Teóricas 11 a 13

8 de julho de 2024 13:59

Séries numéricas

$$0.333\ldots = \boxed{\frac{1}{3}} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} \ldots$$

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \rightsquigarrow u(n) = u_n$$

- PROGRESSÃO ARITMÉTICA
  - Razão 'r'
  - Primeiro termo 'a'

$$\longrightarrow \quad u_n = \underbrace{a}_{u_1} + (n-1)r, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Ou seja, é constante - e igual à razão r - <u>a diferença entre cada termo e o que o precede</u>.

- PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

$$u_n = a \times r^{n-1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

É constante - e igual à razão - <u>o quociente entre cada termo e o que o precede</u>.

— ~ —

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$$

Soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = \begin{cases} u_1 \cdot \dfrac{1-r^n}{1-r} & \text{se } r \neq 1 \\ n \cdot u_1 & \text{se } r = 1 \end{cases}$$

Soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica

- Sucessão monótona

↳ crescente : $u_{n+1} \geq u_n \, , \forall_n \in \mathbb{N}$
decrescente : $u_{n+1} \leq u_n \, , \forall_n \in \mathbb{N}$

- Sucessão limitada

$\rightarrow \forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{M \in \mathbb{R}} : (M > 0 \wedge |u_n| \leq M)$

Exemplo : $\frac{1}{n}$ é crescente e limitada

- LIMITE DE UMA SUCESSÃO

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l$$

$\forall_{\delta > 0} \, , \exists_{n_0} \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \delta$

↳ Sucessão convergente

1. O limite de uma sucessão, quando existe, é único.
2. Qualquer sucessão constante é convergente: tem por limite a própria constante, isto é
$$\lim_n k = k, \qquad \forall k \in \mathbb{R}$$
3. Qualquer a sucessão monótona e limitada é convergente.
4. É válida a "aritmética" de limites.

Teorema (Alguns Limites de Sucessões)

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$
2. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
3. $\lim_{n\to+\infty} x^{\frac{1}{n}} = 1, \qquad x > 0.$
4. $\lim_{n\to+\infty} x^n = 0, \qquad |x| < 1.$
5. $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x, \qquad x \in \mathbb{R}.$
6. $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$

- Sucessão definida recursivamente

↳
- o primeiro, ou primeiros, termos são conhecidos
- possui uma "lei" que permite calcular um termo posterior à custa dos que o precedem

Exemplo: $a_1 = 1$

$a_n = a_{n-1} + 1, \quad \forall n > 1$

Séries numéricas

↳ Série numérica convergente

$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ diz-se convergente quando a respetiva sucessão das somas parciais for convergente, isto é, for tal que

$\exists S \in \mathbb{R} : \underset{\downarrow}{S} = \lim_n s_n$

Soma da série

define-se → $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k$

Exemplo:

1. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{n-1}}$, descrita no paradoxo de Aquiles e a Tartaruga, é convergente.

- O termo geral da sucessão geradora é $u_n = \frac{1}{10^{n-1}}$
- O termo geral da sucessão das somas parciais é

$$s_n = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^{k-1}}$$

- Tem-se

soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica.

$$s_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} = 1.\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right) \longrightarrow \frac{10}{9}$$

- Logo a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{n-1}}$ converge e a sua soma é $\frac{10}{9}$

— n —

- [Condição necessária de convergência] Se a série $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente então

$$\lim_n u_n = 0.$$

- **[Condição suficiente de divergência]** Se a sucessão u não tem limite ou se $\lim_n u_n = \ell$, com $\ell \neq 0$, então a série $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente.

TESTE DO N-ÉSIMO TERMO

- Se $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge, então $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Se $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, então $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.
- Se $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, o teste é inconclusivo; isto é, a série poderá convergir ou não (impõe-se uma outra análise da série).

1. A série $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n+1}$ é divergente.

Basta notar que

$$\lim_n \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0.$$

2. A série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente no entanto $\lim_n \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

[Propriedade 1] Se $\sum_{n\geq 1} u_n$ tem por soma S e $\sum_{n\geq 1} v_n$ tem por soma T então

- $\sum_{n\geq 1}(u_n + v_n)$ converge e tem por soma $S + T$;
- $\sum_{n\geq 1} \alpha\, u_n$ converge e tem por soma $\alpha\, S$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

[Propriedade 2] Se a série $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge então, dado $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, a série $\sum_{n\geq 1} \alpha\, u_n$ também diverge.

[Propriedade 3] Se a série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge e a série $\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge então a série $\sum_{n\geq 1}(u_n + v_n)$ diverge.

[Propriedade 4] Se as sucessões u e v diferem, quando muito, num número finito de termos então têm a mesma natureza.

Isto é, [Propriedade 4'] a natureza de uma série (convergência vs divergência) não se altera quando se adiciona e/ou subtrai um número finito de termos.

1. Se as séries $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ forem divergentes nada se pode concluir quanto à convergência da série

$$\sum_{n\geq 1}(u_n + v_n).$$

- As séries

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n} \quad \text{e} \sum_{n\geq 1}\frac{-1}{n+1} \quad \text{divergem} \quad \text{e} \quad \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \text{converge.}$$

- As séries

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n} \quad \text{e} \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n+2} \quad \text{divergem} \quad \text{e} \quad \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}\right) \text{diverge.}$$

Teórica 13 - Séries de potências

Série de potências em torno de $x = a$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^4 \ldots$$

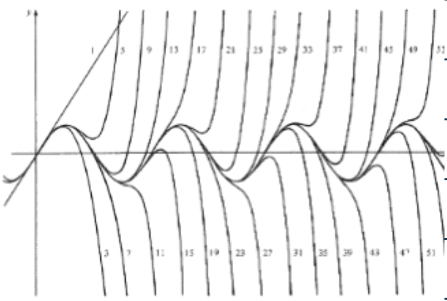
Uma série de potências define uma função f,
real de variável real, num determinado intervalo, onde converge.
Além disso, a função é contínua e diferenciável no interior
desse intervalo.

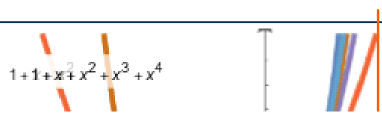
Na verdade, prova-se que

- a função f, real de variável real, definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$ é tal que

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},$$

quando $x \in \mathbb{R}$.



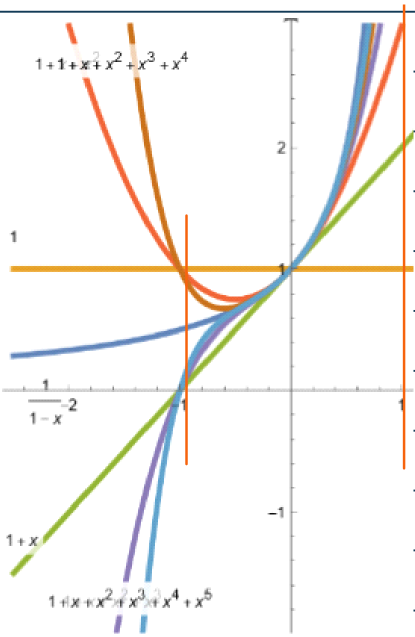


Ao passo que

- a função f, real de variável real, definida por $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ é tal que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n,$$

mas **somente quando** $x \in]-1, 1[$.



Teorema (da convergência, para séries de potências)

Se a série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n + \cdots ,$$

- *converge em* $x = c \neq 0$*, então converge absolutamente para* x *tal que* $|x| < |c|$.
- *diverge em* $x = d$*, então diverge para* x *tal que* $|x| > |d|$.

Teorema (Multiplicação, em séries de potências)

Se as séries de potências $A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ *e* $B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n$ *convergem absolutamente quando* $|x| < R$ *e* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$,
então a série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n\right)$$

converge absolutamente para $A(x)\,B(x)$*, quando* $|x| < R$.

Obs: O processo de multiplicar, termo a termo as duas séries é, geralmente, longo e repetitivo. Por exemplo,

$$\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right) = 1\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right) + x\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right) + \ldots$$

Teorema (Substituição de x por $f(x)$)

Se a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *converge absolutamente quando* $|x| < R$ *e* f *é uma função, real de variável real, contínua, então a série de potências*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(f(x)\right)^n$$

converge absolutamente quando x *é tal que* $|f(x)| < R$.

Por exemplo: Sabendo que a série $\sum_{x=0}^{+\infty} x^n$ converge absolutamente (para $1/(1-x)$) quando $|x| < 1$, então a série

$$\sum_{x=0}^{+\infty} \left(4x^2\right)^n$$

converge absolutamente (para $1/(1-4x^2)$) quando $|4x^2| < 1 \iff \cdots \iff |x| < \frac{1}{2}$.

Teorema (Derivação, termo a termo)

Se a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-a)^n$ *tem raio de convergência* $R > 0$, *define uma função* f *tal que*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \,(x-a)^n, \qquad \text{no intervalo} \quad a - R < x < a + R.$$

Nestas condições, f *é* n *vezes derivável e as respetivas derivadas obtêm-se derivando, termo a termo, a série original. Assim, as funções definidas por*

$$\begin{cases} f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underline{n}\, c_n \,(x-a)^{\underline{n-1}} \\ f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underline{n\,(n-1)}\, c_n \,(x-a)^{\underline{n-2}} \\ \dots \end{cases}$$

convergem em qualquer ponto do intervalo $a - R < x < a + R$.

Teorema (Integração, termo a termo)

Se a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-a)^n$ *tem raio de convergência* $R > 0$ *e define, no intervalo* $\underline{a - R < x < a + R}$ *uma função* f *tal que* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \,(x-a)^{\underline{n}}$,

então a série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$ *também tem raio de convergência* R *e para* $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$, *tem-se*

$$\int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{(x-a)^{\underline{n+1}}}{\underline{n+1}} + \mathcal{C}, \qquad \text{no intervalo} \quad a - R < x < a + R.$$

↳ Mesmo raio