MAC 4722 - Linguagens, Autômatos e Computabilidade

Rodrigo Augusto Dias Faria - NUSP 9374992
Departamento de Ciência da Computação - IME/USP

9 de maio de 2016

Lista 3

L3.1 (Sipser 1.46) Prove que as seguintes linguagens não são regulares.

a. $L_a = \{0^n 1^m 0^n \mid m, n \geq 0\}$

Resposta: Vamos usar o lema do bombeamento para mostrar que L_a não é regular. A prova é por contradição.

Suponha o contrário, ou seja, que L_a é regular. Seja p o comprimento de bombeamento dado pelo lema do bombeamento. Seja s a cadeia $s = 0^p 1^{p+1} 0^p$. Como $s \in L_a$ e $|s| \geq p$, o lema do bombeamento garante que s pode ser dividida em três partes $s = xyz$, onde, para qualquer $i \geq 0$, $xy^i z \in L_a$. Vamos mostrar que isso é impossível.

A condição 3 do lema do bombeamento diz que $|xy| \leq p$ e, por esta razão, y contém apenas 0s. Vamos tomar a cadeia $s' = xyyz$, onde $y = 0^a$ e $a \geq 1$. Neste caso, teremos mais 0s no início da cadeia do que no fim e, portanto, $s' \notin L_a$, o que é uma contradição da condição 1 do lema do bombeamento.

Portanto, podemos concluir que L_a não é regular.

b. $L_b = \{0^m 1^n \mid m \neq n\}$

Resposta: Há a resposta no livro do Sipser.

c. $L_c = \{w \mid w \in \{0, 1\}^* \text{ não é um palíndromo}\}$

Resposta: Tomei como base a questão anterior no livro [1].

Um palíndromo é uma cadeia que tem a mesma leitura da esquerda para a direita e vice-versa. Logo, $L_c = \{w \mid w \in \{0, 1\}^* e\ w \neq w^R\}$.

Vamos usar o lema do bombeamento para mostrar que L_c não é regular. A prova é por contradição.

Suponha o contrário, ou seja, que L_c é regular. Seja p o comprimento de bombeamento dado pelo lema do bombeamento. Seja a cadeia $s = 0^p 1 0^{p+p!}$. Como $s \in L_c$ e $|s| \geq p$, o lema do bombeamento garante que s pode ser dividida em três partes $s = xyz$ com $x = 0^a$, $y = 0^b$ e $z = 0^c 1 0^{p+p!}$, onde, $b \geq 1$ e $a + b + c = p$. Vamos mostrar que isso é impossível.

Seja a cadeia $s' = xy^{i+1}z$, onde $i = \frac{p!}{b}$. Então, temos que:

$$y^{i+1} = 0^{b^{(\frac{p!}{b})}}0^b = 0^{b(\frac{p!}{b})}0^b = 0^{p!}0^b = 0^{b+p!}$$

Logo, $xyz = 0^a0^{b+p!}0^c10^{p+p!} = 0^{a+b+p!+c}10^{b+p!}$. Como $a + b + c = p$, temos que $xyz = 0^{p+p!}10^{p+p!}$ e, sendo assim, $xyz \notin L_c$.

Portanto, podemos concluir que L_c não é regular.

d. $L_d = \{wtw \mid w, t \in \{0, 1\}^+\}$
Resposta: Vamos usar o lema do bombeamento para mostrar que L_d não é regular. A prova é por contradição.

Suponha o contrário, ou seja, que L_d é regular. Seja p o comprimento de bombeamento dado pelo lema do bombeamento. Seja a cadeia $s = 0^p10^p$, onde $p \geq 1$. Como $s \in L_d$ e $|s| \geq p$, o lema do bombeamento garante que s pode ser dividida em três partes $s = xyz$, onde, para qualquer $i \geq 0$, $xy^iz \in L_d$. Vamos mostrar que isso é impossível.

A condição 3 do lema do bombeamento diz que $|xy| \leq p$ e, por esta razão, y contém apenas 0s. Vamos tomar a cadeia $s' = xyyz$. Neste caso, teremos um número maior de 0s no início da cadeia do que no fim e, portanto, $s' \notin L_d$, o que é uma contradição da condição 1 do lema do bombeamento.

Portanto, podemos concluir que L_d não é regular.

L3.2 (Sipser 1.49) Reescrevi o enunciado substituindo y por w para não confundir com as propriedades do lema do bombeamento. Para ambas as questões o alfabeto é $\Sigma = \{0, 1\}$.

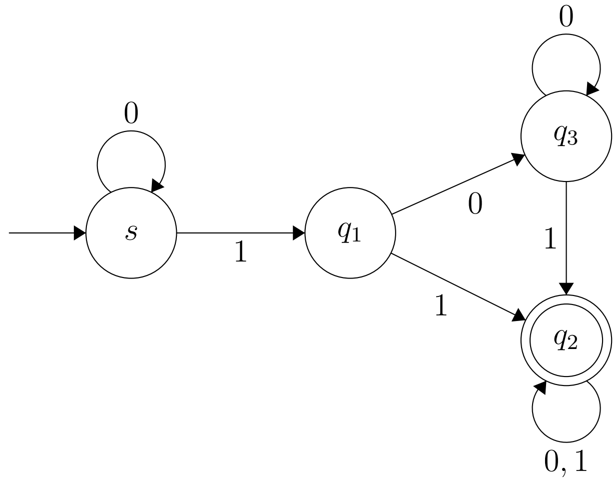
a. Seja $B = \{1^kw \mid w \ \in \Sigma^*$ e w contém pelo menos k 1s, para $k \geq 1\}$.
Mostre que B é uma linguagem regular.

Resposta: Se B é uma linguagem regular, então existe um autômato finito que a reconhece.

Podemos observar algumas cadeias que pertencem a B, tais como, 111|00111, 1|10, 1|11, 1|01 e outras que não pertencem a B, tais como, 0|0, 0|1, 1|00, onde | indica o final da subcadeia 1^k. Percebemos, então, que as cadeias em B não podem começar com 0 e, as que estão em B devem, necessariamente, começar em 1, já que $k \geq 1$.

Logo, podemos reescrever B como $B = \{1x \mid x \in \Sigma^*$ e x tem pelo menos um 1$\}$.

Agora, vamos construir um AFD $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ que reconhece B:



b. Seja $C = \{1^k w \mid w \in \Sigma^* \text{ e } w \text{ contém no máximo } k \text{ 1s, para } k \geq 1\}$.
Mostre que C não é uma linguagem regular.

Resposta: Vamos usar o lema do bombeamento para mostrar que C não é regular. A prova é por contradição.

Suponha o contrário, ou seja, que C é regular. Seja p o comprimento de bombeamento dado pelo lema do bombeamento. Seja s a cadeia $s = 1^p01^p$. Como $s \in C$ e $|s| \geq p$, o lema do bombeamento garante que s pode ser dividida em três partes $s = xyz$ com $x = 1^a$, $y = 1^b$ e $z = 1^c01^p$, onde, $b \geq 1$ e $a + b + c = p$. Vamos mostrar que isso é impossível.

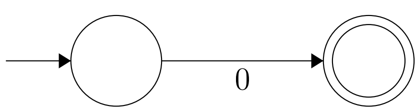
Vamos tomar a cadeia $s' = xy^0z = 1^{a+c}01^p$. Como $b \geq 1$ e $a+b+c = p$, nós temos que $a+c < p$ e, sendo assim, $s' \notin C$, o que contradiz a condição 1 do lema do bombeamento.

Portanto, podemos concluir que C não é regular.

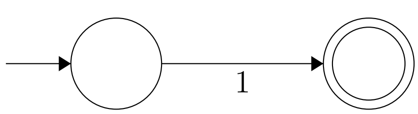
L3.3 Converter a expressão regular $0(0 \cup 1)^*01(0 \cup 1)^*1$ para AFN.

Resposta: As figuras abaixo mostram passo a passo a construção do AFN que representa a expressão dada.

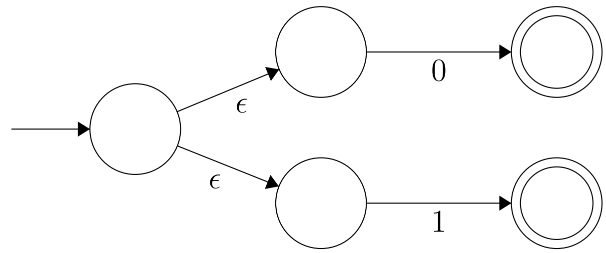
$\boxed{0}$



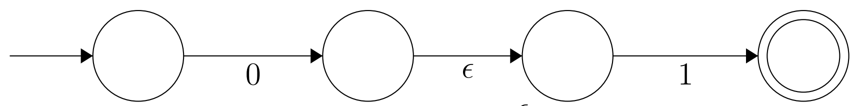
$\boxed{1}$



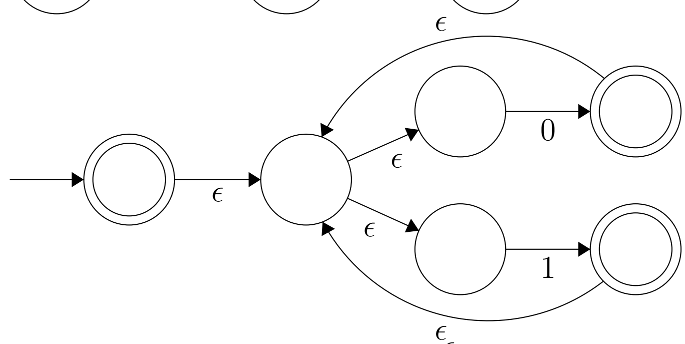
$\boxed{0 \cup 1}$



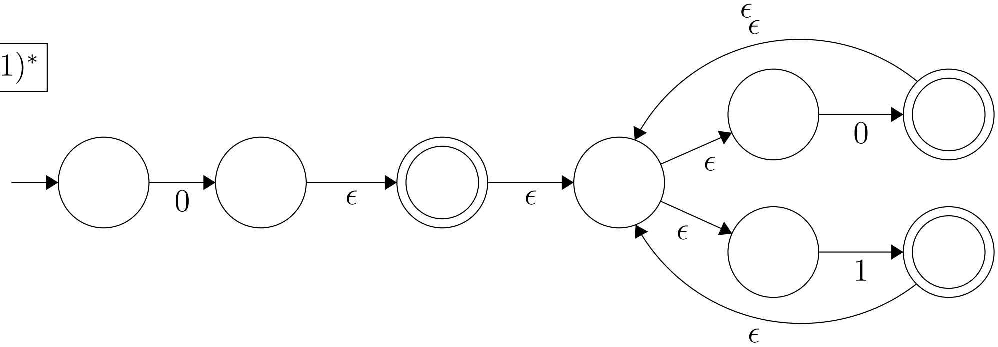
$\boxed{01}$



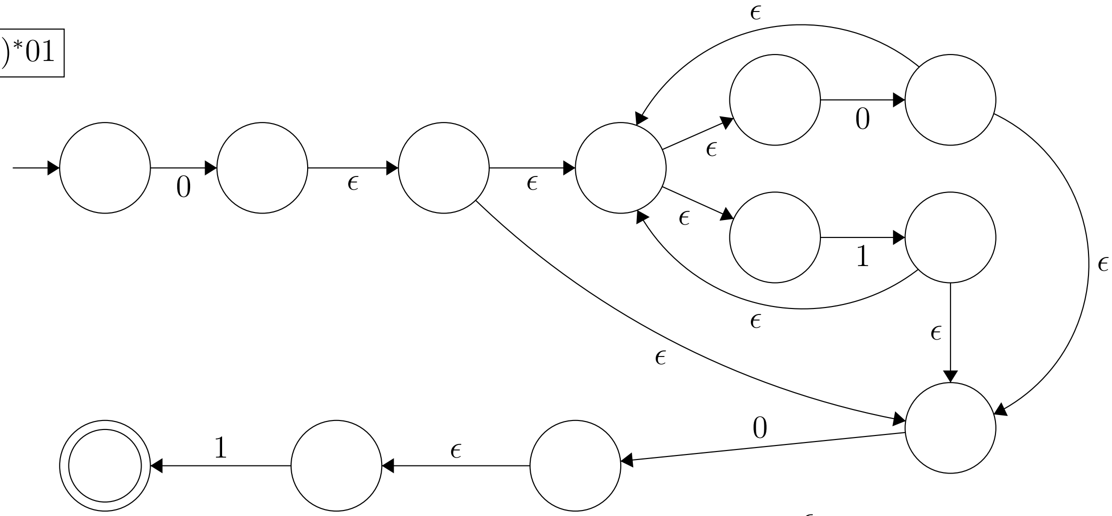
$\boxed{(0 \cup 1)^*}$



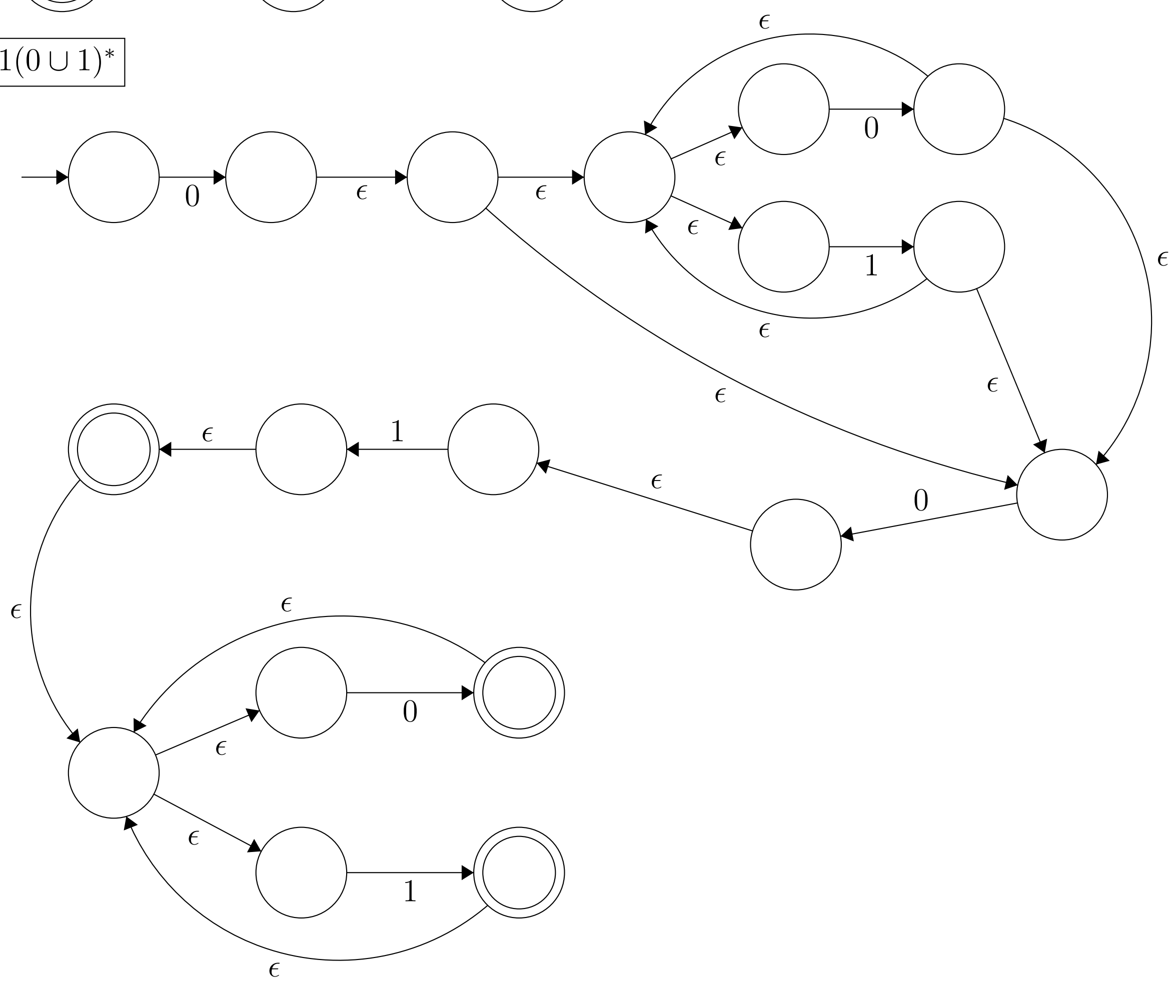
$\boxed{0(0 \cup 1)^*}$



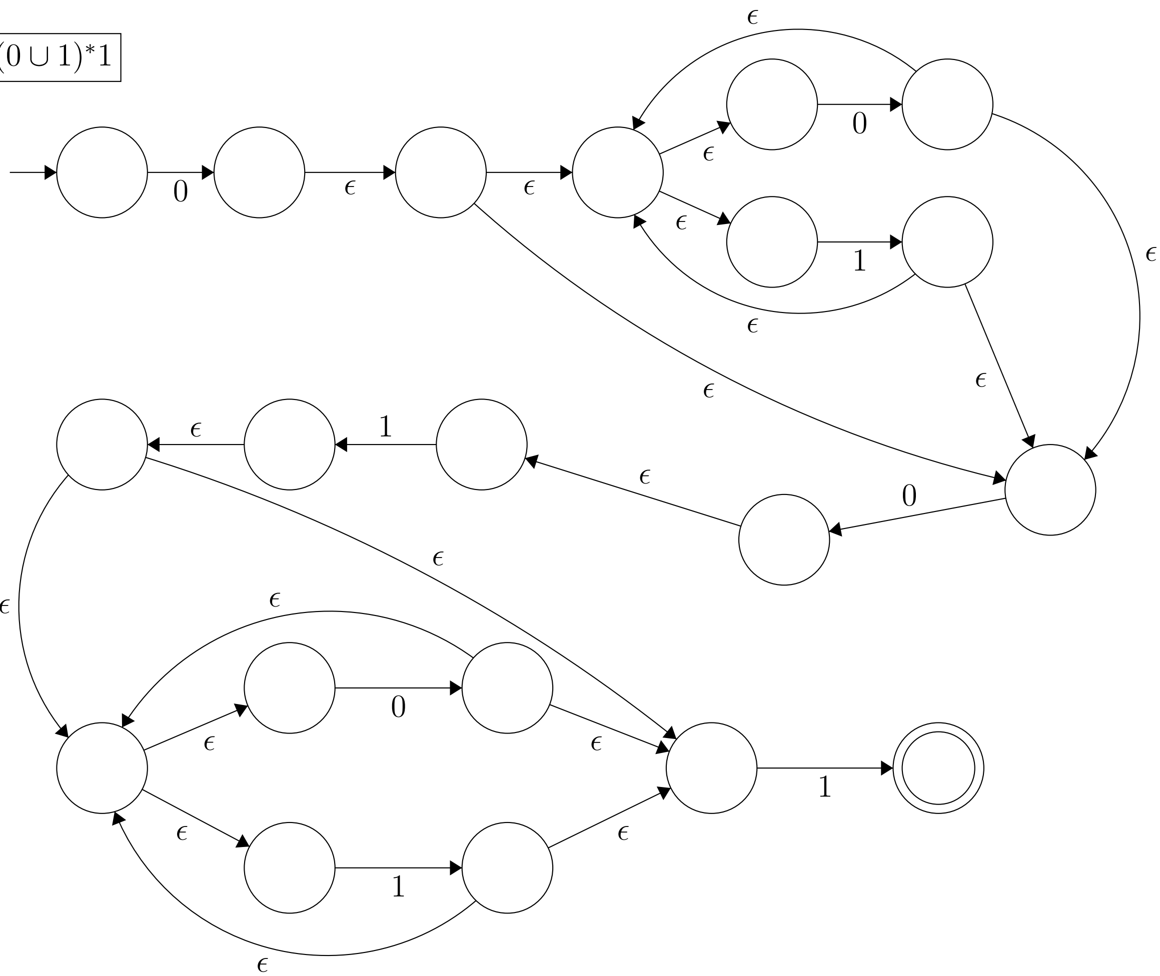
$\boxed{0(0 \cup 1)^*01}$



$\boxed{0(0 \cup 1)^*01(0 \cup 1)^*}$

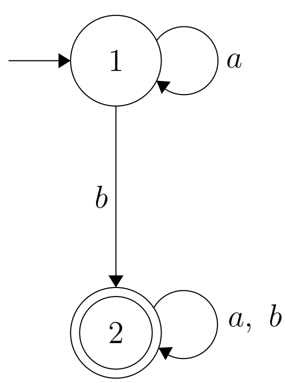


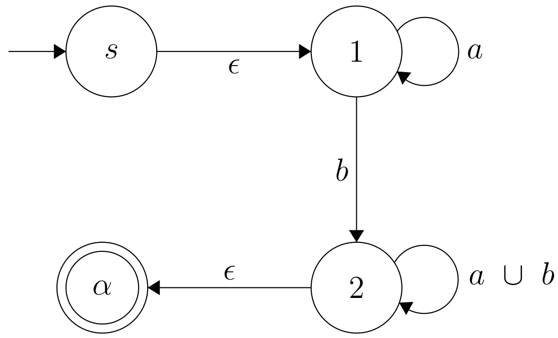
$\boxed{0(0 \cup 1)^*01(0 \cup 1)^*1}$



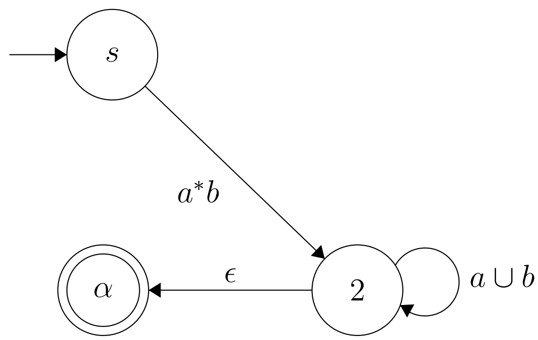
L3.4 No autômato generalizado da figura 1.67b, foi removido o estado 2, resultando no autômato da figura 1.67c. Foi então removido o estado 1 para produzir o autômato da figura 1.67d, obtendo-se assim uma expressão regular final. Refazer as contas produzindo um autômato generalizado ao se remover o estado 1 daquele da figura 1.67b. Deste autômato generalizado, remova o estado 2 e produza um novo autômato generalizado final com dois estados.

Resposta:

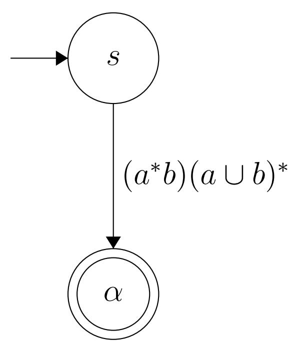




Removendo o estado 1, onde $q_{rem} = 1, q_i = s, q_j = 2, R_1 = \epsilon, R_2 = a, R_3 = b, R4 = \emptyset$, temos $(\epsilon)(a)^*(b) \cup (\emptyset) = a^*b$:



Removendo o estado 2, onde $q_{rem} = 2, q_i = s, q_j = \alpha, R_1 = a^*b, R_2 = a \cup b, R_3 = \epsilon, R4 = \emptyset$, temos $(a^*b)(a \cup b)^*(\epsilon) \cup (\emptyset) = (a^*b)(a \cup b)^*$:



Referências

[1] Michael Sipser. *Introduction to the theory of computation*. Boston: Thomson Course Technology, 2006. ISBN: 0534950973.