udp Instituto de Ciencias Básicas
FACULTAD DE INGENIERÍA

Cálculo II
Ayudantía N°2 - Pauta
Primer Semestre 2017

1. Calcule las siguientes integrales de funciones trigonométricas.

   a) $\int x \operatorname{sen}^3(x^2)\, dx$

   Utilizamos la siguiente sustitución:

$$u = x^2$$
$$du = 2x\, dx \qquad\qquad x\, dx = \frac{du}{2}$$

.... [1 punto]

Obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sen}^3(u)}{2}\, du &= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(u)(1-\cos^2(u))\, du \\
&= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(u)\, du - \frac{1}{2}\int \cos^2(u)\operatorname{sen}(u)\, du \\
&= -\frac{1}{2}\cos(u) + \frac{1}{2}\frac{\cos^3(u)}{3} + C \\
&= -\frac{1}{2}\cos(x^2) + \frac{1}{6}\cos^3(x^2) + C
\end{aligned}$$

.... [1 punto]

b) $\displaystyle\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx &= \int \frac{(1-\operatorname{sen} x)}{\cos x}\frac{(1+\operatorname{sen} x)}{(1+\operatorname{sen} x)}\,dx\\
&= \int \frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)}{\cos x(1+\operatorname{sen} x)}\,dx\\
&= \int \frac{\cos^2 x}{\cos x(1+\operatorname{sen} x)}\,dx\\
&= \int \frac{\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)}\,dx
\end{aligned}$$

Utilizamos la siguiente sustitución:

$$\begin{aligned}
u &= 1+\operatorname{sen}(x)\\
du &= \cos(x)\,dx
\end{aligned}$$

. . . . [1 punto]

Obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx &= \int \frac{1}{u}\,du\\
&= \ln(u)+C\\
&= \ln(1+\operatorname{sen}(x))+C
\end{aligned}$$

. . . . [1 punto]

2. Calcule las siguientes integrales de funciones trigonométricas.

   a) $\int \cot^5 x \operatorname{sen}^2 x \, dx$

$$\begin{aligned}\int \cot^5 x \operatorname{sen}^2 x \, dx &= \int \frac{\cos^5 x}{\operatorname{sen}^5 x} \operatorname{sen}^2 x \, dx \\ &= \int \frac{\cos^5 x}{\operatorname{sen}^3 x} \, dx \\ &= \int \frac{\cos x (1-\operatorname{sen}^2 x)^2}{\operatorname{sen}^3 x} \, dx\end{aligned}$$

Utilizamos la siguiente sustitución:

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{sen}(x) \\ du &= \cos(x) \, dx \end{aligned}$$

. . . . [1 punto]

Obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int \frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)^2}{\operatorname{sen}^3 x} \cos x \, dx &= \int \frac{(1-u^2)^2}{u^3} \, du \\ &= \int \frac{(1-2u^2+u^4)}{u^3} \, du \\ &= \int \frac{1}{u^3} \, dx - 2\int \frac{u^2}{u^3} \, dx + \int \frac{u^4}{u^3} \, dx \\ &= \int \frac{1}{u^3} \, dx - 2\int \frac{1}{u} \, dx + \int u \, dx \\ &= -\frac{1}{2u^2} - 2\ln(u) + \frac{1}{2}u^2 + C \\ &= -\frac{1}{2(\operatorname{sen}(x))^2} - 2\ln(\operatorname{sen}(x)) + \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(x))^2 + C\end{aligned}$$

. . . . [1 punto]

b) $\int \cot^4 x \csc^4 x \, dx$

$$\begin{aligned}
\int \cot^4 x \csc^4 x \, dx &= \int \cot^4 x \csc^2 x (1 + \cot^2 x) \, dx \\
&= \int \cot^4 x \csc^2 x \, dx + \int \cot^6 x \csc^2 x \, dx
\end{aligned}$$

Utilizamos la siguiente sustitución:

$$\begin{aligned}
u &= \cot(x) \\
du &= -\csc^2(x) \, dx \qquad\qquad \csc^2(x) = -du
\end{aligned}$$

.... [1 punto]

Obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\int \cot^4 x \csc^2 x \, dx + \int \cot^6 x \csc^2 x \, dx &= -\int u^4 \, du - \int u^6 \, du \\
&= -\frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + C \\
&= -\frac{(\cot(x))^5}{5} - \frac{(\cot(x))^7}{7} + C
\end{aligned}$$

.... [1 punto]

3. Calcule las siguientes integrales de funciones trigonométricas.

   a) $\int \operatorname{sen}^3 x\sqrt{\cos x}\,dx$

$$\int \operatorname{sen}^3 x\sqrt{\cos x}\,dx = \int (1-\cos^2 x)\sqrt{\cos x}\,\operatorname{sen} x\,dx$$

Utilizamos la siguiente sustitución:

$$\begin{aligned} u &= \cos(x) \\ du &= -\operatorname{sen}(x)\,dx \end{aligned}$$

. . . . [1 punto]

Obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int (1-\cos^2 x)\sqrt{\cos x}\,\operatorname{sen} x\,dx &= -\int (1-u^2)\sqrt{u}\,du \\ &= -\int u^{\frac{1}{2}}\,du + \int u^{\frac{5}{2}}\,du \\ &= -\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + C \\ &= -\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} + C \\ &= -\frac{2}{3}(\cos x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7}(\cos x)^{\frac{7}{2}} + C \end{aligned}$$

. . . . [1 punto]

b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(5x)\operatorname{sen}(2x)\,dx$

Utilizando la siguiente identidad:

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{\cos(A-B)-\cos(A+B)}{2}$$

reescribimos el integrando como $\operatorname{sen}(5x)\operatorname{sen}(2x) = \dfrac{\cos(3x)-\cos(7x)}{2}$

. . . . [1 punto]

Así, Oobtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}(5x)\operatorname{sen}(2x)\,dx &= \int \frac{\cos(3x)-\cos(7x)}{2}\,dx\\ &= \int \frac{\cos(3x)}{2}\,dx - \int \frac{\cos(7x)}{2}\,dx\\ &= \frac{\operatorname{sen}(3x)}{6} - \frac{\operatorname{sen}(7x)}{14} + C\end{aligned}$$

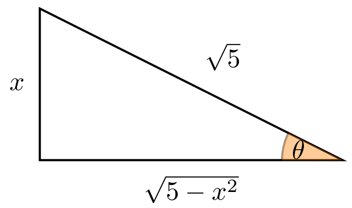
. . . . [1 punto]

4. Calcule las siguientes integrales usando sustitución trigonométrica.

   a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{5-x^2}}\,dx$

   Utilizamos la siguiente sustitución trigonométrica:

$$x = \sqrt{5}\operatorname{sen}\theta$$
$$dx = \sqrt{5}\cos\theta\,d\theta$$



   Obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{5-x^2}}\,dx &= \int \frac{5\operatorname{sen}^2\theta}{\sqrt{5}\cos\theta}\sqrt{5}\cos\theta\,d\theta\\ &= 5\int \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta\end{aligned}$$

   .... [1 punto]

   Recordando que:

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

   entonces obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}5\int \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta &= \frac{5}{2}\int (1-\cos 2\theta)\,d\theta\\ &= \frac{5}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta\right) + C\\ &= \frac{5}{2}\left(\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta\ \right) + C\\ &= \frac{5}{2}\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}} - \frac{x}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{5}}\right) + C\\ &= \frac{5}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}} - \frac{x\sqrt{5-x^2}}{2} + C\end{aligned}$$

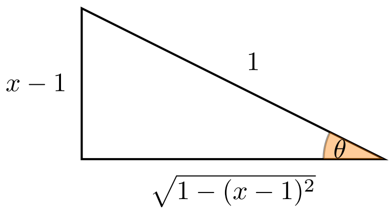
   .... [1 punto]

b) $\displaystyle\int \sqrt{2x - x^2}\, dx$

$$\int \sqrt{2x - x^2}\, dx = \int \sqrt{1 - (x-1)^2}\, dx$$

Utilizamos la siguiente sustitución trigonométrica:

$$x - 1 = \operatorname{sen}\theta$$
$$dx = \cos\theta\, d\theta$$



Obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-(x-1)^2}\, dx &= \int \cos\theta \cdot \cos\theta\, d\theta \\
&= \int \cos^2\theta\, d\theta
\end{aligned}$$

. . . . [1 punto]

Recordando que:

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

entonces obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\int \cos^2\theta\, d\theta &= \frac{1}{2}\int (1 + \cos(2\theta))\, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\theta)\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\left(\theta + \cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\left(\arcsin(x-1) + \sqrt{2x - x^2}(x-1)\right) + C
\end{aligned}$$

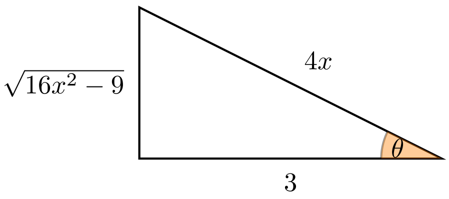
. . . . [1 punto]

5. Calcule las siguientes integrales usando sustitución trigonométrica.

   a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16x^2-9}}$

   Utilizamos la siguiente sustitución trigonométrica:

$$x = \frac{3}{4}\sec\theta$$
$$dx = \frac{3}{4}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$



. . . . [1 punto]

Obtenemos lo siguiente:

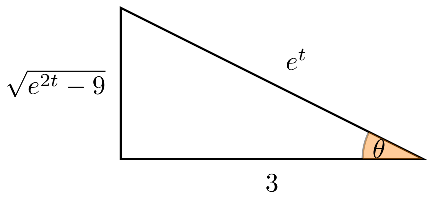
$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2\sqrt{16x^2-9}}\,dx &= \int \frac{1}{(\frac{3}{4}\sec\theta)^2\,(3\tan\theta)}\,\frac{3}{4}\sec\theta\tan\theta\,d\theta \\
&= \frac{4}{9}\int \cos\theta\,d\theta \\
&= \frac{4}{9}\operatorname{sen}\theta + C \\
&= \frac{4}{9}\,\frac{\sqrt{16x^2-9}}{4x} + C \\
&= \frac{\sqrt{16x^2-9}}{9x} + C
\end{aligned}$$

. . . . [1 punto]

b) $\displaystyle\int \sqrt{\mathrm{e}^{2t} - 9}\, dt$

Utilizamos la siguiente sustitución trigonométrica:

$$\begin{aligned} e^t &= 3\sec\theta \\ e^t\, dt &= 3\sec\theta\tan\theta\, d\theta \\ dt &= \tan\theta\, d\theta \end{aligned}$$



. . . . [1 punto]

Obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\mathrm{e}^{2t} - 9}\, dt &= \int \sqrt{9\sec^2\theta - 9}\tan\theta\, d\theta \\ &= \int 3\tan\theta\tan\theta\, d\theta \\ &= \int 3\tan^2\theta\, d\theta \\ &= \int 3(\sec^2\theta - 1)\, d\theta \\ &= 3\int \sec^2\theta\, d\theta - 3\int d\theta \\ &= 3\tan\theta - 3\theta + C \\ &= \sqrt{e^{2t} - 9} - 3\,\mathrm{arcsec}\left(\frac{e^t}{3}\right) + C \end{aligned}$$

. . . . [1 punto]