MAC 4722 - Linguagens, Autômatos e Computabilidade

Rodrigo Augusto Dias Faria - NUSP 9374992
Departamento de Ciência da Computação - IME/USP

21 de maio de 2016

Lista 5

L5.1 Construa a gramática obtida a partir do autômato a pilha da figura 2.15 usando o lema 2.27, a segunda parte do teorema 2.20. Particione o conjunto de variáveis da sua gramática de forma a exibir quais delas geram a linguagem vazia e quais geram linguagens não vazias.

Resposta: TODO

L5.2 (Sipser 2.20) Seja $A/B = \{w \mid wx \in A \text{ para algum } x \in B\}$. Mostre que, se A é livre do contexto e B é regular, então A/B é livre do contexto.

Resposta: TODO

L5.3 (Sipser 2.30) Use o lema do bombeamento para mostrar que as seguintes linguagens não são livres do contexto.

a. $L_a = \{0^n1^n0^n1^n \mid n \geq 0\}$

b. $L_b = \{0^n\#0^{2n}\#0^{3n} \mid n \geq 0\}$ - Resposta no livro

c. $L_c = \{w\#t \mid w \text{ é uma subcadeia de } t, \text{ onde } w, t \in \{a,b\}^*\}$ - Resposta no livro

d. $L_d = \{t_1\#t_2 \dots \#t_k \mid k \geq 2, \text{ cada } t_i \in \{a,b\}^*, \text{ e } t_i = t_j, \text{ para algum } i \neq j\}$

Resposta: Vamos usar o lema do bombeamento para mostrar que L_d não é livre do contexto. A prova é por contradição.

Suponha o contrário, ou seja, que L_d é livre do contexto. Seja p o comprimento de bombeamento dado pelo lema do bombeamento. Seja s a cadeia $s = a^pb^p\#a^pb^p$. Como $s \in L_d$ e $|s| \geq p$, o lema do bombeamento garante que s pode ser dividida em cinco partes $s = uvxyz$, onde, para qualquer $i \geq 0$, $uv^ixy^iz \in L_d$. Vamos mostrar que isso é impossível.

Vamos analisar todas as possibilidades de particionamento de s.

Caso 1: v e y contêm apenas a's da primeira parte de s, tal que $u = a^l, v = a^m, x = a^n, y = a^q$ e $z = a^rb^p\#a^pb^p$, onde $l, m, n, q, r \geq 0$, m ou $q \neq 0$ e $l + m + n + q + r = p$.
Pelo lema do bombeamento, podemos bombear v e y i vezes, para qualquer $i \geq 0$. Se tomarmos $i = 0$, temos que a cadeia uxz possui menos a's na primeira parte

(antes do #) que na segunda parte (após o #), pois como m ou $q \neq 0$, temos que $l + n + r < p$ e, portanto, esta nova cadeia não pertence a L_d, o que é uma contradição.

Analogamente, este caso cobre a situação em que v e y contêm apenas a's da segunda parte de s.

Caso 2: v e y contêm b's da primeira parte de s e não possuem símbolos da segunda parte.

Temos duas possibilidades:

- $u = a^l, v = a^m b^n, x = b^q, y = b^r$ e $z = b^t \# a^p b^p$, onde $l, m, n, q, r, t \geq 0$, $m + n$ ou $r \neq 0$, $l + m = p$, $n + q + r + t = p$ e $|vxy| \leq p$ ou,
- $u = a^l, v = a^r, x = a^q, y = a^m b^n$ e $z = b^t \# a^p b^p$, onde $l, m, n, q, r, t \geq 0$, $m + n$ ou $r \neq 0$, $l + m + q + r = p$, $n + t = p$ e $|vxy| \leq p$.

Vamos assumir, sem perda de generalidade, que a quantidade de b's de v ou y é maior que zero, caso contrário, voltaríamos ao caso anterior. Dessa forma, para qualquer uma das duas possibilidades, se fizermos um bombeamento de v e y i vezes, para $i = 0$, temos que a cadeia uxz possui menos b's na primeira parte (antes do #) do que na segunda (após o #) e, portanto, esta nova cadeia não pertence a L_d, o que é uma contradição.

Analogamente, este caso cobre a situação em que v e y contêm b's da segunda parte de s.

Caso 3: v e y contêm b's da primeira parte de s e a's da segunda parte de s.

Pela condição 2 do lema do bombeamento, temos que v ou y possuem ao menos um símbolo. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que v ou y possui pelo menos um b da primeira parte e pelo menos um a da segunda parte de s, caso contrário, cairíamos em um dos casos já abordados previamente. Ao bombearmos v e y i vezes, para $i = 0$, temos que a cadeia uxz possui menos b's na primeira parte do que na segunda e menos a's na segunda parte do que na primeira, o que é uma contradição, já que essa cadeia não pertence a L_d.

Vale notar que é impossível que v e y possuam símbolos iguais de partes diferentes da cadeia s pela condição 3 do lema do bombeamento.

L5.4 (Sipser 2.32) Seja $\Sigma = \{1, 2, 3, 4\}$ e $C = \{w \in \Sigma^* \mid$ em w, o número de 1s é igual ao número de 2s, e o número de 3s é igual ao número de 4s $\}$. Mostre que C não é livre do contexto.

Resposta: TODO