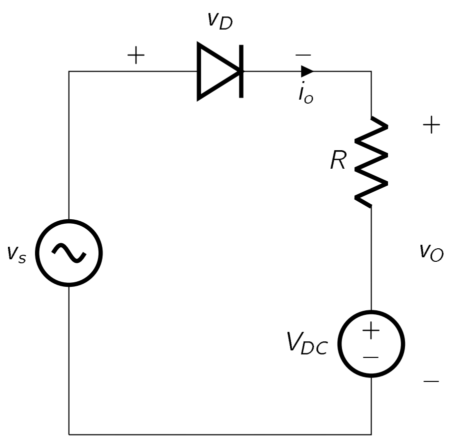
Diodo con fuente de AC y fuente de DC

Author Rodrigo
Chapter 3 - Switching Diode Circuits
Example 3.3 - pp. 104

Problema

Considere el circuito con diodo que se muetra en la figura 1 el cual contiene una fuente de dc en el lado de la carga la cual puede representar una batería o una fuerza contraelectromotríz (emf) para excitar la armadura en un motor de dc. Grafique las formas de onda para i_o, v_D y v_o. Asuma que $V_s = V_m \sin(\omega t)\, V$



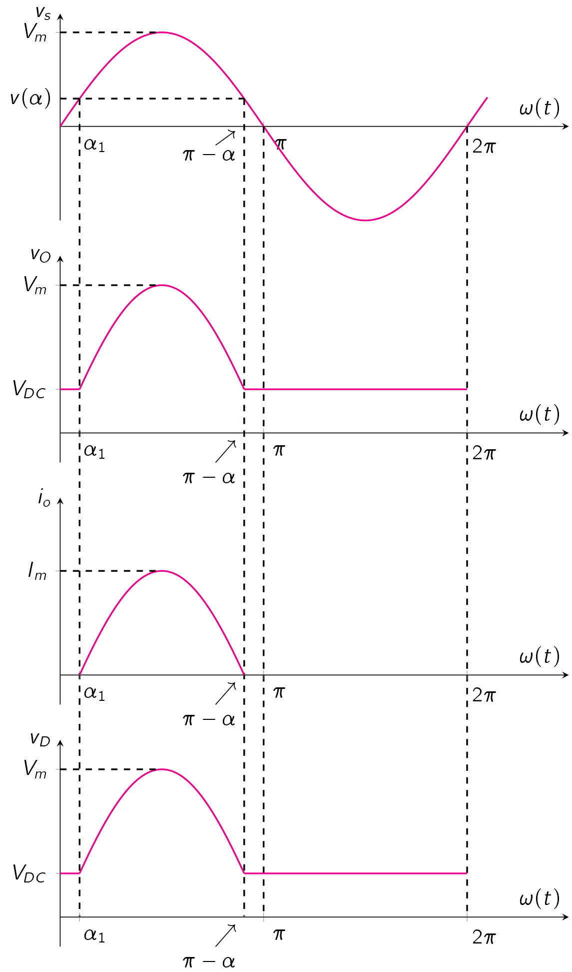
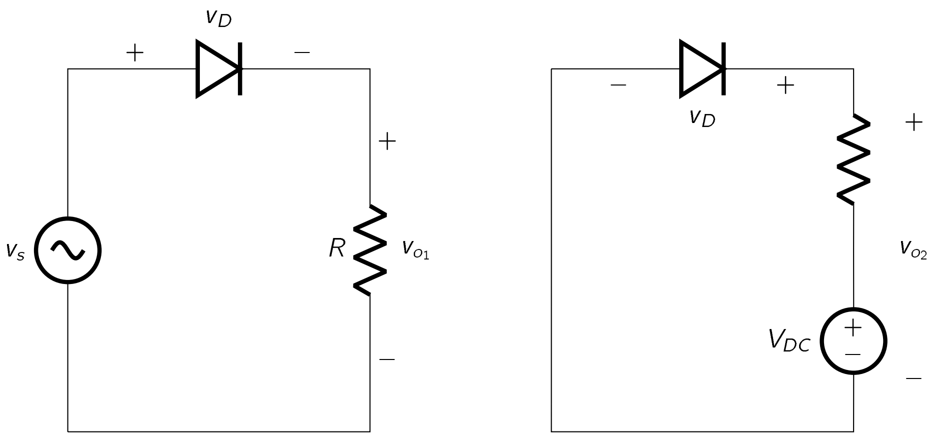


Figure 1:

Solución

Emplearemos el principio de superposición para encontrar el voltaje de salida v_o en el circuito de la figura 1(a). Asumamos que estamos tratando con un diodo ideal. De acuerdo al circuito de la figura 2(a) se puede ver por inspección que el diodo está polarizado en directa, por lo que voltaje de salida v_{o_1} está dado por

$$v_{o_1} = v_s \tag{1}$$



(*a*) *Fuente de dc desconectada* (*a*) *Fuente de ac desconectada*

Figure 2:

Al observar la figura 2(b), notamos que el voltaje en el cátodo está a un potencial superior que la terminal del ánodo, el cual de hecho, está a 0 V, por lo que el diodo se encuntra polarizado en inversa, así el voltaje de salida v_{o_2} está dado por

$$v_{o_2} = V_{DC} \tag{2}$$

Al combinar las ecuaciones (1) y (2) obtenemos el voltaje de salida como

$$v_O = v_s + V_{DC} = V_m \sin(\omega t) + V_{DC} \tag{3}$$

El diodo se encenderá cuando $v_D > 0$ el cual ocurrirá en $\omega t = \alpha$, es decir, cuando $v_s(\alpha) = V_{DC}$

$$V_m \sin(\omega t) = V_{DC}$$

O bien

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{V_{DC}}{V_m}\right) \tag{4}$$

Donde

$$\alpha = \omega t \tag{5}$$

Durante el intervalo $0 \leq \omega t \leq \alpha$ el diodo se encontrará en estado off y durante el intervalo $\pi - \alpha \leq \omega t \leq \pi$ el diodo se encontrará en estado de on.

Con esto presente, el voltaje de salida puede expresarse como:

$$v_O(t) = \begin{cases} V_{DC} & 0 \leq \omega t \leq \alpha \\ V_m \sin(\omega t) & \alpha \leq \omega t \leq \pi - \alpha \\ V_{DC} & \pi - \alpha \leq \omega t \leq 2\pi \end{cases} . \tag{6}$$

Durante el intervalo $\pi - \alpha \leq \omega t \leq 2\pi$ la corriente de salida estará dada por

$$i_O(t) = \frac{v_s - V_{DC}}{R} = \frac{V_m \sin(\omega t) - V_{DC}}{R} \tag{7}$$

O bien

$$i_O(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le \omega t \le \alpha \\ \frac{v_s - V_{DC}}{R} & \alpha \le \omega t \le \pi - \alpha \\ 0 & \pi - \alpha \le \omega t \le 2\pi \end{cases} . \tag{8}$$

El voltaje de salida promedio se puede obtener a partir de la siguiente ecuación

$$V_{O(av)} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)d(\omega t) \tag{9}$$

Es decir

$$V_{O(av)} = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^\alpha V_{DC}\, d(\omega t) + \int_\alpha^{\pi-\alpha} V_m \sin(\omega t)\, d(\omega t) + \int_{\pi-\alpha}^{2\pi} V_{DC}\, d(\omega t)\right] \tag{10}$$

Desarrollando cada integral por separado obtenemos

$$\int_0^\alpha V_{DC}\, d(\omega t) = V_{DC}(\omega t)|_0^\alpha = \alpha V_{DC} \tag{11}$$

$$\int_\alpha^{\pi-\alpha} V_m \sin(\omega t)\, d(\omega t) = -[V_m \cos(\omega t)]\Big|_\alpha^{\pi-\alpha} = -V_m \cos(\pi - \alpha) + V_m \cos(\alpha) \tag{12}$$

Desarrollamos la siguiente identidad trigonométrica

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \tag{13}$$

Es decir

$$\cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi)\cos(\alpha) + \sin(\pi)\sin(\alpha) = (-1)\cos(\alpha) \tag{14}$$

Al sustituir (14) en (12) obtenemos

$$\int_\alpha^{\pi-\alpha} V_m \sin(\omega t)\, d(\omega t) = -V_m\left[-\cos(\alpha)\right] + V_m \cos(\alpha) = 2V_m \cos(\alpha) \tag{15}$$

De la tercera integral obetenemos

$$\int_{\pi-\alpha}^{2\pi} V_{DC}\, d(\omega t) = V_{DC}(\omega t)\Big|_{\pi-\alpha}^{2\pi} = V_{DC}\left(2\pi - (\pi - \alpha)\right) = V_{DC}(2\pi - \pi + \alpha) = (\pi + \alpha)V_{DC} \tag{16}$$

Al combinar las ecuaciones (11), (15) y (16) en (10) obtenemos

$$V_{O(av)} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)\left[\alpha V_{DC} + 2V_m \cos(\alpha) + (\pi + \alpha)V_{DC}\right]$$

Así, el voltaje de salida promedio para el circuito de la figura 1(a) está dado por

$$V_{O(av)} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)\left[(2\alpha + \pi)V_{DC} + 2V_m \cos(\alpha)\right] \tag{17}$$

Para calcular el voltaje de salida rms utilizamos la siguiente ecuación

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt} \tag{18}$$

Sustituyendo (18) por los valores en (6) obtenemos

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\alpha} V_{DC}^2(\omega t) + \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} V_m^2 \sin^2(\omega t)\, d(\omega t) + \int_{\pi-\alpha}^{2\pi} V_{DC}^2\, d(\omega t)\right]} \tag{19}$$

Al resolver cada una de las integrales obtenemos:

$$\int_0^{\alpha} V_{DC}^2(\omega t) = V_{DC}^2(\omega t)\Big|_0^{\alpha} = \alpha V_{DC}^2 \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} V_m^2 \sin^2(\omega t)\, d(\omega t) &= V_m^2 \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\omega t)\, d(\omega t)\right] \\
&= V_m^2 \left[\frac{1}{2}(\omega t)\Big|_{\alpha}^{\pi-\alpha} - \frac{1}{4}\sin(2\omega t)\Big|_{\alpha}^{\pi-\alpha}\right] \\
&= V_m^2 \left[\frac{1}{2}(\pi-\alpha-\alpha) - \frac{1}{4}(\sin(2(\pi-\alpha)) - \sin(2\alpha))\right] \\
&= V_m^2 \left[\frac{1}{2}(\pi-2\alpha) - \frac{1}{4}(\sin(2\pi-2\alpha) - \sin(2\alpha))\right] \qquad (21)
\end{aligned}$$

Utilizamos la siguiente identidad trigonométrica

$$\begin{aligned}
\sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \\
\sin(2\pi - 2\alpha) &= \sin(2\alpha) cos(2\alpha) - \cos(2\pi)\sin(2\alpha) \\
&= -\sin(2\alpha)
\end{aligned}$$

El resultado de (21) es, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} V_m^2 \sin^2(\omega t)\, d(\omega t) &= \frac{1}{2}\pi - \alpha - \frac{1}{4}\left[-\sin(2\alpha) - \sin(2\alpha)\right] \\
&= V_m^2 \left[\frac{1}{2}\pi - \alpha + \frac{1}{4}\sin(2\alpha) + \frac{1}{4}\sin(2\alpha)\right] \\
&= V_m^2 \left[\frac{1}{2}\pi - \alpha + \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right] \qquad (22)
\end{aligned}$$

En cuanto a la tercera integral:

$$\begin{aligned}
\int_{\pi-\alpha}^{2\pi} V_{DC}^2(\omega t) = V_{DC}^2(\omega t)\Big|_{\pi-\alpha}^{2\pi} &= V_{DC}^2\left[2\pi - (\pi-\alpha)\right] \\
&= V_{DC}^2\left[2\pi - \pi + \alpha\right] \\
&= (\pi+\alpha)V_{DC}^2 \qquad (23)
\end{aligned}$$

La combinación los resultados de las ecuaciones (20), (22) y (23) en (19) produce

$$V_{o(rms)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\left[\alpha V_{DC}^2 + (\pi+\alpha)V_{DC}^2 + V_m^2\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)\right]}$$

Al reordenar términos obtenemos

$$V_{o(rms)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\left[(\pi+2\alpha)V_{DC}^2 + \frac{V_m^2}{2}(\pi - 2\alpha + \sin 2\alpha)\right]} \tag{24}$$

Ejemplo

Calcula el voltaje de salida promedio así como el valor rms cuando el circuito de la figura 1(a) es alimentado con una fuente de ca con un valor de $V_s = 100\sin(2\pi\cdot 100t)$ y cuya fuente de tensión de dc tiene un valor de 60 V. Asuma que la resistencia tiene un valor de $R = 8\,\Omega$

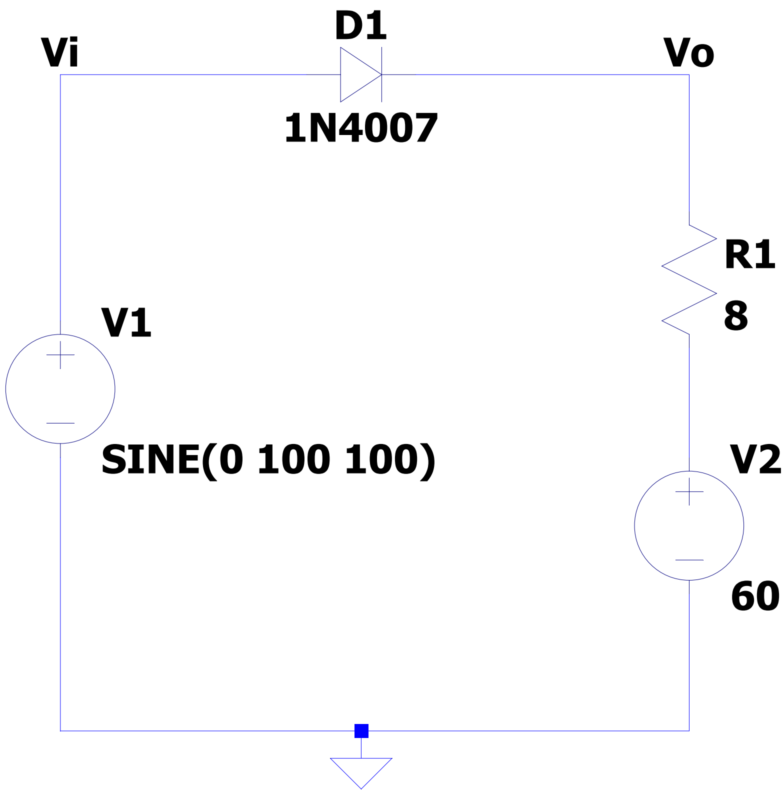


Figure 3:

Calculamos el valor de α en el cual el diodo comienza a conducir, para esto utilizamos la ecuación (4)

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{60}{100}\right) = 0.6435\,\text{rad}$$

Utilizamos (5) para calcular el valor de t_1 en el cual el diodo comienza a conducir

$$t_1 = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{0.6435}{2\pi\cdot 100} = 1.024\,\text{ms}$$

Calculamos el valor del tiempo en el cual el diodo deja de conducir

$$t_2 = \frac{\pi-\alpha}{\omega} = \frac{\pi - 0.6435}{2\pi\cdot 100} = 3.97\,\text{ms}$$

Utilizamos (17) para encontrar el valor del voltaje de salida promedio

$$V_{O(av)} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)\left[(2\cdot 0.6435+\pi)(60)+2(100)\cos(0.6435)\right] = 67.75\,\text{V}$$

Utilizamos (24) para encontrar el valor del voltaje de salida rms

$$V_{o(rms)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\left[(\pi+2\alpha)(60)^2+\frac{100^2}{2}\left(\pi-2(0.6435)+\sin(2\cdot 0.6435)\right)\right]} = 69.11\,\text{V}$$