

*Álgebra y Geometría*  
*Guía N°2 Ejercicios Resueltos*  
*Primer Semestre 2017*  
*Instituto de Ciencias Básicas*

## Conjuntos

**Ejercicio:** Demuestre que  $A = B \iff A \cup B = A \cap B$

**Solución:**

$\implies$  Sea  $A = B$ . Entonces  $A \subseteq B$  y  $B \subseteq A$ .

Si  $A \subseteq B$  entonces  $A \cap B = A$  y  $A \cup B = B$ . Pero como  $A = B$ , entonces  $A \cap B = A \cup B$ .

Por otro lado, si  $B \subseteq A$  entonces  $A \cap B = B$  y  $A \cup B = A$ . Pero como  $A = B$ , entonces  $A \cap B = A \cup B$ .

Así,  $A = B \implies A \cup B = A \cap B$

$\impliedby$  Sea  $A \cup B = A \cap B$ .

Se sabe que  $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ . Pero como  $A \cup B = A \cap B$  se tiene que  $A \cap B = A = A \cup B$ .

Por otro lado, también se sabe que  $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$ . Pero como  $A \cup B = A \cap B$  se tiene que  $A \cap B = B = A \cup B$ .

Así,  $A \cup B = A \cap B \implies A = B$

**Ejercicio:** Usando Álgebra de conjuntos, pruebe que:

a)  $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

b)  $(A - B) \cup (A \cup B)^c \cup (B - A) = (B \cap A)^c$

**Solución:**

a)

$$\begin{aligned}(A - B) - C &= (A \cap B^c) \cap C^c \\ &= A \cap (B^c \cap C^c) \\ &= A \cap (B \cup C)^c \\ &= A - (B \cup C)\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 (A - B) \cup (A \cup B)^c \cup (B - A) &= (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \\
 &= [(A \cup A^c) \cap B^c] \cup (B \cap A^c) \\
 &= [U \cap B^c] \cup (B \cap A^c) \\
 &= B^c \cup (B \cap A^c) \\
 &= (B^c \cup B) \cap (B^c \cup A^c) \\
 &= U \cap (B^c \cup A^c) \\
 &= B^c \cup A^c \\
 &= (B \cap A)^c
 \end{aligned}$$

**Ejercicio:** Simplifique las expresiones de conjuntos:

a)  $(A \cap B) \cup (A - B)$

b)  $(A^c \cap B)^c \cup (B \cup A^c) \cup A$

c)  $[A - (A \cap B)] \cup [B - (A \cap B)] \cup (A \cap B)$

**Solución:**

a)

$$\begin{aligned}
 (A \cap B) \cup (A - B) &= (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \\
 &= A \cap (B \cup B^c) \\
 &= A \cap U \\
 &= A
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 (A^c \cap B)^c \cup (B \cup A^c) \cup A &= (A \cup B^c) \cup (B \cup A^c) \cup A \\
 &= A \cup B^c \cup B \cup A^c \cup A \\
 &= (A \cup A^c \cup A) \cup (B^c \cup B) \\
 &= U \cup U \\
 &= U
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 [A - (A \cap B)] \cup [B - (A \cap B)] \cup (A \cap B) &= [A \cap (A \cap B)^c] \cup [B \cap (A \cap B)^c] \cup (A \cap B) \\
 &= [A \cap (A^c \cup B^c)] \cup [B \cap (A^c \cup B^c)] \cup (A \cap B) \\
 &= [(A \cap A^c) \cup (A \cap B^c)] \cup [(B \cap A^c) \cup (B \cap B^c)] \cup (A \cap B) \\
 &= [\phi \cup (A \cap B^c)] \cup [(B \cap A^c) \cup \phi] \cup (A \cap B) \\
 &= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \cup (A \cap B) \\
 &= (A \cap B^c) \cup [B \cap (A^c \cup A)] \\
 &= (A \cap B^c) \cup [B \cap U] \\
 &= (A \cap B^c) \cup B \\
 &= (A \cup B) \cap (B^c \cup B) \\
 &= (A \cup B) \cap U \\
 &= A \cup B
 \end{aligned}$$

**Ejercicio:** Sean  $\#(A - B) = 18$ ,  $\#(A \cup B) = 70$  y  $\#(A \cap B) = 25$ . Calcule  $\#(B)$ .

**Solución:**

Se tiene que

$$\begin{aligned}
 \#(A \cup B) &= \#(A - B) + \#(A \cap B) + \#(B - A) \\
 70 &= 18 + 25 + \#(B - A) \\
 \#(B - A) &= 27
 \end{aligned}$$

y luego,

$$\begin{aligned}
 \#(B - A) &= \#(B) - \#(A \cap B) \\
 27 &= \#(B) - 25 \\
 \#(B) &= 52
 \end{aligned}$$

**Ejercicio:** Juan, en cada desayuno, come huevos o tocino (o ambos) durante un febrero en año bisiesto. Si come tocino 25 mañanas y huevos 18 mañanas, ¿cuántas mañanas come huevos con tocino?

**Solución:**

Sea  $H$  el conjunto de días que Juan come huevos al desayuno, y  $T$  el conjunto de días que Juan come tocino al desayuno.

Se tiene que  $\#(H) = 18$  y  $\#(T) = 25$ . También se tiene que  $\#(H \cup T) = 29$ , debido a que es la cantidad de días que tiene febrero en un año bisiesto. Luego,

$$\begin{aligned}
 \#(H \cup T) &= \#(H) + \#(T) - \#(H \cap T) \\
 29 &= 18 + 25 - \#(H \cap T) \\
 \#(H \cap T) &= 14
 \end{aligned}$$

Juan come huevos con tocino durante 14 días.

**Ejercicio:** En una competencia artística, donde participaron 80 personas, se entregaron medallas en diferentes categorías: baile, teatro y música.

Se tiene la siguiente información:

- 37 personas obtuvieron medalla en baile
- 33 personas obtuvieron medalla en teatro
- 14 personas obtuvieron medalla en baile y teatro
- 9 personas obtuvieron medalla en teatro y música
- 12 personas obtuvieron medalla en baile y música
- 58 personas obtuvieron medalla en teatro o música
- 7 personas no obtuvieron ninguna medalla

¿Cuántas personas recibieron medallas de todas las categorías?

**Solución:** Considere los conjuntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  como el número de personas que recibieron medallas en baile, teatro y música respectivamente.

Se tienen los siguientes datos:

$$\begin{aligned}\#(A) &= 37 & \#(A \cap B) &= 14 & \#(B \cup C) &= 58 \\ \#(B) &= 33 & \#(B \cap C) &= 9 & \#((A \cup B \cup C)^c) &= 7 \\ \#(U) &= 80 & \#(B \cap C) &= 12\end{aligned}$$

Primero se observa que

$$\begin{aligned}\#(A \cup B \cup C) &= \#(A) + \#(B) + \#(C) - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C) \\ \#(A \cup B \cup C) &= 37 + 33 + \#(C) - 14 - 12 - 9 + \#(A \cap B \cap C) \\ \#(A \cup B \cup C) &= 35 + \#(C) + \#(A \cap B \cap C) \\ \#(A \cap B \cap C) &= \#(A \cup B \cup C) - \#(C) - 35\end{aligned}$$

Por otro lado, se obtiene el valor de  $\#(C)$ :

$$\begin{aligned}\#(B \cup C) &= \#(B) + \#(C) - \#(B \cap C) \\ 58 &= 33 + \#(C) - 9 \\ \#(C) &= 34\end{aligned}$$

y el valor de  $\#(A \cup B \cup C)$ :

$$\begin{aligned}\#((A \cup B \cup C)^c) &= 7 \\ \#(U) - \#(A \cup B \cup C) &= 7 \\ 80 - \#(A \cup B \cup C) &= 7 \\ \#(A \cup B \cup C) &= 73\end{aligned}$$

Y así, reemplazando estos valores en la primera expresión deducida, se obtiene el valor de  $\#(A \cap B \cap C)$ :

$$\#(A \cap B \cap C) = 73 - 34 - 35$$

$$\#(A \cap B \cap C) = 4$$

Luego, 4 personas obtuvieron medallas de todas las categorías.