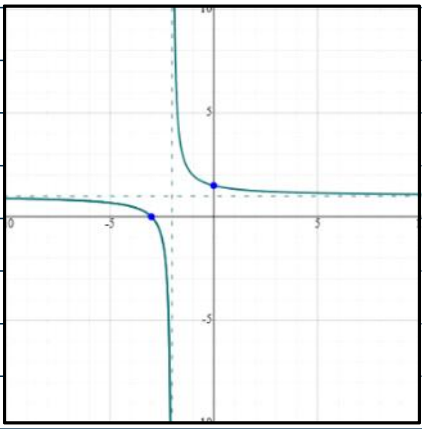
$\lim_{x \to -2} \frac{x+3}{x+2} = \frac{1}{0} = -\infty$

⇒ $x = -2$ é uma assíntota vertical

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{x}+\frac{3}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{1+\frac{2}{x}} = \frac{1+0}{1+0} = 1$

$\lim \cdots = 1$ ⇒ $y = 1$ é uma

$$\lim_{x \to -\infty} \cdots = 1 \Rightarrow y = 1$$ é uma assíntota horizontal



13. $f(x) = x^2 - 4x$

$f'(x) = 2x - 4$

$f(3) = 9 - 12 = -3$

$f(1) = 1 - 4 = -3$

a) $$\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(1)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = f'(3) = 2$$

b) $$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 4x - (-3)}{x - 3} = \frac{x^2 - 3x - x + 3}{x - 3}$$

$$= \frac{x(x-3) - 1(x-3)}{x - 3} = \frac{(x-1)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}$$

$$= x - 1$$

$$= -2$$

c) $f'(1) = 2 \times 1 - 4 = -2$

d) $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 2x_0 - 4$$

14. a) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ é racional} \\ 0, & x \text{ é irracional} \end{cases}$

Entre cada dois números racionais existem infinitos números irracionais

têm pontos infinitos número ... cada

Entre cada dois números racionais existem infinitos números irracionais

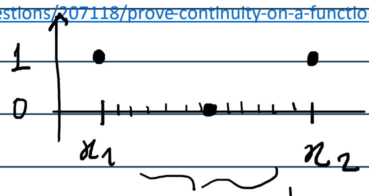
$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Q} : x_1 < x_2$

$\Rightarrow f$ é contínua em $]x_1, x_2[$

Tem pontos infinitos números racionais entre cada dois racionais

(exemplo diferente: a function that is continuous at uncountably infinite number of points while discontinuous at countably infinite number of points.

De <https://math.stackexchange.com/questions/207118/prove-continuity-on-a-function-at-every-irrational-point-and-discontinuity-at-ev?rq=1>)



Existem pontos de acumulação
Não existem pontos isolados,

é possível ver sequer isto? a escala seria ∞ para se conseguir encontrar um intervalo destes

$\forall x_0 \in D_f$: $f(x_0)$ está definida

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe?

Tanto $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são densos

→ não se aproxima por um único valor/trajetória

→ limite não existe

b) $h(x) = \begin{cases} 2x, & x \in \mathbb{Z} \\ x^2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$

$2x = x^2$

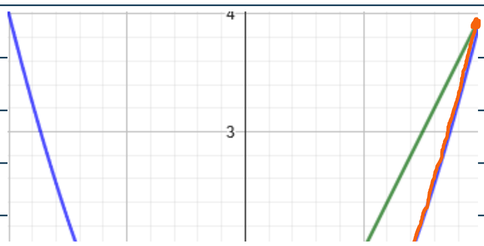
$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$

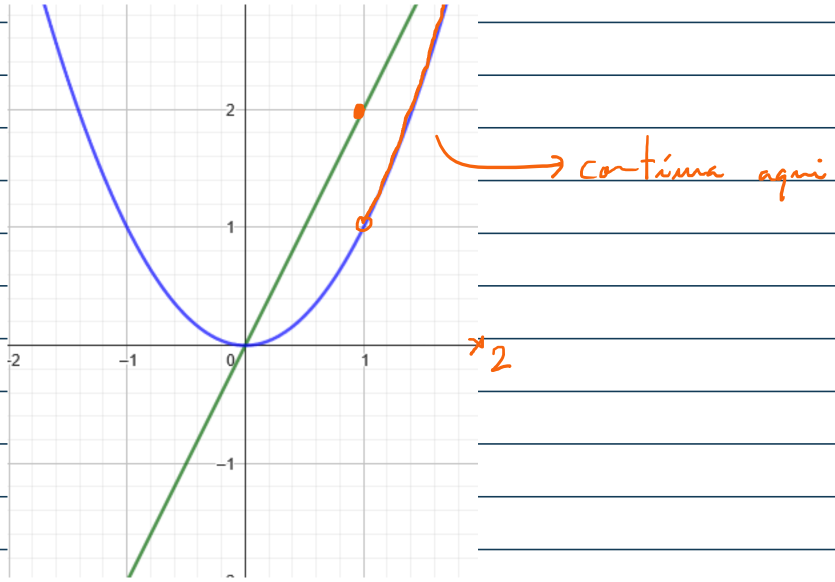
$\Leftrightarrow x(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

Contínua em $\{0, 2\} \cup \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

Desta vez é possível obter um intervalo como o seguinte sem se ter de aproximar infinitamente





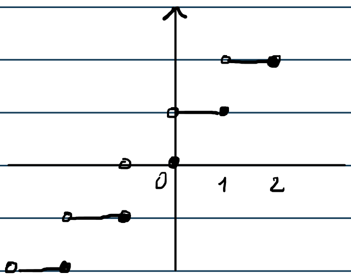
c) $f(x) = \lceil x \rceil$ → função teto

$1 \to 1$

$1.23 \to 2$

$2.2 \to 3$

$-1.23 \to 1$



↳ É descontínua em $x \in \mathbb{Z}$

sempre que x está perto de x0, f(x) está perto de f(x0)
o que não é o caso para x0 = número inteiro

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$$

15. $f(x) = \dfrac{x^5 - 1}{x - 1}$, descontínua em $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} 5, & x = 1 \\ \dfrac{x^5 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \end{cases}$$

$$\sum x^{n-i} y^i$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1},$$

Apply factoring rule: $x^n - y^n = (x - y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2}y^{n-1}\right)$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}{(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 5$$

16. f contínua em $[a,b]$

$f(a) \leq y_0 \leq f(b) \Rightarrow y_0 = f(c)\ ,\ c \in [a,b]$

$f(1) = -3 \quad ; \quad f(2) = 5$

$-3 \leq y_0 \leq 5 \quad \Rightarrow y_0 = f(c),\ c \in [1,2]$

17. Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : B \to \mathbb{R}$, $f(D) \subset B$
Se f é contínua em $a \in D$ e g é contínua em $b = f(a)$, então $g \circ f$ é contínua em a

a) f contínua, g descontínua, $g \circ f$ contínua:

$$f(x) = 2, \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 5 \\ 0, & x = 5 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad (g \circ f)(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) f descontínua, g contínua, $g \circ f$ contínua:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 0 \\ -2, & x > 0 \end{cases}, \qquad g(x) = 5 \qquad \text{e} \qquad (g \circ f)(x) = 5, \forall x \in \mathbb{R}.$$

c) f e g descontínuas, $g \circ f$ contínua:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 0 \\ -2, & x > 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 5 \\ 0, & x = 5 \end{cases}$$

e

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 1, & f(x) \neq 5 \\ 0, & f(x) = 5 \end{cases} = 1, \text{ pois } f(x) \neq 5\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

$f(2 \text{ ou } -2) \to (1)$ contínua

$\neq 5$

18. $f : [0,1[\cup [2,3] \to [1,3]$

$$x \mapsto \begin{cases} x+1, & 0 \leq x < 1 & \to [1,2[\\ x, & 2 \leq x \leq 3 & \to [2,3] \end{cases} \to [1,3]$$

a) Bijetiva : Injetiva $\quad f(a_1) \neq f(a_2) \Rightarrow a_1 \neq a_2$

Sobrejetiva $\quad \forall_{b \in B},\ \exists_{a \in A} : f(a) = b$

$f : A \to B \qquad$ Sobrejetiva

Para cada elemento

$f : A \to B$ sobrejetiva.

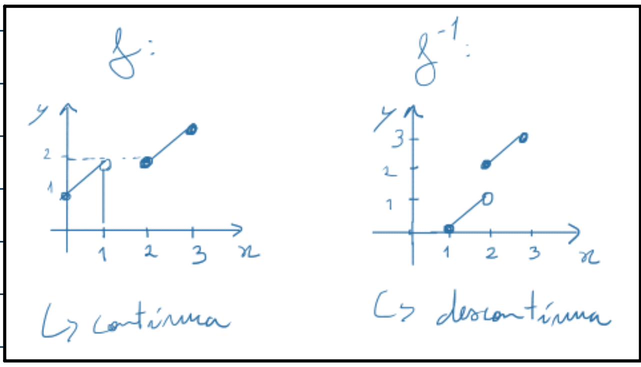
Para cada elemento
y do CD existe $x \in D : f(x) = y$

b) $x = y + 1$

$\Leftrightarrow y = x - 1$

$f^{-1} : [1,3] \to [0,1[\cup [2,3]$

$$f^{-1} = \begin{cases} x - 1 & , \ 1 \leq x < 2 \to [1,2[\\ x & , \ 2 \leq x \leq 3 \to [2,3] \end{cases} \Bigg\} [1,3]$$



$$\lim_{x \to 2^-} \overrightarrow{\ } \neq \overleftarrow{\ } \lim_{x \to 2^+}$$

c) Mantém-se pois é contínua nos intervalos (mas não em todo o domínio)