udp Instituto de Ciencias Básicas
FACULTAD DE INGENIERÍA

Cálculo II

Ayudantía N°4 - Pauta

Primer Semestre 2017

1. Justifique la veracidad del siguiente enunciado:

Una empresa tiene como función de ingreso marginal a $I'(x) = 35 - 4x$ y función de costo marginal a $C'(x) = 5 - 2x$, donde $x$ es la cantidad de artículos vendidos, y las unidades monetarias están en millones de pesos [MM$]. Suponga que cuando no se venden artículos el ingreso total es cero y el costo total es 25[MM$] (por conceptos de gastos fijos). Recordando que la utilidad de una empresa es la diferencia entre los ingresos totales y los costos totales, entonces la cantidad de artículos a vender que maximizan las utilidades son 225 artículos.

Datos:

$$I'(x) = 35 - 4x$$
$$C'(x) = 5 - 2x$$
$$I(0) = 0$$
$$C(0) = 25$$

Calculando el ingreso:

$$I(x) = \int (35 - 4x)\, dx$$
$$I(x) = 35x - 2x^2 + C$$
$$I(0) = C$$
$$C = 0$$

Función ingreso total:

$$I(x) = 35x - 2x^2$$

Calculando costos:

$$C(x) = \int (5 - 2x)\, dx$$
$$C(x) = 5x - x^2 + C$$
$$C(0) = C$$
$$C = 25$$

Función costo total:

$$C(x) = 5x - x^2 + 25$$

........................................................................................................ **[1 punto]**

Utilidad:

$$\begin{aligned} U(x) &= I(x) - C(x) \\ U(x) &= 35x - 2x^2 - (5x - x^2 + 25) \\ U(x) &= 30x - x^2 - 25 \end{aligned}$$

Buscando la utilidad máxima: Utilidad:

$$\begin{aligned} U'(x) &= 30 - 6x \\ 30 - 2x &= 0 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

Las utilidades se maximizan para $x = 15$. En efecto, $U''(15) = -2$ lo cual es menor que cero. Así, vendiendo 15 articulos se maximizan las utilidades, no 225 artículos. Por lo tanto la afirmación es FALSA.

.................................................................................................... **[1 punto]**

2. Considere la función $f(x) = |\operatorname{sen}(x)|$ definida para $x \in [0, 2\pi]$, y la partición $P = \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}, 2\pi\right\}$.
Calcule la suma superior e inferior de $f$ sobre $P$.

$$\begin{aligned}
S_{inf} &= f(0) * (\frac{\pi}{4} - 0) + f(\frac{\pi}{4}) * (\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) + f(\frac{2\pi}{3}) * (\pi - \frac{2\pi}{3}) + f(\pi) * (\frac{3\pi}{2} - \pi) + f(\frac{3\pi}{2}) * (\frac{11\pi}{6} - \frac{3\pi}{2}) + f(\frac{11\pi}{6}) * (2\pi - \frac{11\pi}{6}) \\
&= 0 * (\frac{\pi}{4}) + \frac{\sqrt{2}}{2} * (\frac{5\pi}{12}) + \frac{\sqrt{3}}{2} * (\frac{\pi}{3}) + 0 * (\frac{\pi}{2}) + (1) * (\frac{\pi}{3}) + (\frac{1}{2}) * (\frac{\pi}{6}) \\
&= \frac{5\sqrt{2}\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{12}
\end{aligned}$$

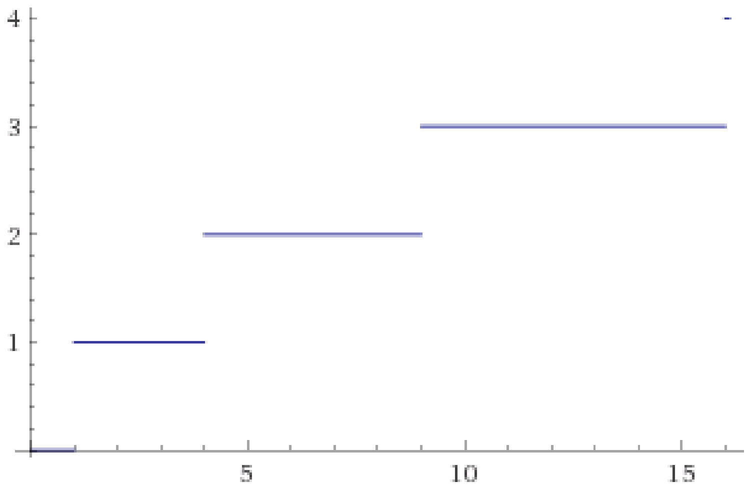
.......................................................................................... **[1 punto]**

$$\begin{aligned}
S_{sup} &= f(\frac{\pi}{4}) * (\frac{\pi}{4} - 0) + f(\frac{2\pi}{3}) * (\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) + f(\pi) * (\pi - \frac{2\pi}{3}) + f(\frac{3\pi}{2}) * (\frac{3\pi}{2} - \pi) + f(\frac{11\pi}{6}) * (\frac{11\pi}{6} - \frac{3\pi}{2}) + f(2\pi) * (2\pi - \frac{11\pi}{6}) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} * (\frac{\pi}{4}) + \frac{\sqrt{3}}{2} * (\frac{5\pi}{12}) + 0 * (\frac{\pi}{3}) + (1) * (\frac{\pi}{2}) + (\frac{1}{2}) * (\frac{\pi}{3}) + 0 * (\frac{\pi}{6}) \\
&= \frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{5\sqrt{3}\pi}{24} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

.......................................................................................... **[1 punto]**

3. Considere la función $f(x) = [\sqrt{x}]$, donde $[x]$ denota la parte entera de $x$.

*a)* Grafique la función para $x \in [0, 16]$




. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **[1 punto]**

*b)* Obtenga una partición regular P del intervalo $[0, 16]$ en 8 subintervalos.

$$\Delta x = \frac{(16-0)}{8}$$
$$\Delta x = 2$$

Con lo que encontramos la partición $P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **[1 punto]**

*c)* Calcule la suma superior e inferior de $f$ acotada a la partición P.

$$\begin{aligned} S_{inferior} &= f(0)*(2) + f(2)*(2) + f(4)*(2) + f(6)*(2) + f(8)*(2) + f(10)*(2) + f(12)*(2) + f(14)*(2) \\ &= 0*(2) + 1*(2) + 2*(2) + 2*(2) + 2*(2) + 3*(2) + 3*(2) + 3*(2) \\ &= 32 \end{aligned}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **[1 punto]**

$$\begin{aligned} S_{superior} &= f(2)*(2) + f(4)*(2) + f(6)*(2) + f(8)*(2) + f(10)*(2) + f(12)*(2) + f(14)*(2) + f(16)*(2) \\ &= 1*(2) + 2*(2) + 2*(2) + 2*(2) + 3*(2) + 3*(2) + 3*(2) + 4*(2) \\ &= 40 \end{aligned}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **[1 punto]**

4. Mediante sumas de Riemann, calcule el área bajo la curva $f(x) = 9 - x^2$ en el intervalo $[-3, 3]$

Utilizando las sumas de Riemann:

$$
\begin{aligned}
\int_{-3}^{3} (9 - x^2)\, dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{3-(-3)}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(9 - (-3 + i\frac{6}{n})^2\right) \quad \textbf{[1 punto]} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(9 - \left(9 - \frac{36i}{n} + \frac{36i^2}{n^2}\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n} \sum_{i=1}^{n} 36 \left(\frac{i}{n} + \frac{i^2}{n^2}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{216}{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i^2\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{216}{n} \left(\frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \quad \textbf{[1 punto]} \\
&= \lim_{n\to\infty} 216 \left(\frac{n+1}{2n} - \frac{2n^2+3n+1}{6n^2}\right) \\
&= 216 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \\
&= 36 \quad \textbf{[1 punto]}
\end{aligned}
$$

udp Instituto de Ciencias Básicas
FACULTAD DE INGENIERÍA

5. Mediante sumas de Riemann, calcule el área bajo la curva $f(x) = x^3$ en el intervalo $[0, 1/2]$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} x^3\,dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{2n}\right)^3 \quad \textbf{[1 punto]} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{8n^3} \sum_{i=1}^{n} i^3 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{16n^4} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad \textbf{[1 punto]} \\
&= \frac{1}{64} \quad \textbf{[1 punto]}
\end{aligned}$$