udp Instituto de Ciencias Básicas
FACULTAD DE INGENIERÍA

Cálculo II
Ayudantía N°7 - Pauta
Primer Semestre 2017

1. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifique su respuesta:

   a) El valor de $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx$, para $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & si \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & si \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$ es 2π

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(x)dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x)dx \\ &= -\cos(x)\big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \operatorname{sen}(x)\big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= -(0-1) + (0-1) = 0 \\ 0 &\neq 2\pi \end{aligned}$$

   Por lo tanto la afirmación en <u>FALSA</u>.

   b) El área limitada por las curvas $y = \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$; $x = 0$; $x = 2$; $y = 0$ es 1.

   Debemos calcular la siguiente integral $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}dx$.

   Para esto aplicamos la sustitución $u = 2x^2 + 1$ y $du = 4xdx$ obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}dx &= \frac{1}{4}\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{u}}du \\ &= \frac{2}{4}\sqrt{u}\big|_1^9 \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

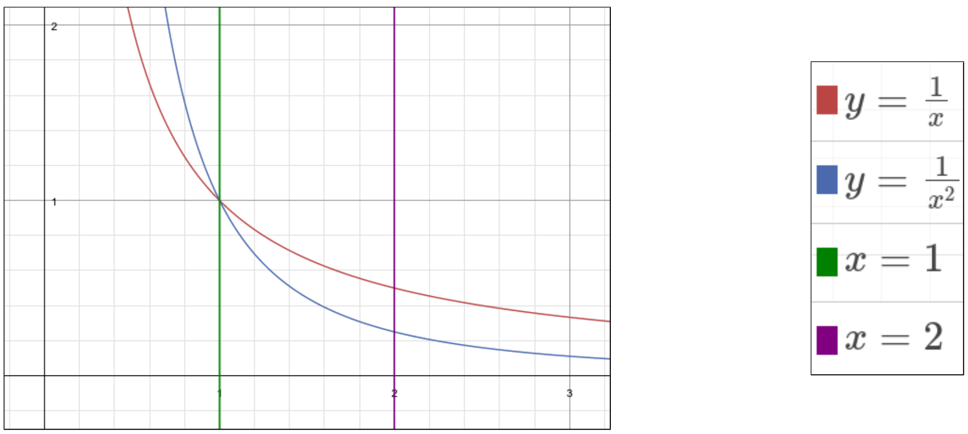
   Por lo tanto la afirmación en <u>VERDADERA</u>.

c) El valor de $c \in R$, tal que el área acotada por $y = x^2 + c$; $x = 0$; $x = 3$; $y = 0$ sea 12, es $c = 1$.

$$\begin{aligned}\int_0^3 (x^2+1)dx &= (\frac{x^3}{3}+x)\Big|_0^3 \\ &= 9+3 \\ &= 12\end{aligned}$$

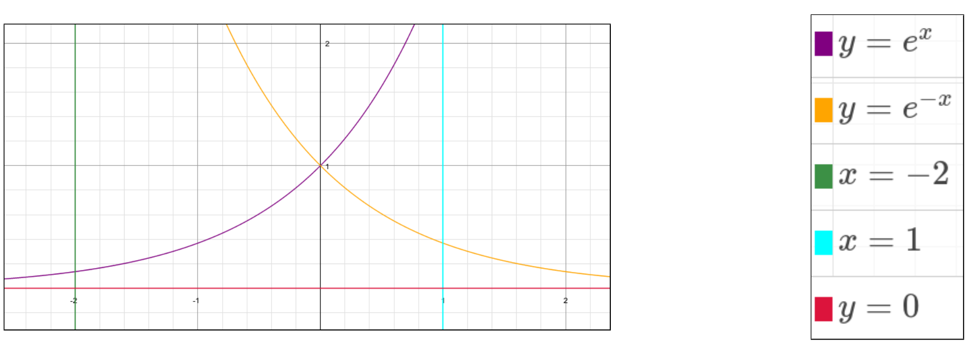
Por lo tanto la afirmación en <u>VERDADERA</u>.

2. Grafique la región limitada por las curvas y calcule su área
   $y = \dfrac{1}{x} \quad ; \; y = \dfrac{1}{x^2} \quad ; \; x = 1 \quad ; \; x = 2$



$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx = \left(\ln(x) + \frac{1}{x}\right)\Big|_1^2$$
$$= \ln 2 + \frac{1}{2} - (\ln 1 + 1)$$
$$= \ln 2 - \frac{1}{2}$$

3. Grafique la región limitada por las curvas y calcule su área
   $y = \mathrm{e}^{x} \quad ; \; y = \mathrm{e}^{-x} \quad ; \; x = -2 \quad ; \; x = 1 \quad ; \; y = 0$



$$\int_{-2}^0 e^{-x}dx + \int_0^1 e^x dx = -\,e^{-x}\big|_{-2}^0 + e^x\big|_0^1$$
$$= -1 + e^2 + e - 1$$
$$= e^2 + e - 2$$

4. Calcule el área de la región limitada por la curva $y = x^4 - 2x^3 + x^2 + 3$, el eje X y las rectas $x = a$; $x = b$ donde a y b son las abscisas de los puntos mínimos de la función.

Calculamos los mínimos de la función $y = x^4 - 2x^3 + x^2 + 3$:

$$\begin{aligned} y &= x^4 - 2x^3 + x^2 + 3 \\ y' &= 4x^3 - 6x^2 + 2x = 0 \\ 0 &= 4x(x-1)()x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Los candidatos máximo o mínimo son $0, \frac{1}{2} y 1$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 12x^2 - 12x + 2 \\ f''(0) &= 12x^2 - 12x + 2 = 2 \\ f''(\frac{1}{2}) &= 12x^2 - 12x + 2 = -1 \\ f''(1) &= 12x^2 - 12x + 2 = 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto los mínimos ocurren cuando $x = 0, 1$, luego calculamos la región solicitada.

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2 + 3)dx &= (\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} + 3x)\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 3 \\ &= \frac{91}{30} \end{aligned}$$

5. Calcule el área de la región limitada por la parábola $y = x^2 - 2x + 2$, su tangente en el punto $(3, 5)$ y el eje Y.

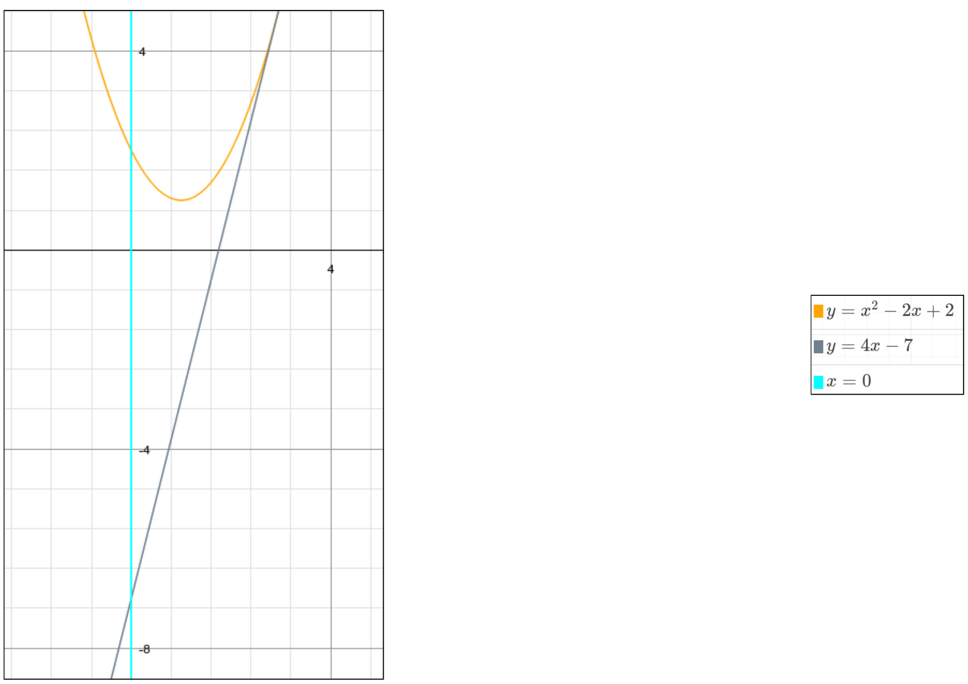
Primero calculamos la pendiente que toma la recta en el punto $(3, 5)$ derivando la función $y = x^2 - 2x + 2$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x + 2 \\ f'(x) &= 2x - 2 \\ f'(3) &= 4 \end{aligned}$$

Formamos la recta con la pendiente obtenida y el punto $(3, 5)$.

$$\begin{aligned} (y - 5) &= 4(x - 3) \\ y &= 4x - 7 \end{aligned}$$

Como referencia graficamos las funciones:



Finalmente calculamos la integral

$$\begin{aligned}\int_0^3 ((x^2-2x+2)-(4x-7))dx &= \int_0^3 (x^2-6x+9)dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3}+\frac{6x^2}{2}+9x)\right|_0^3 \\ &= 9-27+27=9\end{aligned}$$