MAC 4722 - Linguagens, Autômatos e Computabilidade

Rodrigo Augusto Dias Faria - NUSP 9374992
Departamento de Ciência da Computação - IME/USP

6 de abril de 2016

Lista 2

L2.1 (Sipser 1.16) Resolva o exercício 1.16.

a) Resposta: Seja N o AFN dado na questão e A a linguagem reconhecida por N, onde:

$N = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$
$Q = \{1, 2\}$
$\Sigma = \{a, b\}$
$q_0 = 1$
$F = \{1\}$
$\delta =$

Estados	a	b
1	{1, 2}	{2}
2	∅	{1}

Agora, vamos construir um AFD $M = \{Q', \Sigma, \delta', q_{0'}, F'\}$, equivalente à N, que reconhece A.
$Q' = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
$\Sigma = \{a, b\}$
$q_{0'} = E(\{1\}) = \{1\}$
$F' = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$
$\delta' =$

Estados	a	b
∅	∅	∅
{1}	{1,2}	{2}
{2}	∅	{1}
{1,2}	{1,2}	{1,2}

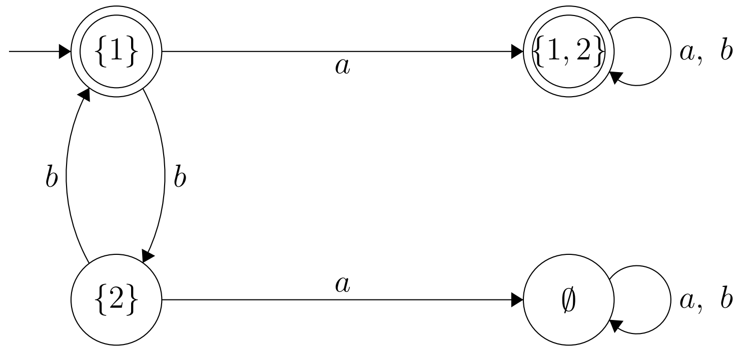

Figura 1: Diagrama de estados para o AFD M.

b) Resposta: Seja N o AFN dado na questão e A a linguagem reconhecida por N, onde:
$N = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$
$Q = \{1, 2, 3\}$
$\Sigma = \{a, b\}$
$q_0 = 1$
$F = \{2\}$
$\delta =$

Estados	a	b	ϵ
1	$\{3\}$	$\emptyset$	$\{2\}$
2	$\{1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
3	$\{2\}$	$\{2, 3\}$	$\emptyset$

Agora, vamos construir um AFD $M = \{Q', \Sigma, \delta', q_{0'}, F'\}$, equivalente à N, que reconhece A.
$Q' = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
$\Sigma = \{a, b\}$
$q_{0'} = E(\{1\}) = \{1, 2\}$
$F' = \{\{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
$\delta' =$

Estados	a	b
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
{1}	{3}	$\emptyset$
{2}	{1,2}	$\emptyset$
{3}	{2}	{2,3}
{1,2}	{1,2,3}	$\emptyset$
{1,3}	{2,3}	{2,3}
{2,3}	{1,2}	{2,3}
{1,2,3}	{1,2,3}	{2,3}

A figura 2 é o AFD simplificado que mostra apenas os estados que são alcançáveis a partir do estado inicial $\{1, 2\}$.

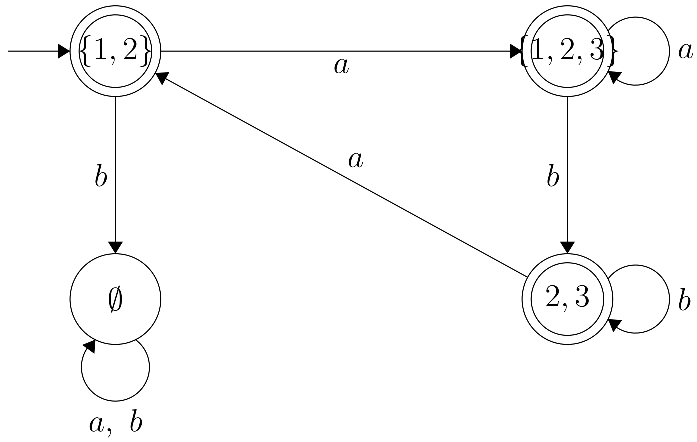

Figura 2: Diagrama de estados para o AFD M.

L2.2 (Sipser 1.6c) Dê um DFA/AFD para $A = \{w \mid w \text{ possui } 0101 \text{ por subcadeia}\}$. Considere o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$.

Resposta: Para este exercício, utilizei as referências em [1], [2] e [3].

Seja $M = \{Q, \Sigma, \delta, s, F\}$ o AFD da figura 3 que reconhece A, onde:

1 $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$

2 $\Sigma = \{0, 1\}$

3 $\delta =$

Estados	0	1
q_0	q_1	q_0
q_1	q_1	q_2
q_2	q_3	q_0
q_3	q_1	q_4
q_4	q_4	q_4

4 $s = q_0$

5 $F = \{q_4\}$

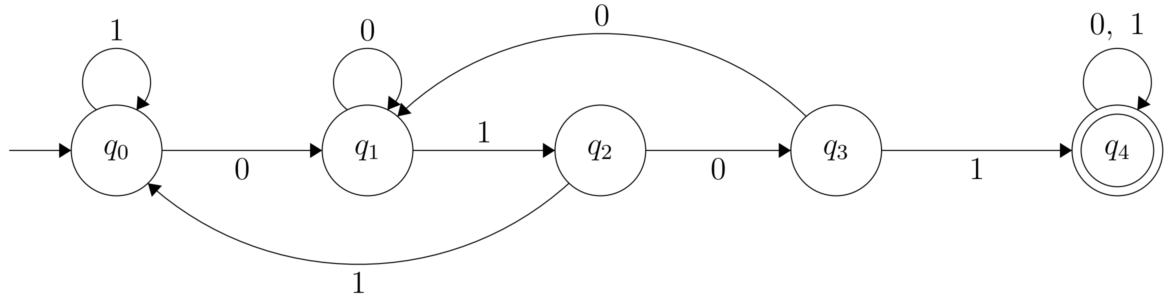

Figura 3: Diagrama de estados do AFD M que reconhece A.

Agora, precisamos mostrar que o AFD M reconhece a linguagem A, ou seja, para todo $w \in \Sigma^*$, $w \in L(M) \iff w \in A$.

Sem perda de generalidade, vamos assumir que w é da forma au. Vamos definir $\forall w \in \Sigma^*$:

$$\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, w) = \begin{cases} q_0, & \text{se } w = \epsilon \\ \delta(q_0, w), & \text{se } w \in \Sigma \\ \hat{\delta}_M(q, u), & \text{se } w = au \end{cases}$$

$$\text{onde } a \in \Sigma, |u| > 0 \text{ e } q = \delta(q_0, a).$$

Note que $\delta(q_0, w) = q \iff w \in L(q)$, ou seja, o autômato termina em um estado q dado uma cadeia w, se e somente se, w satisfaz as propriedades para o estado q. Sendo assim, vamos definir:

$L(q_0) = \{w \in \Sigma^* \mid$ 0101 não é subcadeia de w e w não termina com 0, 01 ou 010.$\}$

$L(q_1) = \{w \in \Sigma^* \mid$ 0101 não é subcadeia de w e w não termina com 01 ou 010, mas termina com 0.$\}$

$L(q_2) = \{w \in \Sigma^* \mid$ 0101 não é subcadeia de w e w não termina com 010, mas termina com 01.$\}$

$L(q_3) = \{w \in \Sigma^* \mid$ 0101 não é subcadeia de w, mas w termina com 010.$\}$

$L(q_4) = \{w \in \Sigma^* \mid$ 0101 é subcadeia de w.$\}$

Afirmação: $L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid w$ possui 0101 por subcadeia$\}$, de forma tal que as propriedades (a), (b), (c), (d) e (e) valem $\forall w \in \Sigma^*$:

(a) $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, w) = q_0 \iff w \in L(q_0)$,

(b) $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, w) = q_1 \iff w \in L(q_1)$,

(c) $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, w) = q_2 \iff w \in L(q_2)$,

(d) $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, w) = q_3 \iff w \in L(q_3)$ e

(e) $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, w) = q_4 \iff w \in L(q_4)$.

Demonstração. Vamos provar a afirmação por indução em $|w|$.

Base: $|w| = 0$

Nesse caso, $w = \epsilon$ e, pela definição de $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}$, temos que $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, w) = q_0$ e, portanto, $w \in L(q_0)$. Por outro lado, se $w \in L(q_0)$, então, pela mesma definição de $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}$, temos que $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, w) = q_0$.

Hipótese de Indução: Suponha que a afirmação é verdadeira para qualquer cadeia w, tal que $|w| < n$.

Passo: Seja $w \in \Sigma^*$ e $|w| = n$. Lembrando que $w = au$, $a \in \Sigma$, $|u| > 0$ e $u \in \Sigma^{n-1}$.

Agora, precisamos mostrar que a afirmação também vale para todas as possibilidades de transição de $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, u)$ e a.

(1) $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, u) = q_0$ e $a = 1$
Temos que $|u| < n$ e, por hipótese de indução, podemos concluir que $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, u) = q_0 \iff u \in L(q_0)$. Logo:

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, w) &= \hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, au) \\ &= \delta(\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, u), a) \\ &= \delta(q_0, a) \\ &= q_0\end{aligned}$$

Portanto, $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, w) = q_0 \iff w \in L(q_0)$.

(2) $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, u) = q_0$ e $a = 0$
Temos que $|u| < n$ e, por hipótese de indução, podemos concluir que $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, u) = q_0 \iff u \in L(q_0)$. Logo:

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, w) &= \hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, au) \\ &= \delta(\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, u), a) \\ &= \delta(q_0, a) \\ &= q_1\end{aligned}$$

Portanto, $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, w) = q_1 \iff w \in L(q_1)$.

(3) $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, u) = q_1$ e $a = 0$
Temos que $|u| < n$ e, por hipótese de indução, podemos concluir que $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, u) = q_1 \iff u \in L(q_1)$. Logo:

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, w) &= \hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, au) \\ &= \delta(\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, u), a) \\ &= \delta(q_1, a) \\ &= q_1\end{aligned}$$

Portanto, $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, w) = q_1 \iff w \in L(q_1)$.

(4) $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, u) = q_1$ e $a = 1$
Temos que $|u| < n$ e, por hipótese de indução, podemos concluir que $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, u) = q_1 \iff u \in L(q_1)$. Logo:

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, w) &= \hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, au) \\ &= \delta(\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, u), a) \\ &= \delta(q_1, a) \\ &= q_2\end{aligned}$$

Portanto, $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, w) = q_2 \iff w \in L(q_2)$.

(5) $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, u) = q_2$ e $a = 0$

Temos que $|u| < n$ e, por hipótese de indução, podemos concluir que $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, u) = q_2 \iff u \in L(q_2)$. Logo:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, w) &= \hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, au) \\ &= \delta(\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, u), a) \\ &= \delta(q_2, a) \\ &= q_3 \end{aligned}$$

Portanto, $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, w) = q_3 \iff w \in L(q_3)$.

(6) $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, u) = q_2$ e $a = 1$

Temos que $|u| < n$ e, por hipótese de indução, podemos concluir que $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, u) = q_2 \iff u \in L(q_2)$. Logo:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, w) &= \hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, au) \\ &= \delta(\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, u), a) \\ &= \delta(q_2, a) \\ &= q_0 \end{aligned}$$

Portanto, $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, w) = q_0 \iff w \in L(q_0)$.

(7) $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, u) = q_3$ e $a = 0$

Temos que $|u| < n$ e, por hipótese de indução, podemos concluir que $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, u) = q_3 \iff u \in L(q_3)$. Logo:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, w) &= \hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, au) \\ &= \delta(\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, u), a) \\ &= \delta(q_3, a) \\ &= q_1 \end{aligned}$$

Portanto, $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, w) = q_1 \iff w \in L(q_1)$.

(8) $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, u) = q_3$ e $a = 1$

Temos que $|u| < n$ e, por hipótese de indução, podemos concluir que $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, u) = q_3 \iff u \in L(q_3)$. Logo:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, w) &= \hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, au) \\ &= \delta(\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, u), a) \\ &= \delta(q_3, a) \\ &= q_4 \end{aligned}$$

Portanto, $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, w) = q_4 \iff w \in L(q_4)$.

(9) $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, u) = q_4$ e $a = 0$ ou $a = 1$
Esse caso é trivialmente verdade pois, nesse ponto, já sabemos que u contém a subcadeia 0101 e, não importa o símbolo a lido, temos que $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, u) = q_4 \iff u \in L(q_4)$ e $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, w) = q_4 \iff w \in L(q_4)$.

Sendo assim, podemos concluir que o autômato M da Figura 3 está correto, pois $\hat{\delta}_{\mathrm{M}}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset \iff w \in A$. ■

L2.3 Dada uma linguagem L, seja $pref(L) = \{x \mid \text{existe palavra } y \text{ tal que } xy \text{ está em } L\}$, $suf(L) = \{y \mid \text{existe palavra } x \text{ tal que } xy \text{ está em } L\}$, $fat(L) = \{y \mid \text{existem palavras } x \text{ e } z \text{ tais que } xyz \text{ estão em } L\}$.
Demonstre que se L é regular, então $pref(L)$, $suf(L)$ e $fat(L)$ também o são. Sugestão: Observe que $fat(L) = suf(pref(L))$.

Resposta: Vamos mostrar a construção de um autômato para cada linguagem para mostrar que ela é regular. Vale lembrar que, por definição, uma linguagem é regular se existe um autômato finito que a reconhece.

AFIRMAÇÃO: Se L é uma linguagem regular, então $pref(L)$ também o é.

Demonstração. Como L é regular, existe um autômato $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ que reconhece L. Vamos, então, construir um autômato $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F')$ que reconhece $pref(L)$.

Ou seja, o autômato N que reconhece $pref(L)$ apenas difere do autômato M original no conjunto de estados de aceitação. Logo:

$$F' = \{q \in Q : \exists q_f \in F \text{ e } w \in \Sigma^* \text{ tal que } \hat{\delta}(q, w) = q_f\}$$

Em outras palavras, F' é o subconjunto dos estados em Q que conseguem atingir algum estado de F.

Para que a demonstração seja completa, temos que mostrar que $\forall w \in \Sigma^*, w \in pref(L) \iff N$ aceita w. (não consegui concluir a tempo) ■

AFIRMAÇÃO: Se L é uma linguagem regular, então $suf(L)$ também o é.

Demonstração. Como L é regular, existe um autômato $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ que reconhece L. Vamos, então, construir um autômato $N = (Q', \Sigma, \delta', q_{0'}, F)$ que reconhece $suf(L)$, onde:

(1) $Q' = Q \cup \{q_{0'}\}$ e $q_{0'} \notin Q$

(2) $q_{0'}$ é o novo estado inicial

(3) δ' é a antiga função de transição, além de transições ϵ a partir de $q_{0'}$ para todos os outros estados de M

Para que a demonstração seja completa, temos que mostrar que $\forall w \in \Sigma^*, w \in suf(L) \iff N$ aceita w. (não consegui concluir a tempo) ■

AFIRMAÇÃO: Se L é uma linguagem regular, então $fat(L)$ também o é.

L2.4 Complete a demonstração do teorema 1.25.

Resposta: Vale lembrar da construção dada na prova do teorema 1.25.

Suponha que A_1 e A_2 são linguagens reconhecidas por M_1 e M_2, respectivamente, onde $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$.

Construa M para reconhecer $A_1 \cup A_2$, onde $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

1 $Q = Q_1 \times Q_2$.

2 Σ, o alfabeto, é o mesmo em M_1 e M_2.

3 $\delta =$ para cada $(r_1, r_2) \in Q$ e cada $a \in \Sigma$, faça $\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$.

4 $q_0 = (q_1, q_2)$.

5 $F = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$.

Demonstração. Para demonstrar que M reconhece $A_1 \cup A_2$, devemos dividir a prova em duas partes.

AFIRMAÇÃO: Toda palavra pertencente à linguagem reconhecida por M está presente em $A_1 \cup A_2$.

Tome uma palavra w qualquer reconhecida pelo autômato M. Sabe-se que ao transitarmos através de δ por M, a partir do estado inicial q_0, existe um passeio P no autômato M que leva a um estado final. Pela construção de M, cada estado nesse passeio é rotulado por um par ordenado (r_1, r_2), onde $r_1 \in M_1$ e $r_2 \in M_2$. Se tomarmos o passeio P_1, considerando de P apenas as coordenadas r_1 do par ordenado, este é equivalente ao passeio dado pelas transições δ_1 na tentativa de reconhecimento de w em M_1. Analogamente, podemos tomar o passeio P_2, a partir de P, considerando apenas as coordenadas r_2, o que equivaleria à tentativa de reconhecimento da palavra w em M_2. Pela construção de M, temos ainda que o estado final do passeio P é rotulado por um par ordenado (r_1, r_2), onde $r_1 \in F_1$ ou $r_2 \in F_2$. Dessa forma, ou P_1 ou P_2, ou ambos, terminam com um estado final, logo, $w \in A_1$, ou $w \in A_2$, ou $w \in A_1$ e $w \in A_2$, o que é equivalente a dizer que $w \in A_1 \cup A_2$.

AFIRMAÇÃO: Toda palavra pertencente à linguagem $A_1 \cup A_2$ é reconhecida por M. Tomemos agora w como sendo uma cadeia pertencente a $A_1 \cup A_2$, onde $|w| = m$. Logo, existe um passeio $P_1 = x_0, x_1, \ldots, x_m$ em M_1, tal que $x_0 = q_1$ construído a partir de δ_1, ou um passeio $P_2 = z_0, z_1, \ldots, z_m$, construído a partir de δ_2 em M_2, tal que $z_0 = q2$, e que x_m ou z_m, ou ambos, são estados finais. Como o conjunto de estados Q de M foi construído através do produto cartesiano de $Q_1 \times Q_2$ e a função de transição $\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$, para cada par ordenado $(r_1, r_2) \in Q$ e cada $a \in \Sigma$, existe um caminho $P = (x_0, z_0), (x_1, z_1), \ldots, (x_m, z_m)$ em M, obtido a partir de w, e como x_m ou z_m, ou ambos, são estados finais, (x_m, z_m) também é um estado final e, portanto, M reconhece a palavra w. ■

Referências

[1] Gul Agha et al. *CS 373: Introduction to Theory of Computation: Inductive Proofs for DFAs*. `https://courses.engr.illinois.edu/cs373/sp2013/Lectures/lec03.pdf`. [Online; acessado em 26-mar-2016]. 2013.

[2] Gul Agha et al. *CS 373: Introduction to Theory of Computation: Introducing Finite Automata*. `https://courses.engr.illinois.edu/cs373/sp2013/Lectures/lec02.pdf`. [Online; acessado em 26-mar-2016]. 2013.

[3] John E. Hopcroft, Rajeev Motwani e Jeffrey D. Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computations*. 3rd. Prentice Hall, 2006. ISBN: 0321455363.