

Cálculo II
Ayudantía N°7 - Pauta
Primer Semestre 2017

1. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifique su respuesta:

a) El valor de $\int_0^{\pi} f(x) dx$, para $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$ es 2π

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x) dx \\ &= -\cos(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin(x) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= -(0 - 1) + (0 - 1) = 0 \\ 0 &\neq 2\pi \end{aligned}$$

Por lo tanto la afirmación es FALSA.

b) El área limitada por las curvas $y = \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$; $x = 0$; $x = 2$; $y = 0$ es 1.

Debemos calcular la siguiente integral $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}} dx$.

Para esto aplicamos la sustitución $u = 2x^2 + 1$ y $du = 4x dx$ obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}} dx &= \frac{1}{4} \int_1^9 \frac{1}{\sqrt{u}} du \\ &= \frac{2}{4} \sqrt{u} \Big|_1^9 \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto la afirmación es VERDADERA.

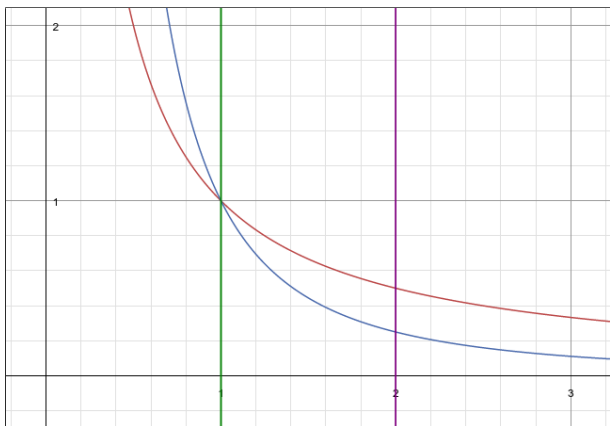
c) El valor de $c \in R$, tal que el área acotada por $y = x^2 + c$; $x = 0$; $x = 3$; $y = 0$ sea 12, es $c = 1$.

$$\begin{aligned}\int_0^3 (x^2 + 1)dx &= \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_0^3 \\ &= 9 + 3 \\ &= 12\end{aligned}$$

Por lo tanto la afirmación en VERDADERA.

2. Grafique la región limitada por las curvas y calcule su área

$$y = \frac{1}{x} \quad ; \quad y = \frac{1}{x^2} \quad ; \quad x = 1 \quad ; \quad x = 2$$

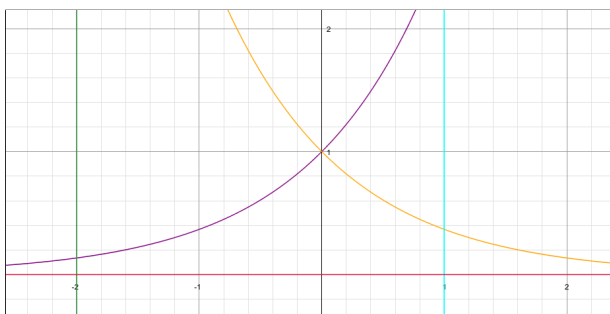


■	$y = \frac{1}{x}$
■	$y = \frac{1}{x^2}$
■	$x = 1$
■	$x = 2$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx &= \left(\ln(x) + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 \\ &= \ln 2 + \frac{1}{2} - (\ln 1 + 1) \\ &= \ln 2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. Grafique la región limitada por las curvas y calcule su área

$$y = e^x \quad ; \quad y = e^{-x} \quad ; \quad x = -2 \quad ; \quad x = 1 \quad ; \quad y = 0$$



■	$y = e^x$
■	$y = e^{-x}$
■	$x = -2$
■	$x = 1$
■	$y = 0$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 e^x dx + \int_0^1 e^{-x} dx &= e^x \Big|_{-2}^0 - e^{-x} \Big|_0^1 \\ &= 1 - e^{-2} - e^{-1} + 1 \\ &= 2 - e^{-2} - e^{-1} \end{aligned}$$

4. Calcule el área de la región limitada por la curva $y = x^4 - 2x^3 + x^2 + 3$, el eje X y las rectas $x = a$; $x = b$ donde a y b son las abscisas de los puntos mínimos de la función.

Calculamos los mínimos de la función $y = x^4 - 2x^3 + x^2 + 3$:

$$y = x^4 - 2x^3 + x^2 + 3$$

$$y' = 4x^3 - 6x^2 + 2x = 0$$

$$0 = 4x(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Los candidatos máximo o mínimo son $0, \frac{1}{2}, 1$.

$$f''(x) = 12x^2 - 12x + 2$$

$$f''(0) = 12x^2 - 12x + 2 = 2$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 12x^2 - 12x + 2 = -1$$

$$f''(1) = 12x^2 - 12x + 2 = 2$$

Por lo tanto los mínimos ocurren cuando $x = 0, 1$, luego calculamos la región solicitada.

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2 + 3)dx &= \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} + 3x\right)\Bigg|_0^1 \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 3 \\ &= \frac{91}{30}\end{aligned}$$

5. Calcule el área de la región limitada por la parábola $y = x^2 - 2x + 2$, su tangente en el punto $(3, 5)$ y el eje Y .

Primero calculamos la pendiente que toma la recta en el punto $(3, 5)$ derivando la función $y = x^2 - 2x + 2$.

$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$

$$f'(x) = 2x - 2$$

$$f'(3) = 4$$

Formamos la recta con la pendiente obtenida y el punto $(3, 5)$.

$$(y - 5) = 4(x - 3)$$

$$y = 4x - 7$$

Como referencia graficamos las funciones:



Finalmente calculamos la integral

$$\begin{aligned}\int_0^3 ((x^2 - 2x + 2) - (4x - 7))dx &= \int_0^3 (x^2 - 6x + 9)dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} + 9x \right) \Big|_0^3 \\ &= 9 - 27 + 27 = 9\end{aligned}$$