MAC 4722 - Linguagens, Autômatos e Computabilidade

Rodrigo Augusto Dias Faria - NUSP 9374992
Departamento de Ciência da Computação - IME/USP

18 de março de 2016

Lista 1

Sipser 0.11 Encontre o erro na seguinte prova de todos os cavalos são da mesma cor.

AFIRMAÇÃO: Em qualquer conjunto de h cavalos, todos os cavalos são da mesma cor.

Demonstração. Por indução sobre h.

Base: Para $h = 1$. Em qualquer conjunto contendo somente um cavalo, todos os cavalos claramente têm a mesma cor.

Passo: Para $k \geq 1$ assuma que a afirmação seja verdadeira para $h = k$ e prove que ela é verdadeira para $h = k + 1$. Tome qualquer conjunto H de $k + 1$ cavalos. Mostramos que todos os cavalos nesse conjunto são da mesma cor. Remova um cavalo desse conjunto para obter o conjunto H_1 com apenas k cavalos. Pela hipótese da indução, todos os cavalos em H_1 são da mesma cor.

Agora recoloque o cavalo removido e remova um diferente para obter o conjunto H_2. Pelo mesmo argumento, todos os cavalos em H_2 são da mesma cor. Por conseguinte, todos os cavalos em H têm que ser da mesma cor, e a prova está completa. ■

Resposta: De fato, a prova por indução está devidamente elaborada, ou seja, apresenta a base, hipótese e passo da indução e, no desenrolar da demonstração, a hipótese é aplicada para provar a afirmação dada.

Ocorre que o argumento é válido para quase todo h, porém falha quando $h = 2$, ou seja, quando $k = 1$, vejamos.

Seja $H = \{h_1, h_2\}$. Se removermos h_2, teremos um novo conjunto com um único cavalo $H_1 = \{h_1\}$ e, obviamente, todos os cavalos em H_1 são da mesma cor. O mesmo vale se retirarmos h_1 de H, o que nos dá outro conjunto $H_2 = \{h_2\}$. Mas isso é insuficiente para concluir que todos os cavalos em H têm a mesma cor, uma vez que os cavalos em H_1 e H_2 podem ter cores diferentes.

L1.01 Dado um grafo G sem laços nem arestas múltiplas, dizemos que G é uma árvore se qualquer par de vértices distintos é interligado por um único caminho que não repete vértices. Demonstre que toda Árvore G com pelo menos $n \geq 1$ vértices possui exatamente

$n-1$ arestas. Sugestão: aplique uma indução em n; ou suponha por absurdo a existência de um contraexemplo com quantidade mínima de arestas.

Resposta:

Demonstração. Prova por indução em n.

Sejam V e E o conjunto de vértices e arestas do grafo G, respectivamente.

Base: Para $n = 1$, temos:

$$\begin{aligned} |E[G]| = 0 &= n - 1 \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Hipótese de Indução: Assuma que a afirmação é verdadeira para qualquer árvore com um número de vértices menor do que n.

Passo: Vamos considerar uma árvore T com n vértices. Seja e uma aresta que conecta dois vértices u e v em T. Por definição de árvore, o único caminho entre u e v é a aresta e. Vamos remover e. Logo, teremos dois novos componentes (conexos e acíclicos), que também são árvores, T' e T'', onde:

$$\begin{aligned} &|V[T']| = n', \\ &|V[T'']| = n'' \quad \text{e} \\ &n' + n'' = n \end{aligned}$$

Ambas T' e T'' têm menos vértices que T, logo:

$$\begin{aligned} |E[T']| &= n' - 1 \quad \text{(por indução)} \\ |E[T'']| &= n'' - 1 \quad \text{(por indução)} \end{aligned}$$

Não é difícil perceber que $T' \cup T''$ possui $(n' - 1) + (n'' - 1) = n - 2$ arestas e, portanto, se adicionarmos e de volta, teremos $n - 1$ arestas.

■

L1.02 Uma palavra (cadeia) x é dita uma potência de uma palavra z se existir um inteiro $n \geq 0$ tal que $z^n = x$. Duas palavras x e y comutam entre si se $xy = yx$. Prove que duas palavras dadas x e y comutam se e somente se existir uma palavra z da qual x e y são potências. Sugestão: no caso mais difícil, aplique uma indução na soma dos comprimentos de x e y.

Resposta: $\Leftarrow$ Afirmação: Se $x = z^i$, $y = z^j$, então $xy = yx \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$

Podemos provar essa afirmação da seguinte forma:

$$\begin{aligned} xy &= z^i z^j = z^{i+j} \\ yx &= z^j z^i = z^{j+i} \\ &\therefore xy = yx \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Afirmação: Se $xy = yx$, então $\exists z | z^i = x, z^j = y \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$

Demonstração. Prova por indução no tamanho da palavra.

Base: Para $|x| = 0$ ou $|y| = 0$, temos:

Por definição de ϵ sabemos que $|\epsilon| = 0$.

No caso em que $|x| = 0$, temos que $x = \epsilon = z^0$. O mesmo vale no caso em que $|y| = 0$.

Se $|x| = |y|$, como sabemos que $xy = yx$, então podemos concluir que $x = y$, pois cada carácter da concatenação do lado esquerdo é exatamente igual ao que está na mesma posição do lado direito.

Hipótese de Indução: Vamos assumir que a afirmação vale para $|x| < |y|$.

Passo: Neste caso, como sabemos que as cadeias comutam, podemos escrever $y = xv$ onde $v \in z^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Em outras palavras, x é um prefixo de y.

Logo:

$$\begin{aligned} xy &= yx \\ xxv &= xvx \\ xv &= vx \\ |xv| &< |xy| \quad \text{(por indução)} \end{aligned}$$

$\blacksquare$