

Simulador de inductancia con OpAmp

Author Rodrigo

Análisis

El método más directo para transformar un filtro pasivo en un circuito activo sin inductores es reemplazar todos sus inductores por circuitos activos con comportamiento inductivo, estos son referidos como inductores simulados. Los inductores simulados son circuitos de un puerto en el cual la impedancia de entrada es de la forma $Z_{in}(s) = sL$. A pesar de que hay muchos circuitos que se comportan como inductores, los más populares son los circuitos de Riordan y de Antoniou, los cuales han sido usados por varias décadas.

1 Inductor simulado de Riordan

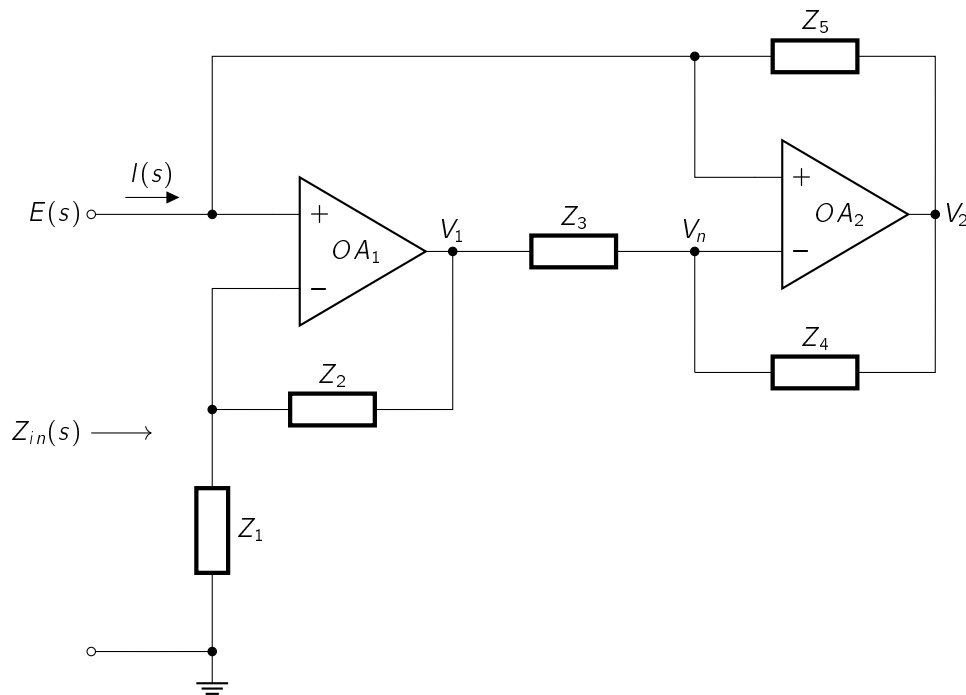


Figura 1: Inductor simulado de Riordan

Podemos reconocer que el amplificador OA_1 se trata de un amplificador no inversor, por lo tanto, el voltaje en el nodo V_1 es:

$$V_1(s) = \frac{Z_1(s) + Z_2(s)}{Z_1(s)} E(s) \quad (1)$$

La aplicación de la LCK en la terminal no inversora del amplificador OA_2 produce

$$I(s) = I_{Z_5}(s) \quad (2)$$

O bien

$$I(s) = \frac{E(s) - V_2(s)}{Z_5(s)} \quad (3)$$

Ahora aplicamos la LCK en el nodo V_n

$$I_{z_3}(s) = I_{z_4}(s) \quad (4)$$

Mediante ley Ohm, representamos (4) como

$$\frac{V_1(s) - V_n(s)}{Z_3(s)} = \frac{V_n(s) - V_2(s)}{Z_4(s)} \quad (5)$$

Sin embargo

$$V_n(s) = E(s) \quad (6)$$

La sustitución de la ecuación (6) en (5) produce

$$\frac{V_1(s) - E(s)}{Z_3(s)} = \frac{E(s) - V_2(s)}{Z_4(s)} \quad (7)$$

Despejamos $V_2(s)$ de la ecuación (7)

$$\begin{aligned} Z_4(s)V_1(s) - Z_4(s)E(s) &= Z_3(s)E(s) - Z_3(s)V_2(s) \\ Z_4(s)V_1(s) - Z_4(s)E(s) - Z_3(s)E(s) &= -Z_3(s)V_2(s) \\ V_2(s) &= \frac{Z_3(s) + Z_4(s)}{Z_3(s)}E(s) - \frac{Z_4(s)}{Z_3(s)}V_1(s) \end{aligned} \quad (8)$$

Sustituimos (1) en (8)

$$V_2(s) = \frac{Z_3(s) + Z_4(s)}{Z_3(s)}E(s) - \frac{Z_4(s)}{Z_3(s)} \left[\frac{Z_1(s) + Z_2(s)}{Z_1(s)} \right] E(s) \quad (9)$$

Por último, sustituimos (9) en (3)

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{E(s) - \frac{Z_3(s) + Z_4(s)}{Z_3(s)}E(s) - \frac{Z_4(s)}{Z_3(s)} \left[\frac{Z_1(s) + Z_2(s)}{Z_1(s)} \right] E(s)}{Z_5(s)} \\ &= \frac{\left[1 - \frac{Z_3(s) + Z_4(s)}{Z_3(s)} - \frac{Z_4(s)}{Z_3(s)} \left[\frac{Z_1(s) + Z_2(s)}{Z_1(s)} \right] \right] E(s)}{Z_5(s)} \\ &= \frac{\left[\frac{Z_1(s)Z_3(s) - Z_1(s)(Z_3(s) + Z_4(s)) - Z_4(s)(Z_1(s) + Z_2(s))}{Z_1(s)Z_3(s)} \right] E(s)}{Z_5(s)} \\ &= \frac{\left[\frac{Z_1(s)Z_3(s) - Z_1(s)Z_3(s) - Z_1(s)Z_4(s) - Z_1(s)Z_4(s) + Z_2(s)Z_4(s)}{Z_1(s)Z_3(s)} \right] E(s)}{Z_5(s)} \\ &= \frac{\frac{Z_2(s)Z_4(s)}{Z_1(s)Z_3(s)}}{Z_5(s)} E(s) \end{aligned}$$

Es decir

$$I(s) = \frac{Z_2(s)Z_4(s)}{Z_1(s)Z_3(s)Z_5(s)} E(s) \quad (10)$$

Así, la impedancia $Z_{IN}(s)$ está dada por

$$Z_{IN}(s) = \frac{E(s)}{I(s)} = \frac{Z_1(s)Z_3(s)Z_5(s)}{Z_2(s)Z_4(s)} \quad (11)$$

Es claro ver que si $Z_2(s)$ es un capacitor con impedancia $Z_2(s) = \frac{1}{sC_2}$ y las demás impedancias $Z_i(s)$ son resistores R_i como en la figura 2, la impedancia de entrada se vuelve

$$Z_{IN}(s) = s \frac{R_1 R_3 R_5 C_2}{R_4} \quad (12)$$

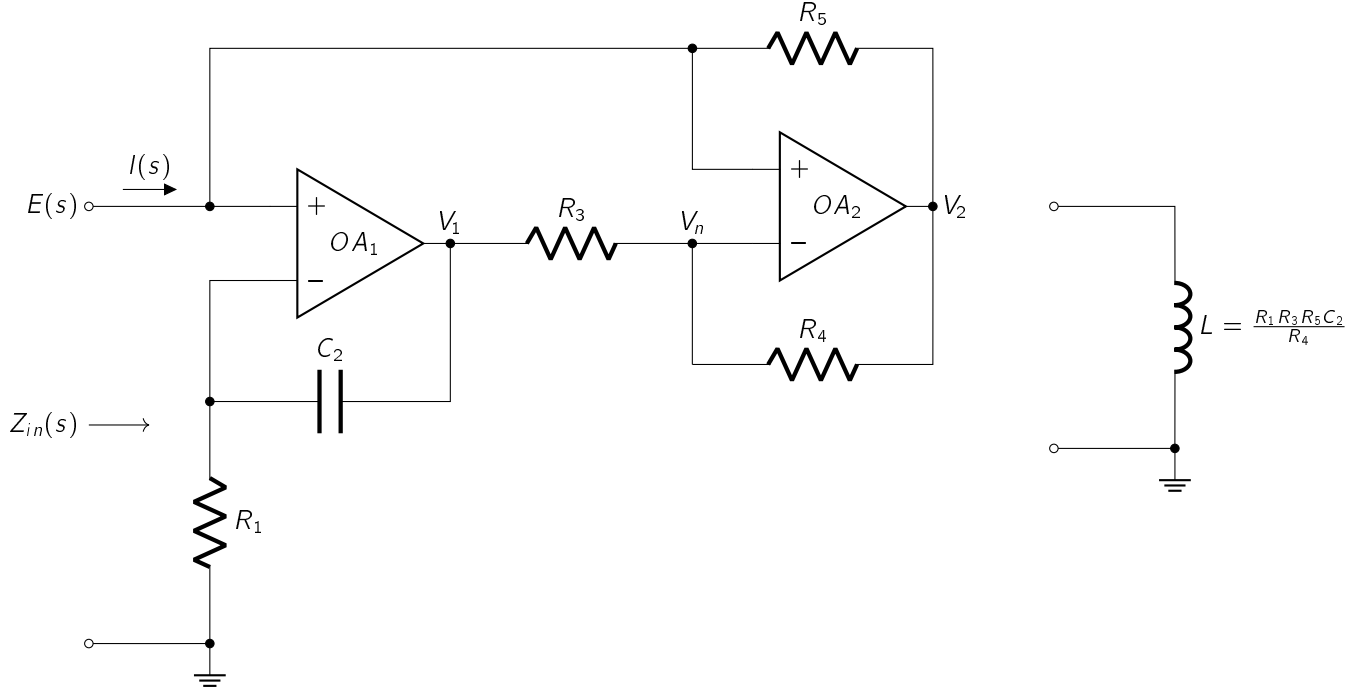


Figura 2: Inductor simulado de Riordan sustituyendo las impedancias por sus elementos resistivos y capacitivo

El cual representa un inductor cuya inductancia está dada por

$$L = \frac{R_1 R_3 R_5 C_2}{R_4} \quad (13)$$

Dado que una de las terminales del puerto de entrada del circuito de Riordan está puesta a tierra, este circuito sólo puede simular inductores puestos a tierra. Finalmente, debemos notar que si $Z_4(s)$ es un capacitor con una impedancia $Z_4(s) = \frac{1}{sC_4}$ y las demás impedancias $Z_i(s)$ son resistores R_i , el circuito simularía un inductor con un valor de

$$L = \frac{R_1 R_3 R_5 C_4}{R_2} \quad (14)$$

1.1 Ejemplo 1

El circuito de la figura 3 muestra un filtro pasivo pasa altas Chebyshev de orden $N = 3$, diseñado para satisfacer las siguientes condiciones:

$$f_c = 10 \text{ kHz} \quad f_s = 333.33 \text{ kHz} \quad A_{max} = 0.5 \text{ dB} \quad A_{min} = 20 \text{ dB}$$

Diseñe un circuito de Riordan de manera que simule el comportamiento del inductor en el filtro.

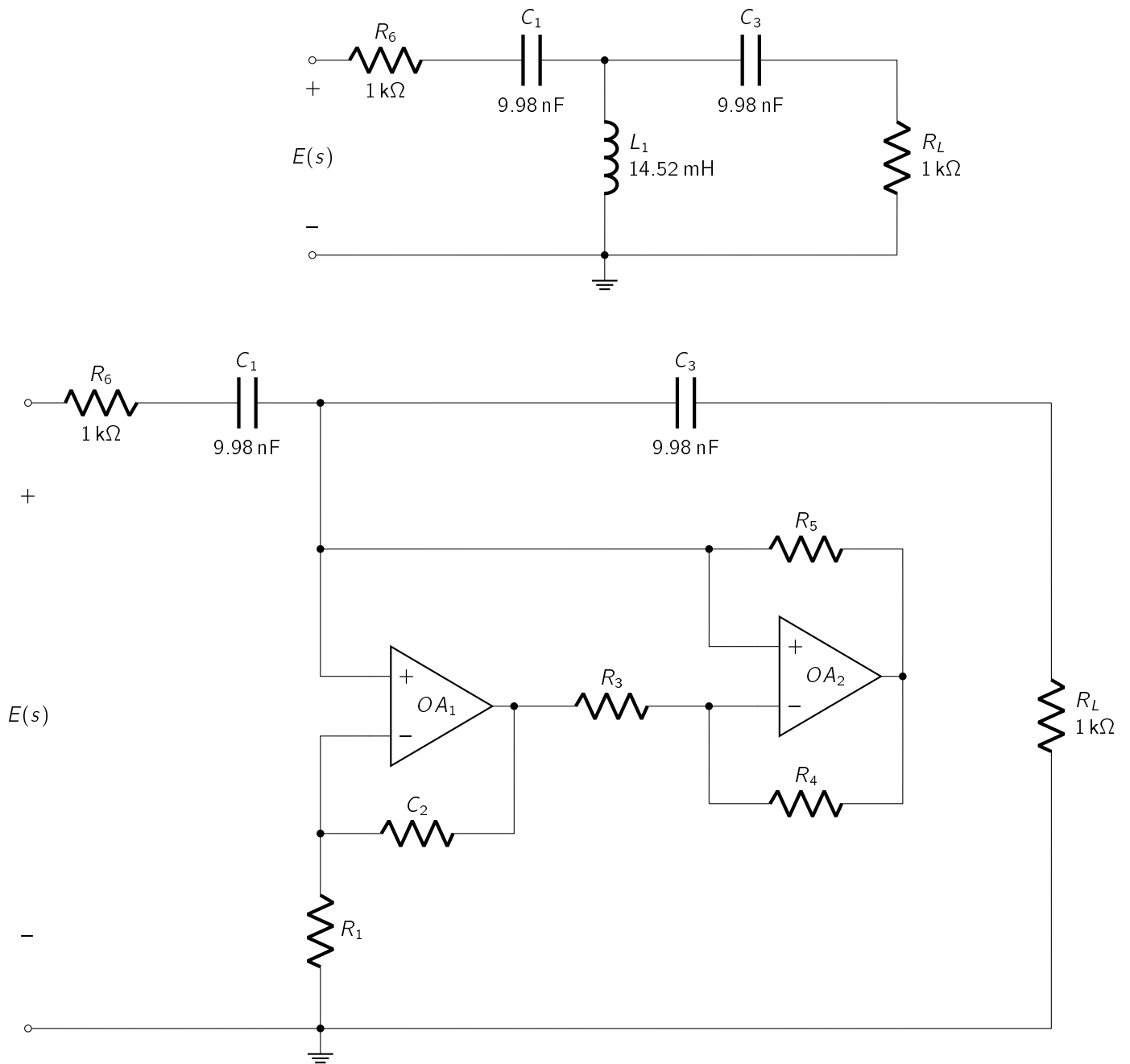


Figura 3: Filtro pasa altas de tercer orden con un inductor simulado de Riordan

El inductor puesto a tierra en el filtro pasivo es reemplazado por su circuito equivalente de Riordan. Si hacemos que $R_3 = R_4 = R_5 = R$ y $C = 9.98 \text{ nF}$, entonces el valor de R_1 puede calcularse de $R_1 = \frac{L_2}{RC_2}$. Para $R = 1 \text{ k}\Omega$, $C_2 = 9.98 \text{ nF}$ y $L_2 = 14.52 \text{ mH}$ obtenemos $R_1 = 1.455 \text{ k}\Omega$. La gráfica de Bode tanto del circuito activo como del circuito pasivo son idénticas, como se muestra en la figura 5.

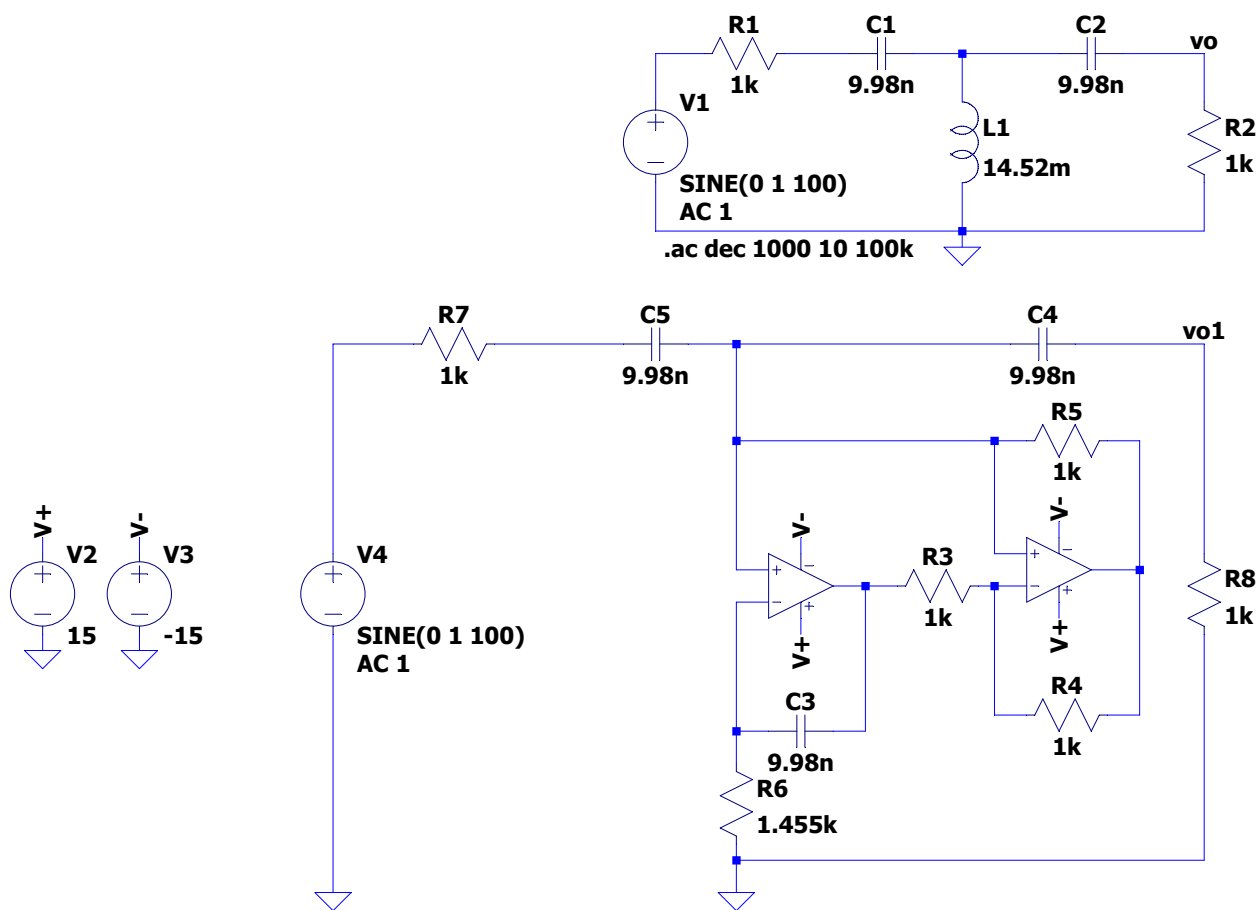


Figura 4: Circuito esquemático

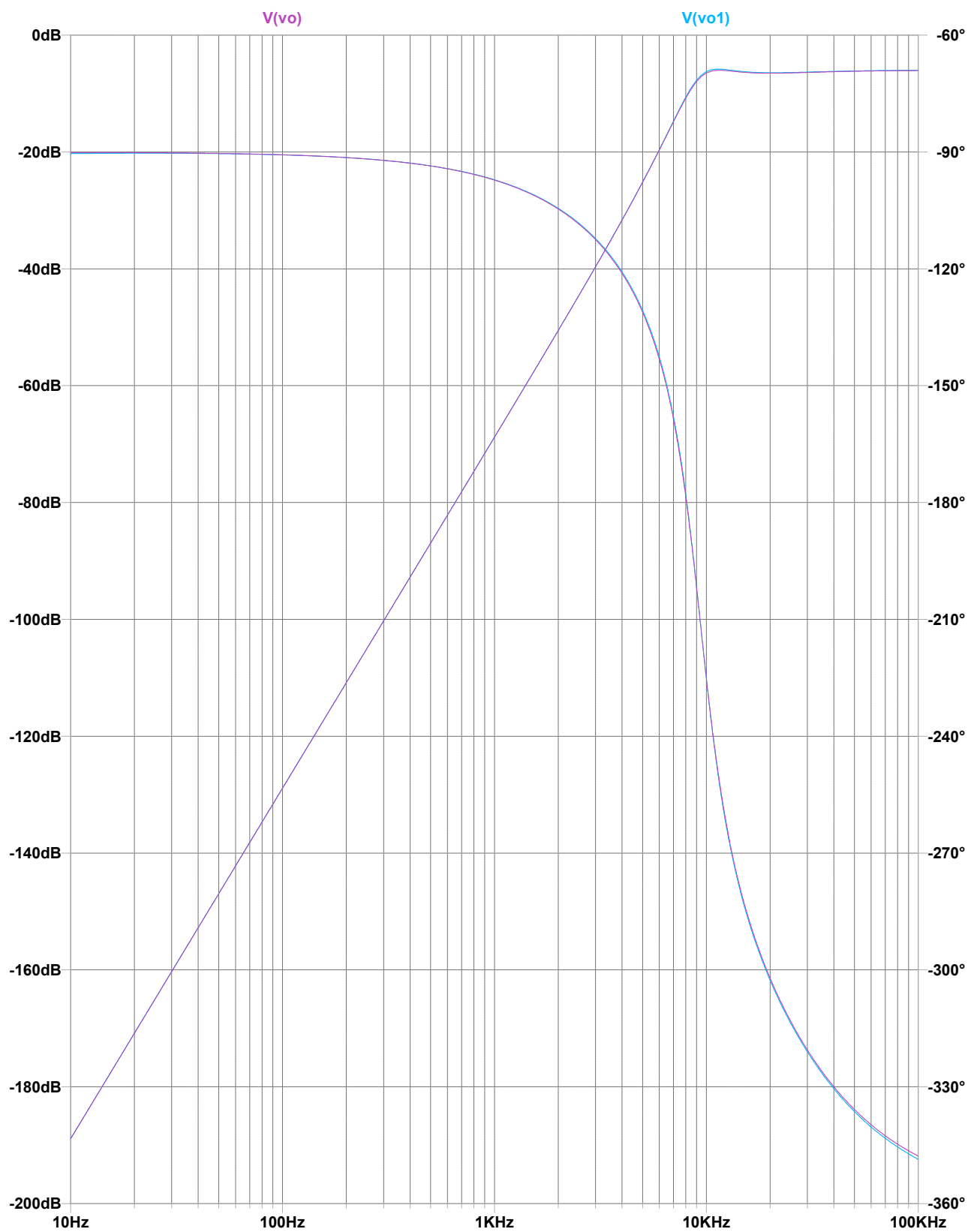


Figura 5: Gráfica de v_o vs v_{o1}

2 Inductor simulado de Antoniou

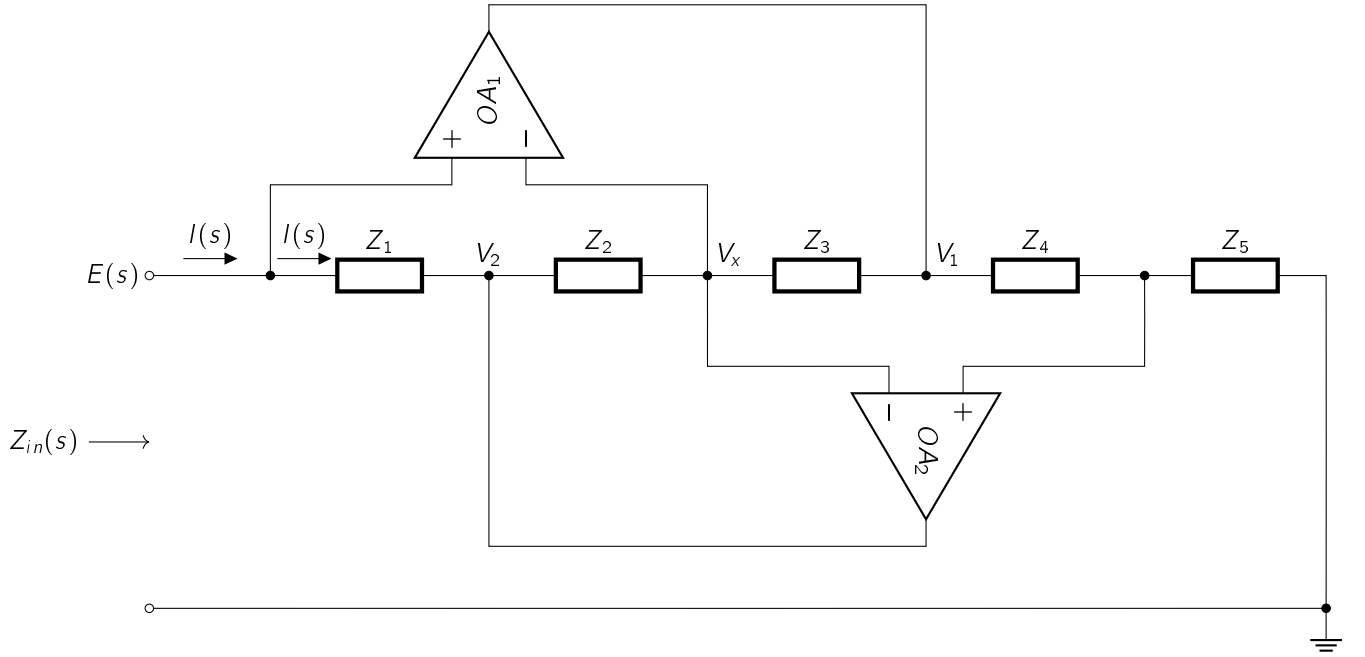


Figura 6: Inductor simulado de Antoniou

Empleando la LCK en el nodo V_y obtenemos

$$I_{z_4}(s) = I_{z_5}(s) \quad (15)$$

Mediante ley de Ohm:

$$\frac{V_1(s) - V_y(s)}{Z_4(s)} = \frac{V_y(s)}{Z_5(s)} \quad (16)$$

Sin embargo, tenemos que $V_y(s) = V_x(s) = E(s)$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{V_1(s) - E(s)}{Z_4(s)} &= \frac{E(s)}{Z_5(s)} \\ Z_5(s)V_1(s) - Z_5(s)E(s) &= Z_4(s)E(s) \\ V_1(s) &= \frac{Z_4(s) + Z_5(s)}{Z_5(s)} E(s) \end{aligned} \quad (17)$$

Ahora empleamos la LCK en el nodo V_x

$$I_{z_2}(s) = I_{z_3}(s) \quad (18)$$

O bien

$$\begin{aligned} \frac{V_2(s) - E(s)}{Z_2(s)} &= \frac{E(s) - V_1(s)}{Z_3(s)} \\ Z_3(s)V_2(s) - Z_3(s)E(s) &= Z_2(s)E(s) - Z_2(s)V_1(s) \end{aligned} \quad (19)$$

Despejamos $V_2(s)$ de la ecuación (19)

$$V_2(s) = \frac{Z_2(s) + Z_3(s)}{Z_3(s)} E(s) - \frac{Z_2(s)}{Z_3(s)} V_1(s) \quad (20)$$

Sustituimos (17) en (20)

$$\begin{aligned}
V_2(s) &= \frac{Z_2(s) + Z_3(s)}{Z_3(s)} E(s) - \frac{Z_2(s)}{Z_3(s)} \frac{Z_4(s) + Z_5(s)}{Z_5(s)} E(s) \\
V_2(s) &= \frac{Z_2(s)Z_5(s) + Z_3(s)Z_5(s) - Z_2(s)Z_4(s) - Z_2(s)Z_5(s)}{Z_3(s)Z_5(s)} E(s) \\
V_2(s) &= \frac{Z_3(s)Z_5(s) - Z_2(s)Z_4(s)}{Z_3(s)Z_5(s)} E(s)
\end{aligned} \tag{21}$$

Sin embargo, tenemos que

$$I(s) = \frac{E(s) - V_2(s)}{Z_1(s)} \tag{22}$$

Sustituimos (21) en (22)

$$\begin{aligned}
I(s) &= \frac{\left[1 - \frac{Z_3(s)Z_5(s) - Z_2(s)Z_4(s)}{Z_3(s)Z_5(s)} \right] E(s)}{Z_1(s)} \\
I(s) &= \frac{\frac{Z_3(s)Z_5(s) - Z_3(s)Z_5(s) + Z_2(s)Z_4(s)}{Z_3(s)Z_5(s)} E(s)}{Z_1(s)} \\
I(s) &= \frac{\frac{Z_2(s)Z_4(s)}{Z_3(s)Z_5(s)}}{Z_1(s)} E(s)
\end{aligned} \tag{23}$$

Es decir:

$$I(s) = \frac{Z_2(s)Z_4(s)}{Z_1(s)Z_3(s)Z_5(s)} E(s) \tag{24}$$

La impedancia está dada por

$$Z_{in}(s) = \frac{E(s)}{I(s)} = \frac{Z_1(s)Z_3(s)Z_5(s)}{Z_2(s)Z_4(s)} \tag{25}$$

El circuito es un convertidor general de impedancia (GIC, General Impedance Converter, por sus siglas en inglés), el cual, cuando $Z_2(s)$ representa un capacitor con impedancia $Z_2(s) = \frac{1}{sC_2}$ y las demás impedancias $Z_i(s)$ son resistores R_i , la impedancia de entrada se vuelve:

$$Z_{in}(s) = s \frac{R_1 R_3 R_5 C_2}{R_4} \tag{26}$$

El cual representa un inductor cuya inductancia está dada por

$$L = \frac{R_1 R_3 R_5 C_2}{R_4} \tag{27}$$

Podemos notar que si $Z_4(s)$ es un capacitor con una impedancia $Z_4(s) = \frac{1}{sC_4}$ y las demás impedancias $Z_i(s)$ son resistores R_i , el circuito simula un inductor con una inductancia igual a

$$L = \frac{R_1 R_3 R_5 C_4}{R_2} \tag{28}$$

3 Inductores Flotantes

Como se vio anteriormente, tanto los circuitos de Riordan como el de Antoniou están referenciados a tierra, y por tanto, ninguno de estos circuitos puede usarse directamente para simular un inductor flotante. Los inductores flotantes pueden simularse usando dos circuitos de inductores referenciados a tierra, conectados espalda con espalda.

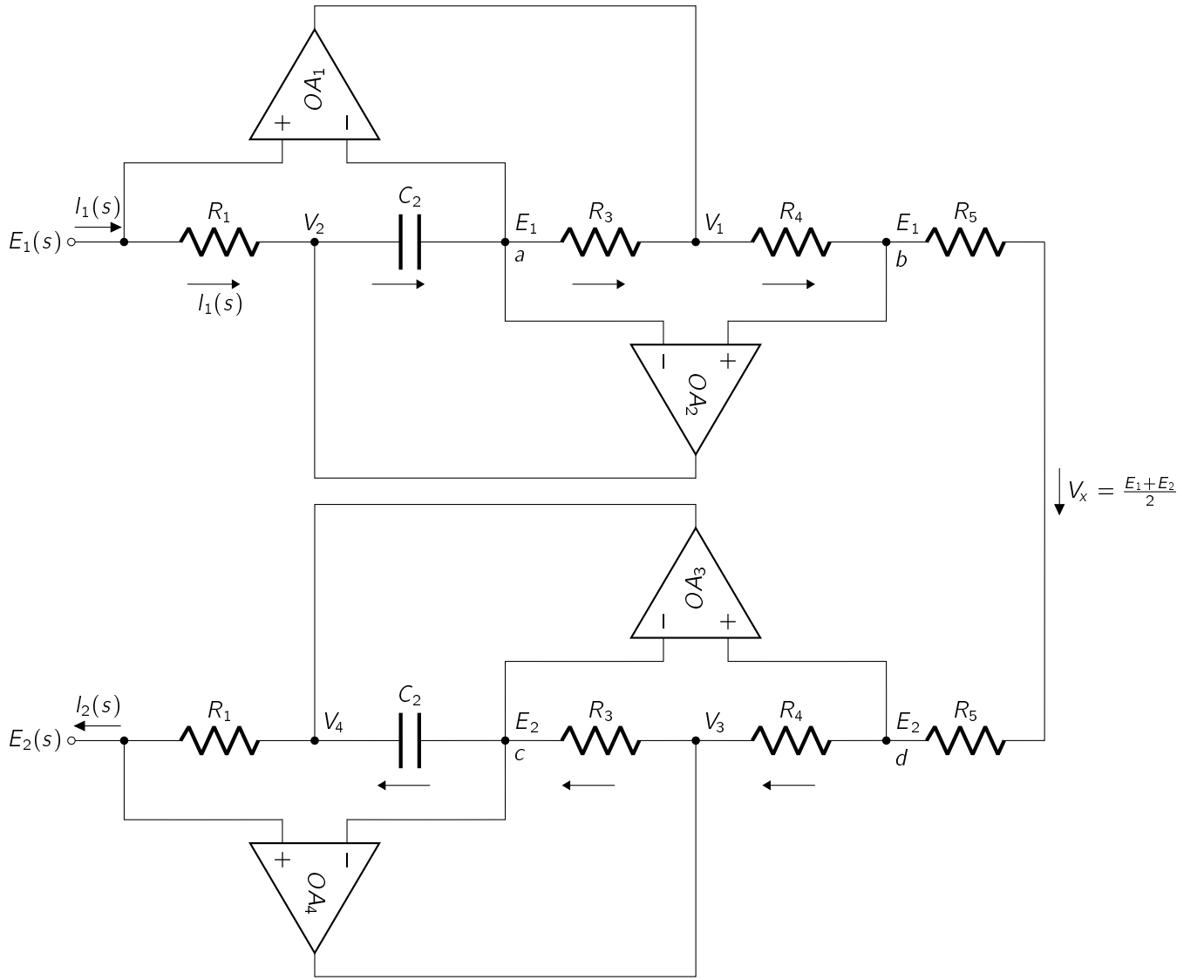


Figura 7: Inductor simulado flotante de Antoniou

Con el fin de simplificar el análisis, consideramos a los amplificadores operacionales con una resistencia de entrada infinita, así como una ganancia de lazo abierta infinita. En este caso, las entradas inversoras y no inversoras tendrán voltajes iguales, como se muestra en la figura (7). Al emplear la LCK en los nodos a , b , c y d obtenemos.

Del nodo a

$$sC_2 [V_2(s) - E_1(s)] = \frac{E_1(s) - V_1(s)}{R_3} \quad (29)$$

Del nodo b

$$\frac{V_1(s) - E_1(s)}{R_4} = \frac{E_1(s) - E_2(s)}{2R_5} \quad (30)$$

Del nodo c

$$sC_2 [E_2(s) - V_4(s)] = \frac{V_3(s) - E_2(s)}{R_3} \quad (31)$$

Del nodo d

$$\frac{E_2(s) - V_3(s)}{R_4} = \frac{E_1(s) - E_2(s)}{2R_5} \quad (32)$$

El objetivo es expresar $V_2(s)$ y $V_4(s)$ en términos de E_1 y de $E_2(s)$, por lo tanto, despejamos $V_1(s)$ de la ecuación (30)

$$\begin{aligned} V_1(s) &= \frac{R_4 [E_1(s) - E_2(s)]}{2R_5} + E_1(s) \\ V_1(s) &= \frac{R_4 + 2R_5}{2R_5} E_1(s) - \frac{R_4}{2R_5} E_2(s) \end{aligned} \quad (33)$$

Sustituimos la ecuación (33) en (29)

$$\begin{aligned} sC_2 [V_2(s) - E_1(s)] &= \frac{E_1(s) - \frac{R_4 + 2R_5}{2R_5} E_1(s) - \frac{R_4}{2R_5} E_2(s)}{R_3} \\ sC_2 V_2(s) - sC_2 E_1(s) &= \frac{\left(\frac{2R_5 - R_4 - 2R_5}{2R_5} \right) E_1(s) + \frac{R_4}{2R_5} E_2(s)}{R_3} \\ sC_2 V_2(s) &= \frac{-R_4 [E_1(s) - E_2(s)]}{2R_3 R_5} + sC_2 E_1(s) \\ V_2 &= -\frac{R_4 [E_1(s) - E_2(s)]}{2R_3 R_5 C_2 s} + E_1(s) \\ V_2 &= \frac{(2R_3 R_5 C_2 s - R_4) E_1(s) + R_4 E_2(s)}{2R_3 R_5 C_2 s} \end{aligned} \quad (34)$$

Al sustituir la ecuación (34) en (31) obtenemos

$$\begin{aligned} sC_2 [E_2(s) - V_4(s)] &= \frac{\frac{(2R_5 + R_4) E_2(s) - R_4 E_1(s)}{2R_5} - E_2(s)}{R_3} \\ V_4(s) &= \frac{R_4 E_1(s) + (2R_3 R_5 C_2 s - R_4) E_2(s)}{2R_3 R_5 C_2 s} \end{aligned} \quad (35)$$

Las corrientes $I_1(s)$ e $I_2(s)$ son:

$$I_1(s) = \frac{E_1(s) - V_2(s)}{R_1} \quad (36)$$

O bien

$$I_1(s) = \frac{E_1(s) - \frac{(2R_3 R_5 C_2 s - R_4) E_1(s) + R_4 E_2(s)}{2R_3 R_5 C_2 s}}{R_1} = \frac{R_4 [E_1(s) - E_2(s)]}{2R_1 R_3 R_5 C_2 s} \quad (37)$$

$$I_2(s) = \frac{V_4(s) - E_2(s)}{R_1} \quad (38)$$

O bien

$$I_2(s) = \frac{\frac{R_4 E_1(s) + (2R_3 R_5 C_2 s - R_4) E_2(s)}{2R_3 R_5 C_2 s} - E_2(s)}{R_1} = \frac{R_4 [E_1(s) - E_2(s)]}{2R_1 R_3 R_5 C_2 s} \quad (39)$$

Así, la impedancia del elemento flotante está dada por

$$Z_{in}(s) = \frac{E_1(s) - E_2(s)}{I_1(s)} = s \left(\frac{2R_1 R_3 R_5 C_2}{R_4} \right) \quad (40)$$

La impedancia está dada por

$$L = \frac{2R_1 R_3 R_5 C_2}{R_4} \quad (41)$$

3.1 Ejemplo 2

La siguiente figura muestra un filtro pasivo pasa bajas. Diseñe un inductor simulado flotante que reemplace el elemento pasivo, sea:

$$R_s = R_L = 1 \text{ k}\Omega \quad C_1 = C_3 = 31.1847 \text{ nF} \quad L_2 = 63.6942 \text{ mH} \quad (42)$$

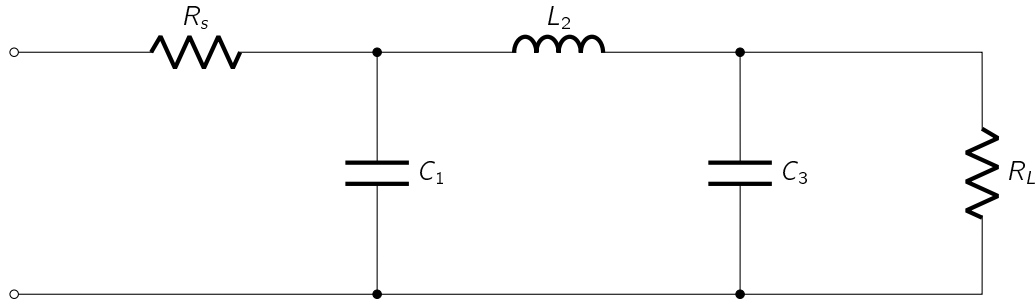


Figura 8: Filtro pasa bajas

En la figura 9, el inductor L_2 ha sido reemplazado por un inductor simulado flotante en el cual todos los resistores tienen una resistencia $R = 1 \text{ k}\Omega$. El valor de C se calcula a partir de la ecuación (41) donde

$$C_2 = \frac{L_2}{2R^2} = 31.847 \text{ nF}$$

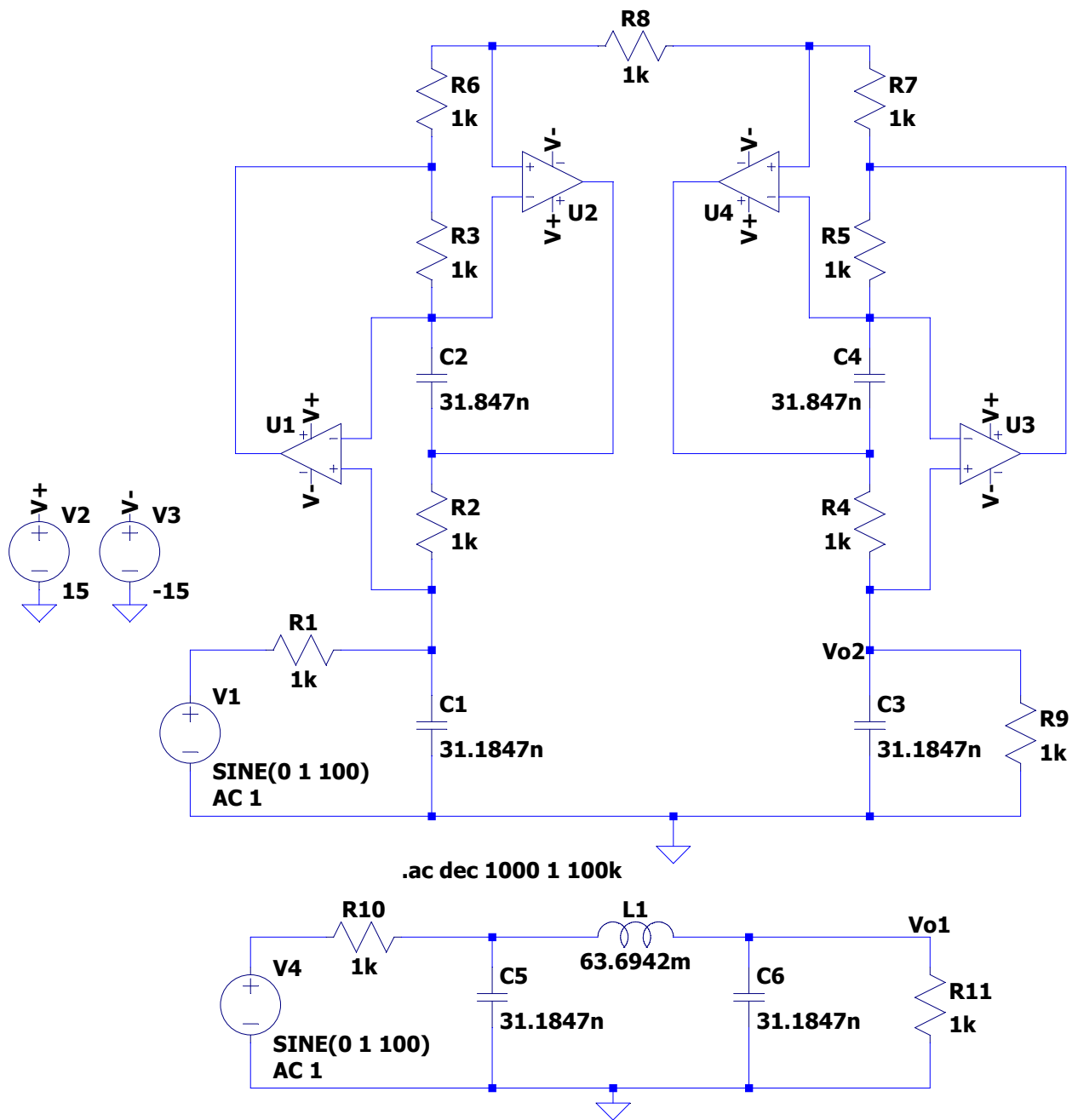


Figura 9: Circuito esquemático

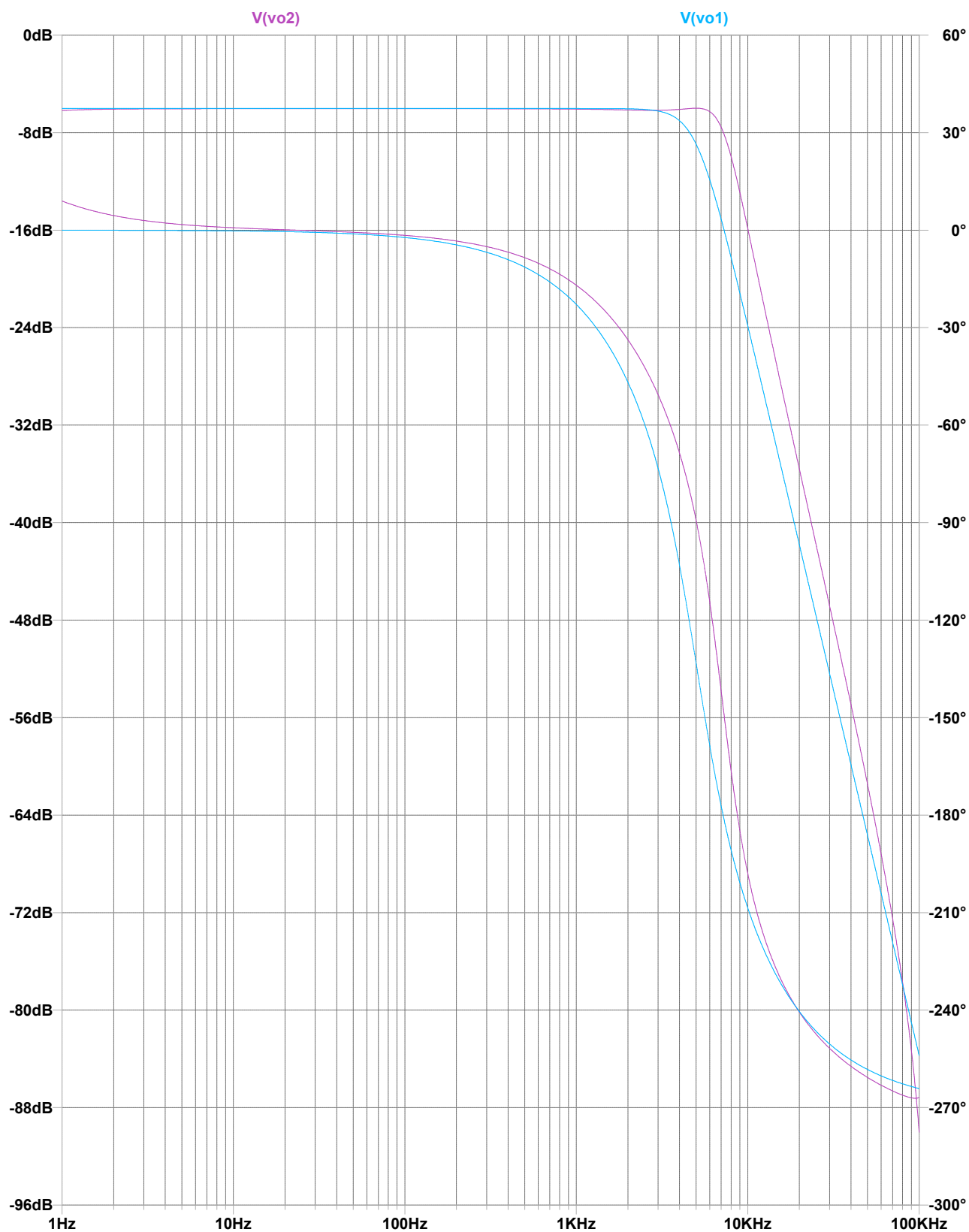


Figura 10: Comparación de la respuesta en frecuencia

Ahora analizaremos el circuito de Riordan para simular un inductor flotante conectando circuitos de Riordan espalda con espalda como se muestra en la figura 11

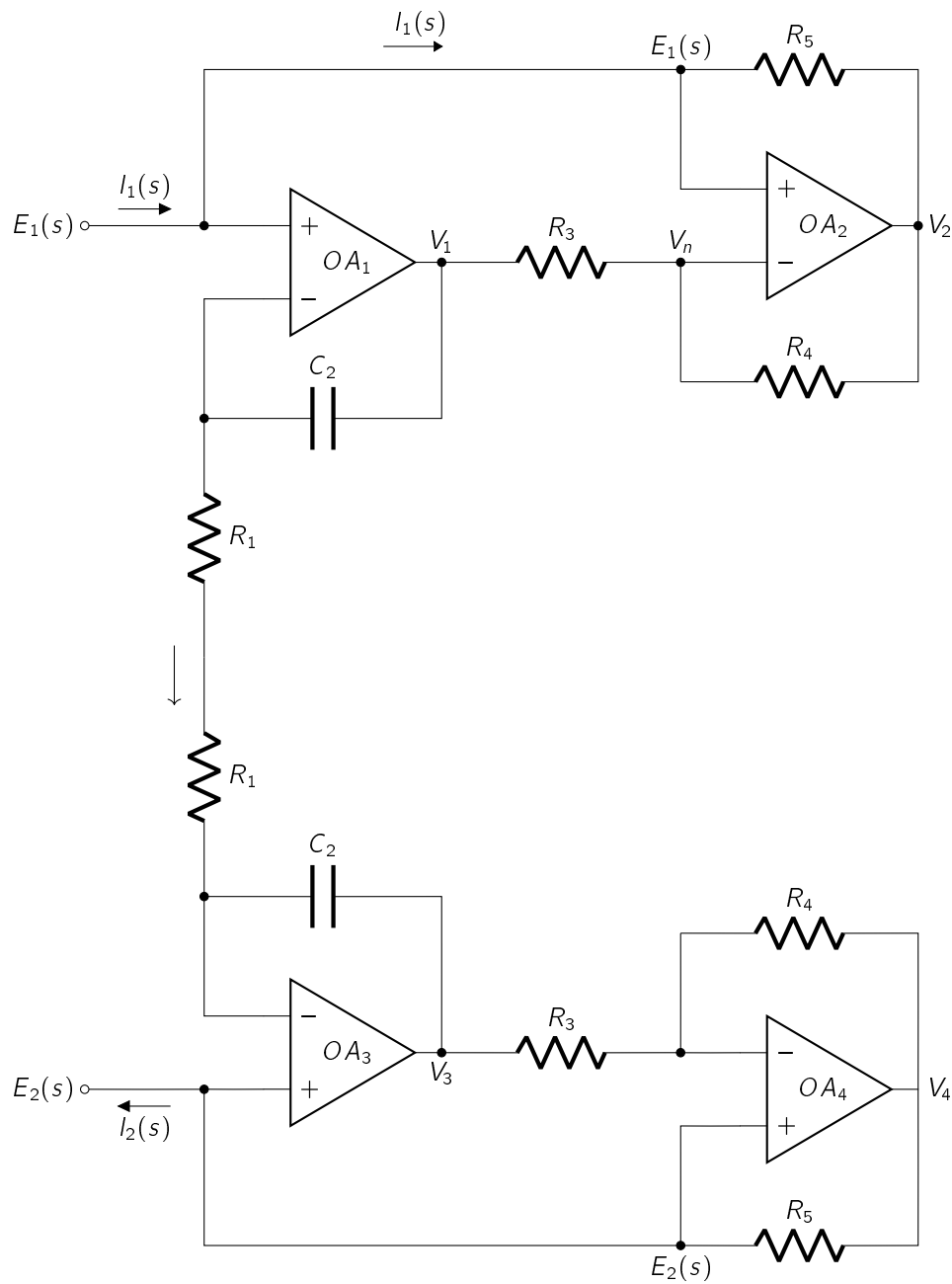


Figura 11: Inductor simulado de Riordan sustituyendo las impedancias por sus elementos resistivos y capacitivo