Universidade do Minho
Dep. de Matemática

LEInf
7/fevereiro/2022
[Duração 2h00]

Cálculo para Engenharia – Exame de Recurso

~~Nome completo~~:: PROPOSTA DE RESOLUÇÃO	~~Número~~::

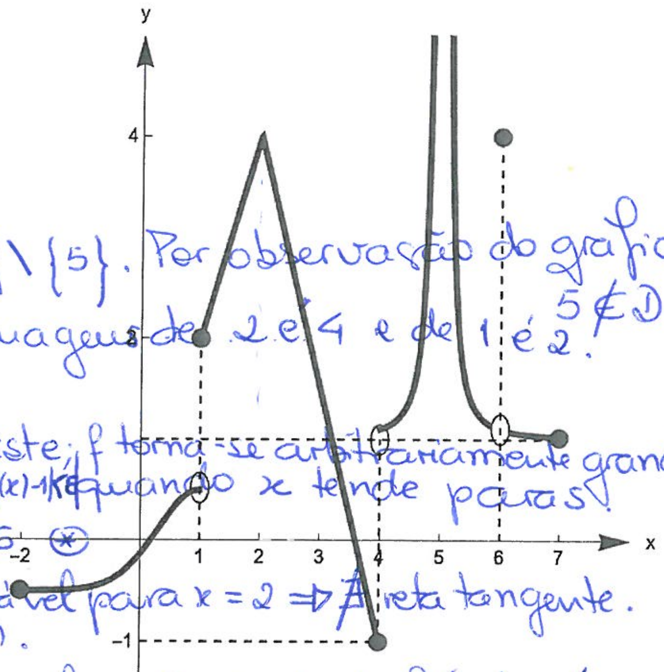
Assinale a prova que realiza: Parte 1 ○ Parte 2 ○ Exame ○

Os estudantes que **realizam o Exame** devem responder às questões assinaladas com (E).

Parte 1

Grupo I (12 valores): Responda às questões deste grupo na folha de resposta. Justifique convenientemente todas as suas respostas.

1.(5 valores) Considere a função, real de variável real, $f : \mathcal{D} \subset [-2,7] \longrightarrow \mathcal{E}$ cujo gráfico aqui se representa.



(E) **(a)** Indique o domínio $\mathcal{D}$ de f. $\mathcal{D}=[-2,7]\setminus\{5\}$. Por observação do gráfico $5\notin\mathcal{D}$.

(E) **(b)** Complete: $f(2)=4$ e $f(1)=2$. As imagens de 2 é 4 e de 1 é 2.

(c) Calcule, se existirem, $\underbrace{\lim_{x\to5} f(x)}$ e $\lim_{x\to6} f(x)=1$ pois $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0: 0<|x-6|<\delta \Rightarrow |f(x)-1|<\varepsilon$

não existe; f torna-se arbitrariamente grande quando x tende para 5.

(d) Averigúe a continuidade de f.

A função f é descontínua para $x=1$, $x=4$, $x=6$ (*)

(e) Esboce, se existir, uma reta tangente a f, no ponto de abcissa 2. f não é derivável para $x=2 \Rightarrow \nexists$ reta tangente.

(*) $\lim_{x\to1^-} f(x) \neq \lim_{x\to1^+} f(x)$; isto é, $\nexists \lim_{x\to1} f(x)$.
$\lim_{x\to4^-} f(x) \neq \lim_{x\to4^+} f(x)$; isto é, $\nexists \lim_{x\to4} f(x)$. $\lim_{x\to6} f(x)=1 \neq f(6)=4$

(E) **2.(4 valores)** Considere a função, real de variável real, definida por $f(x)=\begin{cases} 2x, & x \text{ é racional} \\ 2, & x \text{ é irracional}\end{cases}$.

(a) Calcule, se existir, $\lim_{x\to1} f(x) = 2$ pq $\lim_{\substack{x\to1\\x\in\mathbb{Q}}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}} f(x) = 2$. Ou seja $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0: 0<|x-1|<\delta \Rightarrow |f(x)-2|<\varepsilon$.

(b) Estude a continuidade de f.

f só é contínua para $x=1$, já que $1\in\mathbb{R}$ e $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)=2$. Em qualquer outro ponto a, não existe $\lim_{x\to a} f(x)$.

(c) Determine a existência da função inversa de f.

f não é injetiva (por exemplo $\sqrt{2}\neq\pi$ e $f(\sqrt{2})=f(\pi)$); logo f não é bijetiva e portanto NÃO existe função inversa.

3.(3 valores) Considere a função g, real de variável real, definida por $g(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$ e defina, se existir, uma reta tangente a g, no ponto de abcissa 1.

$t:\ y-y_0 = m(x-x_0)$; com $x_0=1$, $y_0=g(1)=e-1$ e $m=g'(1)$.

$$g'(x)=\left(\frac{e^x-1}{x}\right)' = \frac{x(e^x)'-(e^x-1)x'}{x^2} = \frac{xe^x-e^x+1}{x^2};\quad g'(1)=1$$

$t:\ y-(e-1)=1(x-1) \Leftrightarrow y-e+1 = x-1 \Leftrightarrow y = x+(e-2)$.

v.s.f.f.

Grupo II (4 valores): Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F).
Não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,5 valores.

	V	F
1. A função, real de variável real, definida por $f(x) = \text{sen}\,(x^2)$ é periódica de período $(2\pi)^2$.	○	●
2. Se a função f, real de variável real, é par, então a função $f \circ g$ também é par, para qualquer função (real de variável real) g.	○	●
3. $\cosh(2x) = \cosh^2 x - \text{senh}^2\, x$.	○	●
E **4.** Se f e g, duas funções reais de variável real, admitem segundas derivadas, então $(fg)'' = fg'' + f'g' + f''g$.	○	●

Grupo III (4 valores): Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado a única afirmação verdadeira.
Não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

E **1.** O contradomínio da função, real de variável real, definida por $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}} + 5$ é

○ $\mathbb{R}$.　○ $]-\infty, 2[$.　● $]5, +\infty[$.　○ Nenhuma das anteriores.

2. O gráfico da função f, real de variável real, definida por $f(x) = \ln(x-1)$ intersecta o eixo das abcissas, no ponto de abcissa

○ $x = 0$.　○ $x = 1$.　● $x = 2$.　○ Nenhuma dos anteriores.

3. Se $\lim_{h \to 0} f(h) = L$, então $f(10^{-4})$

○ está mais próximo de L do que $f(10^{-1})$.　○ está mais afastado de L do que $f(10^{-1})$.
○ e $f(10^{-1})$ estão equidistantes de L.　● Nenhuma das anteriores.

E **4.** Seja f uma função real de variável real.

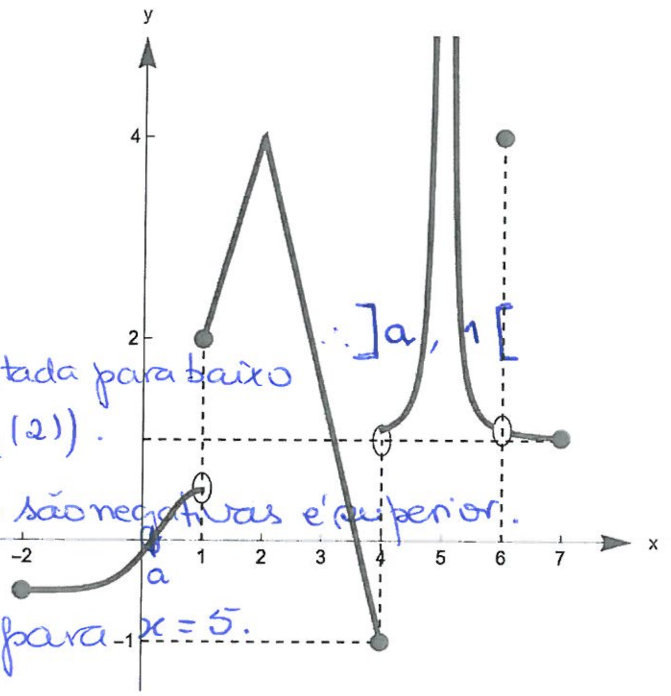
● Se f é diferenciável, então f é contínua.　○ f é contínua se e só se f é diferenciável.
○ Se f é contínua, então f é diferenciável.　○ Nenhuma das anteriores.

Fim da Parte 1

Parte 2

Grupo I (12 valores): Responda às questões deste grupo na folha de resposta. Justifique convenientemente todas as suas respostas.

1.(4 valores) Considere a função, real de variável real, $f : \mathcal{D} \subset [-2, 7] \longrightarrow \mathcal{E}$ cujo gráfico aqui se representa.



(a) Indique, se existir, um intervalo onde f é tal que $f'(x) > 0$ e $f''(x) < 0$.

f crescente   f concavidade voltada para baixo $\therefore]a, 1[$

(b) Identifique um ponto crítico de f.

$x = 2$ porque $f'(2)$ não existe ($f'_e(2) \neq f'_d(2)$).

(c) Qual o sinal de $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$? < 0;

porque a área da região onde as ordenadas são negativas é superior.

(d) Defina, se existir, um integral impróprio, com f como função integranda.

$\int_4^6 f(x)\,dx$, porque f é 'ilimitada' para $x = 5$.

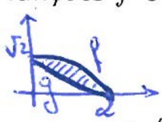
2.(2 valores) Sendo f a função, real de variável real, definida por $f(x) = 2^x$, calcule, se existir,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2^{x+h} - 2^x}{h} = \frac{0}{0} \text{ indet.}$$

Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(2^{x+h} - 2^x)'}{h'} = 2^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{(2^h - 1)'}{h'} = 2^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{2^h \cdot \ln 2}{1} = 2^x \cdot \ln 2$$

E **3.(3 valores)** Considere as funções f e g, reais de variável real, definidas por $f(x) = \sqrt{2 - x}$ e $g(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}$.



(a) Prove que $\int_{x=0}^{2} f(x)\,dx = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

$$\int_{x=0}^{2} \sqrt{2-x}\,dx = -\int_{x=0}^{2} -(2-x)^{1/2}\,dx = -\left[\frac{(2-x)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right] = -\frac{2}{3}\left(0 - \sqrt{2}^3\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

(b) Calcule a área da região (fechada) delimitada pelas funções f e g.

$$A = \int_{x=0}^{2} [f(x) - g(x)]\,dx = \int_{x=0}^{2} f(x)\,dx - \int_{x=0}^{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}\right)dx = \frac{4\sqrt{2}}{3} + \left[\frac{\sqrt{2}}{4}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right.$$

$= \sqrt{2}/3$

E **4.(3 valores)** Considere a série numérica cujos primeiros termos são

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots.$$

(a) Reescreva a série, completando $\sum_{i=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^i$

(b) Encontre os quatro primeiros termos da sucessão das somas parciais desta série.

$s_1 = \left(-\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

$s_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$s_3 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

$s_4 = \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{8}$

(c) Estude a natureza da série. $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ é a sucessão geradora da série.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = -\frac{1}{2} \therefore a_n \text{ é uma progressão geométrica cujo 1.º termo é 1 e cuja razão é } -\frac{1}{2} = r$$

onde a série é geométrica de razão $r = -\frac{1}{2}$. Série convergente

v.s.f.f.

Grupo II (4 valores): Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F).
Não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,5 valores.

		V	F
E	**1.** Se a função f, real de variável real, é tal que $f'(x) \leq 1$ e $f(0) = 0$, então $f(x) \leq x$.	●	○
	2. $\int f(x)\, dx = \frac{1}{x} \int (x\, f(x))\, dx$.	○	●
E	**3.** Se f é uma função, real de variável real, derivável em $[0, 10]$, então o comprimento da curva definida por f no intervalo $[0, 1]$ é menor do que o comprimento da curva definida por f no intervalo $[1, 10]$.	○	●
E	**4.** $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i}\right)$ é uma série harmónica.	○	●

Grupo III (4 valores): Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado a única afirmação verdadeira.
Não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

1. Se f é a função, real de variável real, definida em $[-1, 0]$ por $f(x) = x^3$, então

- ○ f' é crescente.
- ○ $\int f(x)\, dx$ é crescente.
- ● f'' é crescente.
- ○ Nenhuma das anteriores.

E **2.** Sejam f uma função, real de variável real, definida em $I = [2, 6]$ e $\mathcal{P}$ uma partição de I em 10 subintervalos com a mesma amplitude, então $\forall \widetilde{x}_i \in [x_i, x_{i+1}]$ (com $i = 0, \cdots, 9$),

- ○ $\int_2^6 f(x)\, dx \simeq \sum_{i=0}^{9} f(\widetilde{x}_i) \frac{1}{10}$.
- ● $\int_2^6 f(x)\, dx \simeq \sum_{i=0}^{9} f(\widetilde{x}_i) \frac{4}{10}$.
- ○ $\int_2^6 f(x)\, dx \simeq \sum_{i=0}^{9} f(\widetilde{x}_i) \frac{2}{10}$.
- ○ Nenhuma das anteriores.

3. Se $\int_0^2 f(x)\, dx = 3$, então

- ○ $\int_0^4 f(x)\, dx = 6$.
- ○ $\int_0^2 f(2x)\, dx = 6$.
- ● $\int_0^2 2f(x)\, dx = 6$.
- ○ Nenhuma dos anteriores.

E **4.** Sejam a_n e b_n os termos gerais de duas sucessões.

- ○ Se $0 \leq a_n \leq b_n$ e $\sum_{i \geq 1} a_n$ converge, então $\sum_{i \geq 1} b_n$ converge.
- ○ Se $b_n \leq a_n \leq 0$ e $\sum_{i \geq 1} a_n$ converge, então $\sum_{i \geq 1} b_n$ converge.
- ● Se $0 \leq a_n \leq b_n$ e $\sum_{i \geq 1} b_n$ converge, então $\sum_{i \geq 1} a_n$ converge.
- ○ Nenhuma das anteriores.

Fim da Parte 2 | Fim do Exame