Teórica 3

23 de junho de 2024 16:26

As funções seno, cossecante, cossena, secante, tangente e cotangente são funções não bijetivas; pelo que não possuem inversa.

Considerando restrições apropriadas destas funções, é, no entanto, possível definir as correspondentes funções inversas (dessas restrições).

ARCO-SENO

A restrição bijetiva "padrão" no caso da função seno, é

$$\text{sen}: \underbrace{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}_{\text{ângulo}} \longrightarrow \underbrace{[-1, 1]}_{\text{valor}}$$

$$x \longmapsto y = \text{sen}\, x$$

A inversa desta restrição, que se designa por arco-seno - entenda-se arco/ ângulo (cujo seno) - é a função

$$\text{arcsen}: \underbrace{[-1, 1]}_{\text{valor do sen}} \longrightarrow \underbrace{[-\pi/2, \pi/2]}_{\text{ângulo}}$$

$$y \longmapsto x = \text{arcsen}\, y$$

onde arcsen y se refere ao único ângulo do intervalo cujo seno é igual a y

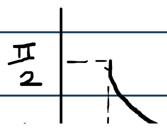
ARCO-COSSECANTE (inversa do inverso do seno)

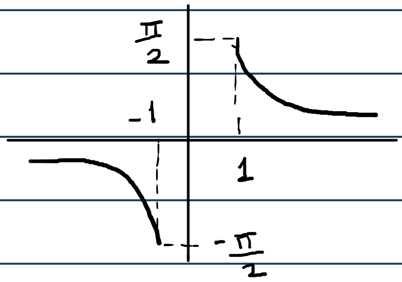
$$\text{cossec}: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \left]-1, 1\right[$$

$$x \longmapsto \text{cossec}\, x$$

$$\text{arcossec}: \mathbb{R} \setminus \left]-1, 1\right[\longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$$

$$y \longmapsto \text{arcossec}\, y$$



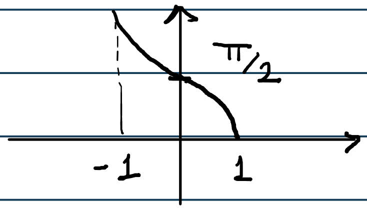


ARCO-COSSENO

$y = \arccos x$

$D = [-1, 1]$

$CD = [0, \pi]$

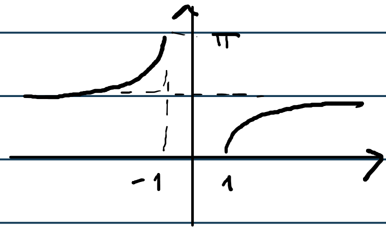


ARCO-SECANTE

$y = \text{arcsec}\, x$

$D = \mathbb{R} \setminus \,]-1, 1[$

$CD = [0, \pi] \setminus \{\pi/2\}$

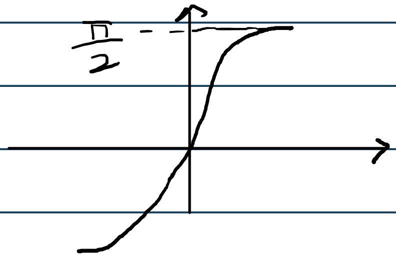


ARCO-TANGENTE

$y = \text{arctg}\, x$

$D = \mathbb{R}$

$CD = \,]-\pi/2, \pi/2[$

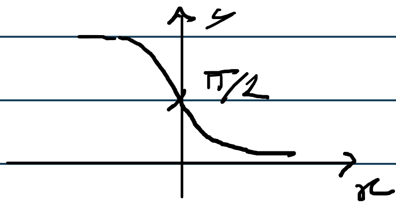


ARCO-COTANGENTE

$y = \text{arccotg}\, x$

$D = \mathbb{R}$

$CD = \,]0, \pi[$



$\arccos x + \arccos(-x) = \pi$

$\text{arcsen}\, x + \arccos(x) = \pi/2$

$\text{arctg}\,(-x) = \text{arctg}\, x$

...

PARTE II

↳ Funções Exponenciais

a^x, se $a > 1$ é crescente
se $a = 1$ é constante
se $0 < a < 1$ é decrescente

→ Função logarítmica

↳ Função inversa da função exponencial

Com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ tem-se

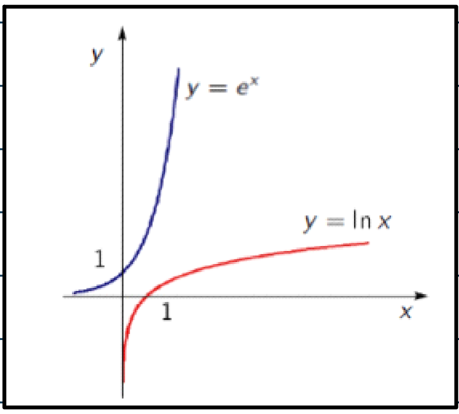
$$x = \log_a y \Leftrightarrow a^x = y, \quad \forall y \in]0, +\infty[$$
$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$\log_a (xz) = \log_a x + \log_a z$$
$$\log_a \frac{x}{z} = \log_a x - \log_a z$$

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$$

Nota: A função é exponencial natural quando a base da função exponencial é o número de Euler
O logaritmo natural de y, denotado por ln y, é a função inversa da função exponencial natural (de base e):

$$x = \ln y \Leftrightarrow e^x = y$$
$$\forall y \in]0, +\infty[, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



Funções Hiperbólicas Diretas

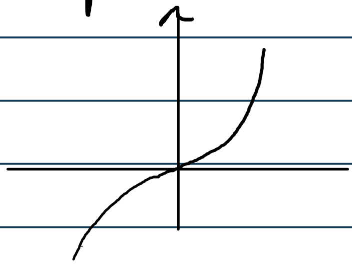
Seno hiperbólico

$$y = \operatorname{senh} x := \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$D = \mathbb{R}$

$CD = \mathbb{R}$

Ímpar



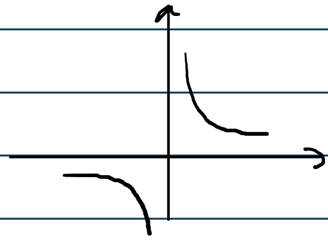
Cossecante hiperbólica

$$y = \operatorname{cosech} := \frac{2}{e^{x} - e^{-x}}$$

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$CD = \mathbb{R}$

Ímpar



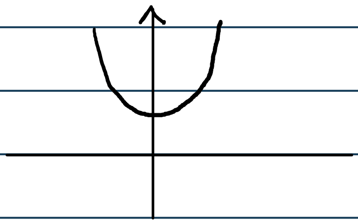
Cosseno hiperbólico

$$y = \cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$D = \mathbb{R}$

$CD = [1, +\infty[$

Par



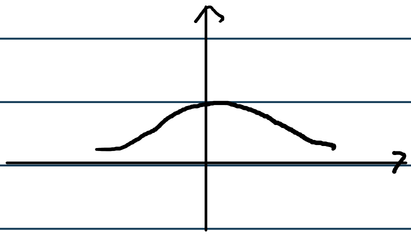
Secante hiperbólica

$$y = \operatorname{sech} = \frac{2}{e^{x} + e^{-x}}$$

$D = \mathbb{R}$

$CD =]0, 1]$

Par



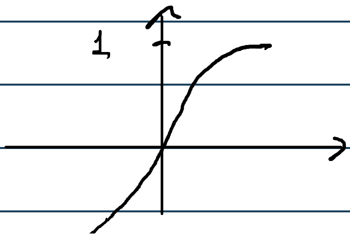
Tangente hiperbólica

$y = \operatorname{tgh} x$

$D = \mathbb{R}$

$CD =]-1, 1[$

Ímpar



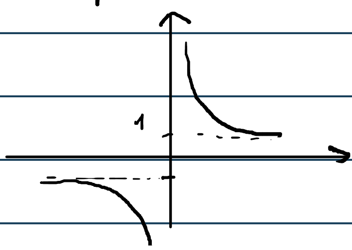
Cotangente hiperbólica

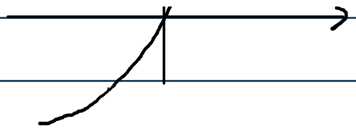
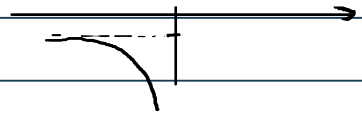
$y = \coth x$

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$CD = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$

Ímpar



- $\cosh x + \operatorname{senh} x = e^x$
- $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$
- $1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x$
- $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$
- $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$
- $\cosh^2 x = (\cosh 2x + 1)/2$
- $\operatorname{senh}^2 x = (\cosh 2x - 1)/2$

→ FUNÇÕES HIPERBÓLICAS INVERSAS

- Argumento do seno hiperbólico
- Argumento da cossecante hiperbólica
- Argumento do cosseno hiperbólico
- Argumento da secante hiperbólica
- Argumento da tangente hiperbólica
- Argumento da cotangente hiperbólica

$$y = \operatorname{senh} x$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \Leftrightarrow y = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^x}_{>0} = y \pm \sqrt{y^2+1}$$

$$\Rightarrow e^x = y + \sqrt{y^2+1}$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{argsenh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right), \forall y \in \mathbb{R}$$