

# Óptica de Fourier

---

## Objetivos

En esta sección se estudian sistemas 2D continuos. Los sistemas ópticos son sistemas que actúan en el espacio y el desarrollo de la óptica de Fourier permite analizar cómo se forman imágenes a partir de fuentes luminosas cercanas (difracción de Fresnel) o de fuentes lejanas (difracción de Fraunhofer) considerando la naturaleza ondulatoria de la luz.

## Óptica

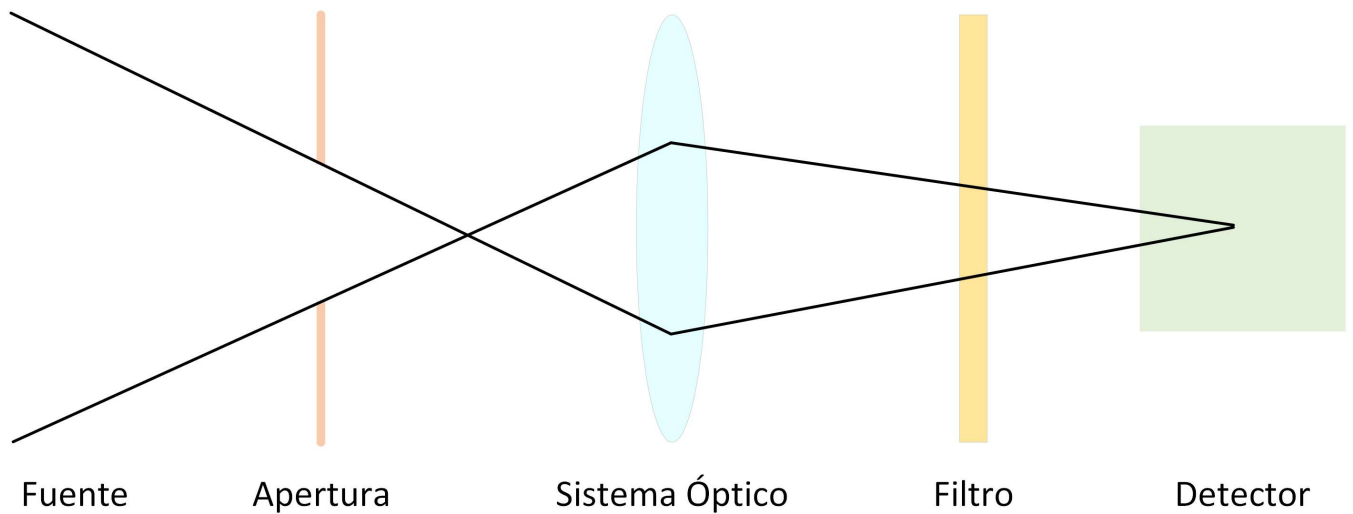
---

### Definición

La óptica es la rama de la física que estudia el comportamiento y las propiedades de la luz, incluidas sus interacciones con la materia, así como la construcción de instrumentos que se sirven de ella o la detectan. Dado que la luz se comporta como onda y como partícula, es posible desarrollar dos tipos de análisis ópticos: la óptica geométrica estudia las transformaciones de la luz observándola como un rayo y la óptica de Fourier considera la naturaleza ondulatoria de la luz para describir su comportamiento.

### Sistemas Ópticos

Los sistemas ópticos son cualquier combinación de objetos que separan medios con distinto índice de refracción que cambian el camino de la luz para formar imágenes. Los sistemas ópticos no cambian la frecuencia temporal de las ondas electromagnéticas que los atraviesan. Existen diferentes aplicaciones, las más comunes son astronomía y microscopía. **Los sistemas ópticos son sistemas lineales e invariantes que están caracterizados por su respuesta al impulso.** En astronomía en general los sistemas de adquisición son de la forma:



En este contexto, se puede observar que la luz es una señal que trae información de fuentes luminosas y el sistema óptico transforma esta señal para que se pueda interpretar. Dado que el camino de la luz está en el espacio, se puede modelar un sistema óptico como un sistema 2D.

## Óptica Geométrica

### Definición

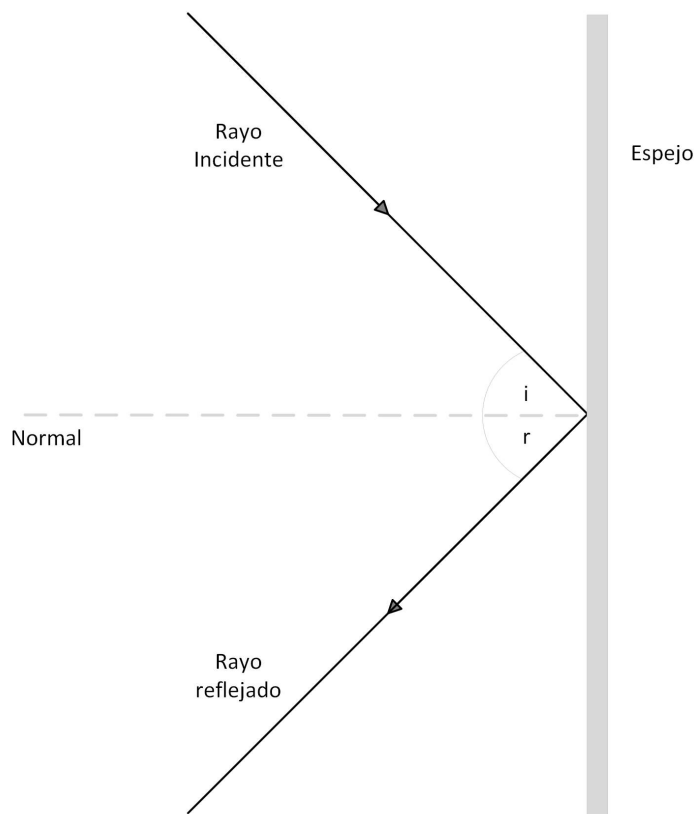
En este análisis físico se considera que la luz es una onda que se refleja y se refracta, ambos fenómenos están basados en el principio de Fermat. **La óptica geométrica es válida cuando la longitud de onda de la luz que atraviesa el sistema óptico es de mucho menor tamaño que los elementos que componen el sistema**, ya que modela el comportamiento de la luz como un rayo.

### Principio de Fermat

*El camino recorrido entre dos puntos por un rayo de luz es el camino que se puede atravesar en el menor tiempo posible*

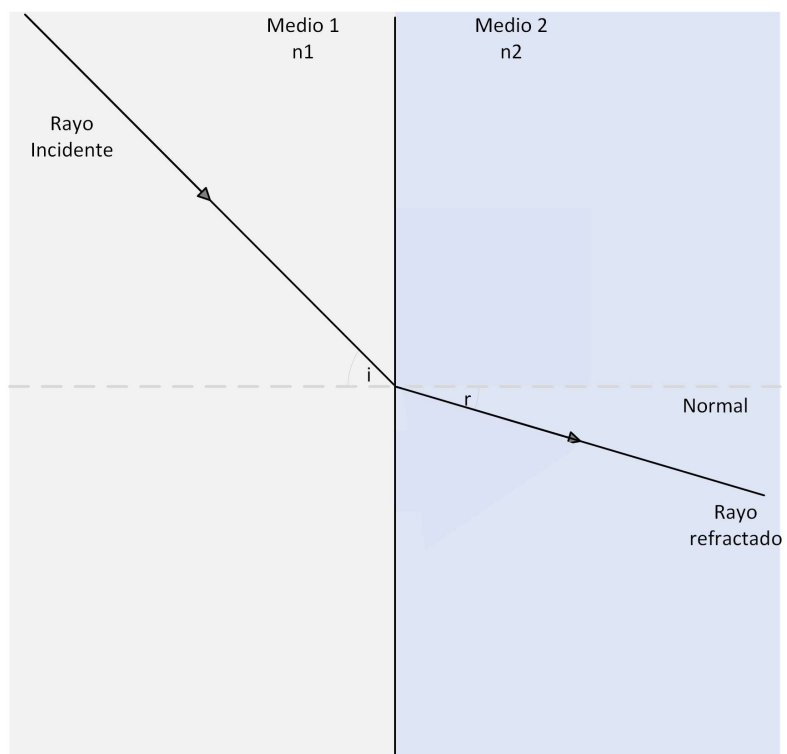
## Reflexión

Cuando un rayo de luz se refleja, el ángulo de incidencia respecto a la normal es igual al ángulo reflejado respecto a la normal



## Refracción

La refracción es el cambio de dirección de propagación que experimentan las ondas cuando pasan de un medio a otro.



### Ley de Snell

$$n_1 \sin(i) = n_2 \sin(r)$$

Donde  $n_1$  es el índice de refracción del medio 1 y  $n_2$  es el índice de refracción del medio 2. El índice de refracción mide cuanto cambia la velocidad de la luz en un medio ( $v$ ) respecto a la velocidad de la luz en el vacío( $c$ ):

$$n = \frac{c}{v}$$

### Observación

En el contexto de la óptica geométrica se desarrollan instrumentos ópticos como telescopios y microscopios operando en base a espejos y lentes esféricos. La óptica geométrica puede explicar aberraciones ópticas como aberración esférica, curvatura de campo, astigmatismo, coma y aberración cromática. Sin embargo, observando la luz como un rayo no es posible explicar por qué cuando observamos a través de un sistema óptico dos fuentes puntuales monocromáticas sólo somos capaces de diferenciar que son dos fuentes y no confundirlas con una sola cuando la distancia entre las fuentes es mayor a una distancia específica para cada sistema óptico. Este problema lo resuelve la óptica ondulatoria.

## Óptica Ondulatoria

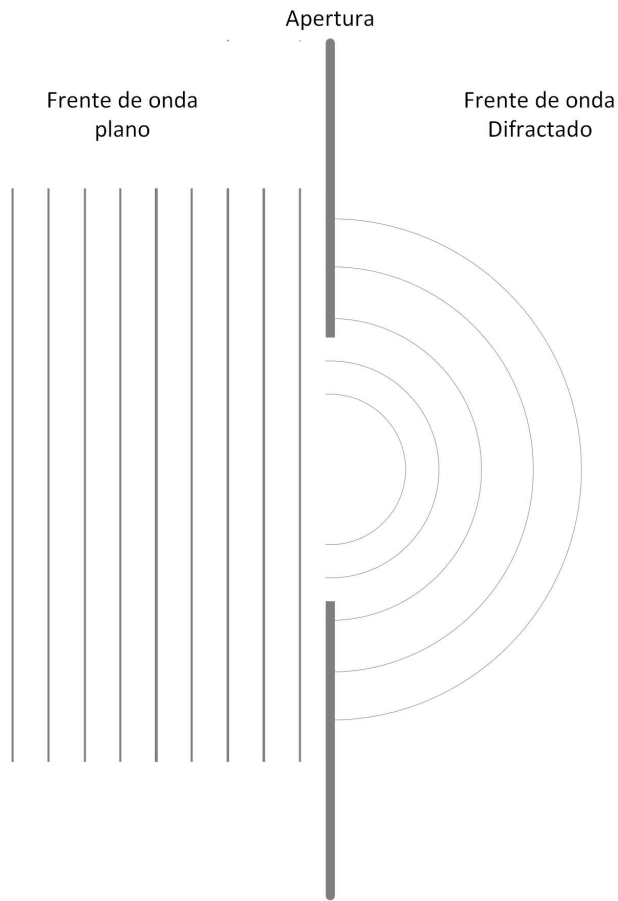
.....

### Definición

En este análisis físico se considera que la luz es una onda que se refleja y se refracta, pero también se considera que se **difracta**, lo que permite un análisis más exacto de lo que ocurre con la luz al pasar por una apertura antes de entrar a un sistema óptico

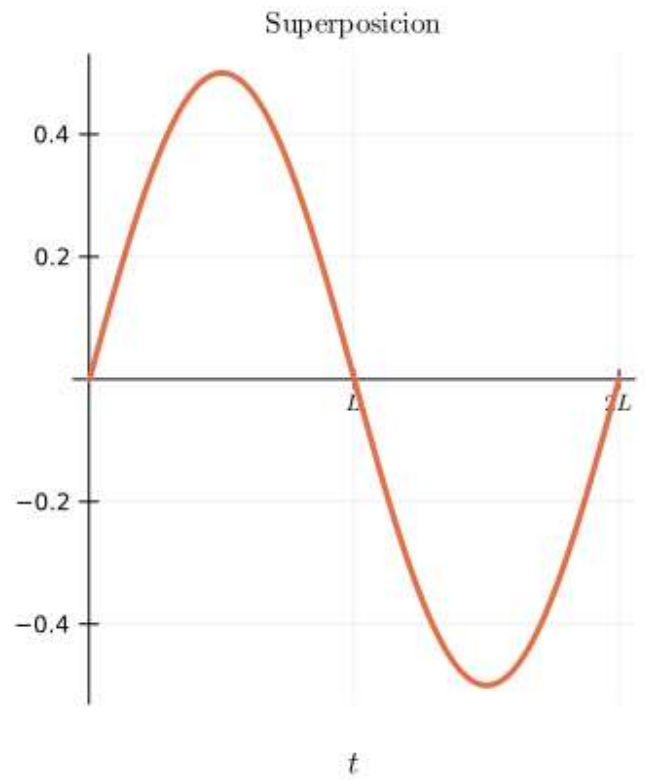
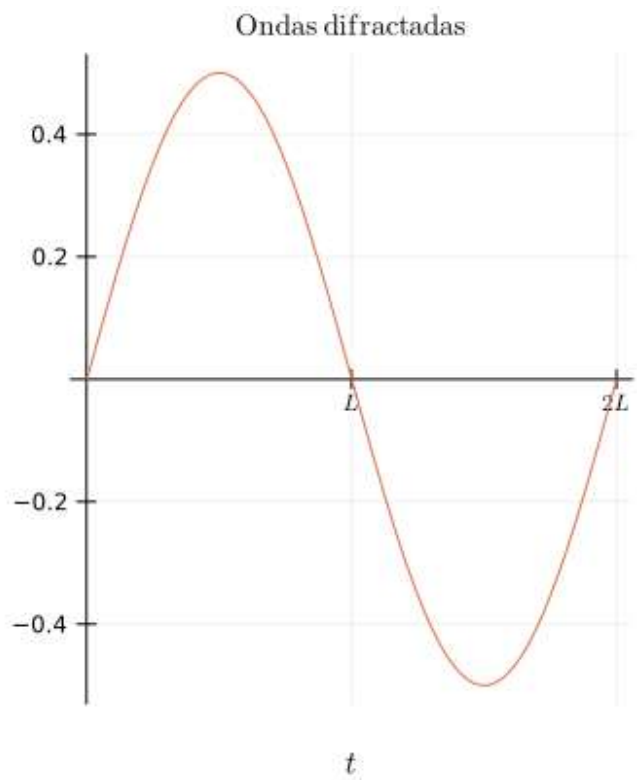
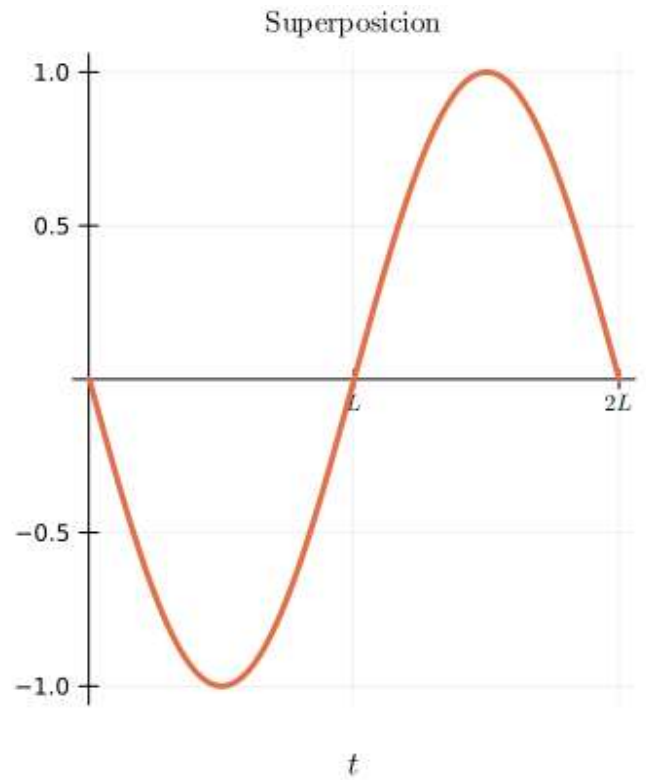
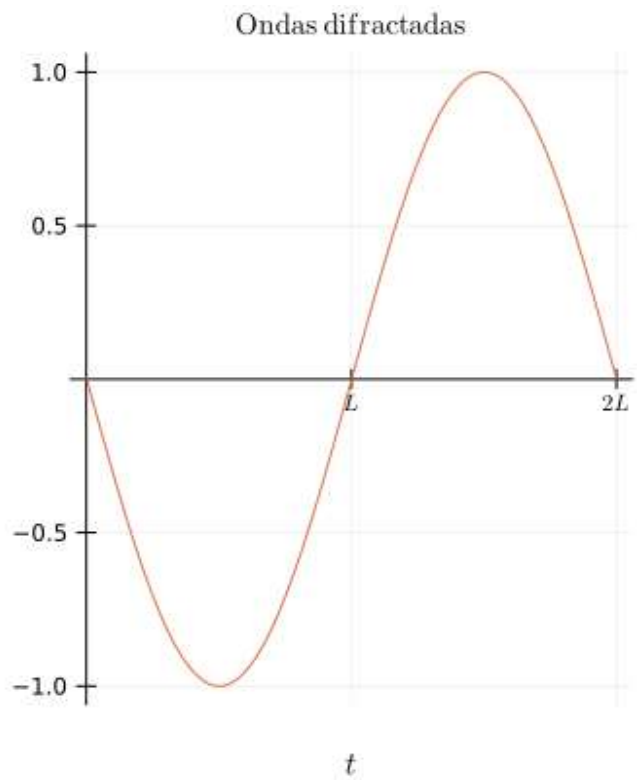
## Difracción

Es un fenómeno ondulatorio de desviación de la dirección de propagación de una onda desde su trayectoria rectilínea que no pueden interpretarse como reflexión o refracción. Consiste en la desviación de ondas alrededor de las esquinas de un obstáculo o a través de una abertura. Esta se produce cuando la onda al atravesar un obstáculo transparente u opaco cambia su magnitud o su fase.



## Patron de Difracción

Los segmentos de frente de onda que logran atravesar la apertura interfieren entre sí, lo que genera que se produzcan secciones más luminosas (la interferencia es positiva, las ondas que interfieren están en fase y se suman) y secciones oscuras (la interferencia es negativa, las ondas que están en contra fase se suman y la suma da cero).

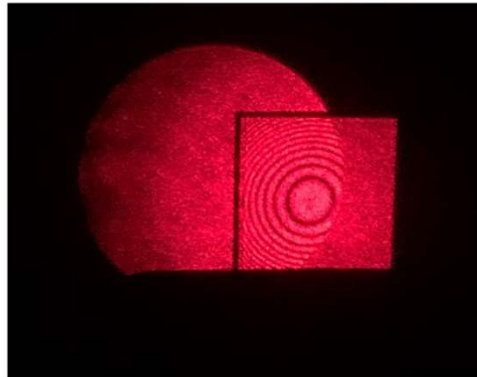
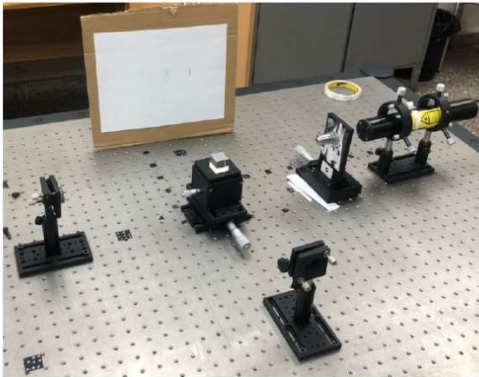


A continuación se muestran imágenes de dos tipos de patrones de difracción observados en laboratorio.

Interferómetro de Newton: muestra el patrón de interferencia formado un sistema de dos lentes con diferente índice de refracción que es atravesado por una luz coherente monocromática:

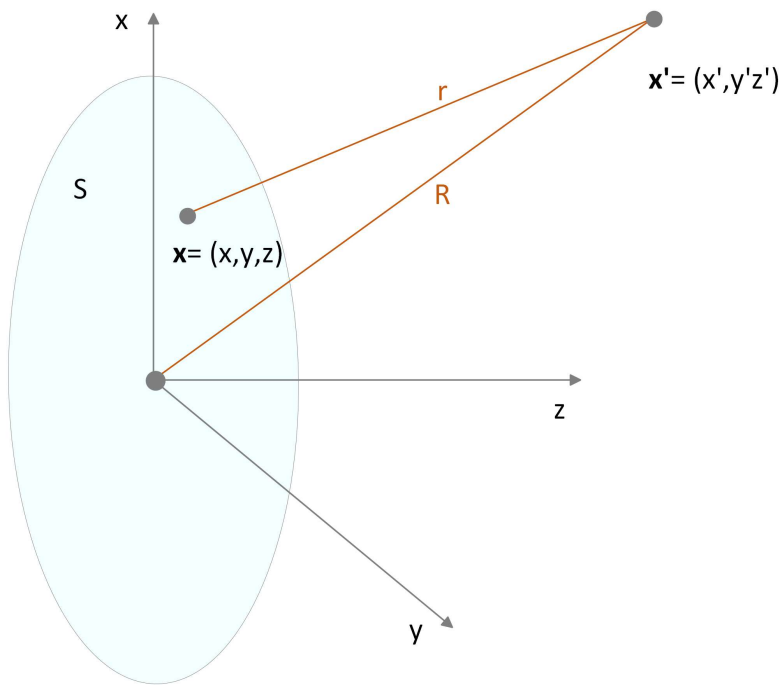


Interferómetro de Michelson: muestra el patrón de interferencia formado por un sistema que está compuesto por aperturas, lentes y espejos y que es atravesado por un láser como una fuente de luz temporalmente coherente



## Difracción por una apertura plana

Las ecuaciones formuladas en esta sección permitirán entregar las bases para el desarrollo de la óptica de Fourier. Consideremos una pantalla plana infinitamente extendida con una única apertura y asumamos un campo monocromático y plano:



Plano de apertura ( $z=0$ )

Para encontrar el valor del campo eléctrico en el punto  $\mathbf{x}'$ , aplicamos la fórmula de Rayleigh-Sommerfeld para la difracción, que es la solución a la ecuación de Helmholtz-Kirchhoff que resuelve el comportamiento escalar de una onda electromagnética:

### Fórmula de Rayleigh-Sommerfeld

Considerando que la distribución de campo incidente  $u_{in}(x, y)$  se distribuye uniformemente en el área de la apertura (a):

$$u(\mathbf{x}') = \iint_S \frac{a}{R} e^{i(\omega - kr)} ds$$

Esta expresión es difícil de trabajar, por lo que se buscan aproximaciones que simplifiquen la expresión.

## Aproximación de campo Lejano



En las aplicaciones en Astronomía se utiliza la difracción de Fraunhofer o aproximación de campo lejano para modelar el comportamiento de la luz en un sistema óptico. En este contexto se toma en cuenta que las fuentes luminosas se encuentran muy alejadas de el sistema óptico.

### Aproximación de Fraunhofer

Cuando la fuente de campo es lejana al sistema óptico, es posible decir que  $R \gg d$  donde  $d$  es el diámetro de la apertura y  $R$  es la distancia del centro de la apertura al punto. De esta forma:

$$u(\mathbf{x}') = \iint_S \frac{a}{R} e^{i(\omega - kR)} e^{ik \frac{xx' + yy'}{R}} ds$$

La expresión  $\frac{a}{R} e^{i(\omega - kR)}$  corresponde a una parametrización de la apertura de superficie  $S$  que genera la difracción, la llamaremos  $A(x, y)$  por lo que:

$$u(\mathbf{x}') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(x, y) e^{ik \frac{xx' + yy'}{R}} dx dy$$

Podemos observar que **en aproximación de campo lejano, el valor del campo eléctrico en un punto  $(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$  corresponde a la Transformada de Fourier 2D aplicada a la función apertura evaluada en las variables de frecuencia  $(\frac{kx'}{R}, \frac{ky'}{R})$** . Por simplicidad en el futuro realizaremos el siguiente cambio de variable:

$$u = \frac{kx'}{R} \quad v = \frac{ky'}{R}$$

Por lo tanto, el campo eléctrico en un punto  $\mathbf{x}'$  a una distancia  $R$  del sistema óptico es:

$$u(\mathbf{x}') = \mathcal{F}\{A(a, y)\}(u, v)$$

# Respuesta al impulso

Es posible modelar los sistemas ópticos como sistemas LTI, ya que se observa experimentalmente que no cambian la frecuencia de las ondas que los atraviesan. De esta forma, **cuando se forma una imagen producto de las ondas que vienen de un objeto luminoso y atraviesan una apertura, la iluminación de la imagen es la convolución entre la iluminación del objeto y la respuesta al impulso del sistema**

## PSF

La salida de un sistema óptico ( $g(x, y)$ ) corresponde a la convolución entre la entrada ( $f(x, y)$ ) y su PSF (respuesta al impulso):

$$g(x, y) = \{f * PSF\}(x, y)$$

La PSF de un sistema óptico es el módulo cuadrado de la transformada de Fourier de la apertura:

$$PSF = |\mathcal{F}\{A\}|^2$$

## OTF

En óptica para medir las características de un sistema en general en lugar de utilizar la PSF se utiliza la *Optical Transfer Function* (OTF) que corresponde a la transformada de Fourier de la PSF:

$$OTF = \mathcal{F}\{PSF\}$$

Utilizando propiedad de la convolución de la transformada de Fourier y dualidad asumiendo que las aperturas siempre serán simétricas es posible definir la OTF como la autoconvolución de la función apertura:

$$OTF = \{A * A\}(k_x, k_y)$$

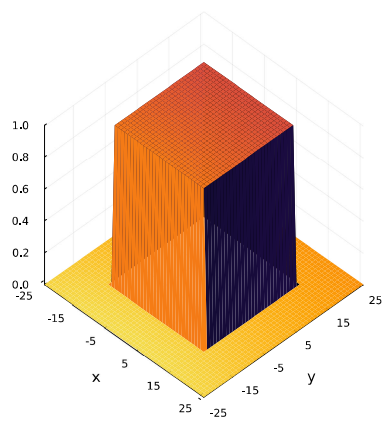
Dado que la OTF es un número complejo, esta se puede descomponer en magnitud y fase dando origen a dos funciones nuevas: *Modulation Transfer Function* (MTF) y *Phase Transfer Function* (PTF)

$$OTF = MTF e^{iPTF}$$

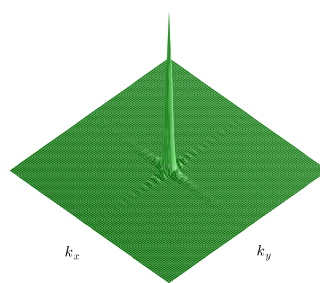
En este contexto es posible observar a los sistemas ópticos como un filtro de frecuencias espaciales.

A continuación se muestra una apertura cuadrada, su PSF y MTF

Apertura Cuadrada



PSF



MTF

