Cálculo II

Ayudantía N°1 - Ejercicio N°1

Primer Semestre 2017

1. Calcule las siguientes integrales indefinidas mediante el método de sustitución.

a) $\displaystyle\int \sec(x)\tan(x)\sqrt{1+\sec(x)}\,dx$

b) $\displaystyle\int \sqrt[3]{(x^3+1)}\,x^5\,dx$

Solución:

a) $\displaystyle\int \sec(x)\tan(x)\sqrt{1+\sec(x)}\,dx$

Usando la siguiente sustitución:

$$u = 1+\sec(x)$$
$$du = \sec(x)\tan(x)dx$$

Obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+\sec(x)}\sec(x)\tan(x)\,dx &= \int \sqrt{u}\,du\\ &= \frac{2*u^{\frac{3}{2}}}{3}+C\\ &= \frac{2*(1+\sec(x))^{\frac{3}{2}}}{3}+C\end{aligned}$$

b) $\displaystyle\int \sqrt[3]{(x^3+1)}\,x^5\,dx$

Usando la siguiente sustitución:

$$u = x^3+1$$
$$du = 3x^2dx$$

Despejando x^3 obtenemos que: $x^3 = u-1$

$$\begin{aligned}\int \sqrt[3]{(x^3+1)}\,x^5\,dx &= \int \sqrt[3]{(x^3+1)}\,x^3 * x^2\,dx\\ &= \int \sqrt[3]{u}\,(u-1)\,\frac{du}{3}\\ &= \frac{1}{3}\int (u^{\frac{4}{3}} - u^{\frac{1}{3}})\,du\\ &= \frac{1}{3}\int u^{\frac{4}{3}}\,du - \int u^{\frac{1}{3}}\,du\\ &= \frac{u^{\frac{7}{3}}}{7} - \frac{u^{\frac{4}{3}}}{4}+C\\ &= \frac{(x^3+1)^{\frac{7}{3}}}{7} - \frac{(x^3+1)^{\frac{4}{3}}}{4}+C\end{aligned}$$

Otra manera de hacerlo:

Usando la siguiente sustitución:

$$u^3 = x^3 + 1$$
$$3u^2\,du = 3x^2 dx$$

Manipulamos un poco la sustitución para reemplazarla de manera más fácil.

$$x^3 = u^3 - 1$$
$$u^2\,du = x^2 dx$$

Obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt[3]{(x^3+1)}\,x^5\,dx &= \int \sqrt[3]{(x^3+1)}\,x^3 * x^2\,dx \\
&= \int \sqrt[3]{u^3}\,(u^3-1)u^2\,du \\
&= \int u(u^3-1)u^2\,du \\
&= \int u^6\,du - \int u^3\,du \\
&= \frac{u^7}{7} - \frac{u^4}{4} + C \\
&= \frac{(x^3+1)^{\frac{7}{3}}}{7} - \frac{(x^3+1)^{\frac{4}{3}}}{4} + C
\end{aligned}$$