

MC#16: Modelagem gravimétrica utilizando fontes pontuais

PALESTRANTES:

Victor Ribeiro Carreira - Observatório Nacional (ON-MCTIC)
(carreiravr@gmail.com)

Rodrigo Bijani - Universidade Federal Fluminense (UFF)
(rodrigobijani@gmail.com)

Sumário

Sumário

- Discussão sobre o Teorema de Helmholtz;

Sumário

- Discussão sobre o Teorema de Helmholtz;
- Teoria do Potencial e o Campo gravitacional;

Sumário

- Discussão sobre o Teorema de Helmholtz;
- Teoria do Potencial e o Campo gravitacional;
- Campo gravitacional produzido por:

Sumário

- Discussão sobre o Teorema de Helmholtz;
- Teoria do Potencial e o Campo gravitacional;
- Campo gravitacional produzido por:
 - Esfera (fonte pontual);

Sumário

- Discussão sobre o Teorema de Helmholtz;
- Teoria do Potencial e o Campo gravitacional;
- Campo gravitacional produzido por:
 - Esfera (fonte pontual);
 - Prisma (dique vertical);

Sumário

- Discussão sobre o Teorema de Helmholtz;
- Teoria do Potencial e o Campo gravitacional;
- Campo gravitacional produzido por:
 - Esfera (fonte pontual);
 - Prisma (dique vertical);
- Definição do Problema geológico/geofísico:

Sumário

- Discussão sobre o Teorema de Helmholtz;
- Teoria do Potencial e o Campo gravitacional;
- Campo gravitacional produzido por:
 - Esfera (fonte pontual);
 - Prisma (dique vertical);
- Definição do Problema geológico/geofísico:
 - Software interativo para modelagem via fontes pontuais;

Sumário

- Discussão sobre o Teorema de Helmholtz;
- Teoria do Potencial e o Campo gravitacional;
- Campo gravitacional produzido por:
 - Esfera (fonte pontual);
 - Prisma (dique vertical);
- Definição do Problema geológico/geofísico:
 - Software interativo para modelagem via fontes pontuais;
- Dado sintético: anomalia do dique vertical;

Sumário

- Discussão sobre o Teorema de Helmholtz;
- Teoria do Potencial e o Campo gravitacional;
- Campo gravitacional produzido por:
 - Esfera (fonte pontual);
 - Prisma (dique vertical);
- Definição do Problema geológico/geofísico:
 - Software interativo para modelagem via fontes pontuais;
- Dado sintético: anomalia do dique vertical;
 - jupyter notebooks:

Sumário

- Discussão sobre o Teorema de Helmholtz;
- Teoria do Potencial e o Campo gravitacional;
- Campo gravitacional produzido por:
 - Esfera (fonte pontual);
 - Prisma (dique vertical);
- Definição do Problema geológico/geofísico:
 - Software interativo para modelagem via fontes pontuais;
- Dado sintético: anomalia do dique vertical;
 - jupyter notebooks;
 - prism-grav.ipynb (dados sintéticos);

Sumário

- Discussão sobre o Teorema de Helmholtz;
- Teoria do Potencial e o Campo gravitacional;
- Campo gravitacional produzido por:
 - Esfera (fonte pontual);
 - Prisma (dique vertical);
- Definição do Problema geológico/geofísico:
 - Software interativo para modelagem via fontes pontuais;
- Dado sintético: anomalia do dique vertical;
 - jupyter notebooks;
 - prism-grav.ipynb (dados sintéticos);
 - synthetic.ipynb (fontes pontuais - modelo de clicks);

Sumário

- Discussão sobre o Teorema de Helmholtz;
- Teoria do Potencial e o Campo gravitacional;
- Campo gravitacional produzido por:
 - Esfera (fonte pontual);
 - Prisma (dique vertical);
- Definição do Problema geológico/geofísico:
 - Software interativo para modelagem via fontes pontuais;
- Dado sintético: anomalia do dique vertical;
 - jupyter notebooks;
 - prism-grav.ipynb (dados sintéticos);
 - synthetic.ipynb (fontes pontuais - modelo de clicks);
- Dado real : Bacia do Paraná;

Sumário

- Discussão sobre o Teorema de Helmholtz;
- Teoria do Potencial e o Campo gravitacional;
- Campo gravitacional produzido por:
 - Esfera (fonte pontual);
 - Prisma (dique vertical);
- Definição do Problema geológico/geofísico:
 - Software interativo para modelagem via fontes pontuais;
- Dado sintético: anomalia do dique vertical;
 - jupyter notebooks;
 - prism-grav.ipynb (dados sintéticos);
 - synthetic.ipynb (fontes pontuais - modelo de clicks);
- Dado real : Bacia do Paraná;
 - Ajuste dos dados através do software interativo;

Sumário

- Discussão sobre o Teorema de Helmholtz;
- Teoria do Potencial e o Campo gravitacional;
- Campo gravitacional produzido por:
 - Esfera (fonte pontual);
 - Prisma (dique vertical);
- Definição do Problema geológico/geofísico:
 - Software interativo para modelagem via fontes pontuais;
- Dado sintético: anomalia do dique vertical;
 - jupyter notebooks;
 - prism-grav.ipynb (dados sintéticos);
 - synthetic.ipynb (fontes pontuais - modelo de clicks);
- Dado real : Bacia do Paraná;
 - Ajuste dos dados através do software interativo;
 - jupyter notebook;

Sumário

- Discussão sobre o Teorema de Helmholtz;
- Teoria do Potencial e o Campo gravitacional;
- Campo gravitacional produzido por:
 - Esfera (fonte pontual);
 - Prisma (dique vertical);
- Definição do Problema geológico/geofísico:
 - Software interativo para modelagem via fontes pontuais;
- Dado sintético: anomalia do dique vertical;
 - jupyter notebooks;
 - prism-grav.ipynb (dados sintéticos);
 - synthetic.ipynb (fontes pontuais - modelo de clicks);
- Dado real : Bacia do Paraná;
 - Ajuste dos dados através do software interativo;
 - jupyter notebook;
 - real.ipynb

Teorema Helmholtz

Teorema Helmholtz

Qualquer campo vetorial pode ser escrito como:

Teorema Helmholtz

Qualquer campo vetorial pode ser escrito como:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} U + \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Teorema Helmholtz

Qualquer campo vetorial pode ser escrito como:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} U + \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Gradiente de uma função escalar

$$U = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}}{r} dV$$

Teorema Helmholtz

Qualquer campo vetorial pode ser escrito como:

$$\vec{B} = \underbrace{\vec{\nabla} U}_{\text{Gradiente de uma função escalar}} + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{A}}_{\text{Rotacional de uma função vetorial}}$$

Gradiente de uma função escalar Rotacional de uma função vetorial

$$U = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}}{r} dV$$

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla} \times \vec{B}}{r} dV$$

Teorema Helmholtz

Qualquer campo vetorial pode ser escrito como:

$$\vec{B} = \underbrace{\vec{\nabla} U}_{\text{Gradiente de uma função escalar}} + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{A}}_{\text{Rotacional de uma função vetorial}}$$

Gradiente de uma função escalar Rotacional de uma função vetorial

$$\underbrace{U}_{\text{Gradiente de uma função escalar}} = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla} \cdot \underbrace{\vec{B}}_{\text{Rotacional de uma função vetorial}}}{r} dV$$

$$\underbrace{\vec{A}}_{\text{Rotacional de uma função vetorial}} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla} \times \underbrace{\vec{B}}_{\text{Gradiente de uma função escalar}}}{r} dV$$

Observe que U e A dependem diretamente de B !

Teorema Helmholtz

Qualquer campo vetorial pode ser escrito como:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} U + \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Campo solenoidal

Campo rotacional

$$U = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}}{r} dV$$

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla} \times \vec{B}}{r} dV$$

Observe que U e A dependem diretamente de B !

Teorema Helmholtz

Pergunta: Qual das duas operações é mais simples ?

$$\vec{B} = \vec{\nabla} U + \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Teorema Helmholtz

Pergunta: Qual das duas operações é mais simples ?

$$\vec{B} = \vec{\nabla} U + \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{z}$$

Teorema Helmholtz

Pergunta: Qual das duas operações é mais simples ?

$$\vec{B} = \vec{\nabla} U + \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix}$$

Teorema Helmholtz

Pergunta: Qual das duas operações é mais simples ?

$$\vec{B} = \vec{\nabla} U + \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{z}$$

Teorema Helmholtz

Pergunta: Qual das duas operações é mais simples ?

$$\vec{B} = \vec{\nabla} U + \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{z}$$

O que fazer ?



Teorema Helmholtz

Sugestão:

Teorema Helmholtz

Sugestão: Anular $\text{rot}(\vec{A})$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} U + \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Teorema Helmholtz

Sugestão: Anular rot (A)

$$\vec{B} = \vec{\nabla} U + \cancel{\vec{\nabla} \times \vec{A}}$$

Teorema Helmholtz

Sugestão: Anular rot (A)

$$\vec{B} = \vec{\nabla} U + \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} U$$

Teorema Helmholtz

Sugestão: Anular rot (A)

$$\vec{B} = \vec{\nabla} U + \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} U$$

B torna-se um Campo conservativo!

Teorema Helmholtz

Sugestão: Anular $\text{rot}(\vec{A})$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} U + \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} U$$

B torna-se um Campo conservativo!

E agora? Investigar se há algum campo vetorial realista que seja conservativo. Alguma sugestão?

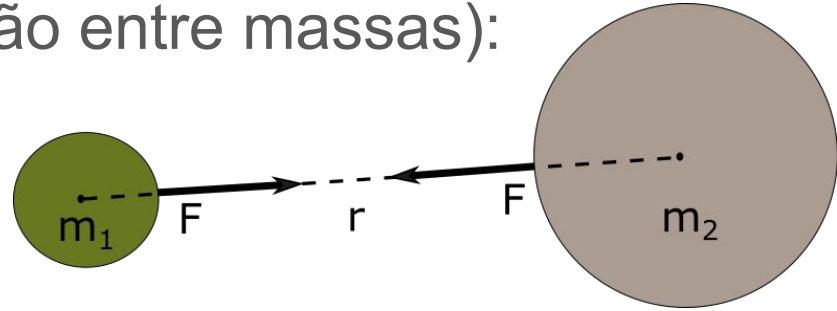
Investigado: Campo gravitacional

Investigado: Campo gravitacional

Lei da atração universal (atração entre massas):

Investigado: Campo gravitacional

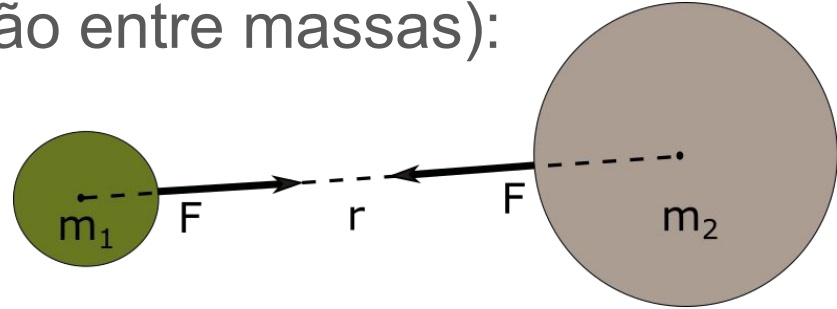
Lei da atração universal (atração entre massas):



Investigado: Campo gravitacional

Lei da atração universal (atração entre massas):

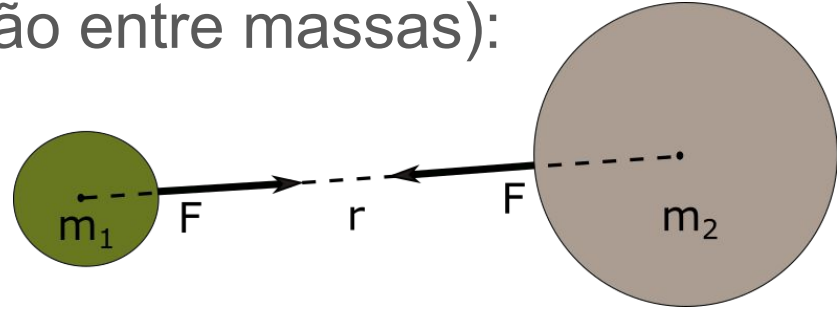
$$\vec{F} = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$$



Investigado: Campo gravitacional

Lei da atração universal (atração entre massas):

$$\vec{F} = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$$

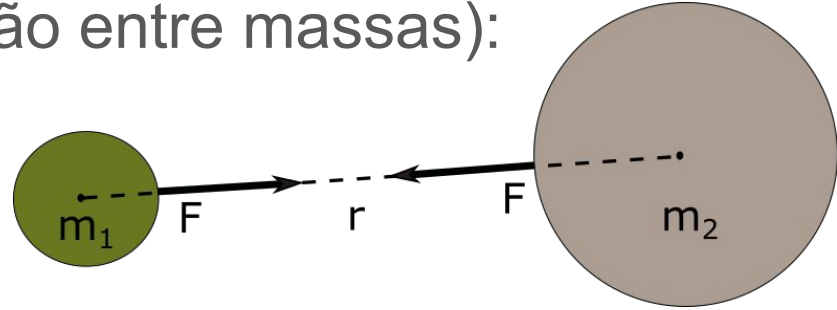


- G é a constante da gravitação universal ($6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$);

Investigado: Campo gravitacional

Lei da atração universal (atração entre massas):

$$\vec{F} = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$$

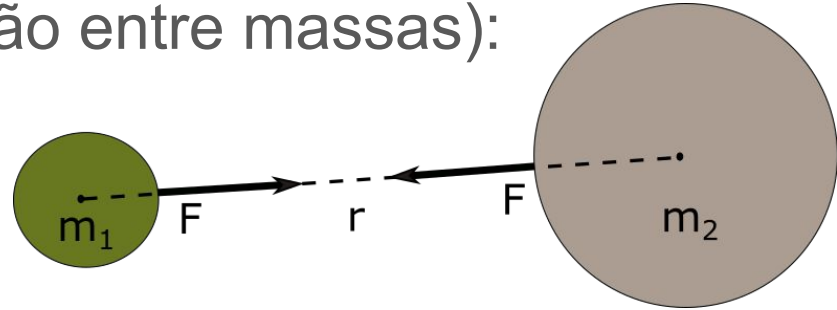


- G é a constante da gravitação universal ($6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$);
- m_1 m_2 são as massas gravitacionais das fontes (kg);

Investigado: Campo gravitacional

Lei da atração universal (atração entre massas):

$$\vec{F} = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$$

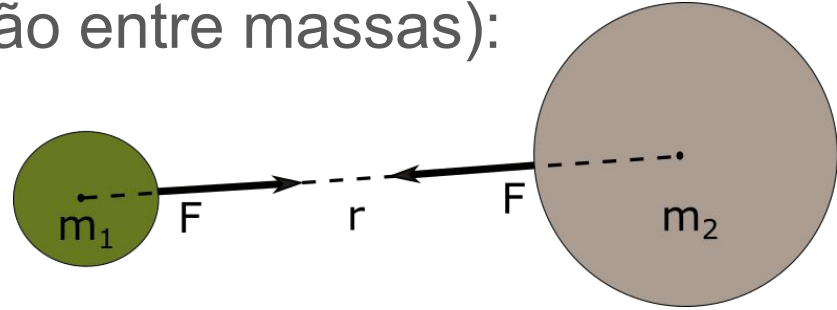


- G é a constante da gravitação universal ($6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$);
- m_1 m_2 são as massas gravitacionais das fontes (kg);
- r é o vetor - posição (distância entre as fontes, metros);

Investigado: Campo gravitacional

Lei da atração universal (atração entre massas):

$$\vec{F} = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$$



- G é a constante da gravitação universal ($6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$);
- m_1 m_2 são as massas gravitacionais das fontes (kg);
- r é o vetor - posição (distância entre as fontes, metros);
- \hat{r} é o versor unitário que indica a direção da força \mathbf{F} ;

Investigado: Campo gravitacional

Seja a segunda Lei do movimento de Newton para m_1 :

Investigado: Campo gravitacional

Seja a segunda Lei do movimento de Newton para m_1 :

$$\vec{F} = m_1 \vec{a}$$

Investigado: Campo gravitacional

Seja a segunda Lei do movimento de Newton para m_1 :

$$\vec{F} = m_1 \vec{a}$$

massa inercial

Investigado: Campo gravitacional

Seja a segunda Lei do movimento de Newton para m_1 :

$$\vec{F} = m_1 \vec{a} \text{ e massa inercial}$$

Investigado: Campo gravitacional

Seja a segunda Lei do movimento de Newton para m_1 :

$$\vec{F} = m_1 \vec{a} \quad \text{e} \quad \vec{F} = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$$

massa inercial

Investigado: Campo gravitacional

Seja a segunda Lei do movimento de Newton para m_1 :

$$\vec{F} = m_1 \vec{a} \quad \text{e} \quad \vec{F} = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \hat{r} \quad \text{massa gravitacional}$$

massa inercial

Investigado: Campo gravitacional

Seja a segunda Lei do movimento de Newton para m_1 :

$$\vec{F} = m_1 \vec{a} \quad \text{e} \quad \vec{F} = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \hat{r} \quad \text{massa gravitacional}$$

massa inercial

São idênticas, logo pode-se igualar as forças e substituir \mathbf{a} por \mathbf{g} , pois trata-se de uma aceleração especial, a aceleração gravitacional:

Investigado: Campo gravitacional

Investigado: Campo gravitacional

$$\vec{g} = -\frac{G m}{r^2} \hat{r}$$

Investigado: Campo gravitacional

$$\vec{g} = -\frac{G m}{r^2} \hat{r}$$

- Campo gravitacional produzido por uma **fonte pontual de massa gravitacional m**;

Investigado: Campo gravitacional

$$\vec{g} = -\frac{G m}{r^2} \hat{r}$$

- Campo gravitacional produzido por uma **fonte pontual de massa gravitacional m**;
- a intensidade $\sim 1/r^2$;

Investigado: Campo gravitacional

$$\vec{g} = -\frac{G m}{r^2} \hat{r}$$

- Campo gravitacional produzido por uma **fonte pontual de massa gravitacional m**;
- a intensidade $\sim 1/r^2$;
- Sistema esférico de coordenadas;

Investigado: Campo gravitacional

$$\vec{g} = -\frac{G m}{r^2} \hat{r}$$

- Campo gravitacional produzido por uma **fonte pontual de massa gravitacional m**;
- a intensidade $\sim 1/r^2$;
- Sistema esférico de coordenadas;

Exercício: Verificar se ***g*** é de fato um campo conservativo.

Investigado: Campo gravitacional

$$\vec{g} = -\frac{G m}{r^2} \hat{r}$$

- Campo gravitacional produzido por uma **fonte pontual de massa gravitacional m**;
- a intensidade $\sim 1/r^2$;
- Sistema esférico de coordenadas;

Exercício: Verificar se ***g*** é de fato um campo conservativo.

Como fazer ?



Relembrando

Relembrando

$$\vec{B} = \vec{\nabla} U + \cancel{\vec{\nabla} \times \vec{A}}$$

Relembrando

$$\vec{B} = \vec{\nabla}U + \cancel{\vec{\nabla} \times \vec{A}}$$

$\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ Mas **A** depende diretamente de **g**, portanto:

Relembrando

$$\vec{B} = \vec{\nabla} U + \cancel{\vec{\nabla} \times \vec{A}}$$

$\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ Mas **A** depende diretamente de **g**, portanto:

$\vec{\nabla} \times \vec{g} = 0$ Verificar se **g** é irrotacional

Relembrando

$$\vec{B} = \vec{\nabla} U + \cancel{\vec{\nabla} \times \vec{A}}$$

$\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ Mas \mathbf{A} depende diretamente de \mathbf{g} , portanto:

$\vec{\nabla} \times \vec{g} = 0$ Verificar se \mathbf{g} é irrotacional

$$\vec{\nabla} \times \vec{g} = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial g_z}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial z} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

Relembrando

$$\vec{B} = \vec{\nabla} U + \cancel{\vec{\nabla} \times \vec{A}}$$

$\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ Mas \mathbf{A} depende diretamente de \mathbf{g} , portanto:

$\vec{\nabla} \times \vec{g} = 0$ Verificar se \mathbf{g} é irrotacional

$$\vec{\nabla} \times \vec{g} = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \textcolor{red}{g_x} & \textcolor{green}{g_y} & \textcolor{blue}{g_z} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial g_z}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial z} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

Relembrando

$$\vec{B} = \vec{\nabla} U + \cancel{\vec{\nabla} \times \vec{A}}$$

$\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ Mas \mathbf{A} depende diretamente de \mathbf{g} , portanto:

$\vec{\nabla} \times \vec{g} = 0$ Verificar se \mathbf{g} é irrotacional

$$\vec{\nabla} \times \vec{g} = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \textcolor{red}{g_x} & \textcolor{green}{g_y} & \textcolor{blue}{g_z} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial g_z}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial z} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

Precisamos das componentes Cartesianas do campo gravitacional !

Componentes do Campo gravitacional

Componentes do Campo gravitacional

$$g_x = \vec{g} \cdot \hat{x}$$

$$g_y = \vec{g} \cdot \hat{y}$$

$$g_z = \vec{g} \cdot \hat{z}$$

Componentes do Campo gravitacional

$$g_x = \vec{g} \cdot \hat{x}$$

$$g_y = \vec{g} \cdot \hat{y}$$

$$g_z = \vec{g} \cdot \hat{z}$$

produto escalar: mede a
“sombra” de ***g*** sobre o eixo x

Componentes do Campo gravitacional

$$g_x = \vec{g} \cdot \hat{x}$$

$$g_y = \vec{g} \cdot \hat{y}$$

$$g_z = \vec{g} \cdot \hat{z}$$

fazer apenas para \mathbf{g}_x
pois tudo se repete

Componentes do Campo gravitacional

$$g_x = \vec{g} \cdot \hat{x}$$

Componentes do Campo gravitacional

$$g_x = \vec{g} \cdot \hat{x} \equiv g_x = -\frac{G m}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{x}$$

Componentes do Campo gravitacional

$$g_x = \vec{g} \cdot \hat{x} = g_x = -\frac{G m}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{x}$$

Componentes do Campo gravitacional

$$g_x = \vec{g} \cdot \hat{x} = g_x = -\frac{G m}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{x} \quad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

versor = vetor unitário

Componentes do Campo gravitacional

$$g_x = \vec{g} \cdot \hat{x} = g_x = -\frac{G m}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{x} \quad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad \vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$$

Componentes do Campo gravitacional vetor posição

$$g_x = \vec{g} \cdot \hat{x} = g_x = -\frac{G m}{r^2} \hat{r} \hat{x} \quad \boxed{\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}} \quad \vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$$

Componentes do Campo gravitacional vetor posição

$$g_x = \vec{g} \cdot \hat{x} = g_x = -\frac{G m}{r^2} \hat{r} \hat{x} \quad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad \vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z} \quad |\vec{r}| = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}} = r^{1/2}$$

Componentes do Campo gravitacional vetor posição

$$g_x = \vec{g} \cdot \hat{x} \equiv g_x = -\frac{G m}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{x}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}} = r^{1/2}$$

módulo

$$|\vec{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

Componentes do Campo gravitacional vetor posição

$$g_x = \vec{g} \cdot \hat{x} = g_x = -\frac{G m}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{x} \quad \boxed{\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}} \quad \begin{aligned} \vec{r} &= x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z} \\ |\vec{r}| &= \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}} = r^{1/2} \end{aligned}$$

módulo

$$|\vec{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

Portanto, tem-se para a componente g_x :

Componentes do Campo gravitacional vetor posição

$$g_x = \vec{g} \cdot \hat{x} \equiv g_x = -\frac{G m}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{x} \quad \boxed{\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}} \quad \begin{aligned} \vec{r} &= x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z} \\ |\vec{r}| &= \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}} = r^{1/2} \end{aligned}$$

módulo

$$|\vec{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

Portanto, tem-se para a componente g_x :

$$g_x = -\frac{G m}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{x}$$

Componentes do Campo gravitacional

vetor posição

$$g_x = \vec{g} \cdot \hat{x} = g_x = -\frac{G m}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{x}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}} = r^{1/2}$$

módulo

$$|\vec{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

Portanto, tem-se para a componente g_x :

$$g_x = -\frac{G m}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{x}$$

$$\hat{r} \cdot \hat{x} = r_x = \frac{x}{|\vec{r}|}$$

Componentes do Campo gravitacional

vetor posição

$$g_x = \vec{g} \cdot \hat{x} = g_x = -\frac{G m}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{x}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}} = r^{1/2}$$

módulo

$$|\vec{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

Portanto, tem-se para a componente g_x :

$$g_x = -\frac{G m}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{x}$$

$$\hat{r} \cdot \hat{x} = r_x = \frac{x}{|\vec{r}|}$$

$$g_x = -\frac{G m}{r^2} \frac{x}{|\vec{r}|} = -\frac{G m x}{r^{3/2}}$$

Componentes do Campo gravitacional

vetor posição

$$g_x = \vec{g} \cdot \hat{x} = g_x = -\frac{G m}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{x}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}} = r^{1/2}$$

módulo

$$|\vec{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

Portanto, tem-se para a componente g_x :

$$g_x = -\frac{G m}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{x}$$

$$\hat{r} \cdot \hat{x} = r_x = \frac{x}{|\vec{r}|}$$

$$g_x = -\frac{G m}{r^2} \frac{x}{|\vec{r}|} = -\frac{G m x}{r^{3/2}}$$

Componentes do Campo gravitacional

Componentes do Campo gravitacional

$$g_x = -\frac{G m x}{r^{3/2}}$$

$$g_y = -\frac{G m y}{r^{3/2}}$$

$$g_z = -\frac{G m z}{r^{3/2}}$$

Componentes do Campo gravitacional

$$g_x = -\frac{G m x}{r^{3/2}}$$

componentes horizontais da
atração gravitacional

$$g_y = -\frac{G m y}{r^{3/2}}$$

$$g_z = -\frac{G m z}{r^{3/2}}$$

Componentes do Campo gravitacional

$$g_x = -\frac{G m x}{r^{3/2}}$$

componentes horizontais da
atração gravitacional

$$g_y = -\frac{G m y}{r^{3/2}}$$

$$g_z = -\frac{G m z}{r^{3/2}}$$

componente vertical da atração gravitacional

Componentes do Campo gravitacional

$$g_x = -\frac{G m x}{r^{3/2}}$$

$$g_y = -\frac{G m y}{r^{3/2}}$$

$$g_z = -\frac{G m z}{r^{3/2}}$$

Como seria o cálculo dessas componentes no computador?

Vamos ao python!



Voltando ao problema de comprovar que o
campo gravitacional é conservativo

Campo gravitacional

Campo gravitacional

$$\nabla \times \vec{g} = 0$$

Campo gravitacional

$$\nabla \times \vec{g} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{g} = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial g_z}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial z} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

Campo gravitacional

$$\nabla \times \vec{g} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{g} = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial g_z}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial z} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

Fazendo apenas para o primeiro termo, já que tudo se repete!

Campo gravitacional

$$\nabla \times \vec{g} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{g} = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial g_z}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial z} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

Campo gravitacional

$$\nabla \times \vec{g} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{g} = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial g_z}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial z} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

$$\frac{\partial g_z}{\partial y} = G m z r^{-3/2} = \frac{-3 G m z y}{r^{5/2}}$$

Campo gravitacional

$$\nabla \times \vec{g} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{g} = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial g_z}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial z} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

$$\frac{\partial g_z}{\partial y} = G m z r^{-3/2} = \frac{-3 G m z y}{r^{5/2}}$$

Campo gravitacional

$$\nabla \times \vec{g} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{g} = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial g_z}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial z} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

$$\frac{\partial g_z}{\partial y} = G m z r^{-3/2} = \frac{-3 G m z y}{r^{5/2}}$$

$$\frac{\partial g_y}{\partial z} = G m y r^{-3/2} = \frac{-3 G m y z}{r^{5/2}}$$

Campo gravitacional

$$\nabla \times \vec{g} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{g} = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial g_z}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial z} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

$$\frac{\partial g_z}{\partial y} = G m z r^{-3/2} = \frac{-3 G m z y}{r^{5/2}} - \frac{\partial g_y}{\partial z} = G m y r^{-3/2} = \frac{-3 G m y z}{r^{5/2}} = 0$$

Campo gravitacional

$$\nabla \times \vec{g} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{g} = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial g_z}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial z} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

$$\frac{\partial g_z}{\partial y} = G m z r^{-3/2} = \frac{-3 G m z y}{r^{5/2}} - \frac{\partial g_y}{\partial z} = G m y r^{-3/2} = \frac{-3 G m y z}{r^{5/2}} = 0$$

Para as demais parcelas do rotacional tem-se finalmente que:

Campo gravitacional

Campo gravitacional

$$\nabla \times \vec{g} = 0$$

O campo gravitacional é conservativo !

Campo gravitacional

$$\nabla \times \vec{g} = 0$$

O campo gravitacional é conservativo !

$$\vec{g} = -\vec{\nabla} U$$

gradiente de uma função escalar chamada
função potencial

Campo gravitacional

$$\nabla \times \vec{g} = 0$$

O campo gravitacional é conservativo !

$$\vec{g} = -\vec{\nabla} U$$

gradiente de uma função escalar chamada
função potencial

Pergunta: para que toda essa ginástica?????



Campo gravitacional

$$\nabla \times \vec{g} = 0$$

O campo gravitacional é conservativo !

$$\vec{g} = -\vec{\nabla} U$$

gradiente de uma função escalar chamada
função potencial

Definir o campo gravitacional da forma
mais simples possível.



Potencial Newtoniano (gravitacional)

Potencial Newtoniano (gravitacional)

- Função escalar da posição;

Potencial Newtoniano (gravitacional)

- Função escalar da posição;
- Função de apoio à teoria do Potencial;

Potencial Newtoniano (gravitacional)

- Função escalar da posição;
- Função de apoio à teoria do Potencial;
- Objetivo: Obter o campo gravitacional a partir do potencial newtoniano;

Potencial Newtoniano (gravitacional)

- Função escalar da posição;
- Função de apoio à teoria do Potencial;
- Objetivo: Obter o campo gravitacional a partir do potencial newtoniano;

Veja como é mais simples: Potencial de uma fonte pontual

Potencial Newtoniano (gravitacional)

- Função escalar da posição;
- Função de apoio à teoria do Potencial;
- Objetivo: Obter o campo gravitacional a partir do potencial newtoniano;

Veja como é mais simples: Potencial de uma fonte pontual

$$U(r) = \frac{G \, m}{r}$$

Potencial Newtoniano (gravitacional)

- Função escalar da posição;
- Função de apoio à teoria do Potencial;
- Objetivo: Obter o campo gravitacional a partir do potencial newtoniano;

Veja como é mais simples: Potencial de uma fonte pontual

$$U(r) = \frac{G m}{r} \quad \longrightarrow \quad \vec{g} = -\vec{\nabla} U$$

Potencial Newtoniano (gravitacional)

- Função escalar da posição;
- Função de apoio à teoria do Potencial;
- Objetivo: Obter o campo gravitacional a partir do potencial newtoniano;

Veja como é mais simples: Potencial de uma fonte pontual

Gradiente em coordenadas esféricas

$$U(r) = \frac{G m}{r} \quad \rightarrow \quad \vec{g} = -\vec{\nabla} U$$

$$\vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

Potencial Newtoniano (gravitacional)

- Função escalar da posição;
- Função de apoio à teoria do Potencial;
- Objetivo: Obter o campo gravitacional a partir do potencial newtoniano;

Veja como é mais simples: Potencial de uma fonte pontual

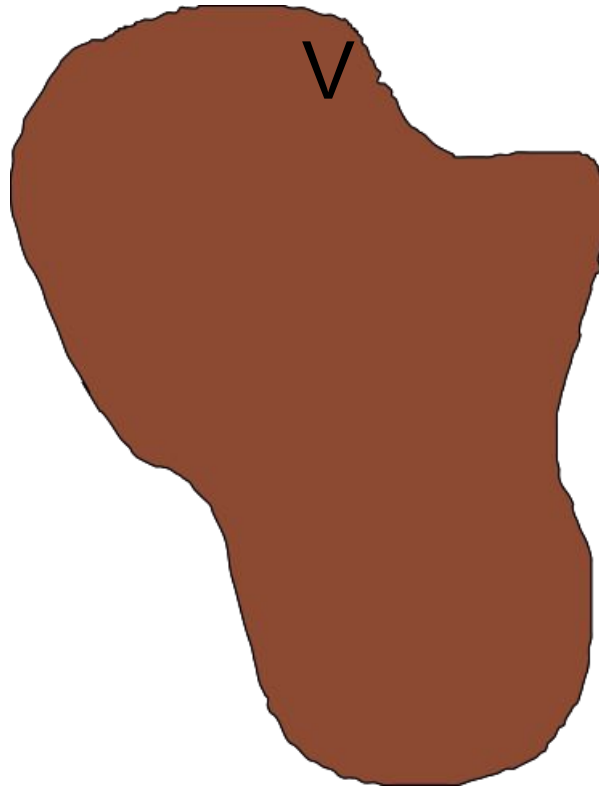
Gradiente em coordenadas esféricas

$$U(r) = \frac{G m}{r} \quad \rightarrow \quad \vec{g} = -\vec{\nabla} U \quad = \quad \vec{g} = -\frac{G m}{r^2} \hat{r}$$

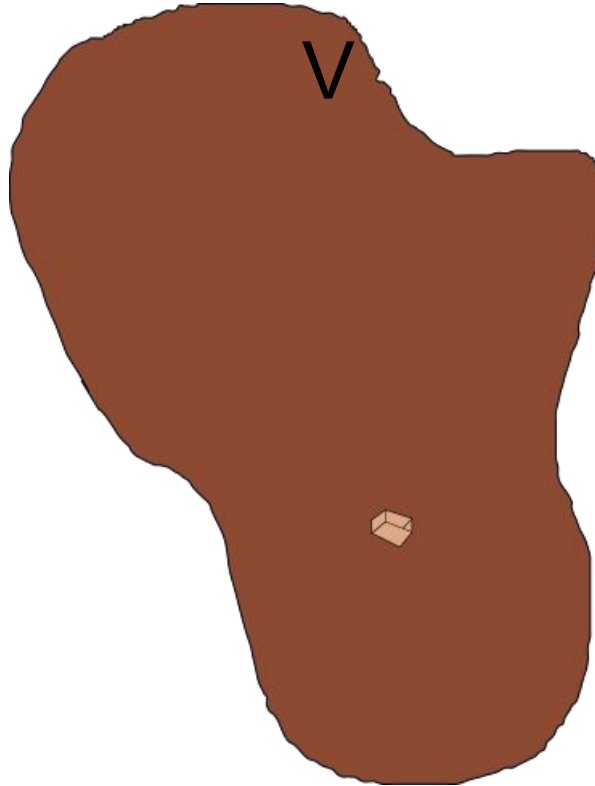
$$\vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

Fonte arbitrária

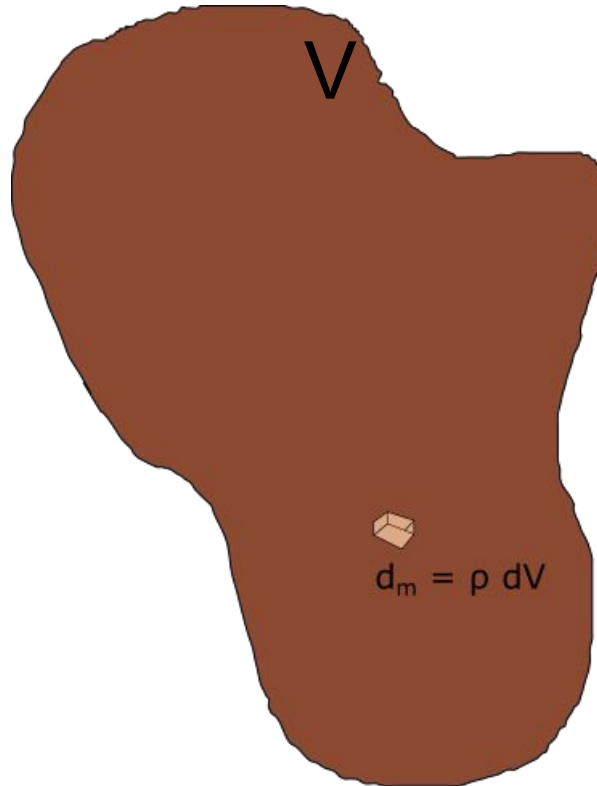
Fonte arbitrária



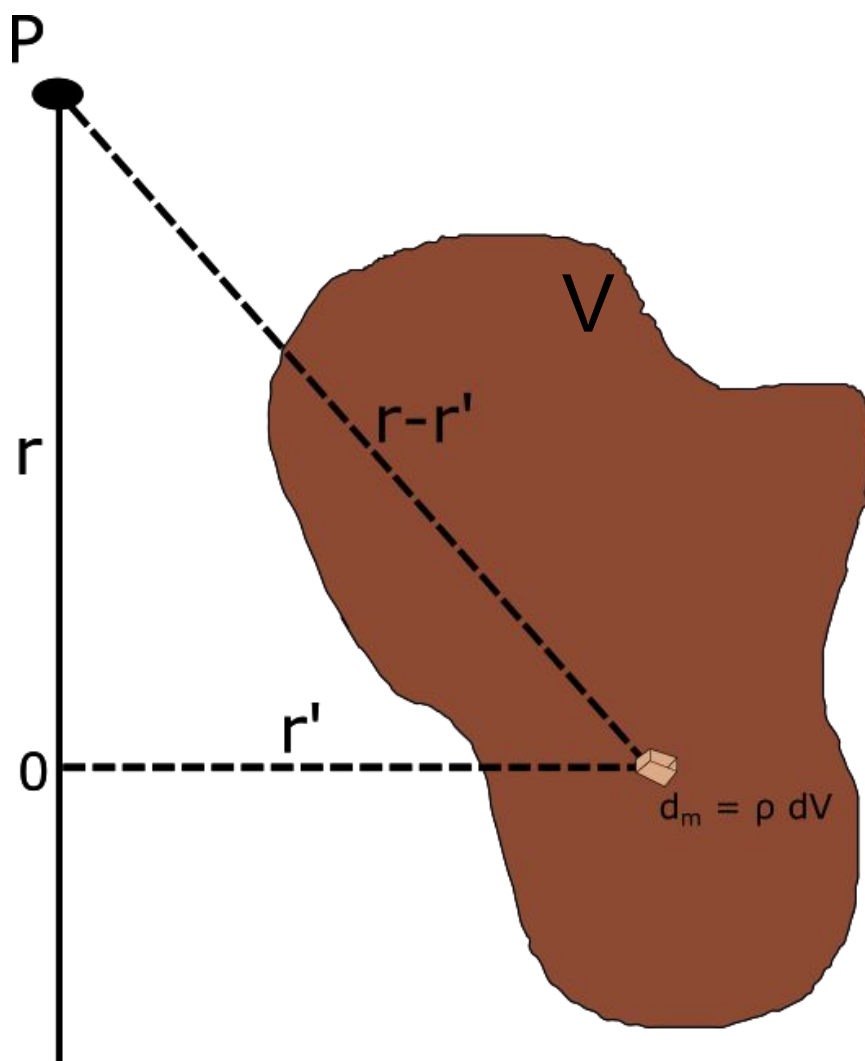
Fonte arbitrária

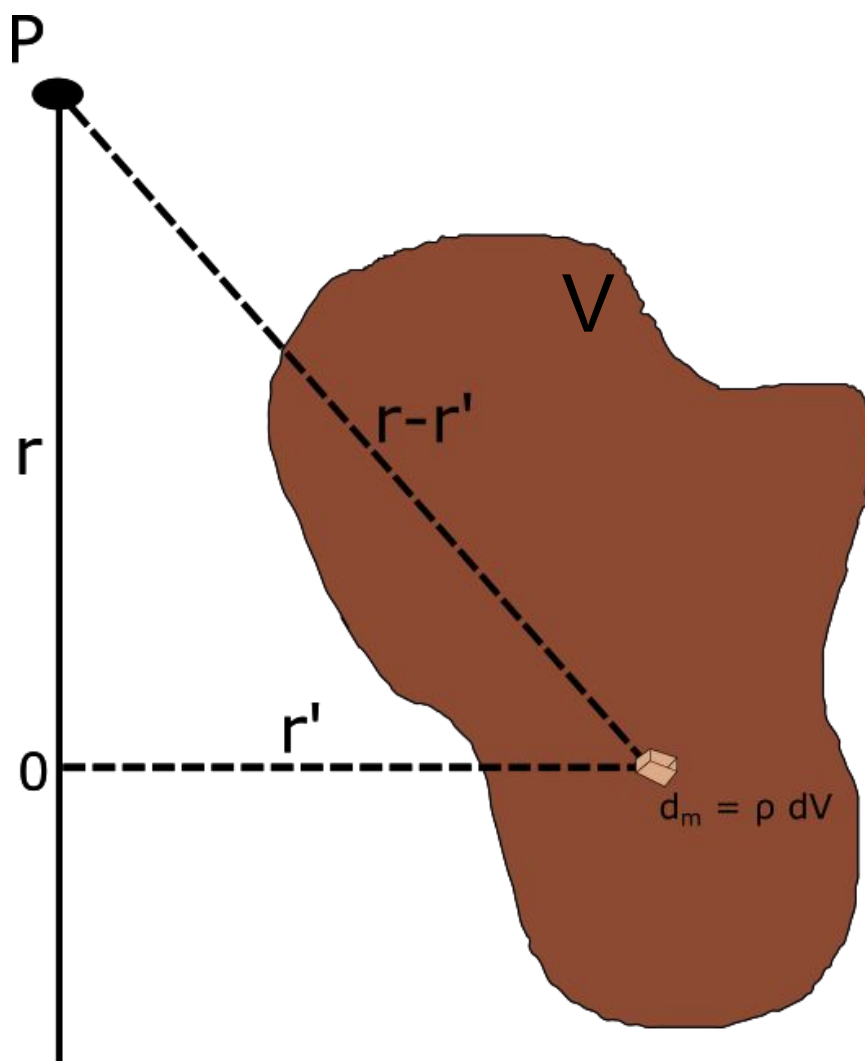


Fonte arbitrária



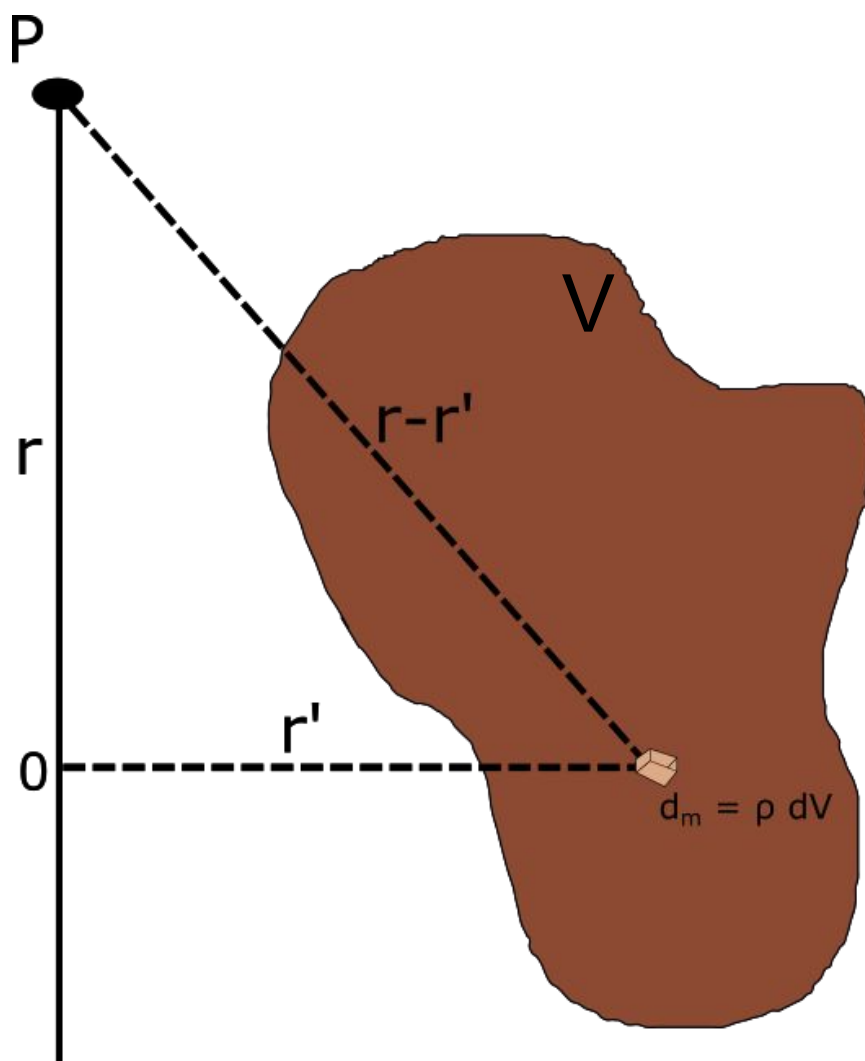
Definindo um sistema local de coordenadas





Potencial do elemento dm :

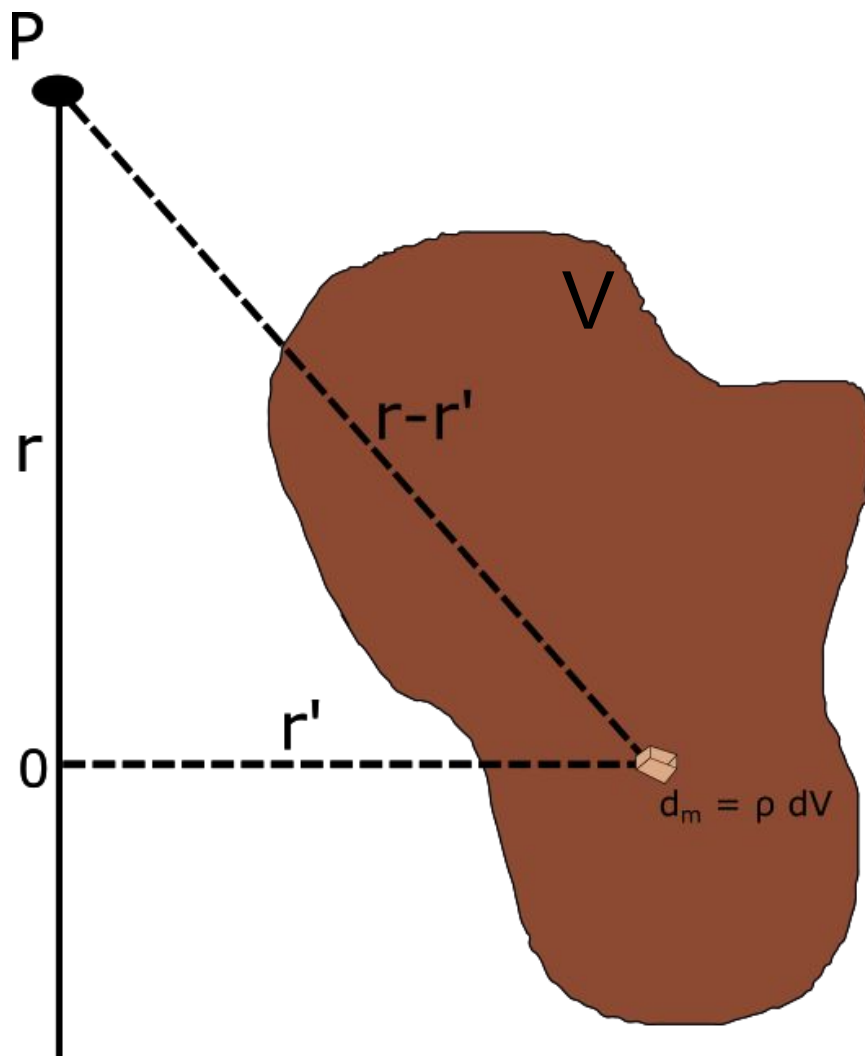
$$dU(P) = \frac{G dm}{(r - r')} = \frac{\rho dV}{(r - r')}$$



Potencial do elemento dm :

$$dU(P) = \frac{G dm}{(r - r')} = \frac{\rho dV}{(r - r')}$$

Integrando em todo V
(princípio da superposição):



Potencial do elemento dm :

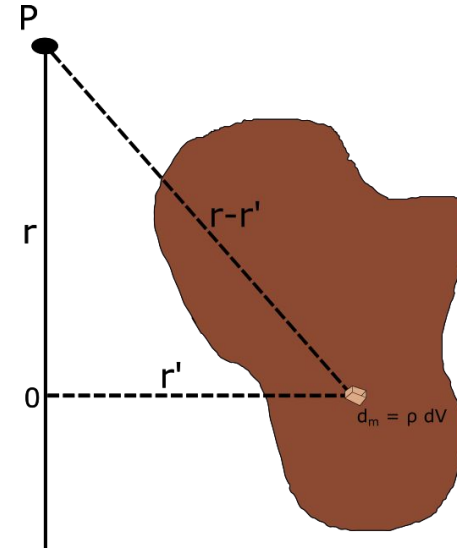
$$dU(P) = \frac{G dm}{(r - r')} = \frac{\rho dV}{(r - r')}$$

Integrando em todo V
(princípio da superposição):

$$U(P) = G \rho \int \frac{dV}{(r - r')}$$

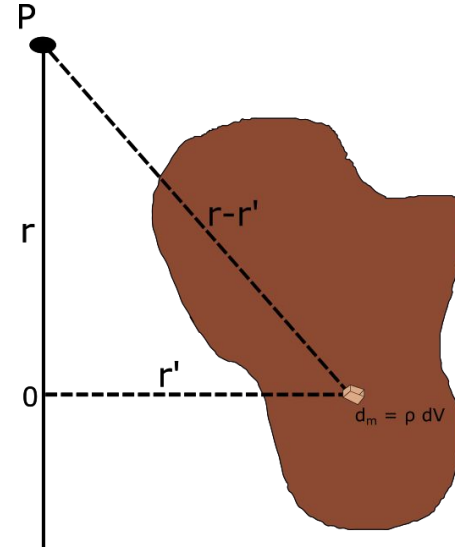
Fonte arbitrária: Problema

$$U(P) = G \rho \int \frac{dV}{(r - r')}$$



Fonte arbitrária: Problema

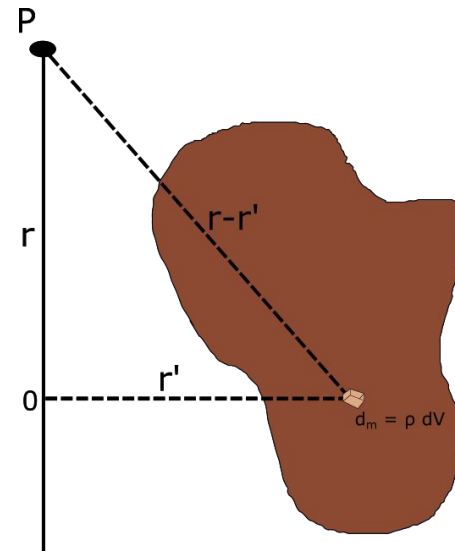
$$U(P) = G \rho \int \frac{dV}{(r - r')}$$



- Sem o volume da fonte, não há como resolver a integral acima;

Fonte arbitrária: Problema

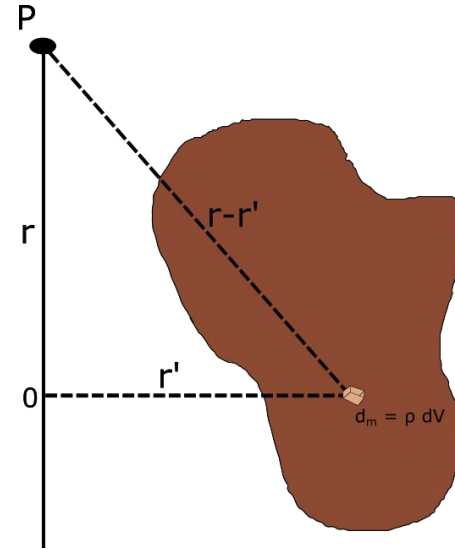
$$U(P) = G \rho \int \frac{dV}{(r - r')}$$



- Sem o volume da fonte, não há como resolver a integral acima;
- Somente calcular o potencial de fontes cuja geometria é conhecida;

Fonte arbitrária: Problema

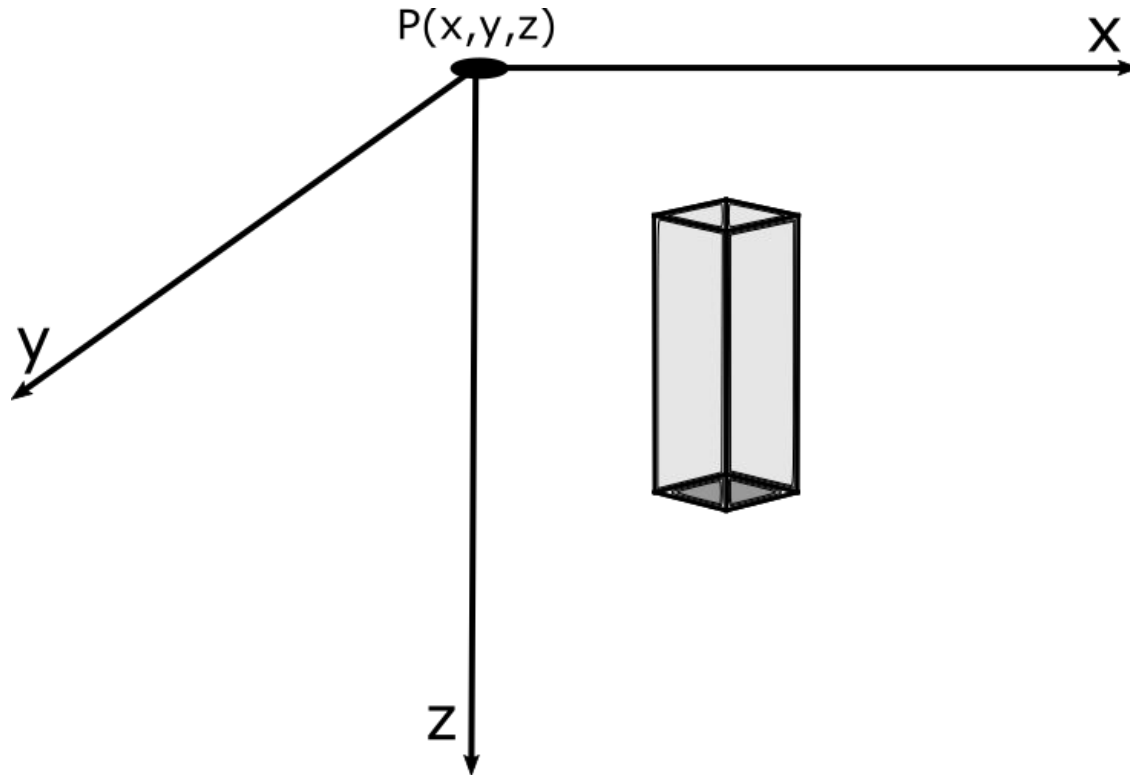
$$U(P) = G \rho \int \frac{dV}{(r - r')}$$



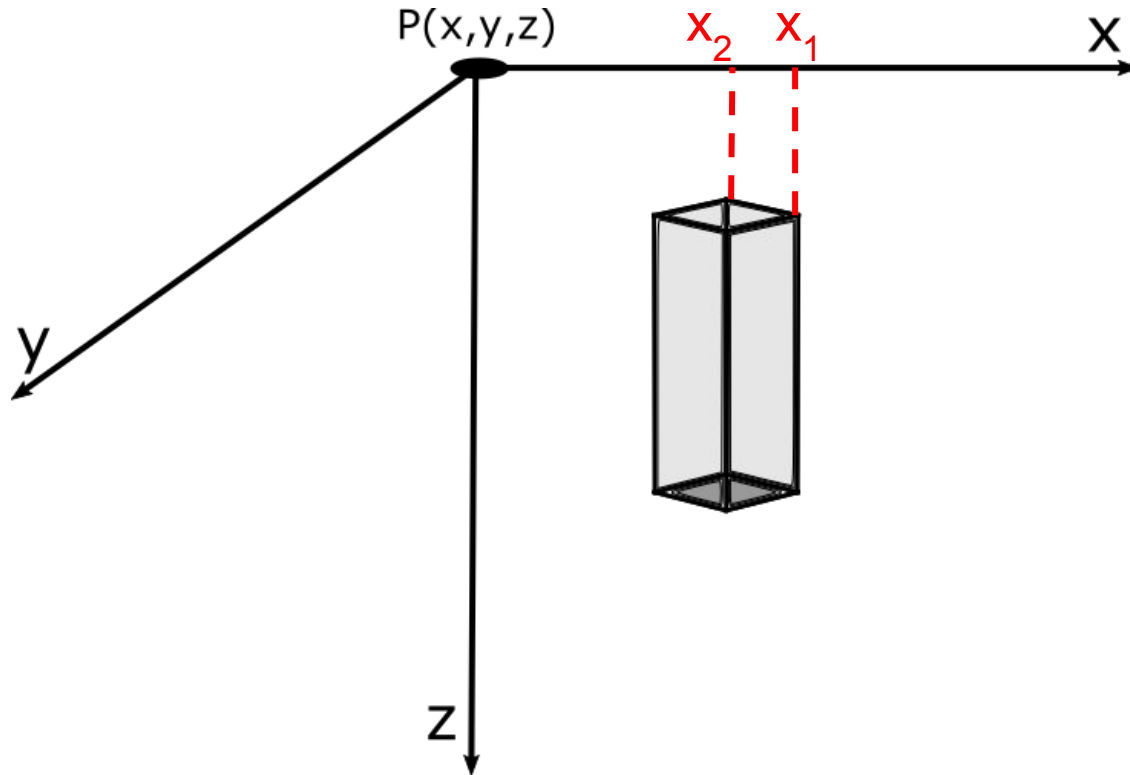
- Sem o volume da fonte, não há como resolver a integral acima;
- Somente calcular o potencial de fontes cuja geometria é conhecida;
- Ou fazer considerações/simplificações sobre o volume;

Fonte geométrica conhecida: Prisma vertical

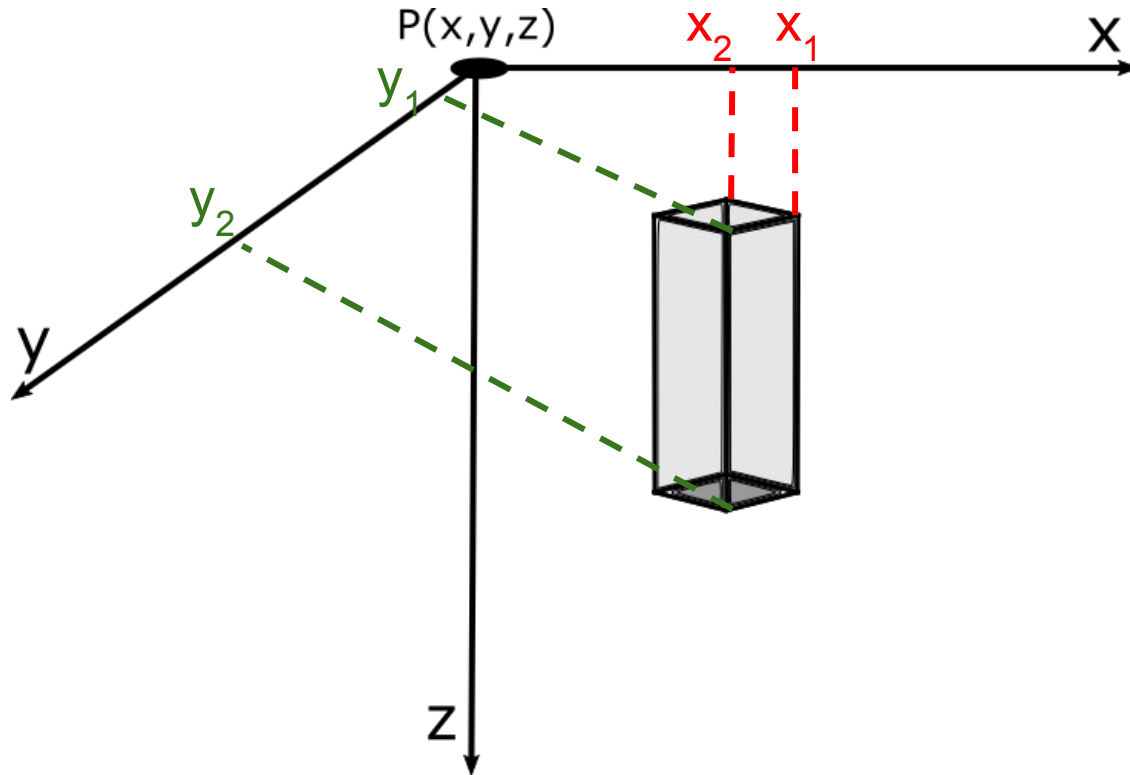
Campo gravitacional produzido por um prisma vertical



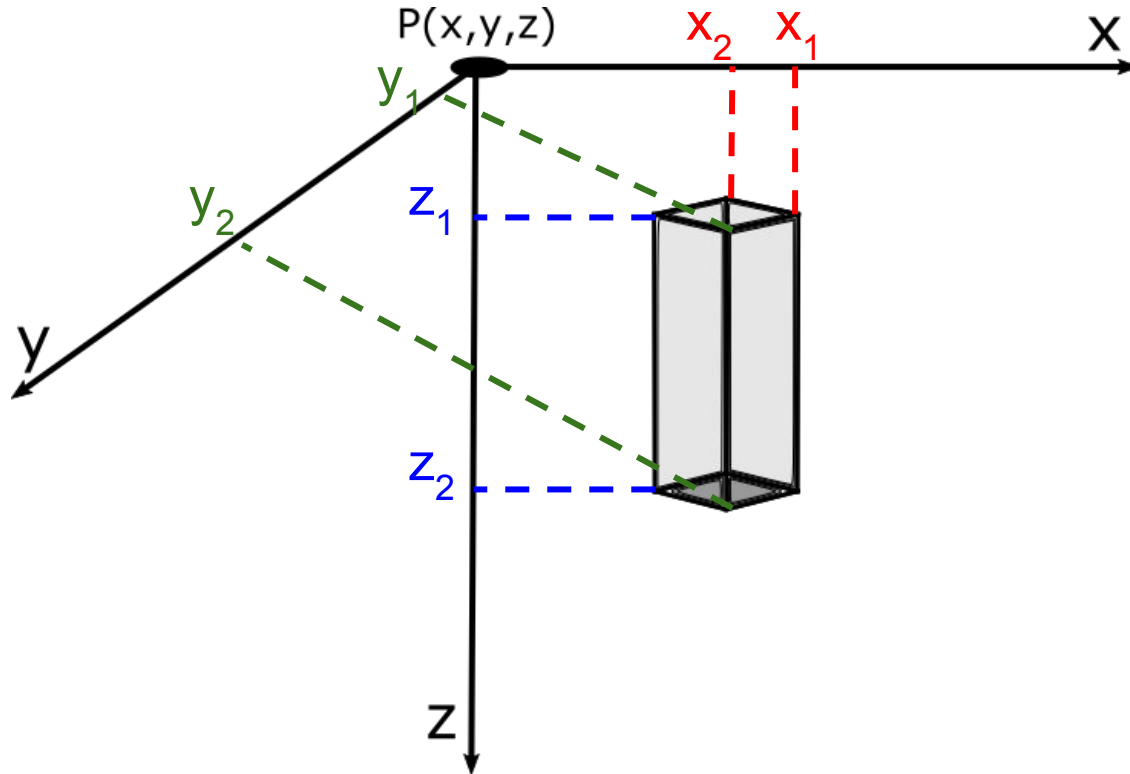
Campo gravitacional produzido por um prisma vertical



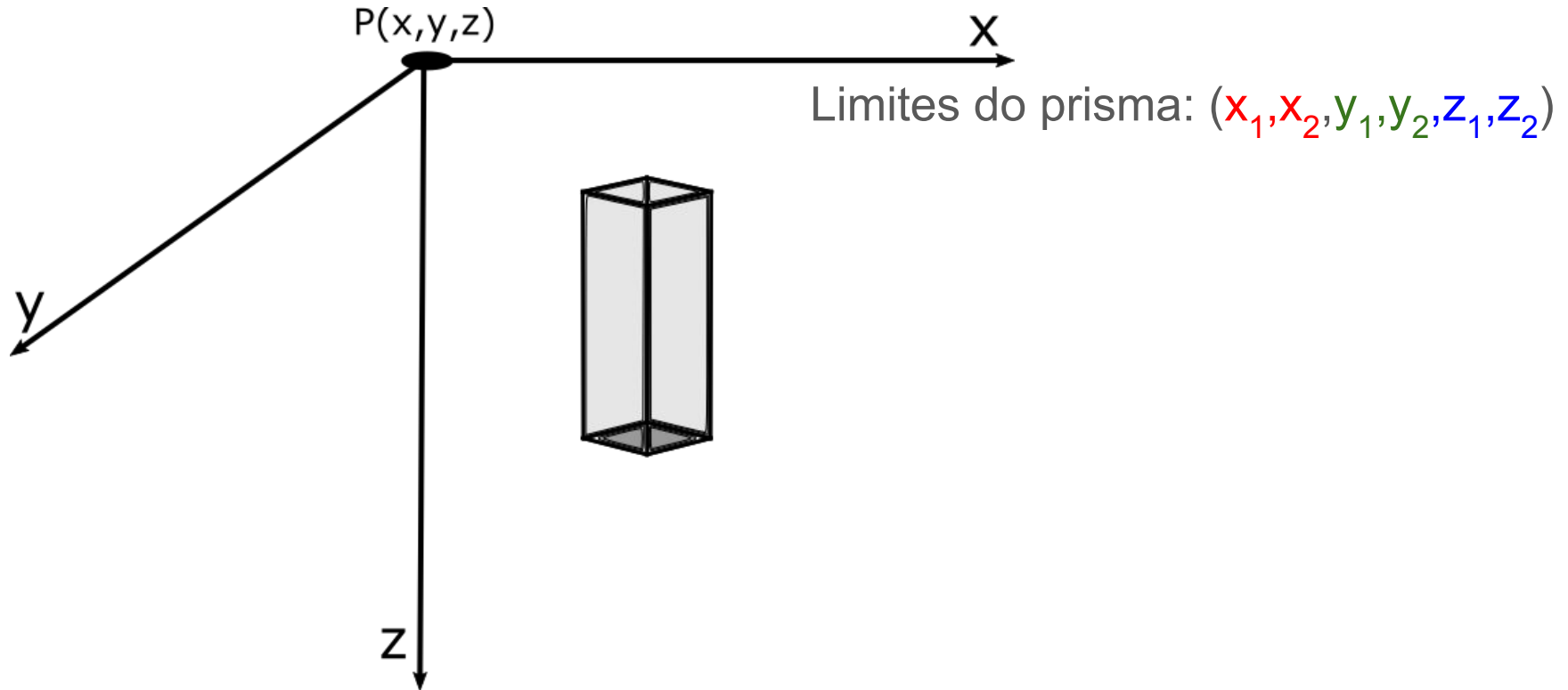
Campo gravitacional produzido por um prisma vertical



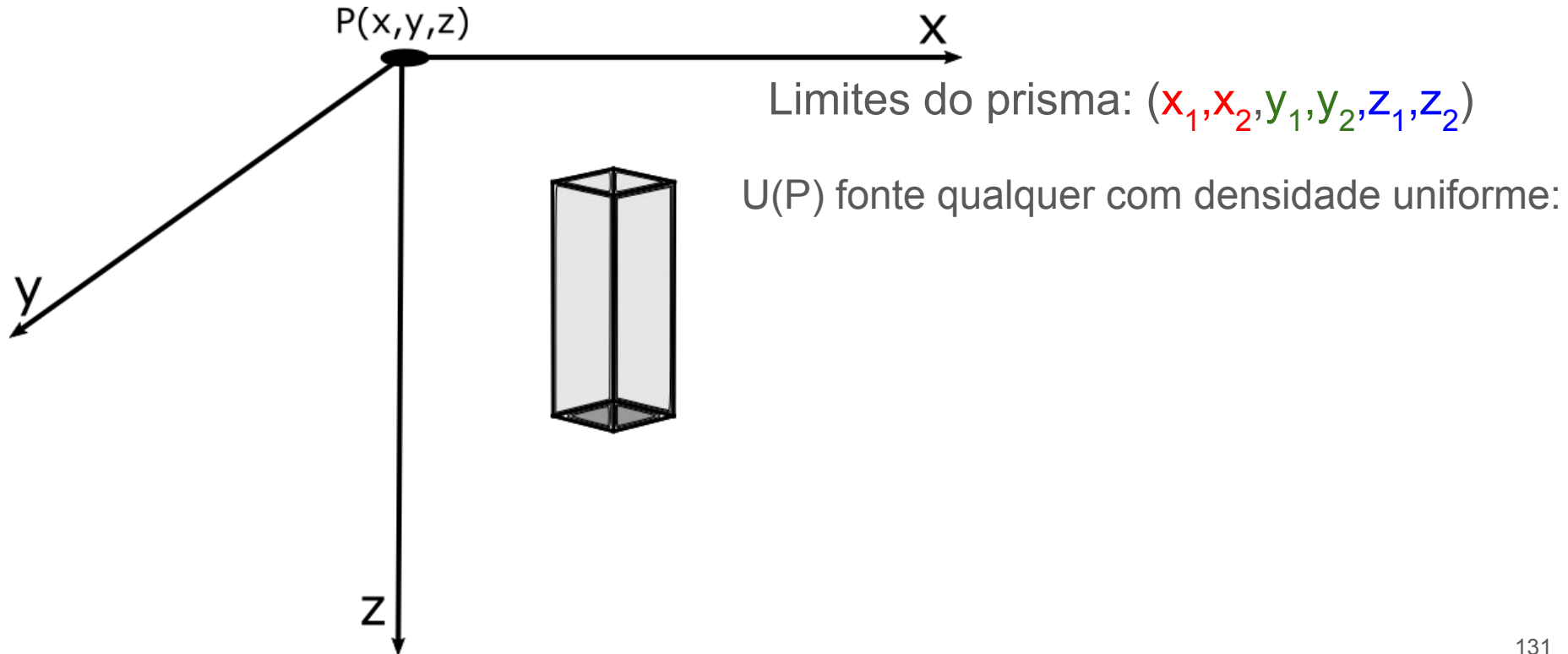
Campo gravitacional produzido por um prisma vertical



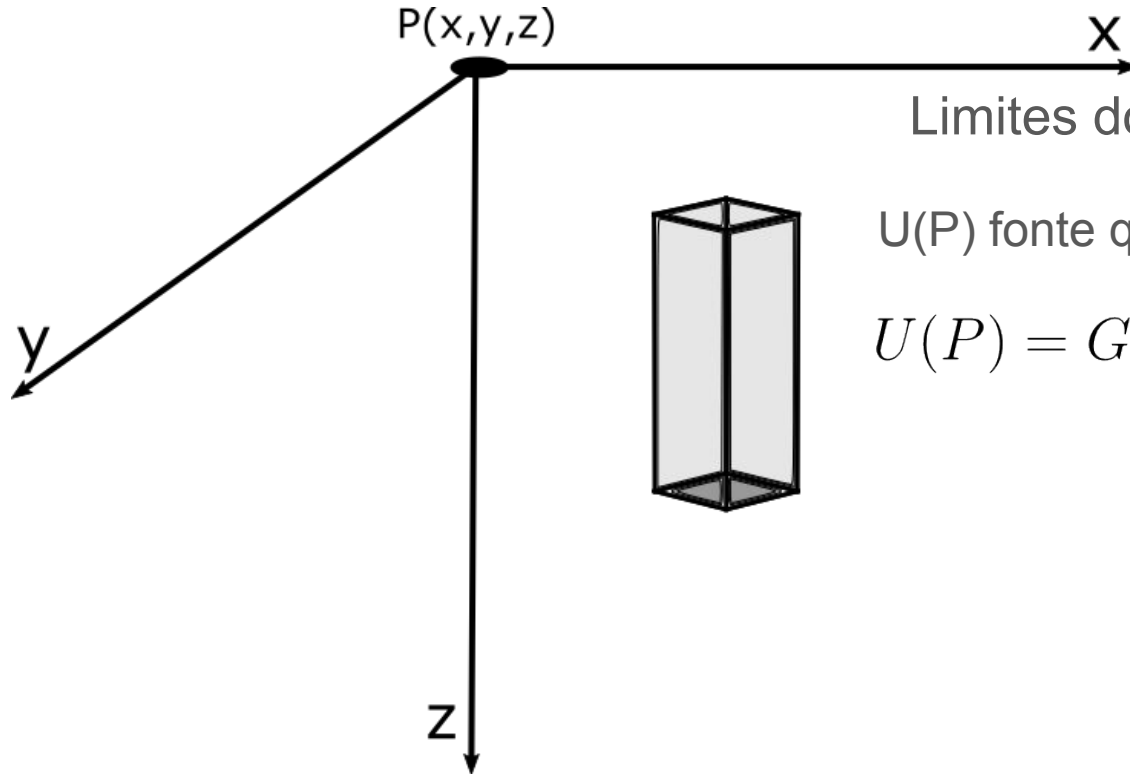
Campo gravitacional produzido por um prisma vertical



Campo gravitacional produzido por um prisma vertical



Campo gravitacional produzido por um prisma vertical

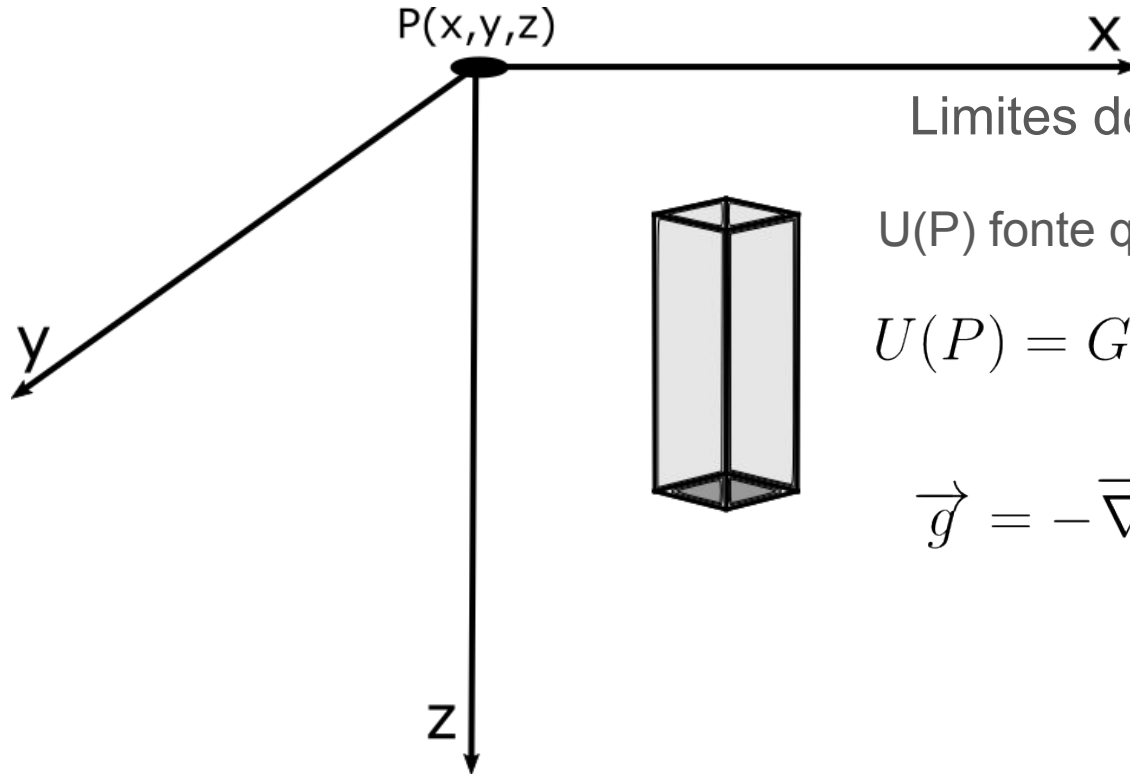


Limites do prisma: ($x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$)

$U(P)$ fonte qualquer com densidade uniforme:

$$U(P) = G \rho \int \frac{dV}{(r - r')}$$

Campo gravitacional produzido por um prisma vertical



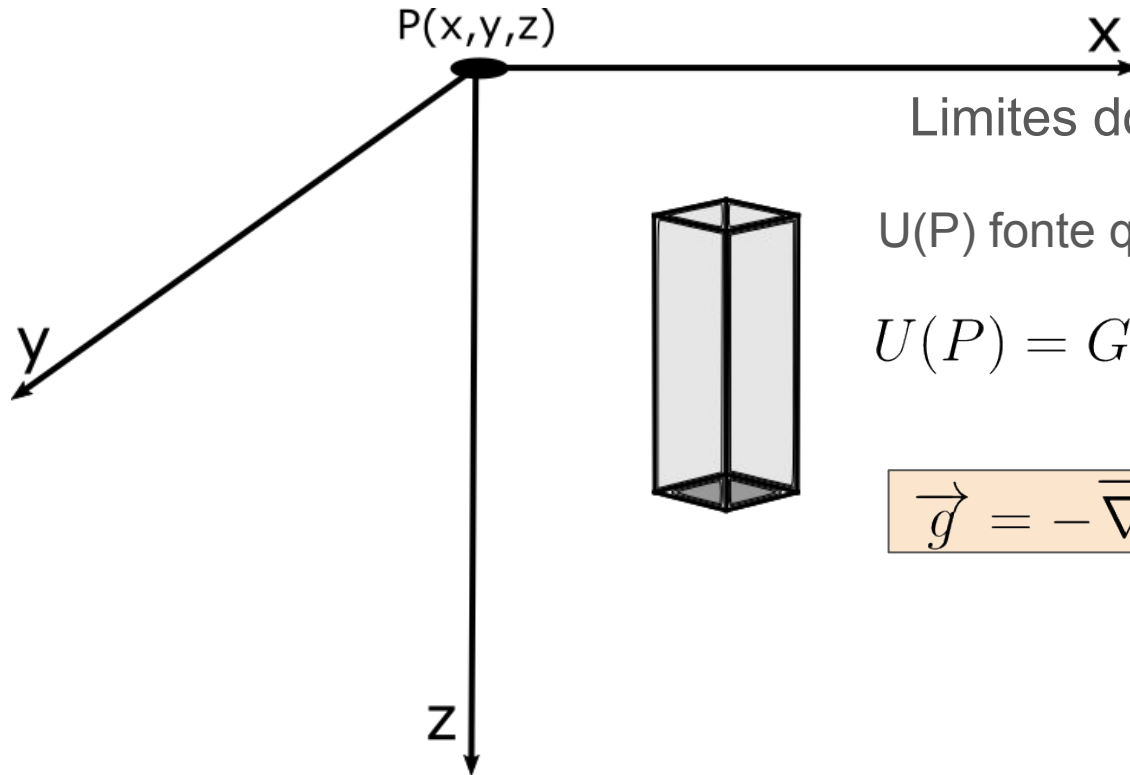
Limites do prisma: ($x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$)

$U(P)$ fonte qualquer com densidade uniforme:

$$U(P) = G \rho \int \frac{dV}{(r - r')}$$

$$\vec{g} = -\vec{\nabla} U$$

Campo gravitacional produzido por um prisma vertical



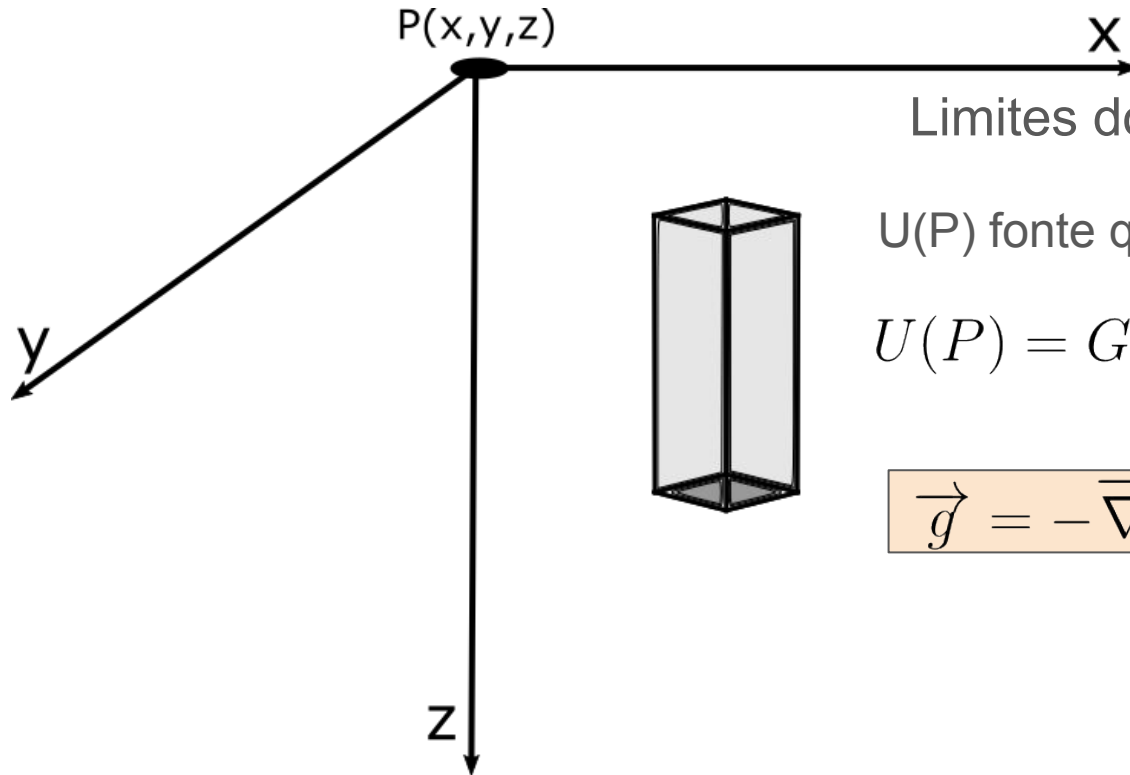
Límites do prisma: ($x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$)

$U(P)$ fonte qualquer com densidade uniforme:

$$U(P) = G \rho \int \frac{dV}{(r - r')}$$

$$\vec{g} = -\vec{\nabla} U$$

Campo gravitacional produzido por um prisma vertical



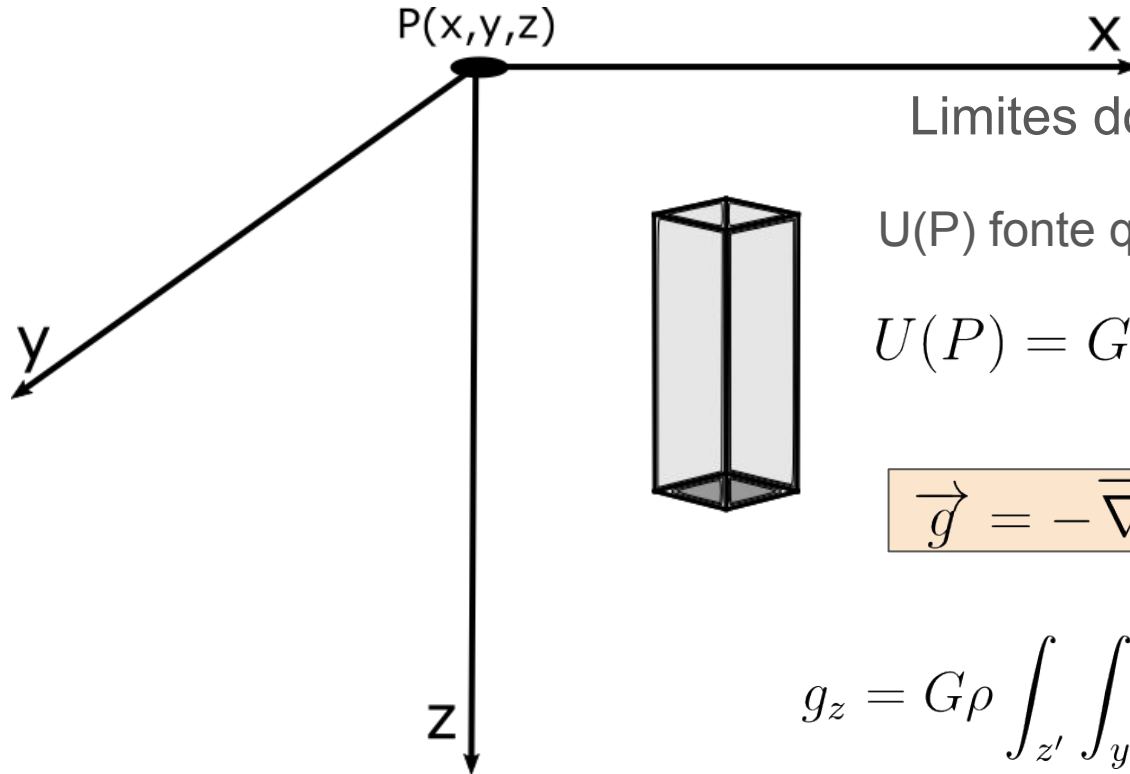
Limites do prisma: ($x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$)

$U(P)$ fonte qualquer com densidade uniforme:

$$U(P) = G \rho \int \frac{dV}{(r - r')}$$

$$\vec{g} = -\vec{\nabla} U \quad \Rightarrow \quad g_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Campo gravitacional produzido por um prisma vertical



Limites do prisma: ($x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$)

$U(P)$ fonte qualquer com densidade uniforme:

$$U(P) = G \rho \int \frac{dV}{(r - r')}$$

$$\vec{g} = -\vec{\nabla} U \quad \Rightarrow \quad g_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$g_z = G \rho \int_{z'} \int_{y'} \int_{x'} \frac{z - z'}{(r - r')^3} dx' dy' dz'$$

Campo gravitacional produzido por um prisma vertical

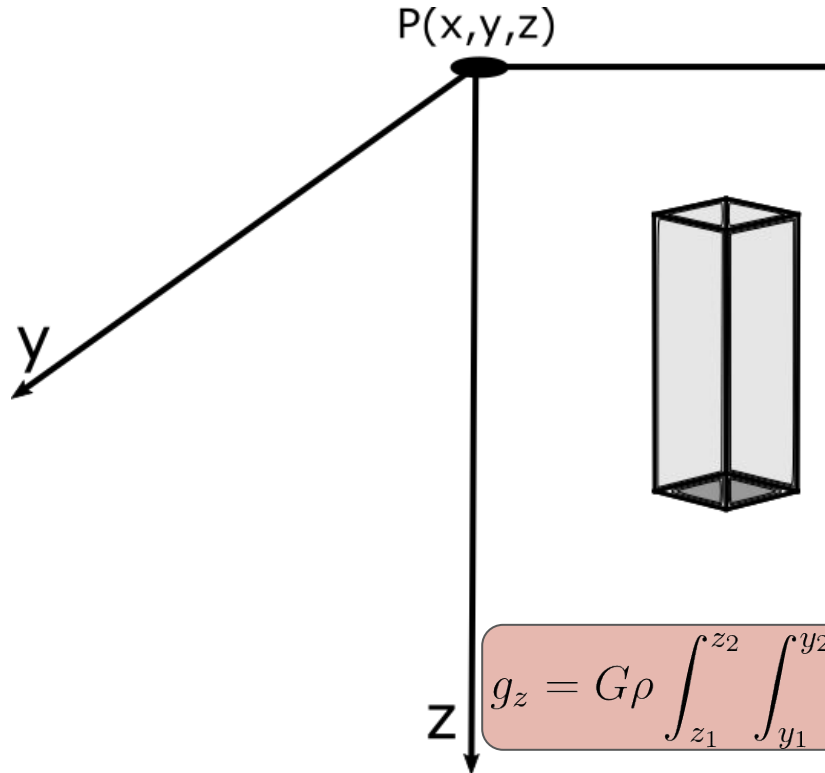


Diagram illustrating the gravitational field produced by a vertical prism. The coordinate system has axes x , y , and z . A point $P(x, y, z)$ is shown. The prism is defined by limits $(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2)$.

Limites do prisma: $(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2)$

$U(P)$ fonte qualquer com densidade uniforme:

$$U(P) = G \rho \int \frac{dV}{(r - r')}$$

The gravitational field vector is given by:

$$\vec{g} = -\vec{\nabla} U$$

The vertical component of the gravitational field is:

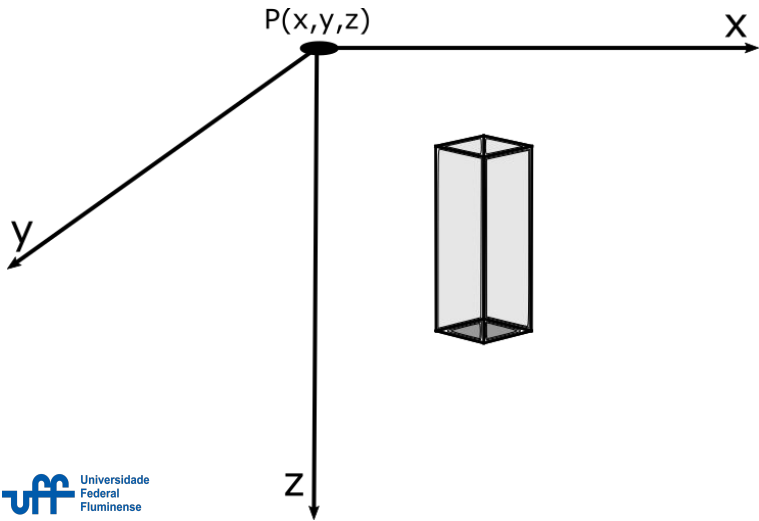
$$g_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

The integral expression for g_z is:

$$g_z = G \rho \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{z - z'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} dx' dy' dz'$$

Campo gravitacional produzido por um prisma vertical

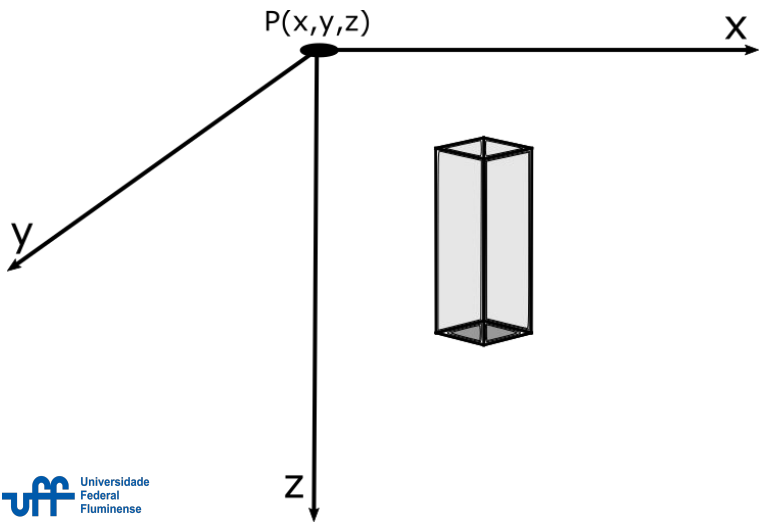
Resolvendo a integração (Plouff, 1966a):



Campo gravitacional produzido por um prisma vertical

Resolvendo a integração (Plouff, 1966a):

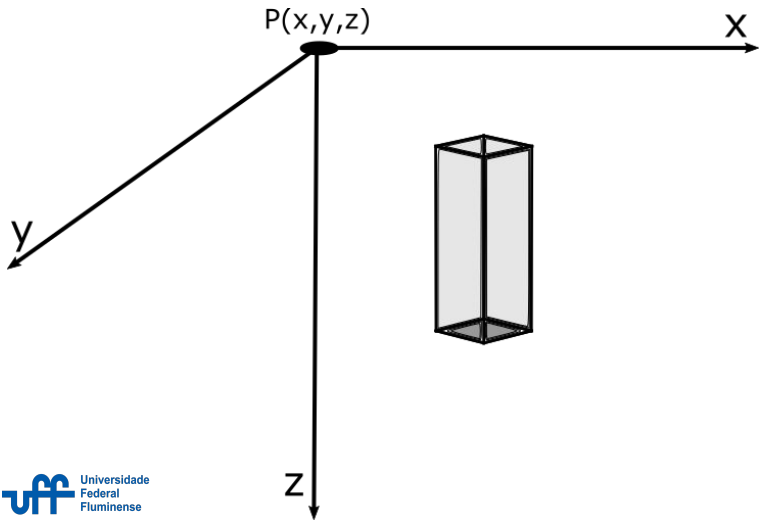
$$g_z = G\rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mu_{ijk} \left[z_k \arctan \frac{x_i y_j}{z_k R_{ijk}} - x_i \log(R_{ijk} + y_j) - y_j \log(R_{ijk} + x_i) \right]$$



Campo gravitacional produzido por um prisma vertical

Resolvendo a integração (Plouff, 1966a):

$$g_z = G\rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mu_{ijk} \left[z_k \arctan \frac{x_i y_j}{z_k R_{ijk}} - x_i \log(R_{ijk} + y_j) - y_j \log(R_{ijk} + x_i) \right]$$



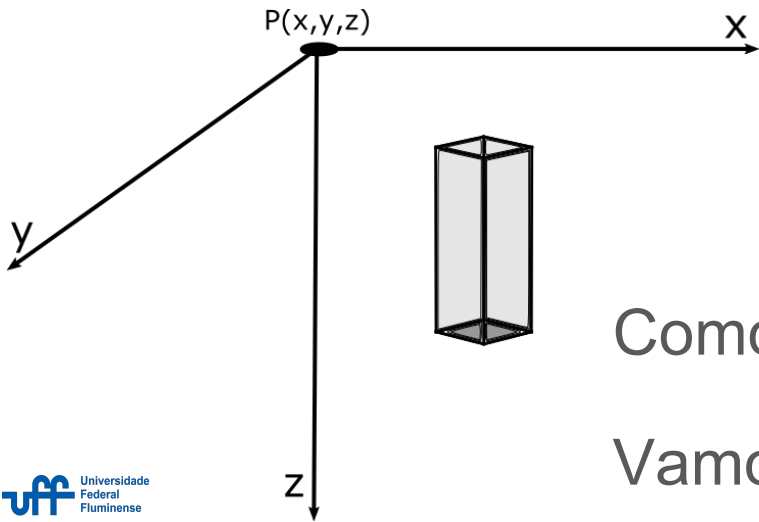
$$R_{ijk} = \sqrt{x_i^2 + y_j^2 + z_k^2}$$

$$\mu_{ijk} = (-1)^i (-1)^j (-1)^k$$

Campo gravitacional produzido por um prisma vertical

Resolvendo a integração (Plouff, 1966a):

$$g_z = G\rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mu_{ijk} \left[z_k \arctan \frac{x_i y_j}{z_k R_{ijk}} - x_i \log(R_{ijk} + y_j) - y_j \log(R_{ijk} + x_i) \right]$$



$$R_{ijk} = \sqrt{x_i^2 + y_j^2 + z_k^2}$$

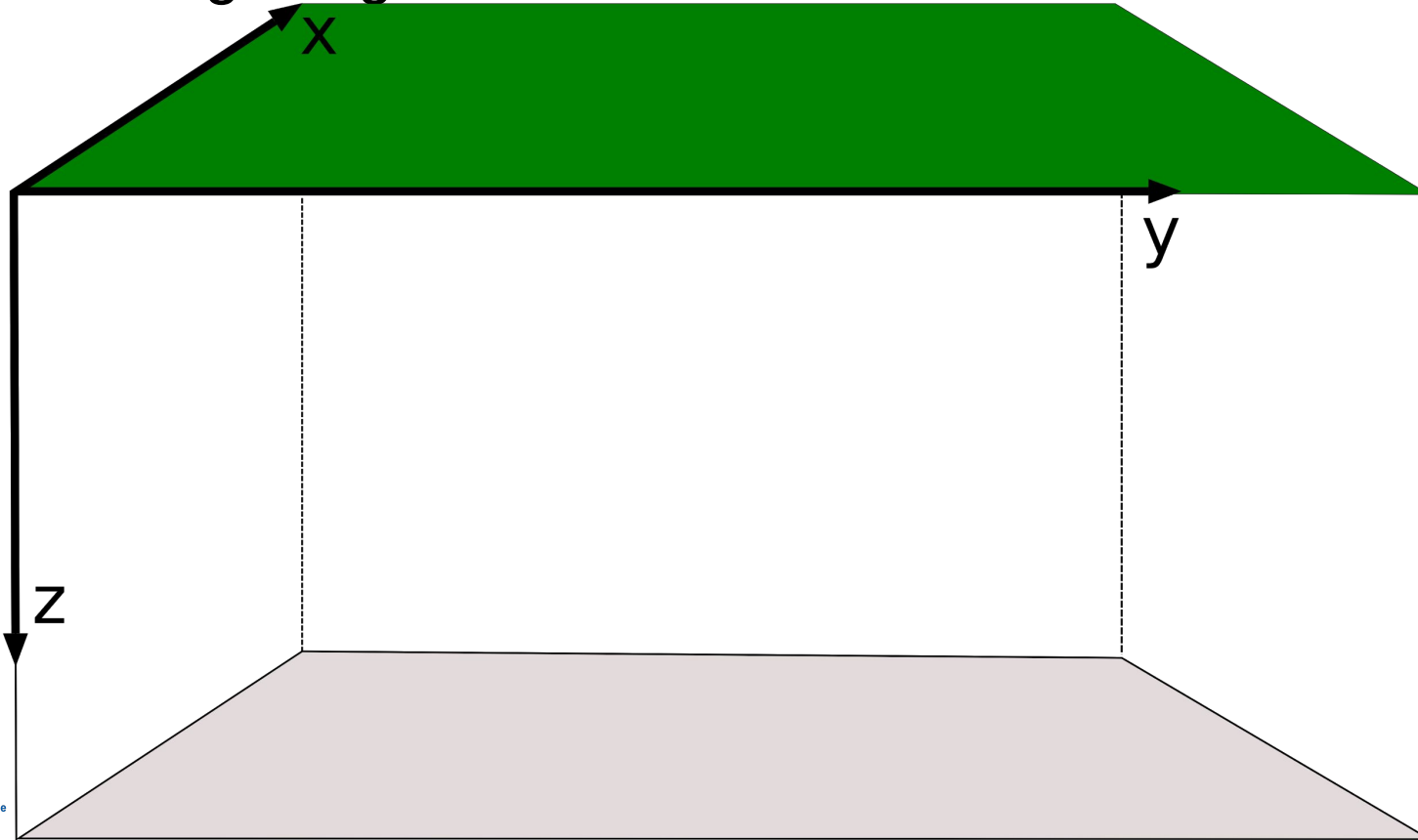
$$\mu_{ijk} = (-1)^i (-1)^j (-1)^k$$

Como seria este cálculo no computador?

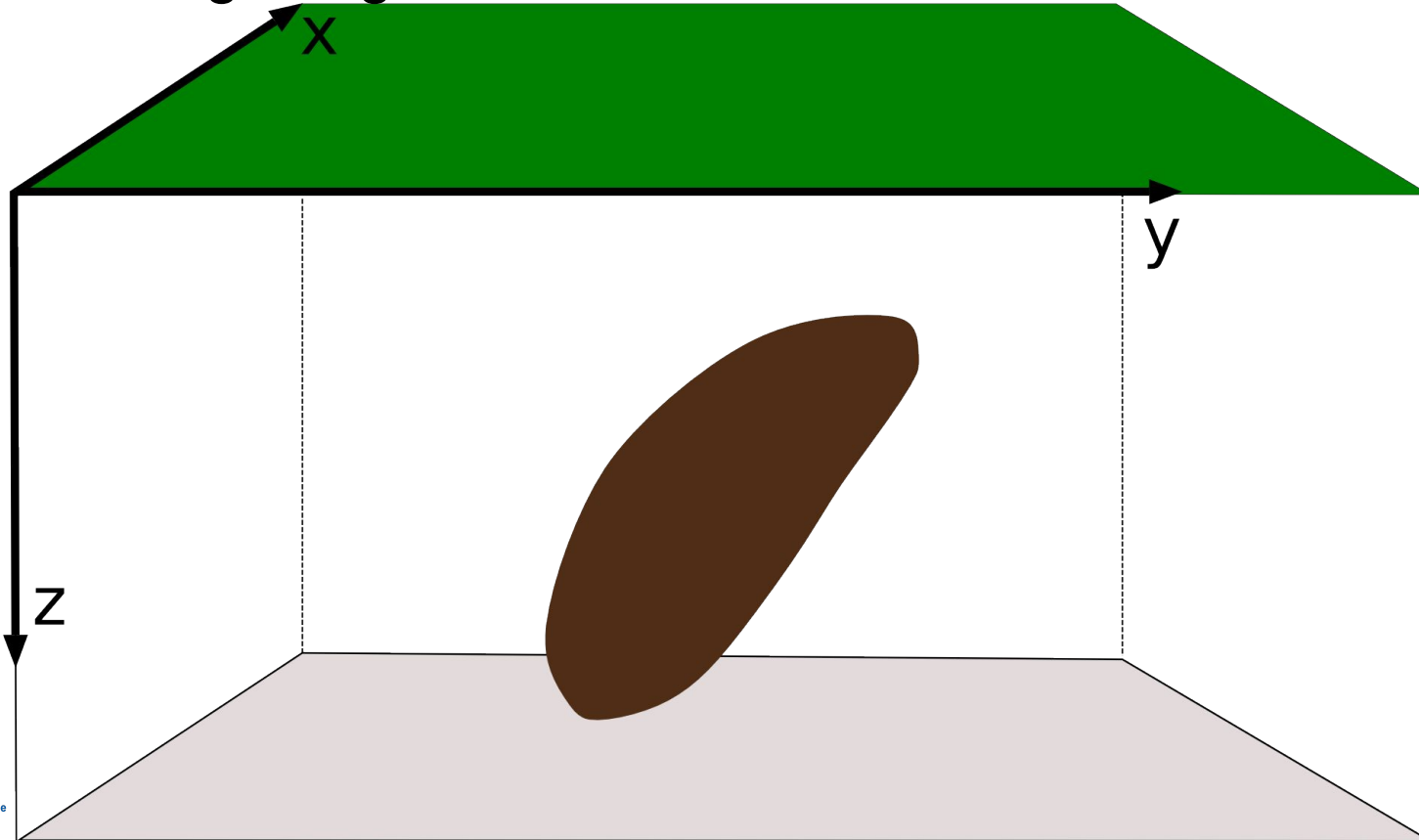
Vamos ao python!

Problema geológico/Geofísico

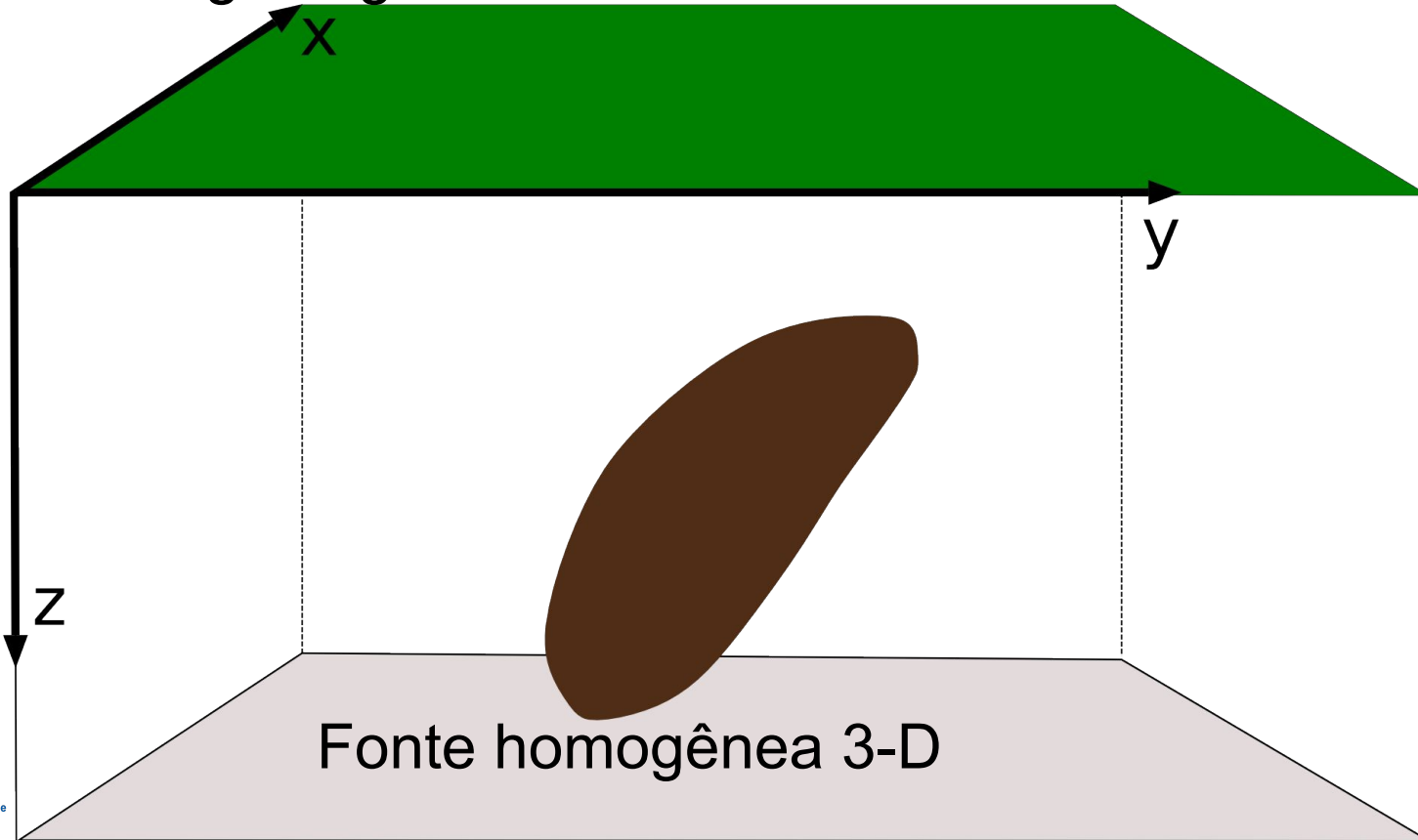
Problema geológico/Geofísico



Problema geológico/Geofísico



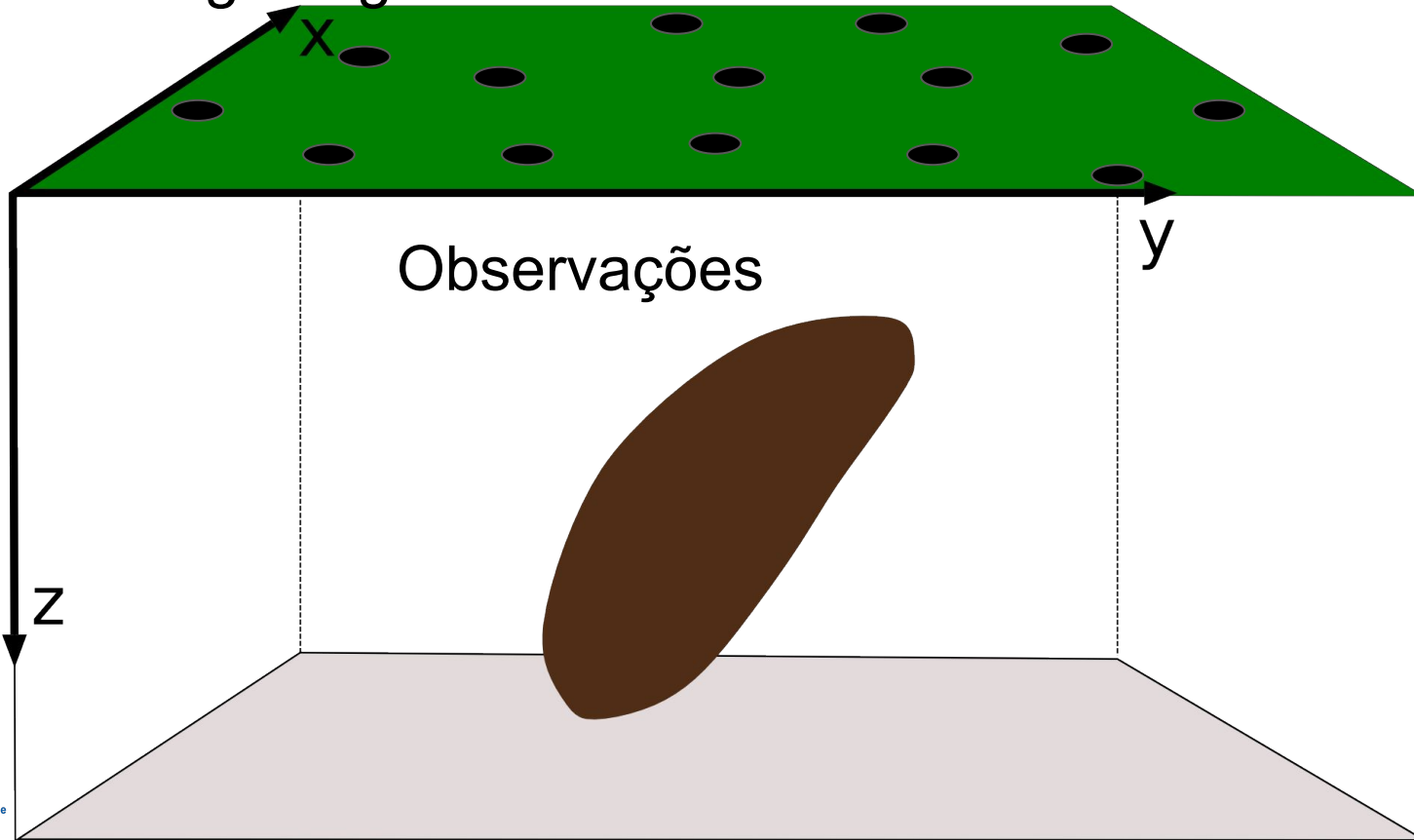
Problema geológico/Geofísico



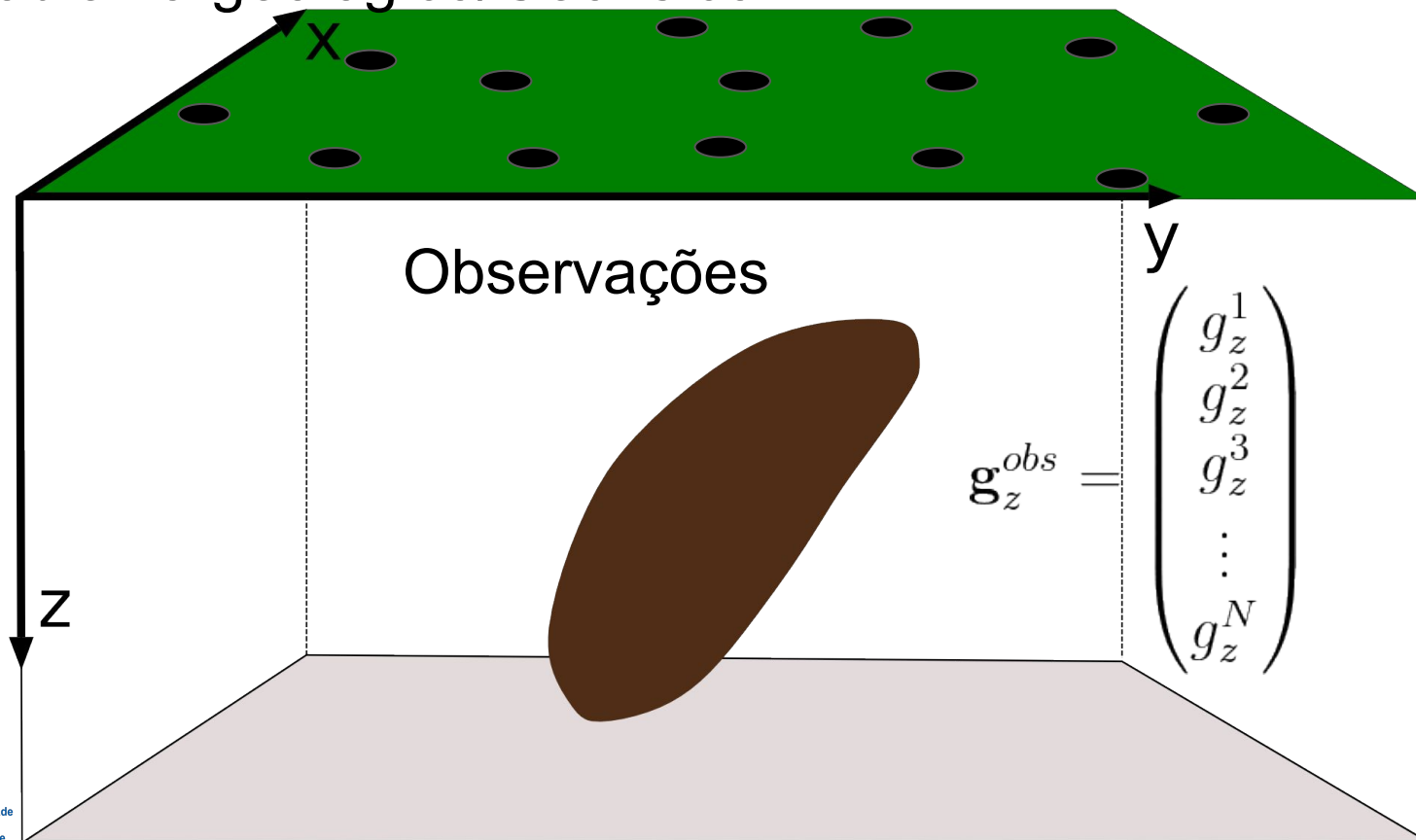
Problema geológico/Geofísico

Etapa #1: Observações

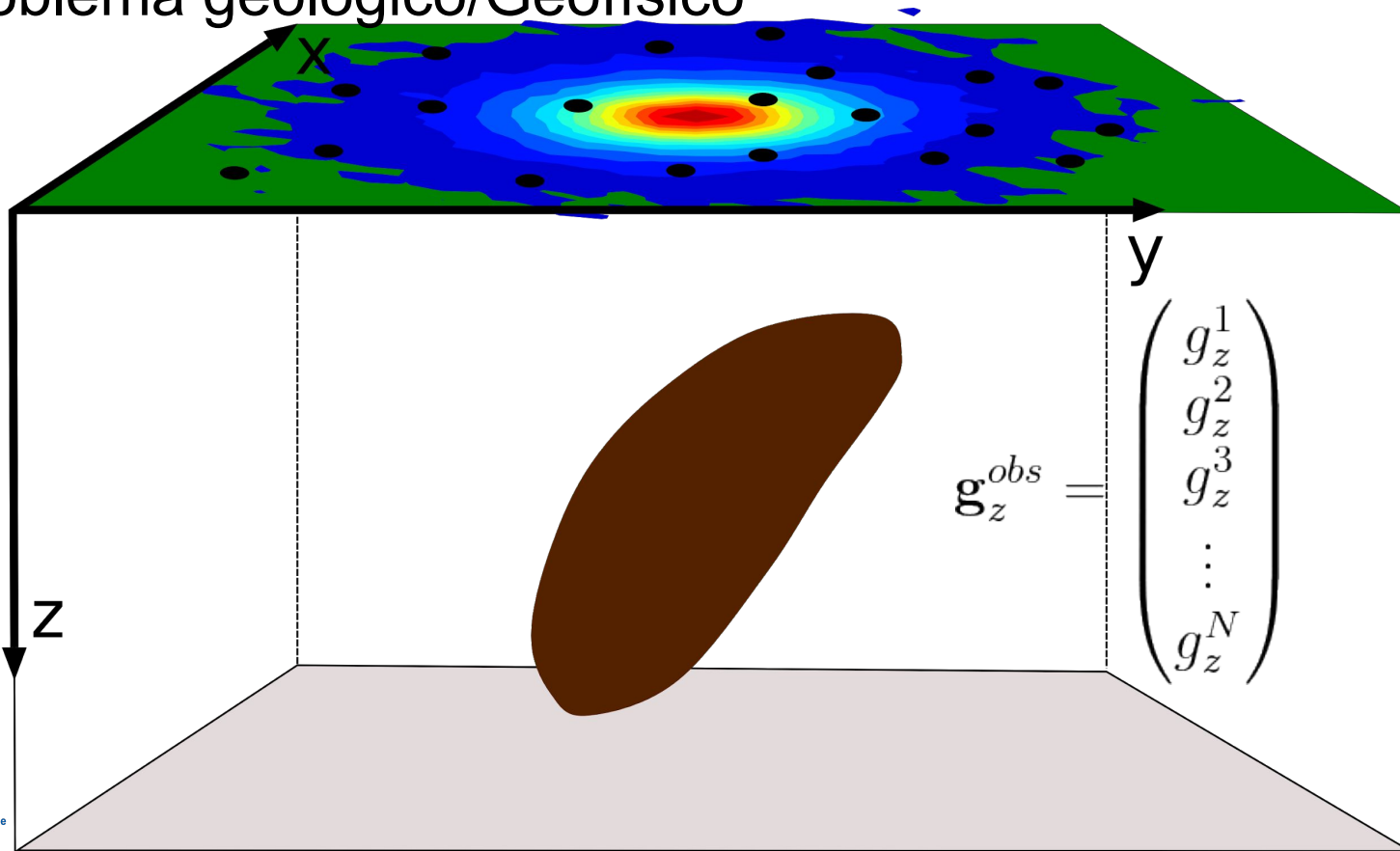
Problema geológico/Geofísico



Problema geológico/Geofísico



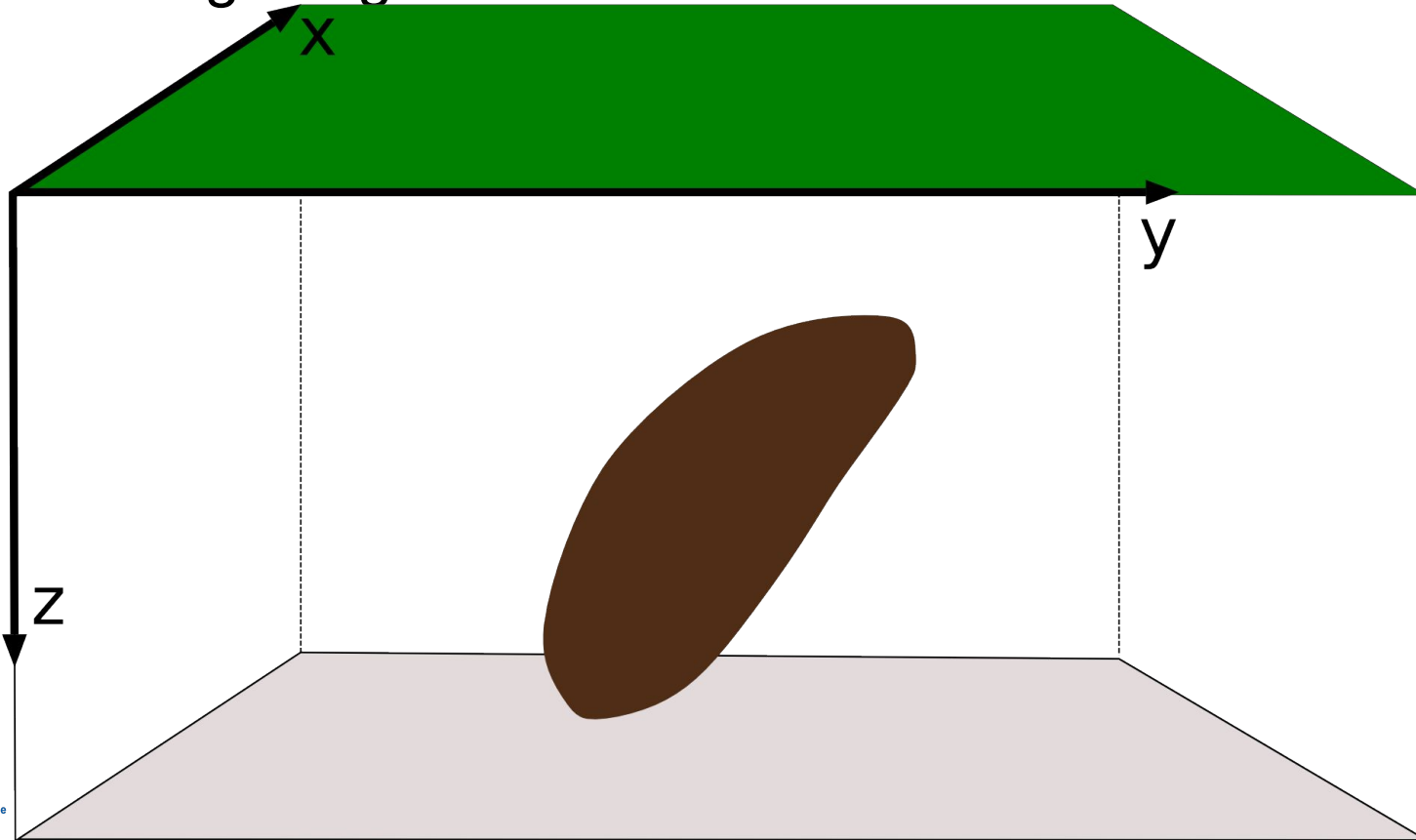
Problema geológico/Geofísico



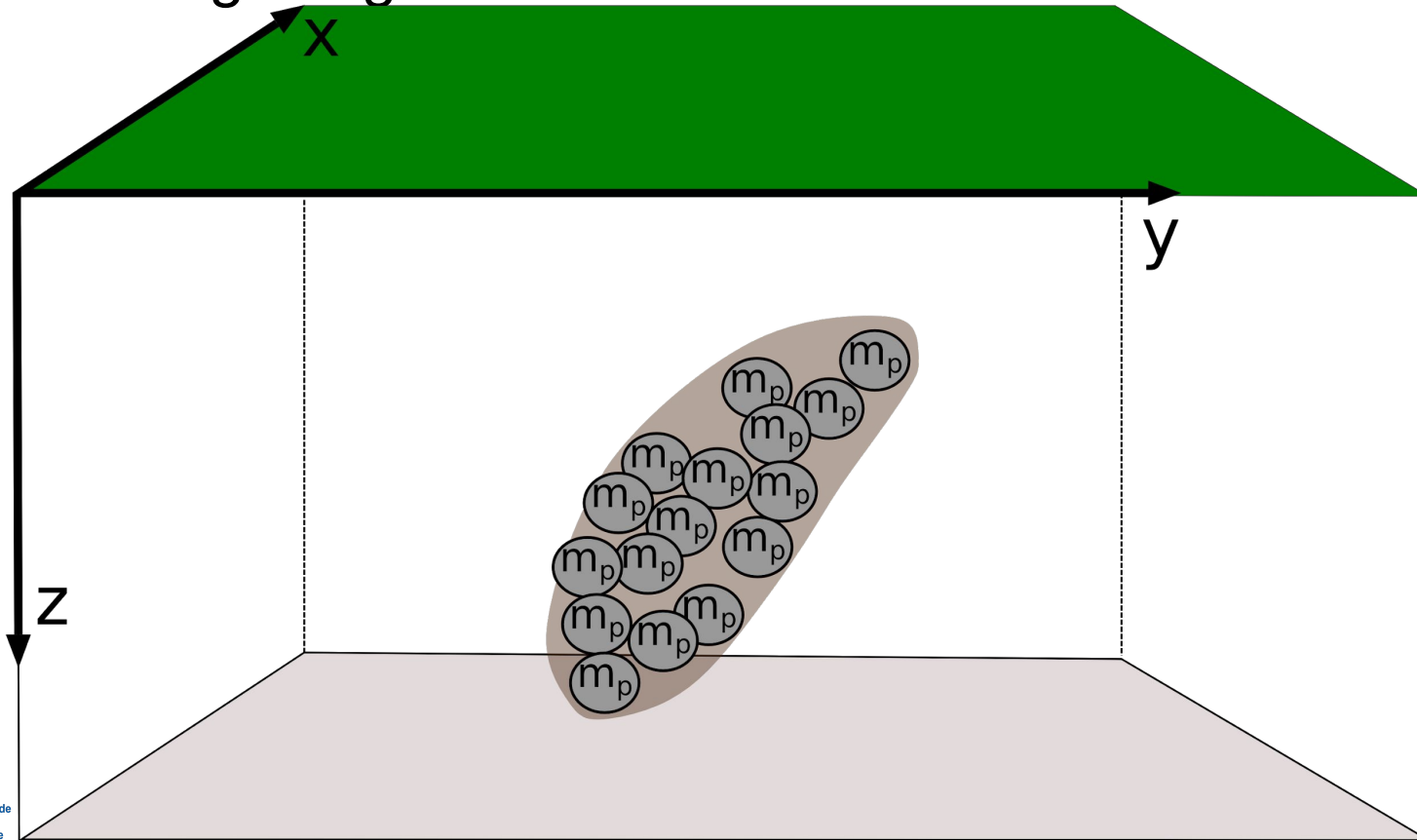
Problema geológico/Geofísico

Etapa #2: Ideia

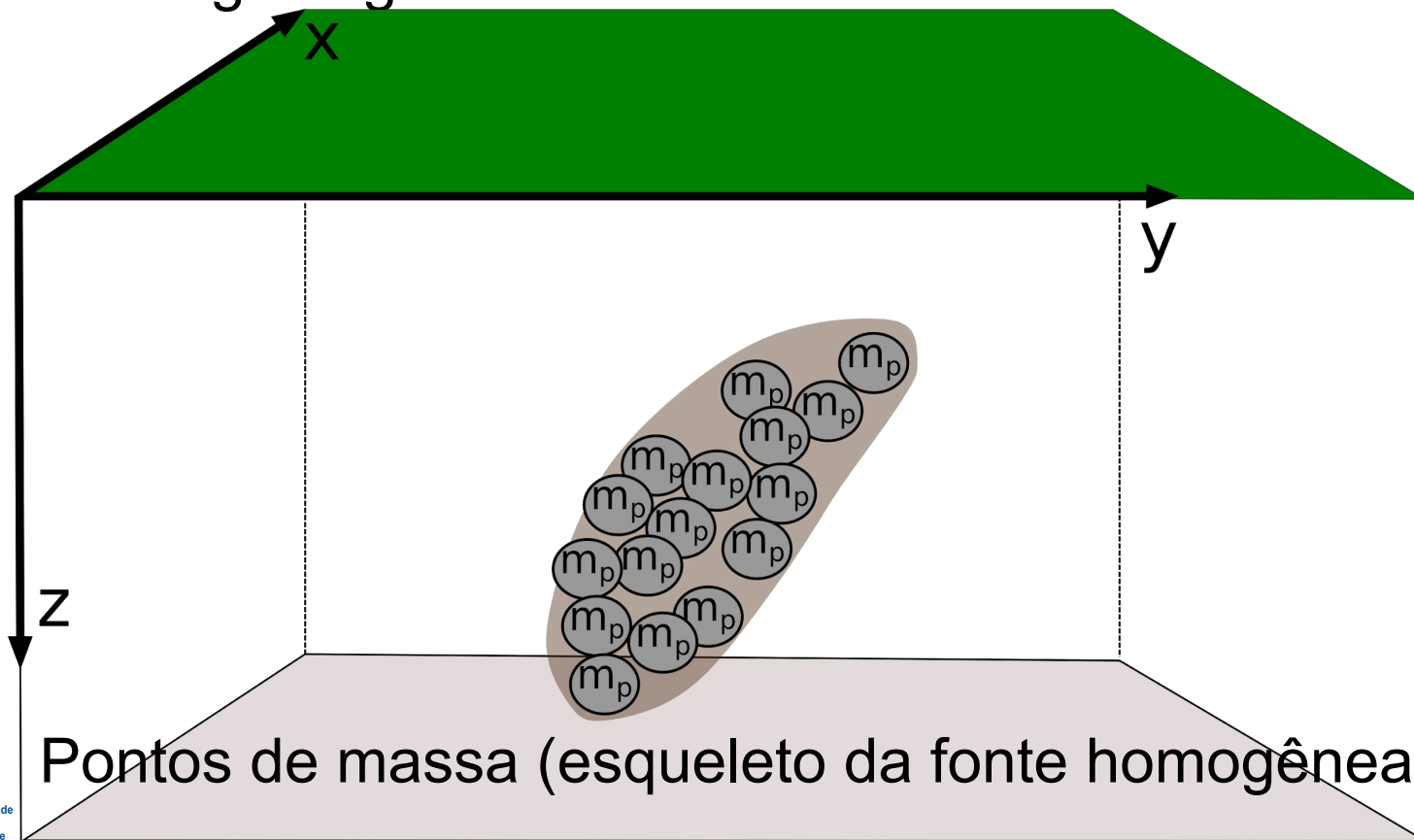
Problema geológico/Geofísico



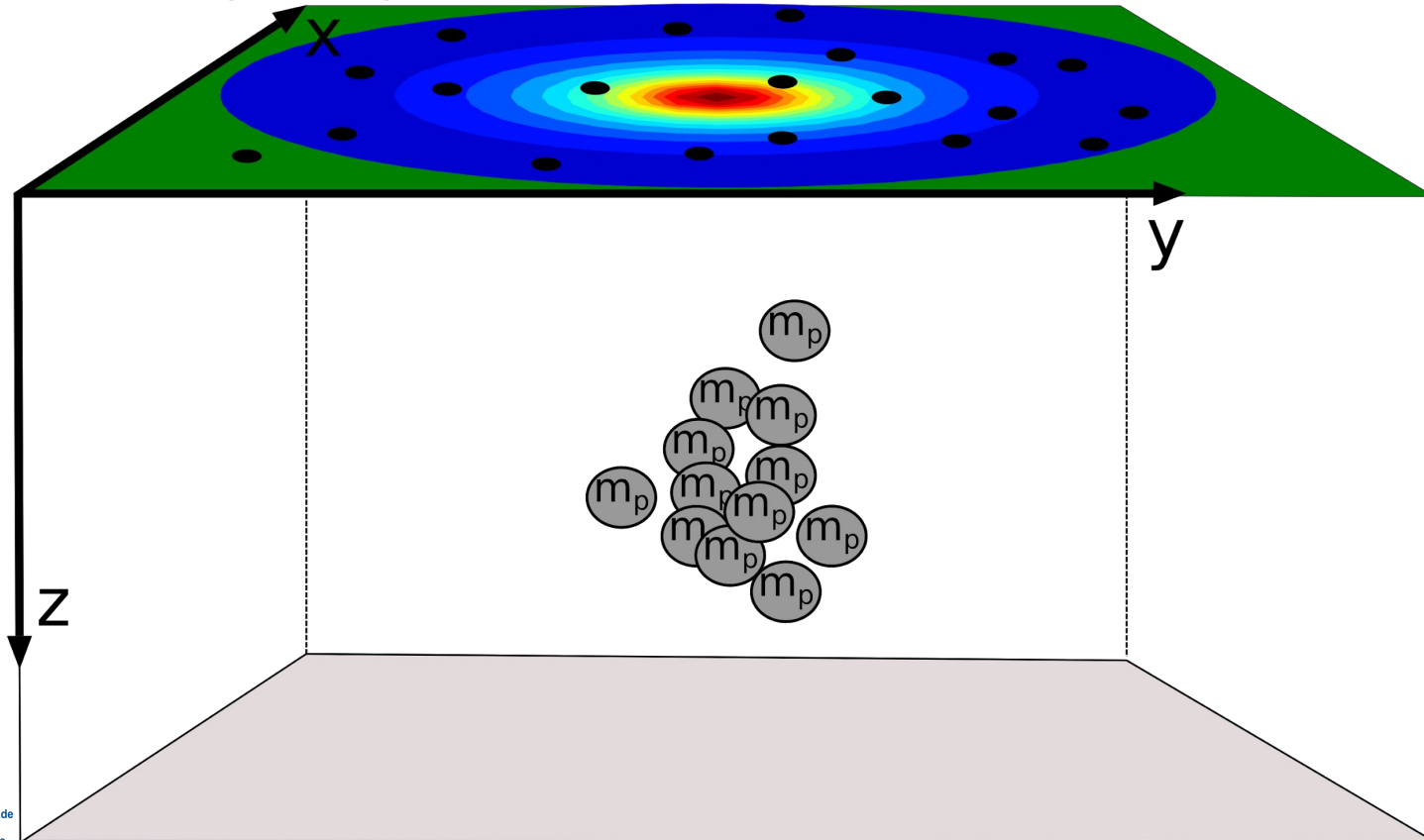
Problema geológico/Geofísico



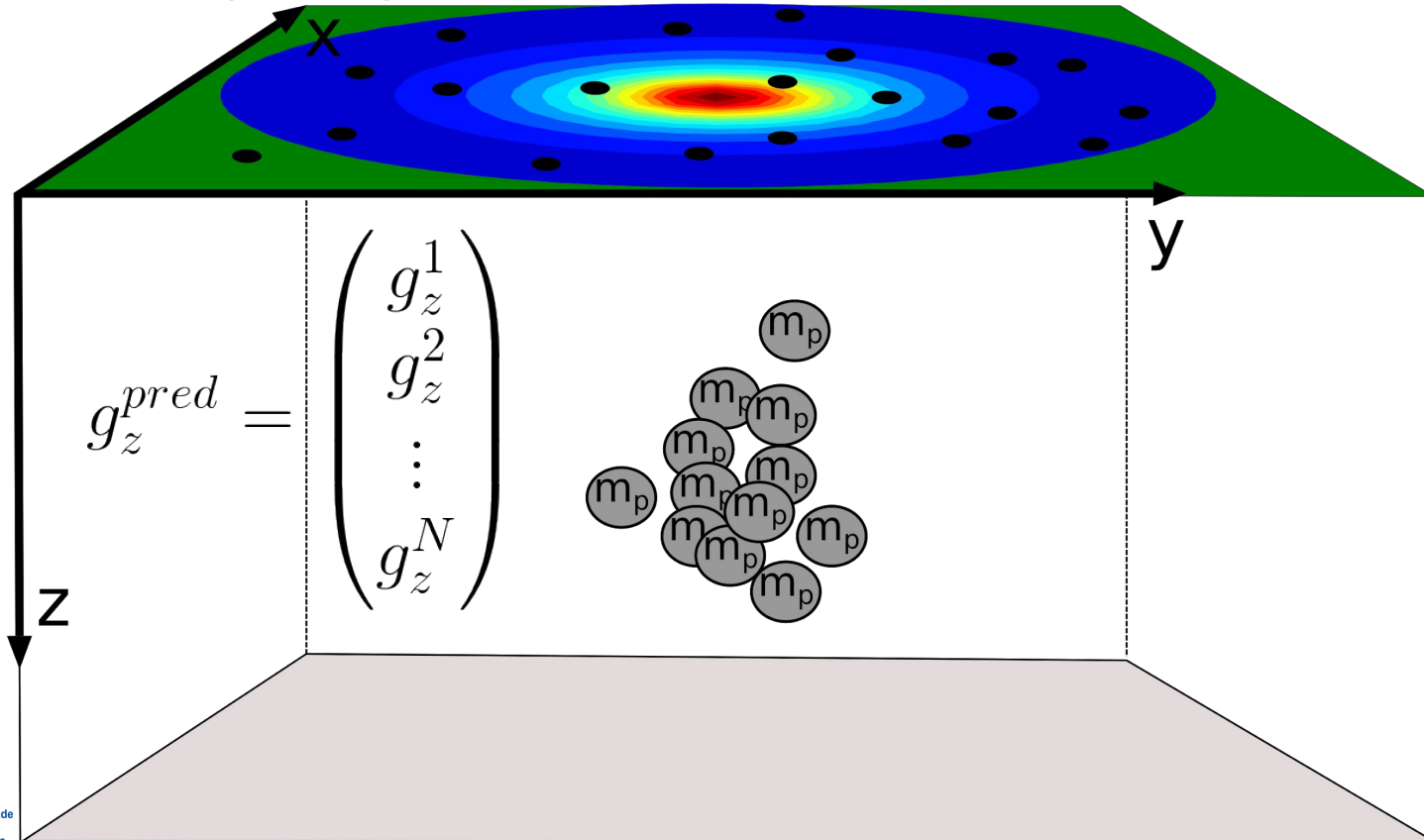
Problema geológico/Geofísico



Problema geológico/Geofísico

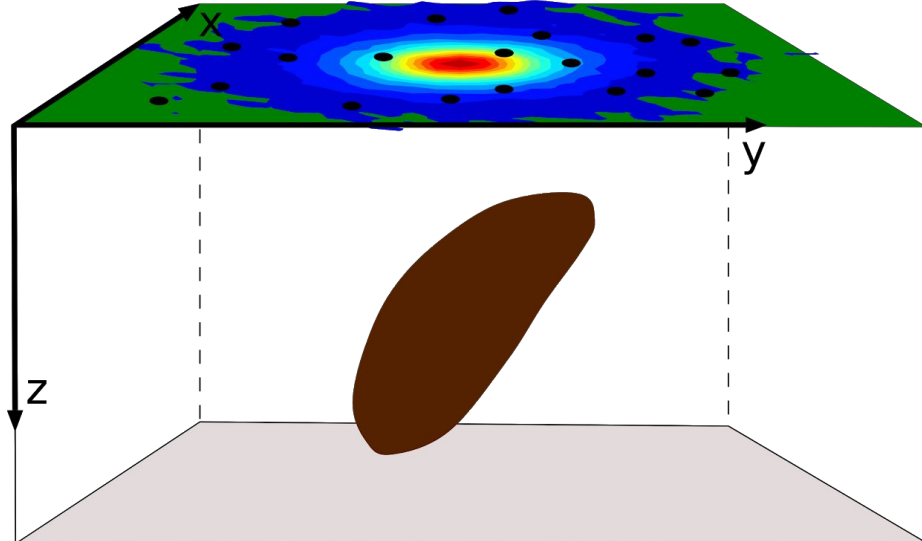
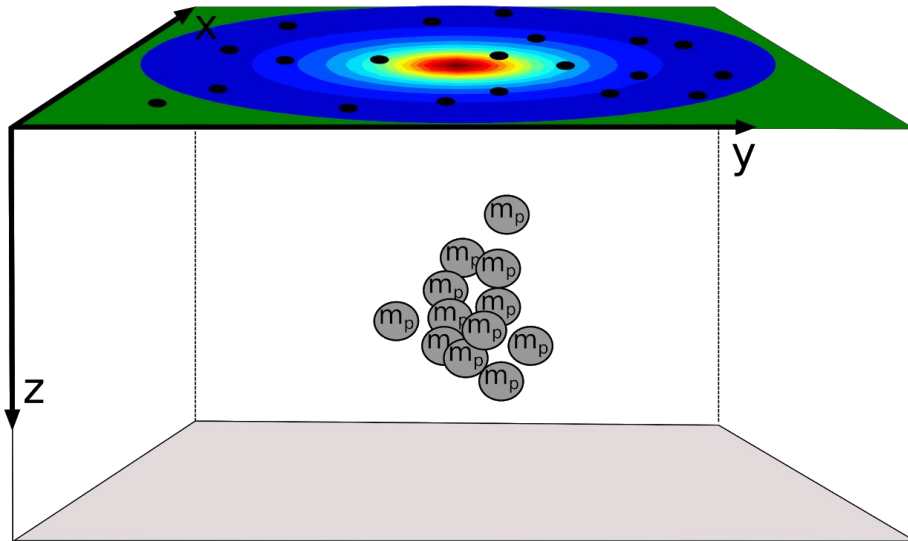


Problema geológico/Geofísico



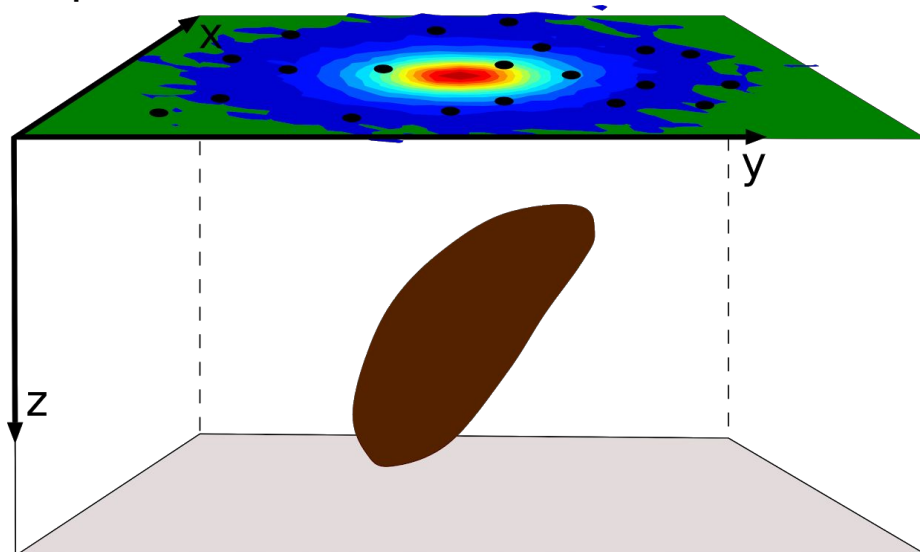
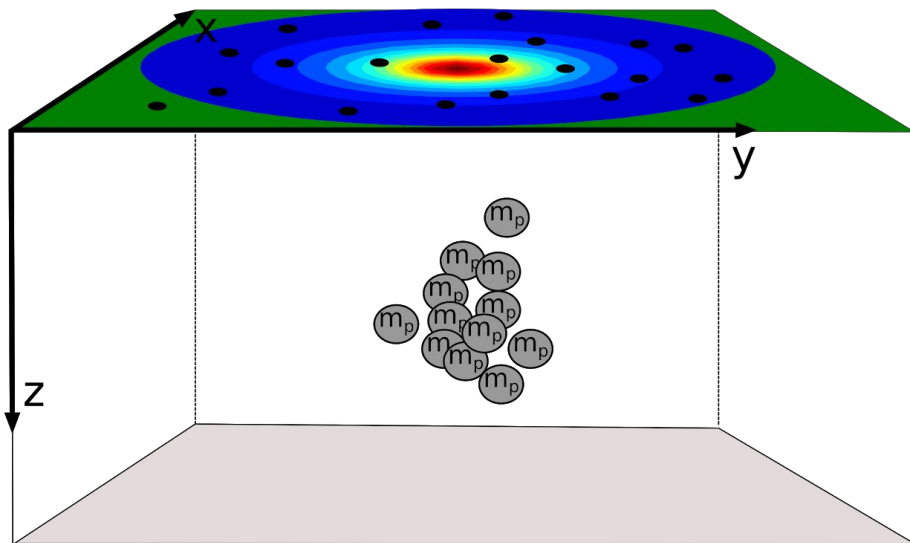
Problema geológico/Geofísico

Objetivo: Comparação entre dados preditos e dados observados



Problema geológico/Geofísico

Objetivo: Comparação entre dados preditos e dados observados



Vamos à modelagem (*clickagem*)!

Agradecimentos



20 a 24 de agosto de 2018

Centro de Convenções Sul América - Rio de Janeiro - RJ

- Cosme Ponte Neto (ON-MCTIC) - sugestões
- Nelson Ribeiro Filho (ON-MCTIC) - funções
- Diego Takahashi (ON-MCTIC) - Plot 3D + slice
- Ingrid (UFRJ)