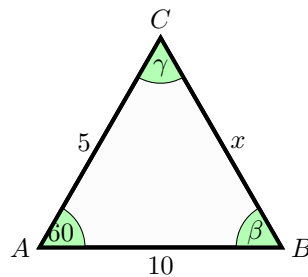


*Álgebra y Geometría*  
*Guía N°5 Ejercicios Resueltos*  
*Primer Semestre 2017*  
*Instituto de Ciencias Básicas*

## Cónicas 1

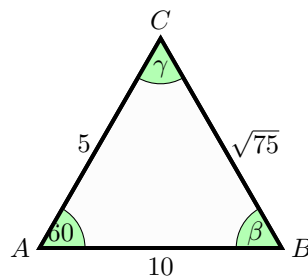
1. **Ejercicio:** Dos lados de un triángulo miden 5 y 10 centímetros, y el ángulo que se forma entre ellos de  $60^\circ$ . Determine el perímetro del área del triángulo.

**Solución:**



Utilizando el teorema del coseno tenemos que:

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2 * b * c * \cos(\alpha) \\x^2 &= 5^2 + 10^2 - 2 * 5 * 10 \cos(60) \\x^2 &= 25 + 100 - 100 * \frac{1}{2} \\x^2 &= 25 + 100 - 50 \\x^2 &= 75 \\x &= \sqrt{75}\end{aligned}$$



Ahora que conocemos los valores de todos los lados del triángulo utilizamos el Teorema de Seno para obtener los ángulos interiores que desconocemos.

$$\frac{\text{sen}(\alpha)}{a} = \frac{\text{sen}(\beta)}{b} = \frac{\text{sen}(\gamma)}{c}$$

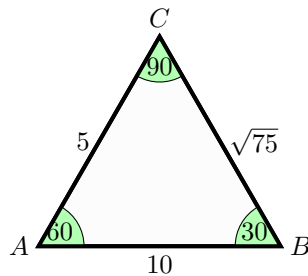
Buscamos  $\beta$ :

$$\begin{aligned}\frac{\text{sen}(60)}{\sqrt{75}} &= \frac{\text{sen}(\beta)}{5} \\ 5 * \text{sen}(60) &= \sqrt{75} * \text{sen}(\beta) \\ \text{sen}(\beta) &= \frac{5 * \frac{\sqrt{3}}{2}}{5\sqrt{3}} \\ \text{sen}(\beta) &= \frac{1}{2} \\ \beta &= 30\end{aligned}$$

Buscamos  $\gamma$ :

$$\begin{aligned}\frac{\text{sen}(30)}{5} &= \frac{\text{sen}(\gamma)}{10} \\ \text{sen}(\gamma) &= \frac{10 * \frac{1}{2}}{5} \\ \text{sen}(\gamma) &= 1 \\ \gamma &= 90\end{aligned}$$

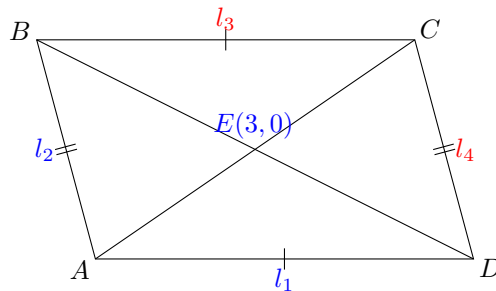
Finalmente obteniendo lo siguiente:



2. **Ejercicio:** Dos lados de un paralelogramo están dados por las ecuaciones  $l_1 : x + 2y + 4 = 0$  y  $l_2 : 5x + 3y - 1 = 0$ .

Si el punto de intersección de sus diagonales es  $E(3,0)$  encuentre las ecuaciones de los otros lados del paralelogramo.

**Solución:**



Para resolver este ejercicio analizamos los datos que tenemos y cuales queremos obtener.

**Datos:** Recta  $l_1$ , recta  $l_2$  y el punto medio de las diagonales.

**Objetivo:** Encontrar las rectas  $l_3$  y  $l_4$ .

Como sabemos en un paralelogramo las caras opuestas tienen las mismas pendientes, en este caso  $p_1 = p_3$  y  $p_2 = p_4$ .

Como primer paso obtendremos las pendientes de las rectas  $l_1$  y  $l_2$

$$x + 2y + 4 = 0$$

$$y = -\frac{x}{2} - 2$$

$$p_1 = -\frac{1}{2}$$

$$5x + 3y - 1 = 0$$

$$y = -\frac{5x}{3} + \frac{1}{3}$$

$$p_2 = -\frac{5}{3}$$

Para formar las rectas que estamos buscando además de su pendiente necesitamos un punto que pertenezca a estas rectas. Para obtenerlo, primero buscamos el punto A intersectando las rectas  $l_1$  y  $l_2$ . Luego obtendremos la distancia entre A y E, para luego utilizando la formula de distancia para encontrar el punto C.

Buscando A:

$$x + 2y + 4 = 0$$

$$5x + 3y - 1 = 0$$

$$5x + 10y + 20 = 0$$

$$5x + 3y - 1 = 0$$

$$7y + 21 = 0$$

$$y = -3$$

$$x + 2(-3) + 4 = 0$$

$$x = 2$$

Por lo tanto  $A = (2, -3)$

Obtenemos la recta  $\overline{AE}$ :

$$(y - 0) = \frac{0 + 3}{3 - 2}(x - 3)$$

$$y = 3x - 9$$

Calculamos la distancia entre el punto  $A = (2, -3)$  y  $E = (3, 0)$

$$\begin{aligned} D(A, E) &= \sqrt{(3 - 2)^2 + (0 + 3)^2} \\ &= \sqrt{1 + 9} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

Para encontrar el punto  $C$  utilizamos la fórmula de distancia entre el punto  $E$  y el punto  $C$ , cuya distancia es la misma que la del segmento  $\overline{AE}$ .

$$\begin{aligned} D(E, C) &= \sqrt{(3 - x)^2 + (0 + y)^2} \\ \sqrt{10} &= \sqrt{(3 - x)^2 + (0 + y)^2} \\ 10 &= 9 - 6x + x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Ya que el punto que buscamos se encuentra en la misma recta que  $\overline{AE}$ , procedemos a reemplazar  $y = 3x - 9$  para trabajar solo en una variable.

$$\begin{aligned} 10 &= 9 - 6x + x^2 + (3x - 9)^2 \\ 10 &= 9 - 6x + x^2 + 9x^2 - 54x + 81 \\ 0 &= 10x^2 - 60x + 80 \\ 0 &= x^2 - 6x + 8 \\ 0 &= (x - 4)(x - 2) \end{aligned}$$

Por lo tanto  $x = 4$  y  $x = 2$ , pero como ya conocemos  $A$  que es  $(2, -3)$  solo utilizaremos  $x = 4$  en la recta  $y = 3x - 9$ .

$$y = 3x - 9$$

$$y = 3(4) - 9$$

$$y = 3$$

Entonces  $C = (4, 3)$

Finalmente buscaremos las rectas  $l_3$  y  $l_4$  utilizando  $p_1 = p_3 = -\frac{1}{2}$ ,  $p_2 = p_4 = -\frac{5}{3}$  y el punto  $C = (4, 3)$ .

Recta  $l_3$  usando  $p_3 = -\frac{1}{2}$  y el punto  $C = (4, 3)$ :

$$\begin{aligned}l_3 : y - 3 &= -\frac{1}{2}(x - 4) \\l_3 : y &= -\frac{x}{2} + 5\end{aligned}$$

Recta  $l_4$  usando  $p_3 = -\frac{5}{3}$  y el punto  $C = (4, 3)$ :

$$\begin{aligned}l_4 : y - 3 &= -\frac{5}{3}(x - 4) \\l_4 : y &= -\frac{5x}{3} + \frac{20}{3} + 3 \\l_4 : y &= -\frac{5x}{3} + \frac{29}{3}\end{aligned}$$

3. **Ejercicio:** Considere la ecuación  $x^2 - 8x + y^2 - 6y + 20 = 0$  y el punto  $P = (8, 1)$

- a) Determine el centro y el radio de la circunferencia.
- b) Encuentre la ecuación principal de la recta que pasa por el centro de la circunferencia y el punto  $P$
- c) Halle los puntos de intersección entre la recta obtenida y la circunferencia dada.

**Solución:**

- a) Encontramos el centro y radio de la circunferencia.

$$\begin{aligned}x^2 - 8x + y^2 - 6y + 20 &= 0 \\x^2 - 8x + 16 - 16 + y^2 - 6y + 9 - 9 + 20 &= 0 \\x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 &= 5 \\(x - 4)^2 + (y - 3)^2 &= 5\end{aligned}$$

El centro de la circunferencia esta en el punto  $(4, 3)$  y el radio es  $\sqrt{5}$ .

- b) Recta que pasa por  $P = (8, 1)$  y el centro de la circunferencia  $(4, 3)$

$$\begin{aligned}(y - 1) &= \frac{(1 - 3)}{(8 - 4)}(x - 8) \\y &= -\frac{x}{2} + 5\end{aligned}$$

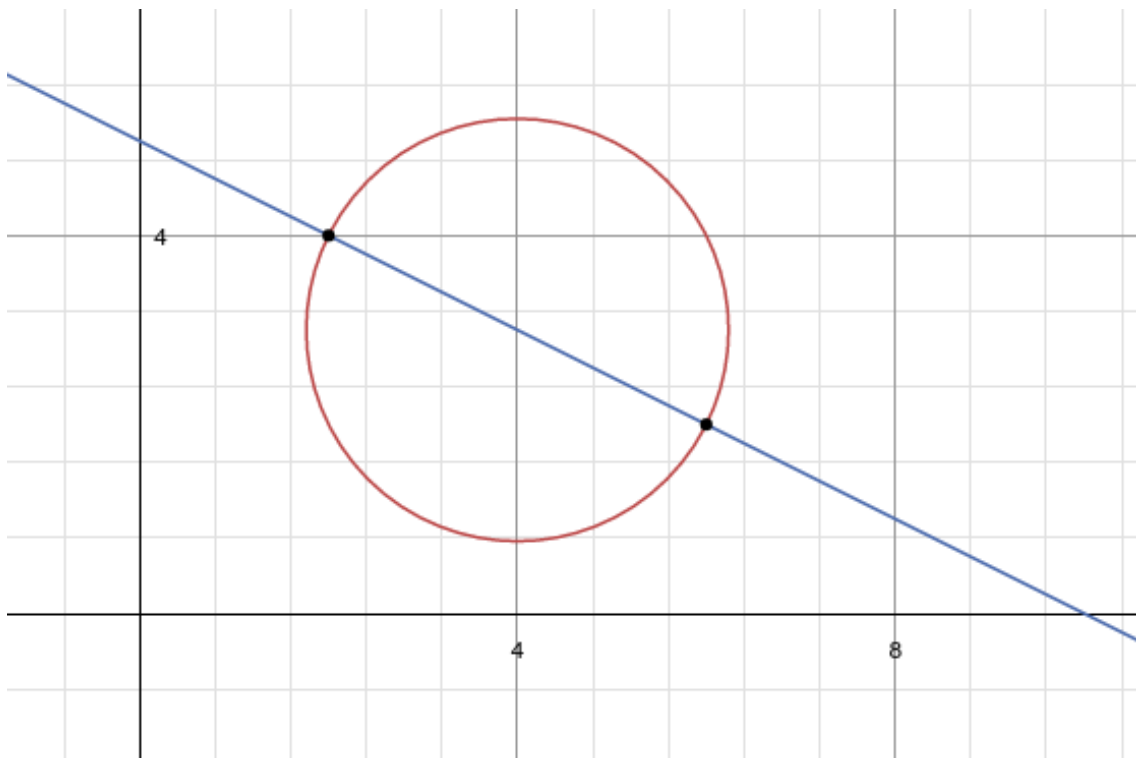


Figura 1: Gráfica de la circunferencia y la recta obtenida

c) Puntos de intersección entre la recta  $y = -\frac{x}{2} + 5$  y la circunferencia  $x^2 - 8x + y^2 - 6y + 20 = 0$

Para hacer un cálculo más simple utilizamos la función de la circunferencia factorizada  $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5$ .

$$\begin{aligned}(x - 4)^2 + (y - 3)^2 &= 5 \\(x - 4)^2 + \left(-\frac{x}{2} + 5 - 3\right)^2 &= 5 \\(x - 4)^2 + \left(-\frac{x}{2} + 2\right)^2 &= 5 \\(x - 4)^2 + \left(\frac{4 - x}{2}\right)^2 &= 5 \\(x - 4)^2 + \frac{(4 - x)^2}{4} &= 5 \\(x - 4)^2 + \frac{(x - 4)^2}{4} &= 5 \\\frac{5(x - 4)^2}{4} &= 5 \\(x - 4)^2 &= 4 \\|x - 4| &= 2\end{aligned}$$

Entonces  $x = 6$  y  $x = 2$ .

Luego utilizando la recta  $y = -\frac{x}{2} + 5$  encontramos los puntos.

$$P_1 = (6, 2)$$

$$P_2 = (2, 4)$$

4. **Ejercicio:** Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta  $l_1 : x + y = 3$  en el punto  $(2, 1)$  y cuyo centro se encuentra en la recta  $3x - 2y - 6 = 0$

**Solución:**

Primero buscamos la recta perpendicular a  $x + y = 3$  que también se puede escribir  $y = -x + 3$ .

$$m_1 = -1$$

$$m_1 * m_2 = -1$$

$$m_2 = 1$$

Hacemos la recta perpendicular con la pendiente  $m_2 = 1$  y el punto  $(2, 1)$ .

$$y - 1 = (1)(x - 2)$$

$$y = x - 1$$

Luego, el centro de la circunferencia lo encontramos en la intersección de las rectas  $3x - 2y - 6 = 0$  y  $y = x - 1$

$$3x - 2y - 6 = 0$$

$$y = x - 1$$

$$3x - 2(x - 1) - 6 = 0$$

$$3x - 2x + 2 - 6 = 0$$

$$x = 4$$

$$y = x - 1$$

$$y = 4 - 1$$

$$y = 3$$

El centro de la circunferencia se encuentra en el punto  $(4, 3)$ .

Para obtener el radio calculamos la distancia entre el punto  $(4, 3)$  y  $(2, 1)$

$$D = \sqrt{(3 - 1)^2 + (4 - 2)^2}$$

$$D = \sqrt{(2)^2 + (2)^2}$$

$$D = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$



Por lo tanto la ecuación de la circunferencia es:

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 8$$