udp Instituto de Ciencias Básicas
FACULTAD DE INGENIERÍA

Cálculo II

Ayudantía N°1 - Ejercicio N°1

Primer Semestre 2017

1. Calcule las siguientes integrales indefinidas mediante el método de sustitución.

a) $\displaystyle\int \sec(x)\tan(x)\sqrt{1+\sec(x)}\,dx$

b) $\displaystyle\int \sqrt[3]{(x^3+1)}\,x^5\,dx$

Solución:

a) $\displaystyle\int \sec(x)\tan(x)\sqrt{1+\sec(x)}\,dx$

Usando la siguiente sustitución:

$$u = 1+\sec(x)$$
$$du = \sec(x)\tan(x)dx$$

Obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+\sec(x)}\sec(x)\tan(x)\,dx &= \int \sqrt{u}\,du\\ &= \frac{2*u^{\frac{3}{2}}}{3}+C\\ &= \frac{2*(1+\sec(x))^{\frac{3}{2}}}{3}+C\end{aligned}$$

1 punto por desarrollar completa la a)

b) $\displaystyle\int \sqrt[3]{(x^3+1)}\,x^5\,dx$

Usando la siguiente sustitución:

$$u = x^3+1$$
$$du = 3x^2dx$$

Despejando x^3 obtenemos que: $x^3 = u-1$

$$\begin{aligned}\int \sqrt[3]{(x^3+1)}\,x^5\,dx &= \int \sqrt[3]{(x^3+1)}\,x^3 * x^2\,dx\\ &= \int \sqrt[3]{u}\,(u-1)\,\frac{du}{3}\end{aligned}$$

1 punto por llegar a la primitiva en función de u en la b)

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}\int (u^{\frac{4}{3}} - u^{\frac{1}{3}})\, du \\
&= \frac{1}{3}\int u^{\frac{4}{3}}\, du - \int u^{\frac{1}{3}}\, du \\
&= \frac{u^{\frac{7}{3}}}{7} - \frac{u^{\frac{4}{3}}}{4} + C \\
&= \frac{(x^3+1)^{\frac{7}{3}}}{7} - \frac{(x^3+1)^{\frac{4}{3}}}{4} + C
\end{aligned}
$$

1 punto por volver a la variable x

Otra manera de hacerlo:

Usando la siguiente sustitución:

$$
\begin{aligned}
u^3 &= x^3 + 1 \\
3u^2\, du &= 3x^2 dx
\end{aligned}
$$

Manipulamos un poco la sustitución para reemplazarla de manera más fácil.

$$
\begin{aligned}
x^3 &= u^3 - 1 \\
u^2\, du &= x^2 dx
\end{aligned}
$$

Obtenemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt[3]{(x^3+1)}\, x^5\, dx &= \int \sqrt[3]{(x^3+1)}\, x^3 * x^2\, dx \\
&= \int \sqrt[3]{u^3}\, (u^3 - 1)u^2\, du
\end{aligned}
$$

1 punto por llegar a la primitiva en función de u en la b)

$$
\begin{aligned}
&= \int u(u^3 - 1)u^2\, du \\
&= \int u^6\, du - \int u^3\, du \\
&= \frac{u^7}{7} - \frac{u^4}{4} + C \\
&= \frac{(x^3+1)^{\frac{7}{3}}}{7} - \frac{(x^3+1)^{\frac{4}{3}}}{4} + C
\end{aligned}
$$

1 punto por volver a la variable x