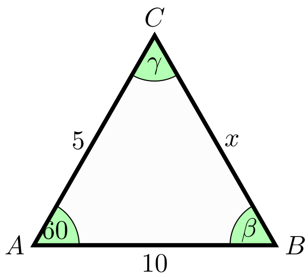
Álgebra y Geometría
Guía N°5 Ejercicios Resueltos
Primer Semestre 2017
Instituto de Ciencias Básicas

Cónicas 1

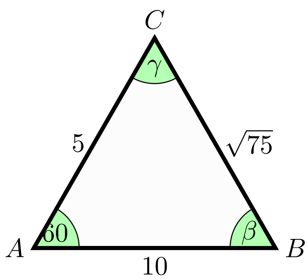
1. **Ejercicio:** Dos lados de un triangulo miden 5 y 10 centímetros, y el angulo que se forma entre ellos de 60°. Determine el perímetro y el área del triangulo.

Solución:



Utilizando el teorema del coseno tenemos que:

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2 * b * c * \cos(\alpha) \\
x^2 &= 5^2 + 10^2 - 2 * 5 * 10 \cos(60) \\
x^2 &= 25 + 100 - 100 * \frac{1}{2} \\
x^2 &= 25 + 100 - 50 \\
x^2 &= 75 \\
x &= \sqrt{75}
\end{aligned}$$



Ahora que conocemos los valores de todos los lados del triangulo utilizamos el Teorema de Seno para obtener los ángulos interiores que desconocemos.

$$\frac{\text{sen}(\alpha)}{a} = \frac{\text{sen}(\beta)}{b} = \frac{\text{sen}(\gamma)}{c}$$

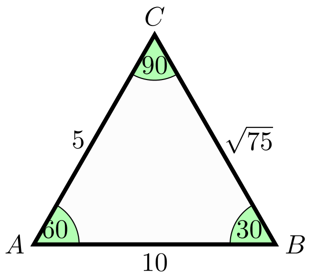
Buscamos β:

$$\frac{\text{sen}(60)}{\sqrt{75}} = \frac{\text{sen}(\beta)}{5}$$
$$5 * \text{sen}(60) = \sqrt{75} * \text{sen}(\beta)$$
$$\text{sen}(\beta) = \frac{5 * \frac{\sqrt{3}}{2}}{5\sqrt{3}}$$
$$\text{sen}(\beta) = \frac{1}{2}$$
$$\beta = 30$$

Buscamos γ:

$$\frac{\text{sen}(30)}{5} = \frac{\text{sen}(\gamma)}{10}$$
$$\text{sen}(\gamma) = \frac{10 * \frac{1}{2}}{5}$$
$$\text{sen}(\gamma) = 1$$
$$\gamma = 90$$

Obteniendo lo siguiente:



Por lo tanto su perímetro será:

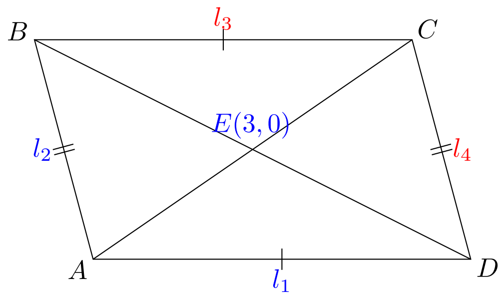
$$P = 5 + \sqrt{75} + 10$$
$$P = 15 + \sqrt{75}$$

Como es un triangulo rectángulo calculamos su área con la formula $A = \frac{base*altura}{2}$

$$A = \frac{\sqrt{75} * 5}{2}$$
$$A = \frac{5\sqrt{3} * 5}{2}$$
$$A = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

2. **Ejercicio:** Dos lados de un paralelógramo están dados por las ecuaciones $l_1 : x + 2y + 4 = 0$ y $l_2 : 5x + 3y - 1 = 0$.
Si el punto de intersección de sus diagonales es $E(3, 0)$ encuentre las ecuaciones de los otros lados del paralelógramo.

Solución:



Para resolver este ejercicio analizamos los datos que tenemos y cuales queremos obtener.
Datos: Recta l_1, recta l_2 y el punto medio de las diagonales.
Objetivo: Encontrar las rectas l_3 y l_4.

Como sabemos en un paralelógramo las caras opuestas tienen las mismas pendientes, en este caso $p_1 = p_3$ y $p_2 = p_3$.
Como primer paso obtendremos las pendientes de las rectas l_1 y l_2

$$\begin{aligned} x + 2y + 4 &= 0 \\ y &= -\frac{x}{2} - 2 \\ p_1 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x + 3y - 1 &= 0 \\ y &= -\frac{5x}{3} + \frac{1}{3} \\ p_2 &= -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

Para formar las rectas que estamos buscando demás de su pendiente necesitamos un punto que pertenezca a estas rectas. Para obtenerlo, primero buscamos el punto A intersectando las rectas l_1 y l_2. Luego obtendremos la distancia entre A y E, para luego utilizando la formula de distancia para encontrar el punto C.

Buscando A:

$$x + 2y + 4 = 0$$
$$5x + 3y - 1 = 0$$

$$5x + 10y + 20 = 0$$
$$5x + 3y - 1 = 0$$

$$7y + 21 = 0$$
$$y = -3$$

$$x + 2(-3) + 4 = 0$$
$$x = 2$$

Por lo tanto $A = (2, -3)$

Obtenemos la recta $\overline{AE}$:

$$(y - 0) = \frac{0+3}{3-2}(x - 3)$$
$$y = 3x - 9$$

Calculamos la distancia entre el punto $A = (2, -3)$ y $E = (3, 0)$

$$\begin{aligned} D(A, E) &= \sqrt{(3-2)^2 + (0+3)^2} \\ &= \sqrt{1+9} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

Para encontrar el punto C utilizamos la fórmula de distancia entre el punto E y el punto C, cuya distancia es la misma que la del segmento $\overline{AE}$.

$$\begin{aligned} D(E, C) &= \sqrt{(3-x)^2 + (0+y)^2} \\ \sqrt{10} &= \sqrt{(3-x)^2 + (0+y)^2} \\ 10 &= 9 - 6x + x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Ya que el punto que buscamos se encuentra en la misma recta que $\overline{AE}$, procedemos a reemplazar $y = 3x - 9$ para trabajar solo en una variable.

$$\begin{aligned} 10 &= 9 - 6x + x^2 + (3x-9)^2 \\ 10 &= 9 - 6x + x^2 + 9x^2 - 54x + 81 \\ 0 &= 10x^2 - 60x + 80 \\ 0 &= x^2 - 6x + 8 \\ 0 &= (x-4)(x-2) \end{aligned}$$

Por lo tanto $x = 4$ y $x = 2$, pero como ya conocemos A que es $(2, -3)$ solo utilizaremos $x = 4$ en la recta $y = 3x - 9$.

$$y = 3x - 9$$
$$y = 3(4) - 9$$
$$y = 3$$

Entonces $C = (4, 3)$

Finalmente buscaremos las rectas l_3 y l_4 utilizando $p_1 = p_3 = -\frac{1}{2}$, $p_2 = p_4 = -\frac{5}{3}$ y el punto $C = (4, 3)$.

Recta l_3 usando $p_3 = -\frac{1}{2}$ y el punto $C = (4, 3)$:

$$l_3 : y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 4)$$
$$l_3 : y = -\frac{x}{2} + 5$$

Recta l_4 usando $p_3 = -\frac{5}{3}$ y el punto $C = (4, 3)$:

$$l_4 : y - 3 = -\frac{5}{3}(x - 4)$$
$$l_4 : y = -\frac{5x}{3} + \frac{20}{3} + 3$$
$$l_4 : y = -\frac{5x}{3} + \frac{29}{3}$$

3. **Ejercicio:** Considere la ecuación $x^2 - 8x + y^2 - 6y + 20 = 0$ y el punto $P = (8, 1)$

   a) Determine el centro y el radio de la circunferencia.

   b) Encuentre la ecuación principal de la recta que pasa por el centro de la circunferencia y el punto P

   c) Halle los puntos de intersección entre la recta obtenida y la circunferencia dada.

Solución:

a) Encontramos el centro y radio de la circunferencia.

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + y^2 - 6y + 20 &= 0 \\ x^2 - 8x + 16 - 16 + y^2 - 6y + 9 - 9 + 20 &= 0 \\ x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 &= 5 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 &= 5 \end{aligned}$$

El centro de la circunferencia esta en el punto $(4, 3)$ y el radio es $\sqrt{5}$.

b) Recta que pasa por $P = (8, 1)$ y el centro de la circunferencia $(4, 3)$

$$\begin{aligned} (y-1) &= \frac{(1-3)}{(8-4)}(x-8) \\ y &= -\frac{x}{2} + 5 \end{aligned}$$

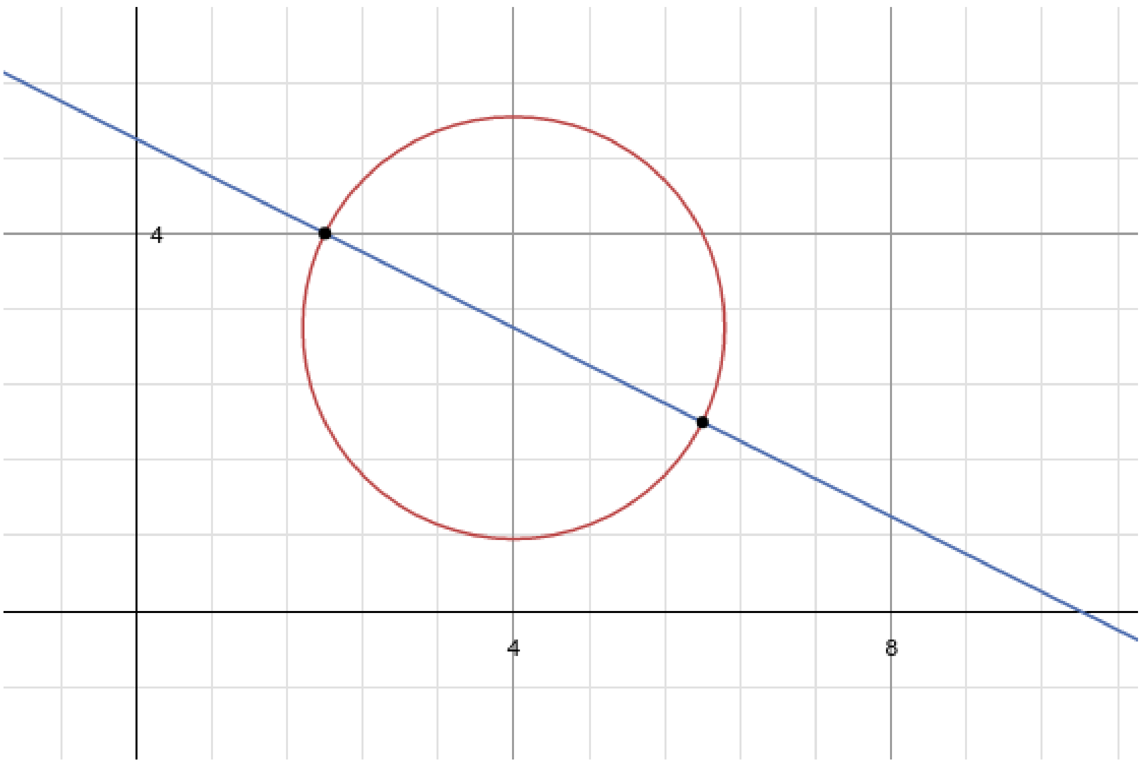


Figura 1: Gráfica de la circunferencia y la recta obtenida

c) Puntos de intersección entre la recta $y = -\frac{x}{2} + 5$ y la circunferencia $x^2 - 8x + y^2 - 6y + 20 = 0$
Para hacer un cálculo más simple utilizamos la función de la circunferencia factorizada $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 5$.

$$
\begin{aligned}
(x-4)^2 + (y-3)^2 &= 5 \\
(x-4)^2 + ((-\frac{x}{2} + 5) - 3)^2 &= 5 \\
(x-4)^2 + (-\frac{x}{2} + 2)^2 &= 5 \\
(x-4)^2 + (\frac{4-x}{2})^2 &= 5 \\
(x-4)^2 + \frac{(4-x)^2}{4} &= 5 \\
(x-4)^2 + \frac{(x-4)^2}{4} &= 5 \\
\frac{5(x-4)^2}{4} &= 5 \\
(x-4)^2 &= 4 \\
|x-4| &= 2
\end{aligned}
$$

Entonces $x = 6$ y $x = 2$.

Luego utilizando la recta $y = -\frac{x}{2} + 5$ encontramos los puntos.

$$P_1 = (6, 2)$$
$$P_2 = (2, 4)$$

4. **Ejercicio:** Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta $l_1 : x + y = 3$ en el punto $(2, 1)$ y cuyo centro se encuentra en la recta $3x - 2y - 6 = 0$

Solución:

Primero buscamos la recta perpendicular a $x + y = 3$ que también se puede escribir $y = -x + 3$.

$$m_1 = -1$$
$$m_1 * m_2 = -1$$
$$m_2 = 1$$

Hacemos la recta perpendicular con la pendiente $m_2 = 1$ y el punto $(2, 1)$.

$$y - 1 = (1)(x - 2)$$
$$y = x - 1$$

Luego, el centro de la circunferencia lo encontramos en la interceccion de las rectas $3x - 2y - 6 = 0$ y $y = x - 1$

$$3x - 2y - 6 = 0$$
$$y = x - 1$$

$$3x - 2(x - 1) - 6 = 0$$
$$3x - 2x + 2 - 6 = 0$$
$$x = 4$$

$$y = x - 1$$
$$y = 4 - 1$$
$$y = 3$$

El centro de la circunferencia se encuentra en el punto $(4, 3)$.

Para obtener el radio calculamos la distancia entre el punto $(4, 3)$ y $(2, 1)$

$$D = \sqrt{(3 - 1)^2 + (4 - 2)^2}$$
$$D = \sqrt{(2)^2 + (2)^2}$$
$$D = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Por lo tanto la ecuación de la circunferencia es:

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 8$$