# MAC 4722 - Linguagens, Autômatos e Computabilidade

Rodrigo Augusto Dias Faria - NUSP 9374992
Departamento de Ciência da Computação - IME/USP

30 de março de 2016

## Lista 2

**L2.1 (Sipser 1.16)** Resolva o exercício 1.16.

**a) Resposta:** Seja $N$ o AFN dado na questão e $A$ a linguagem reconhecida por $N$, onde:

$N = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$
$Q = \{1, 2\}$
$\Sigma = \{a, b\}$
$q_0 = 1$
$F = \{1\}$
$\delta =$

| Estados | a | b |
|---|---|---|
| 1 | {1, 2} | {2} |
| 2 | {} | {1} |

Agora, vamos construir um AFD $M = \{Q', \Sigma, \delta', q_{0'}, F'\}$, equivalente à $N$, que reconhece $A$.

$Q' = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
$\Sigma = \{a, b\}$
$q_{0'} = E(\{1\}) = \{1\}$
$F' = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$
$\delta' =$

| Estados | a | b |
|---|---|---|
| {} | {} | {} |
| {1} | {1,2} | {2} |
| {2} | {} | {1} |
| {1,2} | {1,2} | {1,2} |

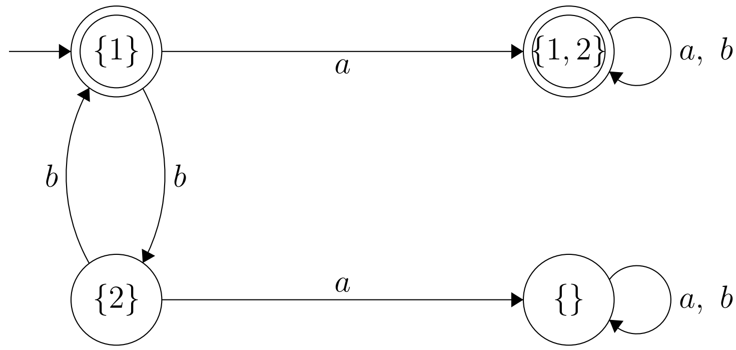


Figura 1: Diagrama de estados para o AFD $M$.

**b) Resposta:** Seja $N$ o AFN dado na questão e $A$ a linguagem reconhecida por $N$, onde:

$N = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$
$Q = \{1, 2, 3\}$
$\Sigma = \{a, b\}$
$q_0 = 1$
$F = \{2\}$
$\delta =$

| Estados | a | b | $\epsilon$ |
|---|---|---|---|
| 1 | {3} | {} | {2} |
| 2 | {1} | {} | {} |
| 3 | {2} | {2, 3} | {} |

Agora, vamos construir um AFD $M = \{Q', \Sigma, \delta', q_{0'}, F'\}$, equivalente à $N$, que reconhece $A$.
$Q' = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
$\Sigma = \{a, b\}$
$q_{0'} = E(\{1\}) = \{1, 2\}$
$F' = \{\{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
$\delta' =$

| Estados | a | b |
|---|---|---|
| {} | {} | {} |
| {1} | {3} | {} |
| {2} | {1,2} | {} |
| {3} | {2} | {2,3} |
| {1,2} | {1,2,3} | {} |
| {1,3} | {2,3} | {2,3} |
| {2,3} | {1,2} | {2,3} |
| {1,2,3} | {1,2,3} | {2,3} |

A figura 2 é o AFD simplificado que mostra apenas os estados que são alcançáveis a partir do estado inicial $\{1, 2\}$.

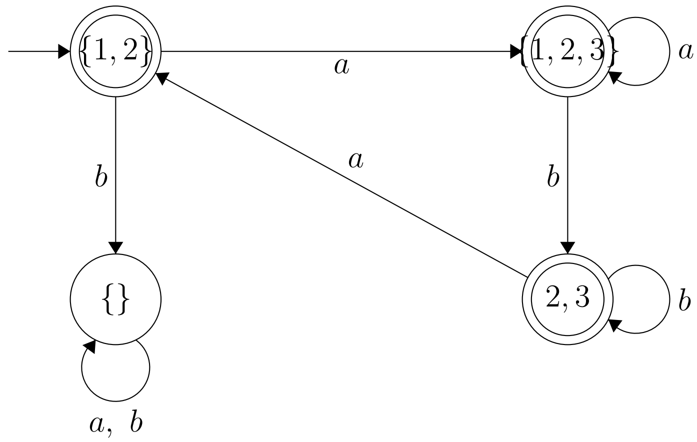


Figura 2: Diagrama de estados para o AFD $M$.

**L2.2 (Sipser 1.6c)** Dê um DFA/AFD para $A = \{w|w \text{ possui } 0101 \text{ por subcadeia}\}$.
Seja $M = \{Q, \Sigma, \delta, s, F\}$ o AFD da figura 3 que reconhece $A$, onde:

**1** $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$

**2** $\Sigma = \{0, 1\}$

**3** $\delta =$

| Estados | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_0$ | $q_1$ | $q_0$ |
| $q_1$ | $q_1$ | $q_2$ |
| $q_2$ | $q_3$ | $q_0$ |
| $q_3$ | $q_1$ | $q_4$ |
| $q_4$ | $q_4$ | $q_4$ |

**4** $s = q_0$

**5** $F = \{q_4\}$

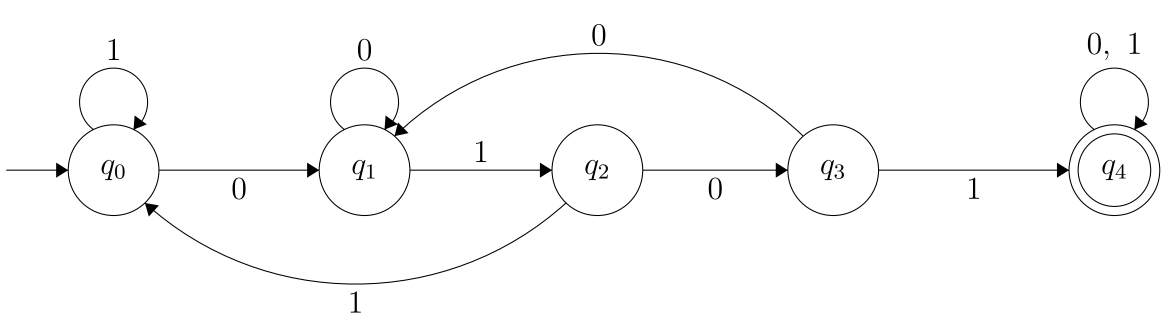


Figura 3: Diagrama de estados do AFD $M$ que reconhece $A$.

**L2.3** Dada uma linguagem $L$, seja $Pref(L) = \{x|$ existe palavra $y$ tal que $xy$ está em $L\}$, $Suf(L) = \{y|$ existe palavra $x$ tal que $xy$ está em $L\}$, $Fat(L) = \{y|$ existem palavras $x$ e $z$ tais que $xyz$ estão em $L\}$.
Demonstre que se $L$ é regular, então $Pref(L)$, $Suf(L)$ e $Fat(L)$ também o são. Sugestão: Observe que $Fat(L) = Suf(Pref(L))$.

**L2.4** Complete a demonstração do teorema 1.25.

**Resposta:** Vale lembrar, resumidamente, da construção dada na prova do teorema 1.25.

Suponha que $A_1$ e $A_2$ são linguagens reconhecidas por $M_1$ e $M_2$, respectivamente, onde $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$.

Construa $M$ para reconhecer $A_1 \cup A_2$, onde $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

**1** $Q = Q_1 \times Q_2$.

**2** $\Sigma$, o alfabeto, é o mesmo em $M_1$ e $M_2$.

**3** $\delta =$ para cada $(r_1, r_2) \in Q$ e cada $a \in \Sigma$, faça $\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$.

**4** $q_0 = (q_1, q_2)$.

**5** $F = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$.

*Demonstração.* Para demonstrar que $M$ reconhece $A_1 \cup A_2$, devemos dividir a prova em duas partes.

AFIRMAÇÃO: Toda palavra pertencente à linguagem reconhecida por $M$ está presente em $A_1 \cup A_2$.

Tome uma palavra $w$ qualquer reconhecida pelo autômato $M$. Sabe-se que ao transitarmos através de $\delta$ por $M$, a partir do estado inicial $q_0$, existe um passeio $P$ no autômato $M$ que leva a um estado final. Pela construção de $M$, cada estado nesse passeio é rotulado por um par ordenado $(r_1, r_2)$, onde $r_1 \in M_1$ e $r_2 \in M_2$. Se tomarmos o passeio $P_1$, considerando de $P$ apenas as coordenadas $r_1$ do par ordenado, este é equivalente ao passeio dado pelas transições $\delta_1$ na tentativa de reconhecimento de $w$ em $M_1$. Analogamente, podemos tomar o passeio $P_2$, a partir de $P$, considerando apenas as coordenadas $r_2$, o que equivaleria à tentativa de reconhecimento da palavra $w$ em $M_2$. Pela construção de $M$, temos ainda que o estado final do passeio $P$ é rotulado por um par ordenado $(r_1, r_2)$, onde $r_1 \in F_1$ ou $r_2 \in F_2$. Dessa forma, ou $P_1$ ou $P_2$, ou ambos, terminam com um estado final, logo, $w \in A_1$, ou $w \in A_2$, ou $w \in A_1$ e $w \in A_2$, o que é equivalente a dizer que $w \in A_1 \cup A_2$.

AFIRMAÇÃO: Toda palavra pertencente à linguagem $A_1 \cup A_2$ é reconhecida por $M$. Tomemos agora $w$ como sendo uma cadeia pertencente a $A_1 \cup A_2$, onde $|w| = m$. Logo, existe um passeio $P_1 = x_0, x_1, \ldots, x_m$ em $M_1$, tal que $x_0 = q_1$ construído a partir de $\delta_1$, ou um passeio $P_2 = z_0, z_1, \ldots, z_m$, construído a partir de $\delta_2$ em $M_2$, tal que $z_0 = q2$, e que $x_m$ ou $z_m$, ou ambos, são estados finais. Como o conjunto de estados $Q$ de $M$ foi construído através do produto cartesiano de $Q_1 \times Q_2$ e a função de transição $\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$, para cada par ordenado $(r_1, r_2) \in Q$ e cada $a \in \Sigma$, existe um caminho $P = (x_0, z_0), (x_1, z_1), \ldots, (x_m, z_m)$ em $M$, obtido a partir de $w$, e como $x_m$ ou $z_m$, ou ambos, são estados finais, $(x_m, z_m)$ também é um estado final e, portanto, $M$ reconhece a palavra $w$. ■