Circuito con diodo con carga R-L

Author	Rodrigo
Chapter	2 - Power diodes and Switched RLC Circuits
Book	Power Electronics, devices, circuits and applications
Page	pp. 80

Circuito con carga RL

En la siguiente figura se muestra un circuito con diodo en el cual se conecta una carga RL. Asuma que $v_s = V_m \sin(\omega t)\,\mathrm{V}$. Cuando el interruptor S_1 se cierra en el tiempo $t = 0$ la corriente a través del inductor puede ser expresada como

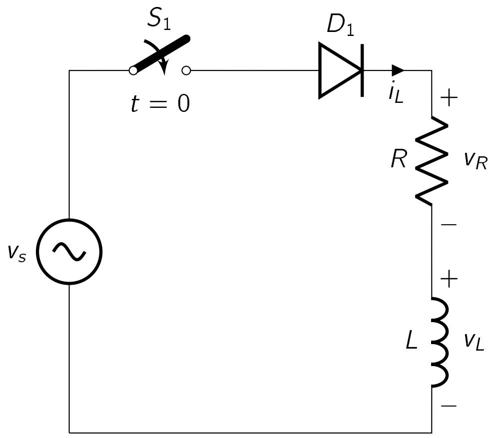

Figura 1:

$$v_s - v_R - v_L = 0 \tag{1}$$

La relación v-i de un inductor está dada por

$$v_L = L\frac{di_L}{dt} \tag{2}$$

Y la relación v-i de un resistor es:

$$v_R = Ri_L \tag{3}$$

La sustitución de (2) y (3) en (1) produce

$$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L = V_m \sin(\omega t) \tag{4}$$

Introducción a las ecuaciones lineales

Un tipo de ecuación diferencial de primer orden que ocurre frecuentemente en diversas aplicaciones es la ecuación lineal, una **ecuación lineal de primer orden** puede ser expresada en la forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x) \tag{5}$$

Donde $a_1(x)$, $a_0(x)$ y $b(x)$ dependen sólo de la variable independiente x, no de y

La forma más fácil de ordenar una ecuación diferencial de primer orden es colocarla en su **forma estándar**, esto se logra dividiendo la ecuación original (5) entre $a_1(x)$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{6}$$

Donde $P(x) = a_0(x)/a_1(x)$ y $Q(x) = b(x)/a_1(x)$

El siguiente paso es determinar $\mu(x)$ de tal manera que el lado izquiero de la ecuación (6) sea la derivada del producto $\mu(x)y$:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu'(x)y \tag{7}$$

Claramente, esto requiere que μ satisfaga

$$\mu' = \mu P \tag{8}$$

Para encontrar dicha función, reconocemos que (8) es una ecuación diferencial separable la cual puede escribirse como

$$\begin{aligned}\frac{d\mu}{dx} &= \mu P(x) \\ \frac{d\mu}{\mu} &= P(x)dx\end{aligned} \tag{9}$$

Al integrar ambos lados obtenemos

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} \tag{10}$$

Con esta elección para $\mu(x)$, la ecuación (7) se vuelve

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)Q(x)$$

La cual tiene la siguiente solución

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} = \left[\int \mu(x)Q(x)dx + C\right] \tag{11}$$

Método para resolver ecuaciones lineales

1. Escriba la ecuación en su forma estándar

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

2. Calcule el factor de integración $\mu(x)$ mediante la fórmula

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

3. Multiplique la ecuación en su forma estándar por $\mu(x)$, y recuerde que el lado izquierdo es sólo $\frac{d}{dx}[\mu(x)y]$ para obtener

$$\begin{aligned}\underbrace{\mu(x)\frac{dy}{dx} + P(x)\mu(x)y}_{} &= \mu(x)Q(x) \\ \frac{d}{dx}[\mu(x)y] \qquad &= \mu(x)Q(x)\end{aligned}$$

4. Integre la última ecuación y resuelva para y dividiendo por $\mu(x)$ para obtener (11)

Encontrando la solución general

Una vez sentadas las bases para resolver una ecuación diferencial de primer orden, el primer paso es colcoar (4) en su forma estándar, esto es

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L} i_L = \frac{V_m}{L} \sin(\omega t) \tag{12}$$

$$P(x) = \frac{R}{L}$$

Así, el factor de integración es

$$\mu(t) = e^{\int \frac{R}{L} dt} = e^{\frac{R}{L} t} \tag{13}$$

Multiplicamos (13) en ambos lados de la ecuación en (12)

$$\begin{aligned} \underbrace{e^{\frac{R}{L} t} \frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L} e^{\frac{R}{L} t} i_L} &= \frac{V_m}{L} e^{\frac{R}{L} t} \sin(\omega t) \\ \frac{d}{dt}(e^{\frac{R}{L} t} i_L) \quad &= \frac{V_m}{L} e^{\frac{R}{L} t} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Ahora integramos ambos lados y resolvemos para i_L

$$\begin{aligned} \int d(e^{\frac{R}{L} t} i_L) &= \frac{V_m}{L} \int e^{\frac{R}{L} t} \sin(\omega t)\, dt \\ e^{\frac{R}{L} t} i_L &= \frac{V_m}{L} \int e^{\frac{R}{L} t} \sin(\omega t)\, dt \qquad (14) \end{aligned}$$

Para resolver la integral en (14), la cual es conocida como integral por partes podemos usar el siguiente método de integración

Integración tabular

Es bien sabido que las integrales de la forma $\int f(x)g(x)\,dx$, en las que f se deriva de forma repetida hasta volverse cero y g se integra varias veces sin dificultad, son candidatas naturales para integración por partes. Sin embargo, si se requieren muchas repeticiones, los cálculos puedes volverse pesados. En situaciones como ésta, existe una manera de organizar los cálculos que evita estas fallas y hace el trabajo mucho más sencillo, el cual se denomina **integración tabular**. La integración tabular también se aplica a integrales de la forma $\int f(x)g(x)\,dx$ cuando ninguna de las dos funciones puede derivarse de manera repetida hasta convertirse cero.

Para resolver estos tipos de integración por partes, construimos una tabla que lista las derivadas sucesivas de $f(x)$ y las integrales de $g(x)$ como se muestra a continuación:

$e^{\frac{R}{L}t}$ *y sus* derivadas		$\sin(\omega t)$ *y sus* integrales
$e^{\frac{R}{L}t}$	(+)	$\sin(\omega t)$
$\frac{R}{L} e^{\frac{R}{L}t}$	(-)	$-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t)$
$\frac{R^2}{L^2} e^{\frac{R}{L}t}$	(+)	$-\frac{1}{\omega^2}\sin(\omega t)$

Figura 2:

De la tabla de la figura anterior, nos detenemos hasta que el n-ésimo renglón sea el mismo que el primero (salvo por las constantes multiplicativas). Interpretamos la tabla diciendo que:

$$\begin{aligned}
\int e^{\frac{R}{L}t}\sin(\omega t)\,dt &= -\frac{1}{\omega}e^{\frac{R}{L}t}\cos(\omega t)+\frac{R}{\omega^2 L}e^{\frac{R}{L}t}\sin(\omega t)-\frac{R^2}{\omega^2L^2}\int e^{\frac{R}{L}t}\sin(\omega t)\,dt\\
\left(1+\frac{R^2}{\omega^2L^2}\right)\int e^{\frac{R}{L}t}\sin(\omega t)\,dt &= -\frac{1}{\omega}e^{\frac{R}{L}t}\cos(\omega t)+\frac{R}{\omega^2 L}e^{\frac{R}{L}t}\sin(\omega t)\\
\left(\frac{\omega^2L^2+R^2}{\omega^2L^2}\right)\int e^{\frac{R}{L}t}\sin(\omega t)\,dt &= -\frac{1}{\omega}e^{\frac{R}{L}t}\cos(\omega t)+\frac{R}{\omega^2 L}e^{\frac{R}{L}t}\sin(\omega t)\\
\int e^{\frac{R}{L}t}\sin(\omega t)\,dt = -\left(\frac{1}{\omega}\right)\left(\frac{\omega^2L^2}{\omega^2L^2+R^2}\right)e^{\frac{R}{L}t}\cos(\omega t) &+ \left(\frac{R}{\omega^2L}\right)\left(\frac{\omega^2L^2}{\omega^2L^2+R^2}\right)e^{\frac{R}{L}t}\sin(\omega t)
\end{aligned}$$

Al simplificar un poco obtemos

$$\int e^{\frac{R}{L}t}\sin(\omega t)\,dt = -\left(\frac{\omega L^2}{\omega^2L^2+R^2}\right)e^{\frac{R}{L}t}\cos(\omega t)+\left(\frac{RL}{\omega^2L^2+R^2}\right)e^{\frac{R}{L}t}\sin(\omega t)$$

Al traer de vuelta la constante multiplicativa $\frac{V_m}{L}$ a la integral, obtenemos:

$$\frac{V_m}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}\sin(\omega t)\,dt = V_m e^{\frac{R}{L}t}\left[-\left(\frac{\omega L}{\omega^2L^2+R^2}\right)\cos(\omega t)+\left(\frac{R}{\omega^2L^2+R^2}\right)\sin(\omega t)\right]+C \tag{15}$$

Podemos simplificar aún más la ecuación en (15) expresando el término $\alpha\sin(x)-\beta\cos(x)$ como $R\sin(x-\theta)$ utilizando la siguiente identidad trigonométrica:
Sea

$$\begin{aligned}
\sin(x-\theta) &= \sin x\cos\theta-\cos x\sin\theta\\
R\left[\sin(x-\theta)\right] &= R[\sin x\cos\theta-\cos x\sin\theta]\\
&= R\sin x\cos\theta - R\cos x\sin\theta\\
&= (R\cos\theta)\sin x-(R\sin\theta)\cos x
\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}
a &= R\cos\theta\\
b &= R\sin\theta
\end{aligned}$$

Si elevamos ambos términos al cuadrado obtenemos

$$\begin{aligned}
a^2+b^2 &= R^2\cos^2\theta+R^2\sin^2\theta\\
&= R^2\left[\sin^2\theta+\cos^2\theta\right]\\
a^2+b^2 &= R^2
\end{aligned}$$

Al despejar para R obtenemos

$$R=\sqrt{a^2+b^2}$$

De la ecuación en (15), sea:

$$\begin{aligned}
a &= \frac{R}{\omega^2L^2+R^2}\\
b &= \frac{\omega L}{\omega^2L^2+R^2}
\end{aligned}$$

Así, el valor de R está dado por

$$
\begin{aligned}
R &= \sqrt{\frac{R^2}{[\omega^2 L^2 + R^2]^2} + \frac{\omega^2 L^2}{[\omega^2 L^2 + R^2]^2}} \\
&= \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{[\omega^2 L^2 + R^2]^2}} \\
&= \frac{1}{\omega^2 L^2 + R^2}
\end{aligned}
$$

Por último, la ecuación en (15) se puede escribir como

$$
\frac{V_m}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}\sin(\omega t)\,dt = \frac{V_m}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}} e^{\frac{R}{L}t}\sin(\omega t - \theta) + C \tag{16}
$$

Donde

$$
\theta = \arctan\frac{\omega L}{R} \tag{17}
$$

Una vez encontrada la integral, retornamos a la ecuación (14), al sustituir (16) en (14) y despejamos para i_L obtenemos

$$
i_L = \frac{V_m}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}\sin(\omega t - \theta) + Ce^{-\frac{R}{L}t}, \quad i_L(0) = I_0 \tag{18}
$$

Para encontrar el valor de la constante de integración, hacemos uso de la condición inicial con lo cual obtenemos

$$
\begin{aligned}
i_L(0) = \frac{V_m}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}\sin(-\theta) + Ce^0 &= I_0 \\
C = I_0 - \frac{V_m}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}&\sin(-\theta) \\
C = I_0 + \frac{V_m}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}&\sin(\theta) \qquad (19)
\end{aligned}
$$

La sustitución de (19) en (18) da como resultado

$$
i_L(t) = \frac{V_m}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}\sin(\omega t - \theta) + \left(I_0 + \frac{V_m}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}\sin\theta\right)e^{-\frac{R}{L}t} \tag{20}
$$