

## Visão e Processamento de Imagens - Avaliação única - Parte II

### Preste atenção para as regras da prova

- 1- O fonte latex (.tex) da prova será disponibilizado para facilitar que você não tenha que copiar o enunciado das questões. Todas as questões devem ser respondidas no mesmo arquivo.
- 2- A prova é **individual**. É permitido a consulta a livros, apontamentos ou Internet, desde que devidamente referenciada. Não é permitida a consulta a colegas, amigos, família, cachorro, papagaio e etc.
- 3- A prova deve ser entregue diretamente no Paca, assim como todos os códigos e imagens devem ser entregues no mesmo arquivo comprimido. **Duração da prova: 14 dias.**
- 4- Cada questão vale 20 pontos (pois são apenas 3 questões) para a graduação e 15 pontos para a pós-graduação (pois são 4 questões).

**Q1.** Para fazer esta questão, leia primeiro o artigo abaixo:

- <http://www.eecs.berkeley.edu/Pubs/TechRpts/2015/EECS-2015-85.pdf>
- Faça um resumo do artigo de acordo com as indicações que deixei no paca (artigos sobre como fazer um resumo).
  1. Summary 40% : 2.5*pages*
    - 1.1. Motivation 8%
    - 1.2. Contribution 8%
    - 1.3. Methodology 16%
    - 1.4. Conclusion 8%
  2. Critique 30% : 1.5*pages*
    - 2.1. Title of 1st Critique 15%
    - 2.2. Title of 2nd Critique 15%
    - 2.3. Optional: Title of 3rd Critique
  3. Synthesis 30% : 1*page*
    - 3.1. Title of 1st Idea 30%
    - 3.2. Optional: Title of 2nd Idea

1. What is the research problem the paper attempts to address? O artigo contextualiza o cenário atual no que diz respeito à manipulação de imagens por ferramentas de edição, ressaltando a ampla gama de técnicas que essas ferramentas possuem e que permitem aos seus usuários a manipulação de imagens que implica em uma análise detalhista por um profissional especializado para descobrir algum tipo de fraude.

What is the motivation of the research work? Não obstante, a motivação principal do trabalho proposto é de criar uma ferramenta capaz de avaliar uma dada imagem, de forma que qualquer pessoa comum possa identificar potenciais fraudes, sem a necessidade de auxílio de um analista forense, por exemplo. Podemos

destacar, ainda, o fato de que pessoas podem coletar evidências de crimes ou eventos quaisquer de uma forma trivial considerando a difusão de dispositivos móveis equipados com câmeras de boa qualidade.

Is there a crisis in the research field that the paper attempts to resolve? Podemos afirmar que ainda não há crise na área pesquisada, porém, tendências de mercado norteiam para que processos historicamente feitos sob arquivos impressos e com a presença dos envolvidos, sejam totalmente realizados por plataformas online, o que pode, futuramente, causar grandes transtornos às empresas e ao estado de um modo geral pelo risco de desvio de conduta e possibilidades de fraudes em processos sigilosos, de grande valor agregado, avaliações contratuais, etc. Não é demasiado lembrar que processos judiciais já são interpretados com ajuda de imagens digitais, o que nos remete a necessidade de garantir a autenticidade das mesmas, assim como também no jornalismo, cuja integridade pode ser colocada em xeque em casos de adulteração de fotos em quaisquer publicações.

Is the research work attempting to overcome the weaknesses of existing approaches? Is an existing research paradigm challenged? In short, what is the niche of the paper? Do ponto de vista de mercado, o trabalho apresentado visa um nicho não explorado pelos concorrentes avaliados, já que fornece um serviço com resultados de detecção mais informativos do que outras plataformas disponíveis. Em outras palavras, os concorrentes focam apenas em análises de baixo nível das imagens e o serviço proposto, além das funcionalidades encontradas nos concorrentes avaliados, também adiciona suporte a outras avaliações de alto nível, tais como, detecção de regiões na imagem que foram copiadas/coladas.

2. What are the claimed contributions of the paper? What is new in this paper? A new question is asked? A new understanding of the research problem? A new methodology for solving problems? A new algorithm? A new breed of software tools or systems? A new experimental method? A new proof technique? A new formalism or notation? A new evidence to substantiate or disprove a previously published claim? A new research area? In short, what is innovative about this paper?

3. How do the authors substantiate their claims? What is the methodology adopted to substantiate the claims? What is the argument of the paper? What are the major theorems? What experiments are conducted? Data analyses? Simulations? Benchmarks? User studies? Case studies? Examples? In short, what makes the claims scientific (as opposed to being mere opinions1)?

4. What are the conclusions? What have we learned from the paper? Shall the standard practice of the field be changed as a result of the new findings? Is the result generalizable? Can the result be applied to other areas of the field? What are the open problems? In short, what are the lessons one can learn from the paper?

- Implemente o método ELA (Error Level Analysis) em Python (apresente o **algoritmo** na prova e anexe o código em Python no arquivo zip).

Abaixo o algoritmo que foi implementado onde utilizei o pacote *pillow* do python para as operações na imagem. O código completo está em **source/ela.py**.

---

**Algoritmo 1: ERROR LEVEL ANALYSIS**

---

**Entrada:** Caminho da imagem, escala

**Saída:** Imagem com ELA calculado

```
1 ImagemOriginal ← abrirImagem(Caminho da imagem)
2 se ImagemOriginal não é JPEG então
3   | retorna Nulo
4 fim
5 salvarImagem(Caminho da imagem comprimida, JPEG, qualidade)
6 ImagemComprimida ← abrirImagem(Caminho da imagem comprimida)
7 para x ← 0 até largura ImagemOriginal fazer
8   para y ← 0 até altura ImagemOriginal fazer
9     pixel_img_original = ImagemOriginal[x, y]
10    pixel_img_comprimida = ImagemComprimida[x, y]
11    R = abs(pixel_img_original[0] - pixel_img_comprimida[0]) * escala
12    G = abs(pixel_img_original[1] - pixel_img_comprimida[1]) * escala
13    B = abs(pixel_img_original[2] - pixel_img_comprimida[2]) * escala
14    ImagemELA[x, y] = [R, G, B]
15   fim
16 fim
17 retorna ImagemELA
```

---

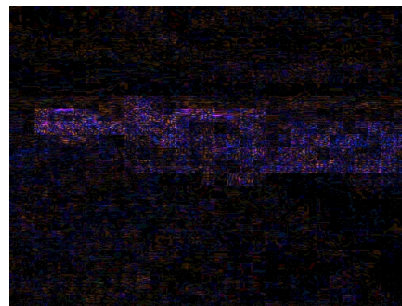
- Teste seu algoritmo com as imagens que deixei no paca para este exercício. Quantas imagens seriam consideradas modificadas por esse método? Comente o resultado, comparando com a sua intuição.

Uma vez submetida a imagem ao *Error Level Analysis*, pode-se perceber pelo resultado que a região manipulada terá um nível de erro diferente das regiões não manipuladas. Logo, o nível de erro irá expor a região manipulada rotulando as regiões com maior alteração após a imagem ser salva com um nível de qualidade inferior [2].

Na Figura 1b, podemos ver o resultado do ELA na imagem dada. As regiões com maior chance de ter alterações são as que apresentam os pixels com maior brilho, uma vez que a alteração da imagem causa instabilidade nestas áreas.



(1a) Imagem original



(1b) Imagem com o resultado do ELA

Os resultados foram avaliados de acordo com o brilho das bordas que devem ser

semelhantes no resultado da aplicação do ELA na imagem. Além disso, regiões de cores e texturas semelhantes na imagem original, independentemente da cor, também devem ter cores aproximadamente similares no ELA [4].

Isto posto, considere que um total de 23 {2000\_snowballcat.jpg, blacklion01.jpg, cows\_on\_beach.jpg, daliatom.jpg, frozenvenice.jpg, glass\_butterfly.jpg, houseboat01.jpg, jumping\_giraffe.jpg, kissing.jpg, leap.jpg, magic\_tap.jpg, manitoba\_security.jpg, moonmelon01.jpg, nikolatesla.jpg, rocket\_bike.jpg, sharkswim.jpg, skiing\_egypt.jpg, spacechair.jpg, tattooguy01.jpg, tennis.jpg, tentacle\_bldg.jpg, vuitton.jpg, wienplane.jpg} imagens foram alteradas de acordo com o método e avaliação a posteriori.

**Q2.** Esta questão refere-se à transformada de Fourier.

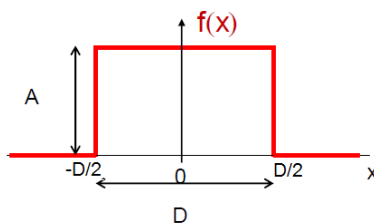
– Encontre a transformada de Fourier da função:

$$f(x) = \begin{cases} 7 & \text{if } -5 < x < 5 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Por definição, temos que a transformada de Fourier de um pulso retangular de duração  $D$  e altura  $A$  tem a forma dada por:

$$F(\omega) = AD \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega D}{2}\right) = AD \frac{\sin\left(\frac{\omega D}{2}\right)}{\frac{\omega D}{2}}$$

A função  $f(x)$  pode ser representada graficamente como:



Onde:

$$f(x) = \begin{cases} A, & x \in \left[-\frac{D}{2}, \frac{D}{2}\right] \\ 0, & x \notin \left[-\frac{D}{2}, \frac{D}{2}\right] \end{cases}$$

Logo, temos que  $A = 7$  e  $D = 10$  e, portanto, a transformada de Fourier da função

$f(x)$  é:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= AD \frac{\sin(\frac{\omega D}{2})}{\frac{\omega D}{2}} \\ &= 7 * 10 \frac{\sin(\frac{\omega 10}{2})}{\frac{\omega 10}{2}} \\ &= 70 \frac{\sin(\frac{\omega 10}{2})}{\frac{\omega 10}{2}} \\ &= 70 \frac{\sin(5\omega)}{5\omega} \end{aligned}$$

- Encontre a transformada de Fourier da função  $g(x) = f(x) \cos \omega_0 x$ , sabendo que a transformada de Fourier de  $f(x)$  é dada por  $F(\omega)$

Tomando a propriedade da modulação:

$$\mathcal{F}[x(t) \cos(\omega_0 t)] = \frac{1}{2} [F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)]$$

Temos que a transformada de Fourier da função  $g(x)$  é:

$$G(\omega) = \frac{1}{2} F(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} F(\omega - \omega_0)$$

- Ache a inversa da transformada de Fourier de  $G(\omega) = 20 \frac{\sin 5\omega}{5\omega} e^{-3\omega i}$

Por ora, ignorando a exponencial complexa de  $G(\omega)$ , podemos obter os valores de  $A$  e  $D$ :

$$20 \frac{\sin(5\omega)}{5\omega} = AD \frac{\sin(\frac{\omega D}{2})}{\frac{\omega D}{2}}$$

$$5\omega = \frac{\omega D}{2}$$

$$10\omega = \omega D$$

$$D = \frac{10\omega}{\omega} = 10$$

$$AD = 20$$

$$A10 = 20$$

$$A = 2$$

Tomando a representação da função  $f(x)$  do pulso retangular de duração  $D$  e amplitude  $A$ :

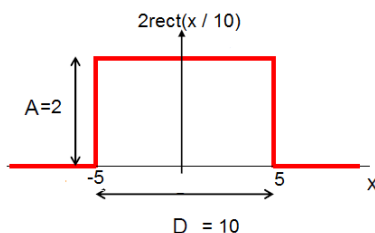
$$f(x) = A \cdot \text{rect}(x) = \begin{cases} A, & x \in [-\frac{D}{2}, \frac{D}{2}] \\ 0, & x \notin [-\frac{D}{2}, \frac{D}{2}] \end{cases}$$

Vimos no primeiro item do exercício 2 que:

$$A \cdot \text{rect}\left(\frac{x}{D}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} A D \text{sinc}\left(\frac{\omega D}{2}\right)$$

O que nos dá a forma do pulso retangular:

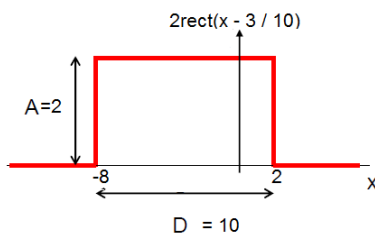
$$f(x) = 2 \cdot \text{rect}\left(\frac{x}{10}\right) = \begin{cases} 2, & x \in [-5, 5] \\ 0, & x \notin [-5, 5] \end{cases}$$



Considerando agora a exponencial complexa, sabemos que ela representa um deslocamento no tempo, que é 3 neste caso e, portanto:

$$2 \cdot \text{rect}\left(\frac{x-3}{10}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} 20 \frac{\sin 5\omega}{5\omega} e^{-3\omega i}$$

$$g(x) = 2 \cdot \text{rect}\left(\frac{x-3}{10}\right) = \begin{cases} 2, & -8 < x < 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



- Calcule a DFT do sinal  $f = \{1, 3, 5, 3, 1\}$

A Transformada Discreta de Fourier (DFT) provém da Série Discreta de Fourier (DFS) e é dada por [1]:

$$X_k = \sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{\frac{-2\pi i k m}{N}}, \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Para realizar os cálculos devemos utilizar a identidade de Euler:

$$e^{-i\pi} = \cos \pi - i \sin \pi$$

Temos que  $N=5$ , ou seja, o tamanho do vetor do sinal dado por  $f$ , logo:

$$\begin{aligned}
X_0 &= (1e^0 + 3e^0 + 5e^0 + 3e^0 + 1e^0) \\
X_1 &= (1e^0 + 3e^{\frac{-2\pi i}{5}} + 5e^{\frac{-2\pi i 2}{5}} + 3e^{\frac{-2\pi i 3}{5}} + 1e^{\frac{-2\pi i 4}{5}}) \\
X_2 &= (1e^0 + 3e^{\frac{-2\pi i 2}{5}} + 5e^{\frac{-2\pi i 4}{5}} + 3e^{\frac{-2\pi i 6}{5}} + 1e^{\frac{-2\pi i 8}{5}}) \\
X_3 &= (1e^0 + 3e^{\frac{-2\pi i 3}{5}} + 5e^{\frac{-2\pi i 6}{5}} + 3e^{\frac{-2\pi i 9}{5}} + 1e^{\frac{-2\pi i 12}{5}}) \\
X_4 &= (1e^0 + 3e^{\frac{-2\pi i 4}{5}} + 5e^{\frac{-2\pi i 8}{5}} + 3e^{\frac{-2\pi i 12}{5}} + 1e^{\frac{-2\pi i 16}{5}}) \\
\\
X_0 &= (1 + 3 + 5 + 3 + 1) \\
X_1 &= (1 + 3e^{\frac{-2\pi i}{5}} + 5e^{\frac{-4\pi i}{5}} + 3e^{\frac{-6\pi i}{5}} + 1e^{\frac{-8\pi i}{5}}) \\
X_2 &= (1 + 3e^{\frac{-4\pi i}{5}} + 5e^{\frac{-8\pi i}{5}} + 3e^{\frac{-12\pi i}{5}} + 1e^{\frac{-16\pi i}{5}}) \\
X_3 &= (1 + 3e^{\frac{-6\pi i}{5}} + 5e^{\frac{-12\pi i}{5}} + 3e^{\frac{-18\pi i}{5}} + 1e^{\frac{-24\pi i}{5}}) \\
X_4 &= (1 + 3e^{\frac{-8\pi i}{5}} + 5e^{\frac{-16\pi i}{5}} + 3e^{\frac{-24\pi i}{5}} + 1e^{\frac{-32\pi i}{5}})
\end{aligned}$$

Calculando cada exponencial complexa com a relação de Euler e substituindo os resultados na equação acima:

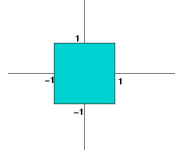
$$\begin{aligned}
e^{\frac{-2\pi i}{5}} &= \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 0,30902 - 0,95106i \\
e^{\frac{-4\pi i}{5}} &= \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -0,80902 - 0,58779i \\
e^{\frac{-6\pi i}{5}} &= \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) = -0,80902 + 0,58779i \\
e^{\frac{-8\pi i}{5}} &= \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) = 0,30902 - 0,95106i \\
e^{\frac{-12\pi i}{5}} &= \cos\left(\frac{12\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{12\pi}{5}\right) = 0,30902 - 0,95106i \\
e^{\frac{-16\pi i}{5}} &= \cos\left(\frac{16\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{16\pi}{5}\right) = -0,80902 + 0,58779i \\
e^{\frac{-18\pi i}{5}} &= \cos\left(\frac{18\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{18\pi}{5}\right) = 0,30902 + 0,95106i \\
e^{\frac{-24\pi i}{5}} &= \cos\left(\frac{24\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{24\pi}{5}\right) = -0,80902 - 0,58779i \\
e^{\frac{-32\pi i}{5}} &= \cos\left(\frac{32\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{32\pi}{5}\right) = 0,30902 - 0,95106i
\end{aligned}$$

Temos então que o resultado da DFT é:

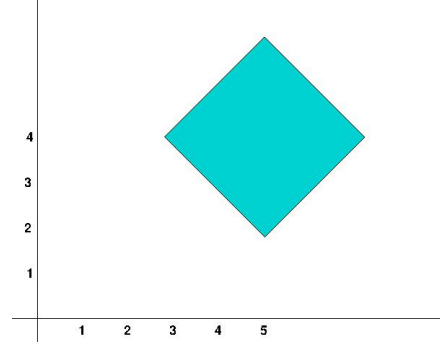
$$\begin{aligned}
X[x] &= 13, -4.236067 - 3.077683i, 0.236067 + 0.726542i, \\
&\quad 0.236067 - 0.726542i, -4.236067 + 3.077683i
\end{aligned}$$

- Q3.** – Calcule (apresente os cálculos) dos descritores de Fourier das figuras 3a e 3b. Lembre-se que os pontos da borda do quadrado serão representados por pontos

no plano de Argand-Gauss. Isto é, cada ponto no plano passa a ser um número complexo e a borda passa a ser um vetor de pontos complexos, como num sinal, mas com valores complexos.



(3a) Quadrado de lado 1



(3b) Quadrado de lado 3

**Resultados para a primeira imagem** Para que possamos calcular os descritores de Fourier, devemos representar as coordenadas do quadrado (1,1), (-1,1), (-1,-1) e (1,-1), como coordenadas no plano de Argand-Gauss que, neste caso, são:  $(1 + i, -1 + i, -1 - i, 1 - i)$ .

Os descritores de Fourier podem ser calculados a partir da DFT [3]:

$$X_k = \sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{\frac{-2\pi i k m}{N}}, \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Da mesma forma que no item anterior, para realizar os cálculos devemos utilizar a identidade de Euler:

$$e^{-i\pi} = \cos \pi - i \sin \pi$$

Temos que  $N=4$ , ou seja, o número de pontos no plano de Argand-Gauss, logo:

$$\begin{aligned} X_0 &= (1 + i)e^0 + (-1 + i)e^0 + (-1 - i)e^0 + (1 - i)e^0 \\ X_1 &= (1 + i)e^0 + (-1 + i)e^{\frac{-2\pi i 1}{4}} + (-1 - i)e^{\frac{-2\pi i 2}{4}} + (1 - i)e^{\frac{-2\pi i 3}{4}} \\ X_2 &= (1 + i)e^0 + (-1 + i)e^{\frac{-2\pi i 2}{4}} + (-1 - i)e^{\frac{-2\pi i 4}{4}} + (1 - i)e^{\frac{-2\pi i 6}{4}} \\ X_3 &= (1 + i)e^0 + (-1 + i)e^{\frac{-2\pi i 3}{4}} + (-1 - i)e^{\frac{-2\pi i 6}{4}} + (1 - i)e^{\frac{-2\pi i 9}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_0 &= (1 + i) + (-1 + i) + (-1 - i) + (1 - i) \\ X_1 &= (1 + i) + (-1 + i)e^{\frac{-2\pi i}{4}} + (-1 - i)e^{\frac{-4\pi i}{4}} + (1 - i)e^{\frac{-6\pi i}{4}} \\ X_2 &= (1 + i) + (-1 + i)e^{\frac{-4\pi i}{4}} + (-1 - i)e^{\frac{-8\pi i}{4}} + (1 - i)e^{\frac{-12\pi i}{4}} \\ X_3 &= (1 + i) + (-1 + i)e^{\frac{-6\pi i}{4}} + (-1 - i)e^{\frac{-12\pi i}{4}} + (1 - i)e^{\frac{-18\pi i}{4}} \end{aligned}$$



Calculando cada exponencial complexa com a relação de Euler e substituindo os resultados na equação acima:

$$e^{\frac{-2\pi i}{4}} = \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) = -i$$

$$e^{\frac{-4\pi i}{4}} = \cos\left(\frac{4\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{4\pi}{4}\right) = -1$$

$$e^{\frac{-6\pi i}{4}} = \cos\left(\frac{6\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{6\pi}{4}\right) = i$$

$$e^{\frac{-8\pi i}{4}} = \cos\left(\frac{8\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{8\pi}{4}\right) = 1$$

$$e^{\frac{-12\pi i}{4}} = \cos\left(\frac{12\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{12\pi}{4}\right) = -1$$

$$e^{\frac{-18\pi i}{4}} = \cos\left(\frac{18\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{18\pi}{4}\right) = -i$$

Temos então que o resultado dos descritores da imagem é:

$$X_0 = 0$$

$$X_1 = (1 + i) + (-1 + i) * (-i) + (-1 - i) * (-1) + (1 - i) * (i)$$

$$X_2 = (1 + i) + (-1 + i) * (-1) + (-1 - i) * (1) + (1 - i) * (-1)$$

$$X_3 = (1 + i) + (-1 + i) * (i) + (-1 - i) * (-1) + (1 - i) * (-i)$$

$$X_0 = 0$$

$$X_1 = 4 + 4i$$

$$X_2 = 0$$

$$X_3 = 0$$

**Resultados para a segunda imagem** Para Inicialmente vamos calcular as coordenadas dos pontos de borda (os quatro cantos do quadrado). Conhecemos a coordenada do eixo x para o ponto situado mais acima e para o ponto situado mais abaixo. Essa coordenada é igual a 5. Conhecemos também a coordenada do eixo y para os ponto mais a esquerda e para o ponto mais a direita. Essa coordenada é igual a 4. Resta-nos calcular o restante das coordenadas.

Para calcular as demais coordenadas precisamos calcular o valor da diagonal desse quadrilátero. A diagonal é a hipotenusa dos dois triângulos retângulos formados ao se dividir o quadrilátero ao meio (latitudinalmente ou longitudinalmente), onde cada um dos lados possui comprimento 3.

Utilizando, pois, o teorema de Pitágoras temos que a hipotenusa h desse triângulo é dado por:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

$$h^2 = 3^2 + 3^2$$

$$h = \sqrt{18}$$

Logo, temos que as coordenadas dos pontos são,  $(5, 4 + \frac{\sqrt{18}}{2})$ ,  $(5 - \frac{\sqrt{18}}{2}, 4)$ ,  $(5, 4 - \frac{\sqrt{18}}{2})$  e  $(5 + \frac{\sqrt{18}}{2}, 4)$ . Como o valor de  $\sqrt{18}$  é igual a 4,2426 temos que as coordenadas dos pontos são, respectivamente,  $(5, 6, 1213)$ ,  $(2, 8787, 4)$ ,  $(5, 1, 8787)$  e  $(7, 1213, 4)$ . Para calcular os descritores de Fourier precisamos que essas coordenadas sejam representadas por pontos no Plano de Argand-Gauss.

As coordenadas representadas no plano de Argand-Gauss são:  $(5+6, 1213j, 2, 8787+4j, 5+1, 8787j, 7, 1213+4j)$ .

Os cálculos dos descritores de Fourier são apresentados abaixo, dados:

$$X[k] = \sum_{i=0}^{N-1} x[i] e^{\frac{-j2\pi ik}{N}}$$

$$e^{-j\theta} = \cos(\theta) - j \sin(\theta)$$

$$X[0] = (5 + 6, 1213j)e^0 + (2, 8787 + 4j)e^0 + (5 + 1, 8787j)e^0 + (7, 1213 + 4j)e^0$$

$$X[0] = 5 + 6, 1213j + 2, 8787 + 4j + 5 + 1, 8787j + 7, 1213 + 4j$$

$$X[0] = 20 + 16j$$

$$X[1] = (5 + 6, 1213j)e^0 + (2, 8787 + 4j)e^{\frac{-j2\pi}{4}} + (5 + 1, 8787j)e^{\frac{-j4\pi}{4}} + (7, 1213 + 4j)e^{\frac{-j6\pi}{4}}$$

$$X[1] = (5 + 6, 1213j)e^0 + (2, 8787 + 4j) \cos(\frac{\pi}{2}) - j \sin(\frac{\pi}{2}) + (5 + 1, 8787j) \cos(\pi) - j \sin(\pi)$$

$$+ (7, 1213 + 4j) \cos(\frac{3\pi}{2}) - j \sin(\frac{3\pi}{2})$$

$$X[1] = (5 + 6, 1213j) + (2, 8787 + 4j)(-j) + (5 + 1, 8787j)(-1) + (7, 1213 + 4j)(j)$$

$$X[1] = 0 + 8, 4852j$$

$$X[2] = (5 + 6, 1213j)e^0 + (2, 8787 + 4j)e^{\frac{-j4\pi}{4}} + (5 + 1, 8787j)e^{\frac{-j8\pi}{4}} + (7, 1213 + 4j)e^{\frac{-j12\pi}{4}}$$

$$X[2] = (5 + 6, 1213j)e^0 + (2, 8787 + 4j) \cos(\pi) - j \sin(\pi) + (5 + 1, 8787j) \cos(2\pi) - j \sin(2\pi)$$

$$+ (7, 1213 + 4j) \cos(3\pi) - j \sin(3\pi)$$

$$X[2] = (5 + 6, 1213j) + (2, 8787 + 4j)(-1) + (5 + 1, 8787j)(1) + (7, 1213 + 4j)(-1)$$

$$X[2] = 0$$

$$X[3] = (5 + 6, 1213j)e^0 + (2, 8787 + 4j)e^{\frac{-j6\pi}{4}} + (5 + 1, 8787j)e^{\frac{-j12\pi}{4}} + (7, 1213 + 4j)e^{\frac{-j18\pi}{4}}$$

$$X[3] = (5 + 6, 1213j)e^0 + (2, 8787 + 4j) \cos(\frac{3\pi}{2}) - j \sin(\frac{3\pi}{2}) + (5 + 1, 8787j) \cos(3\pi) - j \sin(3\pi)$$

$$+ (7, 1213 + 4j) \cos(\frac{9\pi}{2}) - j \sin(\frac{9\pi}{2})$$

$$X[3] = (5 + 6, 1213j) + (2, 8787 + 4j)(j) + (5 + 1, 8787j)(-1) + (7, 1213 + 4j)(-j)$$

$$X[3] = 0$$

- Para confirmar que seus cálculos estão corretos, implemente um programa em Python que receba como entrada um vetor de números complexos (que são as coordenadas das bordas) e retorne os descritores de Fourier do vetor de entrada. Você pode usar as funções fornecidas pela biblioteca NUMPY para facilitar a programação.

O programa está na pasta source sob o nome *fourier\_descriptors.py*.

- Para reconstruir a curva, faça uma função que receba um vetor com os descritores de Fourier, um número  $N$  de descritores a serem usados e grafique os pontos num plano cartesiano (para fazer a mesma figura que fizemos nos slides das aulas 15 e 16).

## TODO

### Q4. Apenas para os alunos de pós-graduação

- Leia o artigo do Torre e do Poggio <ftp://publications.ai.mit.edu/ai-publications/pdf/AIM-768.pdf> e faça um resumo de acordo com as indicações que deixei no paca (artigos sobre como fazer um resumo).
- O que é um problema mal-posto?
- O que é regularização?
- Qual a importância do teorema apresentado no artigo?
- O que são filtros de banda limitada? Qual a sua importância no artigo?
- Quais são os métodos de encontrar borda apresentados no artigo?

## Referências

- [1] S Broughton. *Discrete Fourier analysis and wavelets : applications to signal and image processing*. Hoboken, N.J: Wiley, 2009. ISBN: 978-0-470-29466-6.
- [2] Neal Krawetz. “A Picture’s Worth....” Em: *Black Hat Briefings DC* 2 (2008), pp. 16–20.
- [3] Hélio Pedrini. *Análise de imagens digitais princípios, algoritmos e aplicações*. São Paulo: Thomson Learning, 2008. ISBN: 978-85-221-0595-3.
- [4] Yan Zhao, Anthony Sutardja e Omar Ramadan. *Digital Image Manipulation Forensic*. 2015. URL: <http://www.eecs.berkeley.edu/Pubs/TechRpts/2015/EECS-2015-85.html>.