

# MAC 4722 - Linguagens, Autômatos e Computabilidade

Rodrigo Augusto Dias Faria - NUSP 9374992  
Departamento de Ciência da Computação - IME/USP

28 de março de 2016

## Lista 2

**L2.1 (Sipser 1.16)** Resolva o exercício 1.16.

**a) Resposta:** Vamos chamar de  $M$  o AFN dado na questão. Seja  $M_d$  o AFD equivalente à  $M$ .

*Estados de  $M_d$ :*  $Q' = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ .

*Estado inicial:*  $q_0' = E(\{1\}) = \{1\}$ . É o conjunto de estados que são atingíveis a partir de  $\{1\}$  viajando por setas  $\epsilon$ , mais o próprio  $\{1\}$ .

*Estados de aceitação:*  $F' = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ . Aqueles que contêm um estado de aceitação de  $M$ .

*Função de transição:*

	a	b
Estados		
$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
$\{1\}$	$\{1, 2\}$	$\{2\}$
$\{2\}$	$\{\}$	$\{1\}$
$\{1, 2\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 2\}$

Tabela 1: Função de transição de  $M_d$ .

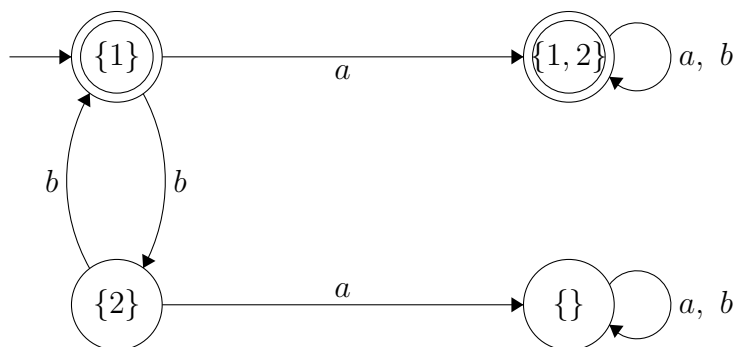


Figura 1: Diagrama de estados para o AFD  $M_d$ .

**b) Resposta:** Vamos chamar de  $N$  o AFN dado na questão. Seja  $N_d$  o AFD equivalente à  $N$ .

*Estados de  $N_d$ :*  $Q' = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ .

*Estado inicial:*  $q_0' = E(\{1\}) = \{1, 2\}$ .

*Estados de aceitação:*  $F' = \{\{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ . Aqueles que contêm um estado de aceitação de  $N$ .

*Função de transição:*

	a	b
$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
$\{1\}$	$\{3\}$	$\{\}$
$\{2\}$	$\{1, 2\}$	$\{\}$
$\{3\}$	$\{2\}$	$\{2, 3\}$
$\{1, 2\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{\}$
$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{2, 3\}$	$\{1, 2\}$	$\{2, 3\}$
$\{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{2, 3\}$

Tabela 2: Função de transição de  $N_d$ .

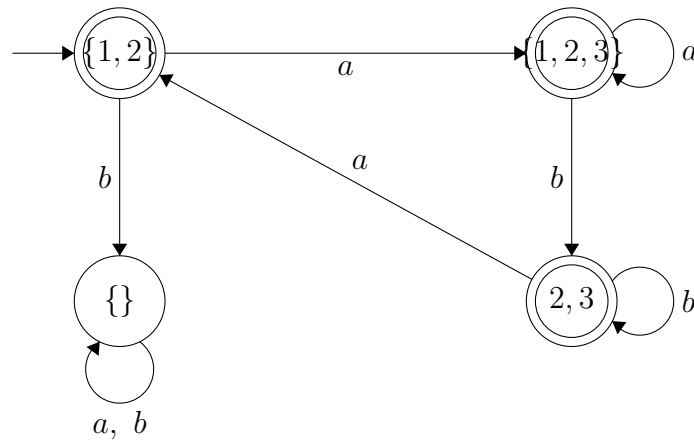


Figura 2: Diagrama de estados para o AFD  $N_d$ .

A figura 2 é o AFD simplificado que mostra apenas os estados que são alcançáveis a partir do estado inicial  $\{1, 2\}$ .

**L2.2 (Sipser 1.6c)** Dê um DFA/AFD para  $A = \{w | w \text{ possui } 0101 \text{ por subcadeia}\}$ .

Seja  $M = \{Q, \Sigma, \delta, s, F\}$  o AFD da figura 3 que reconhece  $A$ , onde:

1  $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$

2  $\Sigma = \{0, 1\}$

3  $\delta =$

	0	1
$q_0$	$q_1$	$q_0$
$q_1$	$q_1$	$q_2$
$q_2$	$q_3$	$q_0$
$q_3$	$q_1$	$q_4$
$q_4$	$q_4$	$q_4$

4  $s = q_0$

5  $F = \{q_4\}$

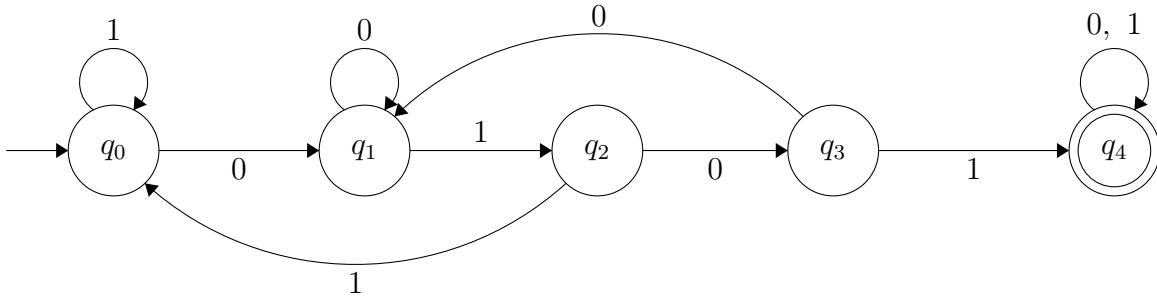


Figura 3: Diagrama de estados do AFD  $M$  que reconhece  $A$ .

**L2.3** Dada uma linguagem  $L$ , seja  $Pref(L) = \{x \mid \text{existe palavra } y \text{ tal que } xy \text{ está em } L\}$ ,  $Suf(L) = \{y \mid \text{existe palavra } x \text{ tal que } xy \text{ está em } L\}$ ,  $Fat(L) = \{y \mid \text{existem palavras } x \text{ e } z \text{ tais que } xyz \text{ estão em } L\}$ .

Demonstre que se  $L$  é regular, então  $Pref(L)$ ,  $Suf(L)$  e  $Fat(L)$  também o são. Sugestão: Observe que  $Fat(L) = Suf(Pref(L))$ .

**L2.4** Complete a demonstração do teorema 1.25.

**Resposta:** Vale lembrar, resumidamente, da construção dada na prova do teorema 1.25.

Suponha que  $A_1$  e  $A_2$  são linguagens reconhecidas por  $M_1$  e  $M_2$ , respectivamente, onde  $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$  e  $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ .

Construa  $M$  para reconhecer  $A_1 \cup A_2$ , onde  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ .

1  $Q = Q_1 \times Q_2$ .

2  $\Sigma$ , o alfabeto, é o mesmo em  $M_1$  e  $M_2$ .

3  $\delta =$  para cada  $(r_1, r_2) \in Q$  e cada  $a \in \Sigma$ , faça  $\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$ .

4  $q_0 = (q_1, q_2)$ .

5  $F = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$ .

*Demonstração.* Para demonstrar que  $M$  reconhece  $A_1 \cup A_2$ , devemos dividir a prova em duas partes.

AFIRMAÇÃO: Toda palavra pertencente à linguagem reconhecida por esse autômato está presente em  $A_1 \cup A_2$ .

Tome uma palavra  $w$  qualquer reconhecida pelo autômato  $M$ . Sabe-se que ao transitar-mos através de  $\delta$  por  $M$ , a partir do estado inicial  $q_0$ , existe um passeio  $P$  no autômato  $M$  que leva a um estado final. Pela construção de  $M$ , cada estado nesse passeio é rotulado por um par ordenado  $(r_1, r_2)$ , onde  $r_1 \in M_1$  e  $r_2 \in M_2$ . Se tomarmos o passeio  $P_1$  considerando de  $P$  apenas as coordenadas  $r_1$  do par ordenado, este é equivalente ao passeio dado pelas transições  $\delta_1$  na tentativa de reconhecimento de  $w$  em  $M_1$ . Analogamente, podemos tomar o passeio  $P_2$ , a partir de  $P$ , considerando apenas as coordenadas  $r_2$ , o que equivaleria à tentativa de reconhecimento da palavra  $w$  em  $M_2$ . Pela construção de  $M$ , temos ainda que o estado final do passeio  $P$  é rotulado por um par ordenado  $(r_1, r_2)$ , onde  $r_1 \in F_1$  ou  $r_2 \in F_2$ . Dessa forma, ou  $P_1$  ou  $P_2$ , ou ambos, terminam com um estado final, logo,  $w$  pertence ou a  $A_1$ , ou a  $A_2$ , ou a ambas, o que é equivalente a dizer que  $w$  pertence à  $A_1 \cup A_2$ .

AFIRMAÇÃO: Toda palavra pertencente à linguagem  $A_1 \cup A_2$  é reconhecida pelo autômato construído. Tomemos agora uma cadeia  $w$  como sendo uma cadeia pertencente a  $A_1 \cup A_2$ , onde  $|w| = m$ . Logo, existe um passeio  $P_1 = x_0, x_1, \dots, x_m$  em  $M_1$ , tal que  $x_0 = q_1$  construído a partir de  $\delta_1$ , ou um passeio  $P_2 = z_0, z_1, \dots, z_m$ , construído a partir de  $\delta_2$  em  $M_2$ , tal que  $z_0 = q_2$ , e que  $x_m$  ou  $z_m$ , ou ambos, são estados finais. Como o conjunto de estados  $Q$  de  $M$  foi construído através do produto cartesiano de  $Q_1 \times Q_2$  e a função de transição  $\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$ , para cada par ordenado  $(r_1, r_2) \in Q$  e cada  $a \in \Sigma$ , existe um caminho  $P = (x_0, z_0), (x_1, z_1), \dots, (x_m, z_m)$  em  $M$ , obtido a partir de  $w$ , e como  $x_m$  ou  $z_m$ , ou ambos, são estados finais,  $(x_m, z_m)$  também é um estado final e, portanto,  $M$  reconhece a palavra  $w$ . ■