MAC 4722 - Linguagens, Autômatos e Computabilidade

Rodrigo Augusto Dias Faria
Departamento de Ciência da Computação - IME/USP

17 de março de 2016

Lista 1

Sipser 0.11 Encontre o erro na seguinte prova de todos os cavalos são da mesma cor.

Afirmação. *Em qualquer conjunto de h cavalos, todos os cavalos são da mesma cor.*

Demonstração. Por indução sobre h.

Base: Para $h = 1$. Em qualquer conjunto contendo somente um cavalo, todos os cavalos claramente têm a mesma cor.

Passo: Para $k \geq 1$ assuma que a afirmação seja verdadeira para $h = k$ e prove que ela é verdadeira para $h = k + 1$. Tome qualquer conjunto H de $k + 1$ cavalos. Mostramos que todos os cavalos nesse conjunto são da mesma cor. Remova um cavalo desse conjunto para obter o conjunto H_1 com apenas k cavalos. Pela hipótese da indução, todos os cavalos em H_1 são da mesma cor.

Agora recoloque o cavalo removido e remova um diferente para obter o conjunto H_2. Pelo mesmo argumento, todos os cavalos em H_2 são da mesma cor. Por conseguinte todos os cavalos em H têm que ser da mesma cor, e a prova está completa. ■

L1.01 Dado um grafo G sem laços nem arestas múltiplas, dizemos que G é uma árvore se qualquer par de vértices distintos é interligado por um único caminho que não repete vértices. Demonstre que toda Árvore G com pelo menos $n \geq 1$ vértices possui exatamente $n - 1$ arestas. Sugestão: aplique uma indução em n; ou suponha por absurdo a existência de um contraexemplo com quantidade mínima de arestas.

Demonstração. Prova por indução em n.

Sejam V e E o conjunto de vértices e arestas do grafo G, respectivamente.

Base: Para $n = 1$, temos:

$$\begin{aligned}|E[G]| = 0 &= n - 1\\ &= 1 - 1\\ &= 0\end{aligned}$$

Hipótese da Indução: Assuma que a afirmação é verdadeira para qualquer árvore com um número de vértices menor do que n.

Passo: Vamos considerar uma árvore T com n vértices. Seja e uma aresta que conecta dois vértices u e v em T. Por definição de árvore, o único caminho entre u e v é a aresta e. Vamos remover e. Logo, teremos dois novos componentes (conexos e acíclicos), que também são árvores, T' e T'', onde:

$$
\begin{aligned}
&|V[T']| = n', \\
&|V[T'']| = n'' \quad \text{e} \\
&n' + n'' = n
\end{aligned}
$$

Ambas T' e T'' têm menos vértices que T, logo:

$$
\begin{aligned}
|E[T']| &= n' - 1 \quad \text{(por indução)} \\
|E[T'']| &= n'' - 1 \quad \text{(por indução)}
\end{aligned}
$$

Não é difícil perceber que $T' \cup T''$ possui $(n'-1)+(n''-1) = n-2$ arestas e, portanto, se adicionarmos e de volta, teremos $n-1$ arestas.

$\blacksquare$

L1.02 Uma palavra (cadeia) x é dita uma potência de uma palavra z se existir um inteiro $n \geq 0$ tal que $z^n = x$. Duas palavras x e y comutam entre si se $xy = yx$. Prove que duas palavras dadas x e y comutam se e somente se existir uma palavra z da qual x e y são potências. Sugestão: no caso mais difícil, aplique uma indução na soma dos comprimentos de x e y.