udp Instituto de Ciencias Básicas
FACULTAD DE INGENIERÍA

Cálculo II

Ayudantía N°6 - Pauta

Primer Semestre 2017

1. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifique su respuesta:

   a) Si h es una función continua y f, g son derivables, entonces para la función:

   $$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\,dt$$

   Se tiene que $F'(x) = h(g(x))g'(x) - h(f(x))g'(x)$

   Aplicando el teorema fundamental del cálculo a $F(x)$ se obtiene lo siguiente:

   $$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\,dt$$
   $$F'(x) = h(g(x))g'(x) - h(f(x))f'(x)$$

   Por lo tanto la afirmación es FALSA.

   .... **[1 punto]**

   b) Si $f(x)$ es una función continua y positiva entonces:

   $$F(x) = \frac{\int_0^x t * f(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt}$$

   Es creciente para $x \geq 0$

   $$\begin{aligned} F(x) &= \frac{\int_0^x t * f(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt} \\ F'(x) &= \frac{x * f(x)\int_0^x f(t)\,dt - f(x)\int_0^x t * f(t)\,dt}{(\int_0^x f(t)\,dt)^2} \\ &= \frac{f(x)(x\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x t * f(t)\,dt)}{(\int_0^x f(t)\,dt)^2} \\ &= \frac{f(x)(\int_0^x xf(t)\,dt - \int_0^x t * f(t)\,dt)}{(\int_0^x f(t)\,dt)^2} \\ &= \frac{f(x)(\int_0^x (x-t)f(t)\,dt)}{(\int_0^x f(t)\,dt)^2} \geq 0, \forall x \geq 0 \end{aligned}$$

   Notar que $\displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,dt$ es positivo ya que $0 \leq t \leq x$ y $f(t) > 0$.

   Por lo tanto la afirmación es VERDADERA.

   .... **[1 punto]**

c) Si f es continua y $\int_0^4 f(x)\,dx = 40$, entonces $\int_0^2 f(2x)\,dx = 5$

Utilizando la sustitución $u = 2x$ y $du = 2dx$

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(2x)\,dx &= \frac{\int_0^4 f(u)}{2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^4 f(u)\,du \\ &= \frac{1}{2} * 40 = 20\end{aligned}$$

Por lo tanto la afirmación es <u>FALSA</u>.

.... **[1 punto]**

2. Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x (1+\operatorname{sen} 2t)^{\frac{1}{t}}\,dt$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x (1+\operatorname{sen} 2t)^{\frac{1}{t}}\,dt &= \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (1+\operatorname{sen} 2t)^{\frac{1}{t}}\,dt}{x} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{(1+\operatorname{sen} 2x)^{\frac{1}{x}}}{1} \\ &= \lim_{x\to 0} (1+\operatorname{sen} 2x)^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to 0} (1+\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}2x)^{\frac{1}{x}} \\ &= e^2\end{aligned}$$

El valor obtenido proviene del hecho que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} = 1$ y $\lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} = e^2$

.... **[1 punto]**

3. Si f es continua y $\int_0^9 f(x)dx = 4$, encuentre $\int_0^3 xf(x^2)dx$

   Utilizando la sustitución $u = x^2$ y $du = 2x\,dx$ obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int_0^3 xf(x^2)dx &= \int_0^9 f(u)\frac{du}{2}\\ &= \frac{1}{2}\int_0^9 f(u)\,du\\ &= \frac{1}{2} * 4 = 2\end{aligned}$$

.... **[1 punto]**

4. Calcule la siguiente integral definida: $\int_0^{\pi/6} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos^2(2x)}\,dx$

   Utilizando la sustitución $u = \cos(2x)$ y $du = -2\operatorname{sen}(2x)\,dx$ obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/6} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos^2(2x)}\,dx &= -\frac{1}{2}\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u^2}\\ &= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{du}{u^2}\\ &= -\frac{1}{2}\left.\frac{1}{u}\right|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

.... **[1 punto]**

5. Calcule la siguiente integral definida: $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{6}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

   Utilizando la sustitución $t = \operatorname{sen}(x)$ y $dt = \cos(x)\,dx$ obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{6}{\sqrt{1-t^2}}\,dt &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{6}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}}\,\cos x\,dx\\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} 6\,dx\\ &= 6x|_{\pi/6}^{\pi/3} = \pi\end{aligned}$$

.... **[1 punto]**