

# Instituto Tecnológico de Aeronáutica Pós-Graduação em Engenharia Aeronáutica e Mecânica

AB-270 SIMULAÇÃO E CONTROLE DE VEÍCULOS ESPACIAIS

# Experimento 5 - Sistema Completo de Controle de Atitude Baseado em Rodas de Reação

Rodrigo Dantas Dias

São José dos Campos 25 de Maio de 2021

# Conteúdo

1	Objetivos	2
2	Formulação Teórica	3
	2.1 Sistemas de Primeira Ordem	3
	2.1.1 Resposta ao degrau unitário	3
	2.1.2 Resposta a rampa unitária	4
	2.1.3 Resposta ao impulso unitário	
	2.2 Teoremas do Valor Inicial e Final	
3	Atitude do satélite	6
	3.1 Falha em uma das rodas der reação	9
4	Procedimentos e Resultados	10
	4.1 Sistema sem falha nas rodas de reação	10
	4.2 Sistema com falha em uma das rodas de reação	13
5	Discussão	17
A	Anexo	19

# 1 Objetivos

O objetivo principal dessa atividade é o de realizar o projeto completo de um sistema de controle de atitude baseado em rodas reação, para controle do veículo espacial em seus três eixos. Para isso, são realizados desenvolvimentos considerando quatro rodas de reação e, também, os efeitos caso uma dessas apresente falha de funcionando. Todas as simulações computacionais são realizadas utilizando o software Matlab/Simulink.

# 2 Formulação Teórica

Essa sessão apresenta a formulação teórica utilizada para a obtenção do modelo matemático de uma roda de reação. Inicia com uma revisão de sistemas de primeira ordem amplamente abordada na literatura, como nas Referências [1] e [2] utilizadas nesse trabalho.

#### 2.1 Sistemas de Primeira Ordem

Considerando o sistema de primeira ordem mostrado na Figura 1.

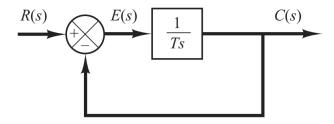


Figura 1: Diagrama de blocos de um sistema de primeira ordem. Fonte: Referência [1].

A relação entre a entrada e a saída desse sistema é:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1} \tag{1}$$

Nas próximas subseções são analisadas as respostas desse sistema a diferentes funções de entrada, considerando as condições iniciais nulas.

#### 2.1.1 Resposta ao degrau unitário

A transformada de Laplace aplicada a uma função degrau unitário é:

$$R(s) = \frac{1}{s} \tag{2}$$

Aplicando a Equação 2 em 1 a saída do sistema fica:

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1s} \frac{1}{s} \tag{3}$$

Ao expandir a Equação 3 em frações parciais, obtêm-se:

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+(1/T)} \tag{4}$$

Ao aplicar a transformada inversa de Laplace na Equação 4, obtêm-se a saída da função resposta no domínio do tempo:

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}, t \ge 0 (5)$$

A Equação 5 mostra que, inicialmente, a resposta do sistema é zero e, no fim, torna-se unitária. Além disso, outra característica que é possível observar na resposta exponencial c(t) é que para t=T seu valor é 0,632 ou, de maneira equivalente, a resposta do sistema atingiu 63,2% de sua variação total. Verifica-se isso ao substituir t=T na Equação 5.

$$c(T) = 1 - e^{-1} = 0,632 (6)$$

Outra observação é a de que quanto menor a constante de tempo T mais rápida é a resposta do sistema. Por fim, também é possível verificar que na curva exponencial de resposta, mostrada na Figura 2, a inclinação da linha tangente em t=0 é 1/T, já que

$$\frac{dc}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{1}{T}e^{-t/T}\Big|_{t=0} = \frac{1}{T}$$
 (7)

A inclinação da curva de resposta c(t) decresce monotonicamente de 1/T em t=0 a zero em  $t=\infty$ .

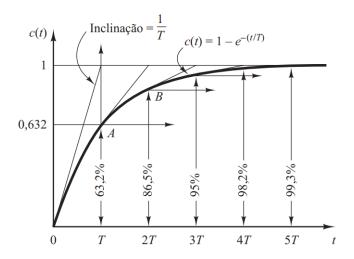


Figura 2: Curva exponencial de resposta. Fonte: Referência [1].

#### 2.1.2 Resposta a rampa unitária

A transformada de Laplace aplicada a uma função de rampa unitária é:

$$R(s) = \frac{1}{s^2} \tag{8}$$

Aplicando a Equação 8 em 1 a saída do sistema fica:

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} \frac{1}{s^2} \tag{9}$$

Ao expandir a Equação 9 em frações parciais, obtêm-se:

$$C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts+1} \tag{10}$$

Ao aplicar a transformada inversa de Laplace na Equação 10, obtêm-se a saída da função resposta no domínio do tempo:

$$c(T) = t - T + Te^{-t/T}, t \ge 0$$
(11)

Logo, o sinal de erro, dado pela diferença entre a entrada e a saída do sistema, é:

$$e(t) = r(t) - c(t) = T(1 - e^{-t/T})$$
(12)

Observando a Equação 12, percebe-se que quando t tendo ao infinito,  $e^{-t/T}$  se aproxima de zero, e o valor do erro se aproxima de T:

$$e(\infty) = T \tag{13}$$

A Figura 8 mostra a dinâmica desse sistema. Observa-se que quanto menor a constante de tempo T, menor o erro estacionário ao seguir a entrada em rampa.

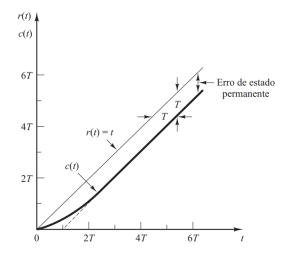


Figura 3: Resposta de rampa unitária. Fonte: Referência [1].

#### 2.1.3 Resposta ao impulso unitário

A transformada de Laplace aplicada a uma função de pulso unitário é:

$$R(s) = 1 \tag{14}$$

Aplicando a Equação 14 em 1 a saída do sistema fica:

$$C(s) = \frac{1}{Ts+1} \tag{15}$$

Ao aplicar a transformada inversa de Laplace na Equação 15, obtêm-se a saída da função resposta no domínio do tempo:

$$c(t) = \frac{1}{T}e^{t/T}, t \ge 0 \tag{16}$$

A curva de resposta para o sistema sujeito a uma entrada pulso unitário é mostrada na Figura 4.

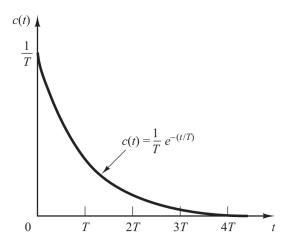


Figura 4: Resposta ao impulso unitário. Fonte: Referência [1].

#### 2.2 Teoremas do Valor Inicial e Final

O Teorema do Valor Final permite calcular o valor constante de estado estacionário de uma função no domínio do tempo por meio de sua transformada de Laplace. Se todos os polos de sY(s) estão no semiplano esquerdo do plano-s, então:

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sY(s) \tag{17}$$

O Teorema do Valor Inicial indica que é sempre possível determinar o valor inicial da função no tempo f(t) a partir de sua transformada de Laplace. Pode ser definido matematicamente da seguinte forma, para qualquer par de transformada de Laplace:

$$\lim_{s \to \infty} sF(s) = f(0^+) \tag{18}$$

## 3 Atitude do satélite

Um sistema de controle mais simples para controle de atitude de um veículo espacial pode ser constituído por três rodas de reação, cada uma alinhada com um eixo principal do satélite. Como a dinâmica de cada eixo está desacoplada, o projeto de controle pode ser feito de forma independente para cada eixo. Entretanto, essa simplicidade pode trazer problemas caso uma dessas rodas falhe. Por essa razão, uma 4ª roda de reação é instalada para aumentar a confiabilidade do sistema.

A roda adicional é instalada de forma não alinhada com eixos principais, de forma a permitir o torque em qualquer desses eixos. Assim, a inutilização de qualquer uma das 3 rodas de reação pode ser compensada por essa 4ª roda adicional, como mostra a Figura 5.

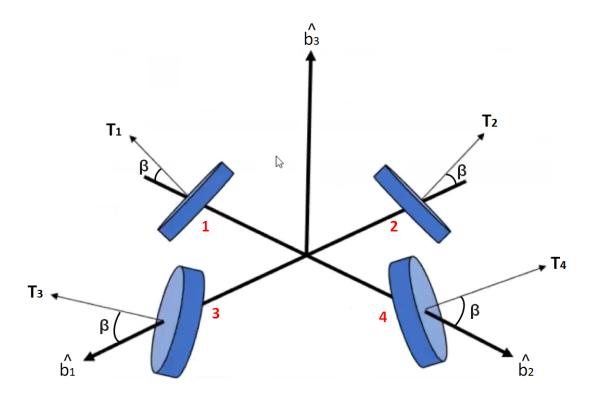


Figura 5: Disposição das quatro rodas de reação.

As 4 rodas de reação estão inclinadas em relação ao plano  $\hat{b}_1\hat{b}_2$  por um ângulo  $\beta$ . Devido a essa inclinação, cada roda aplica uma componente de torque na direção  $\hat{b}_3$ .

Observando que,

$$T_{c_x} = (T_1 - T_3)\cos(\beta)$$

$$T_{c_y} = (T_2 - T_4)\cos(\beta)$$

$$T_{c_x} = (T_1 + T_2 + T_3 + T_4)\sin(\beta)$$
(19)

Define-se,

$$\begin{pmatrix}
\hat{T}_{c_x} \\
\hat{T}_{c_y} \\
\hat{T}_{c_z}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
\frac{T_{c_x}}{\cos \beta} \\
\frac{T_{c_y}}{\cos \beta} \\
\frac{T_{c_z}}{\cos \beta}
\end{pmatrix}$$
(20)

Da figura tem-se que:

O vetor de controle  $\vec{T_c} = \{T_{c_x}T_{c_y}T_{c_z}\}^T$  é dado pelas leis de controle já apresentadas. Faz-se necessário, então, calcular as componentes  $T_i$  que são os torques de controle a serem fornecidos por cada uma das 4 rodas de reação. A matriz  $A_w$  não é quadrada, assim há 3 equações e 4 incógnitas. Para a  $4^a$  equação será assumido um critério de otimização.

Por exemplo, caso seja necessário minimizar a norma do vetor  $\vec{T} = \{T_1T_2T_3T_4\}^T$  deve-se definir a seguinte hamiltoniana, que é um índice de performance:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{4} T_i^2 \tag{22}$$

Pela definição,

$$\hat{T}_{c_x} = T_1 - T_3$$

$$\hat{T}_{c_y} = T_2 - T_4$$

$$\hat{T}_{c_x} = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$
(23)

Assim, as seguintes restrições podem ser escritas:

$$g_1: T_1 - T_3 - \hat{T}_{c_x} = 0$$

$$g_2: T_2 - T_4 - \hat{T}_{c_y} = 0$$

$$g_3: T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - \hat{T}_{c_z} = 0$$
(24)

A Lagrangeana será, portanto:

$$\mathcal{L} = \mathcal{H} + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 \tag{25}$$

onde  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  são os multiplicadores de Lagrange.

Observando que  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, T_1, T_2, T_3, T_4)$ . No ponto de mínimo, tem-se que:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \lambda_1} = 0 \Rightarrow g_1 = 0 \tag{26}$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \lambda_2} = 0 \Rightarrow g_2 = 0 \tag{27}$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \lambda_3} = 0 \Rightarrow g_3 = 0 \tag{28}$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta T_1} = 0 \Rightarrow 2T_1 + \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \tag{29}$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta T_2} = 0 \Rightarrow 2T_2 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \tag{30}$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta T_3} = 0 \Rightarrow 2T_3 - \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \tag{31}$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta T_4} = 0 \Rightarrow 2T_4 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \tag{32}$$

É possível eliminar os multiplicadores de Lagrange fazendo:

Equação 29 — Equação 30

$$2T_1 - 2T_2 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 (33)$$

Equação 31 + Equação 33

$$2T_1 - 2T_2 + 2T_3 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 (34)$$

Equação 34 — Equação 32

$$2T_1 - 2T_2 + 2T_3 - 2T_4 = 0 \Rightarrow T_1 - T_2 + T_3 - T_4 = 0 \tag{35}$$

A Equação 35 é a condição necessária para a otimalidade.

Portanto, tem-se agora a 4<sup>a</sup> equação e é possível escrever o sistema da seguinte forma:

#### Sem condição de otimalidade:

Com condição de otimalidade:

$$\begin{pmatrix}
\hat{T}_{c_x} \\
\hat{T}_{c_y} \\
\hat{T}_{c_z} \\
0
\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1
\end{bmatrix} \begin{pmatrix}
T_1 \\
T_2 \\
T_3 \\
T_4
\end{pmatrix} = A_w^* \begin{pmatrix}
T_1 \\
T_2 \\
T_3 \\
T_4
\end{pmatrix}$$
(37)

Agora, pode-se inverter a matriz  $A_w^*$ :

#### 3.1 Falha em uma das rodas der reação

Supondo agora que o conjunto da roda de reação 4 falhe. Assim, novamente o sistema é composto por 3 equações e não é mais necessário encontrar uma 4ª equação. Retornando para a equação sem condição de otimalidade:

Com a falha da roda de reação 4:

## 4 Procedimentos e Resultados

Os sistemas desenvolvidos anteriormente foram programados utilizando o software Matlab / Simulink. Todos os valores utilizados são apresentados na Tabela 1.

Parâmetro	Valor
$\omega_{n_x} = \omega_{n_y} = \omega_{n_z}$	$1 \ rad/s$
$\zeta_x = \zeta_y = \zeta_z$	1
$\omega_{0_x} = \omega_{0_y} = \omega_{0_z}$	$0 \ rad/s$
$\overline{I_x}$	$1000 \ kgm^2$
$\overline{I_y}$	$500 \ kgm^2$
$\overline{I_z}$	$700 \ kgm^2$
$\overline{I_w}$	$0.1 \ kgm^2$
β	15°

Tabela 1: Parâmetros de configuração.

Foram realizadas as simulações abaixo, utilizando como referência os ângulos  $\phi_{ref}=-5^\circ$ ,  $\theta_{ref}=2^\circ$  e  $\psi_{ref}=1^\circ$ . Além disso, utilizou-se os ganhos do controlador de tal forma que  $K_x=\omega_n^2 Ix=1000,\ K_y=\omega_n^2 Iy=500,\ K_z=\omega_n^2 Iz=700,\ K_{xd}=2\zeta\omega_n I_x=2000,\ K_{yd}=2\zeta\omega_n I_y=1000$  e  $K_{zd}=2\zeta\omega_n I_z=1400$ .

#### 4.1 Sistema sem falha nas rodas de reação

Inicialmente foram analisadas as respostas do sistema com as quatro rodas de reação em perfeito funcionamento. A Figura 6 mostra o comportamento dos ângulos para a entrada degrau imposta.

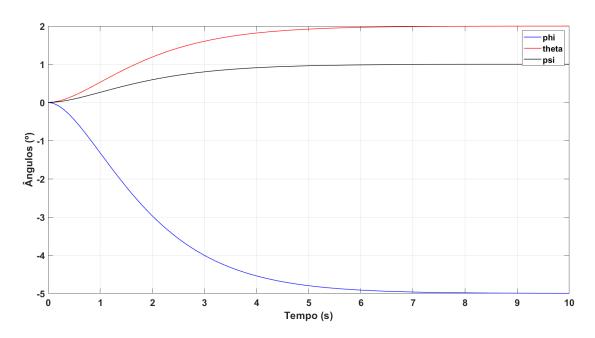


Figura 6: Comportamento dos ângulos.

Como visto na Figura 6 e confirmado pelos valores de erro da Figura 7, todos os ângulos tendem aos valores de referência após aproximadamente 6 segundos de simulação.

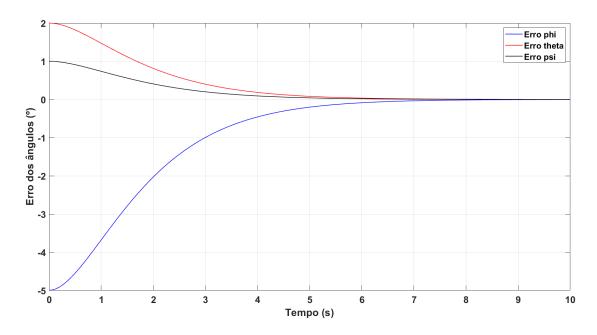


Figura 7: Erro dos ângulos.

Com relação aos torques das rodas de reação, a Figura 8 mostra os valores para cada uma delas e, na Figura 9 a norma das 4 rodas em conjunto.

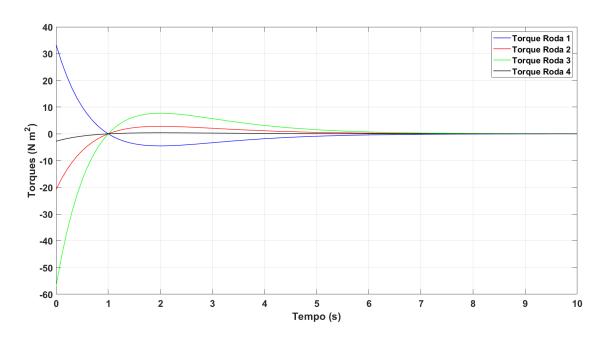


Figura 8: Torques das rodas de reação.

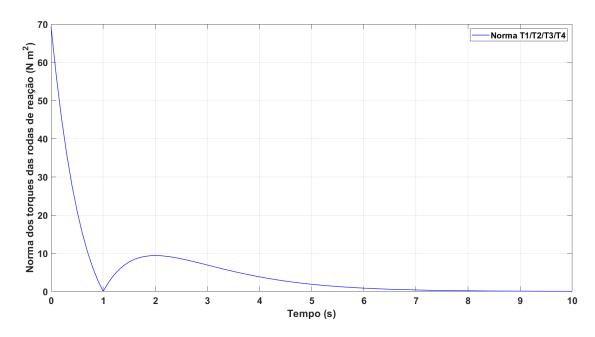


Figura 9: Norma dos torques das rodas de reação.

A seguir, na Figura 10, os valores das velocidades angulares de cada uma das rodas em função do tempo e, na Figura 11, a norma dessas velocidades.

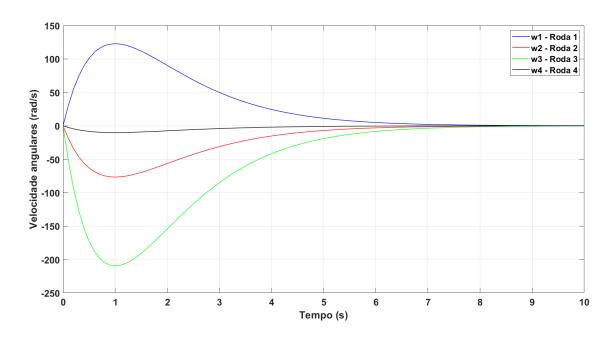


Figura 10: Velocidades angulares das rodas de reação.

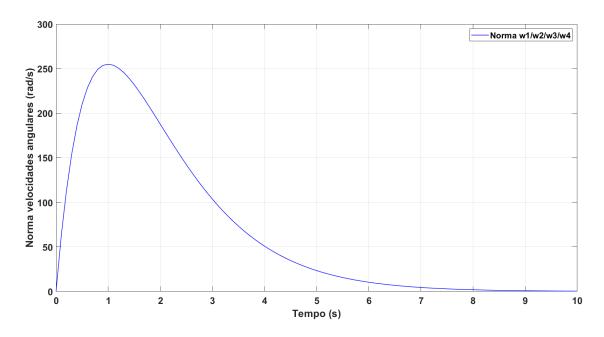


Figura 11: Norma das velocidades angulares das rodas de reação.

## 4.2 Sistema com falha em uma das rodas de reação

Nas simulações que se seguem, é feita a análise do comportamento do sistema assumindo um problema na quarta roda de reação após 2 segundos de simulação. Na Figura 12 o comportamento dos ângulos.

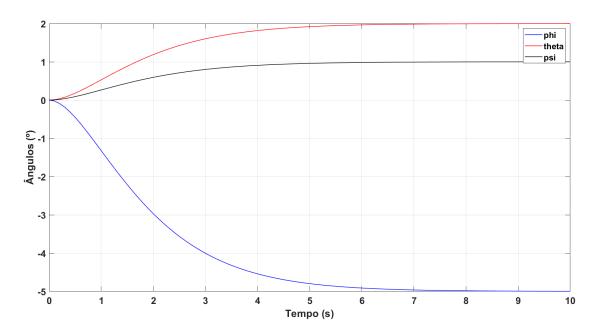


Figura 12: Comportamento dos ângulos - Sistema com falha.

Como visto na Figura 12 e confirmado pelos valores de erro da Figura 13, todos os ângulos tendem aos valores de referência após aproximadamente 6 segundos de simulação.

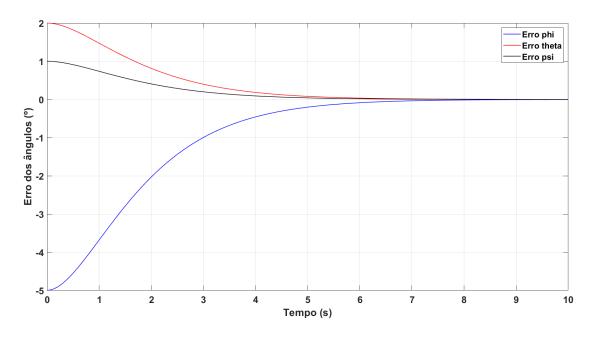


Figura 13: Erro dos ângulos - Sistema com falha.

Com relação aos torques das rodas de reação, a Figura 14 mostra os valores para cada uma delas e, na Figura 15 a norma das 4 rodas em conjunto.

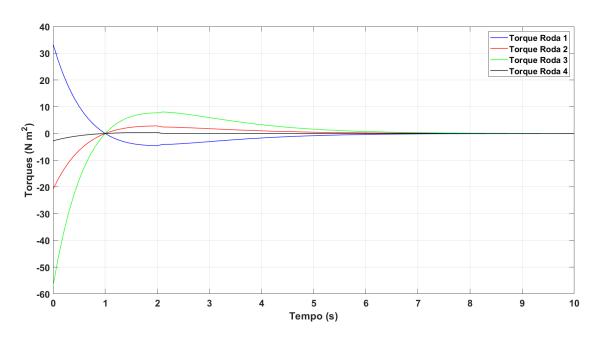


Figura 14: Torques das rodas de reação - Sistema com falha.

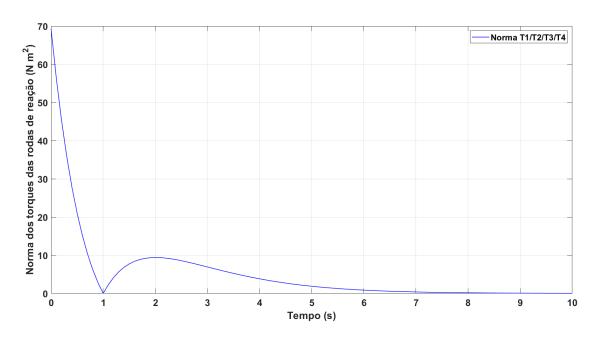


Figura 15: Norma dos torques das rodas de reação - Sistema com falha.

A seguir, na Figura 16, os valores das velocidades angulares de cada uma das rodas em função do tempo e, na Figura 17, a norma dessas velocidades.

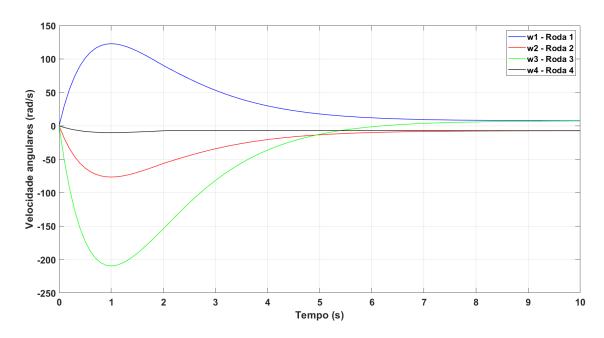


Figura 16: Velocidades angulares das rodas de reação - Sistema com falha.

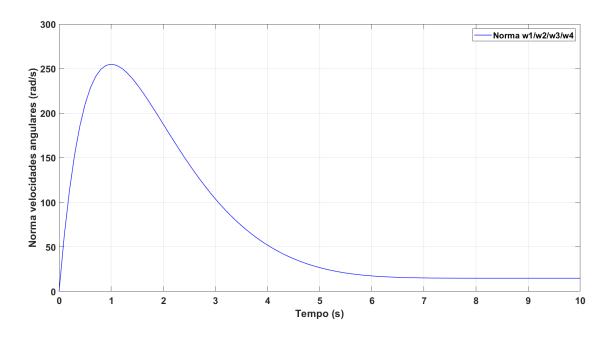


Figura 17: Norma das velocidades angulares das rodas de reação - Sistema com falha.

## 5 Discussão

Na presente atividade analisou-se o funcionamento de sistema de controle aplicado aos três eixos de um veículo espacial com a utilização de quatro rodas de reação.

O sistema de controle desenvolvido e implementado mostrou-se eficaz mesmo após ser simulado a falha em uma das rodas de reação. Como visto nas Figuras 14 e 16 quando comparadas às Figuras 8 e 10, após o torque da quarta roda ir para zero, as demais agem de forma a manter o sistema estável de maneira que os ângulos  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$  atinjam seus respectivos valores de referência.

Por fim, destaca-se a efetividade e importância de análises via simulação para implementação, validação e análise de modelos. Além disso, a utilização de software de diagrama de blocos facilita a implementação e visualização dos resultados.

# Referências

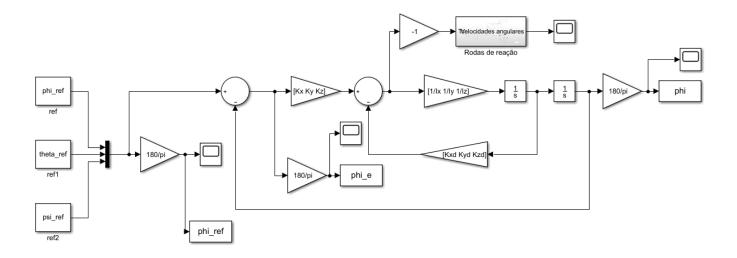
- [1] OGATA, Katsuhiko. Engenharia de controle moderno. Tradução de Heloísa Coimbra de Souza. Revisão de Eduardo Aoun Tannuri. 5. ed. São Paulo, SP: Pearson Education do Brasil, c2011. x, 808 p., il. ISBN 9788576058106.
- [2] FRANKLIN, Gene F.; POWELL, J. David; EMAMI-NAEINI, Abbas. Sistemas de controle para engenharia. Bookman Editora, 2013.

#### A Anexo

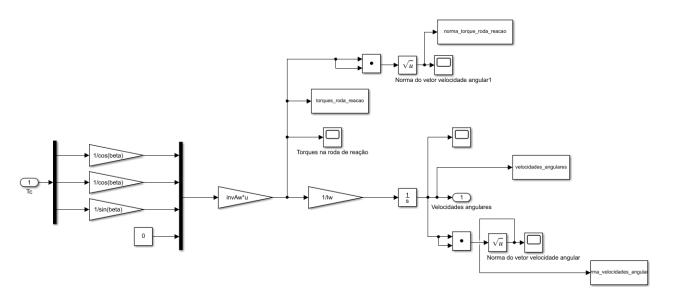
Código implementado no Matlab:

```
1
        %Experimento 5
 2
       %Livro Sidi: Spacecraft Dynamics and Control
 3
       %Capítulo 7, página 167, Figura 7.3.5.
       %Objetico: Construir uma malha de controle considerando uma geometria com 4
 4
 5
       %rodas de reação e supondo uma flha na roda de reação 4.
       %Vamos implementar um bloco switch para alternar para o sistema com falha.
 7
       %Qual é o valor do torque em cada roda de reação?
 8
 9 -
       clear all
10 -
       clc
11
12 -
       wnx = 1;
13 -
       wny = 1;
14 -
       wnz = 1;
15 -
       zetax = 1;
16 -
       zetay = 1;
17 -
       zetaz = 1;
18
19 -
       Angulos_euler_ref_graus = [-5 2 1];
20 -
       Angulos_euler_ref = Angulos_euler_ref_graus.*pi/180;
21
22 -
       phi ref = Angulos euler ref(1);
23 -
       theta_ref = Angulos_euler_ref(2);
24 -
       psi_ref = Angulos_euler_ref(3);
25
26 -
       w0 = [0 \ 0 \ 0];
27
       ક ક
28
29 -
       Ix = 1000; %[kg m^2]
30 -
       Iy = 500; %[kg m^2]
       Iz = 700; %[kg m^2]
31 -
32
33 -
       Iw = 0.1; %[kg m^2] Momento de inercia de cada roda de reação;
34 -
       beta graus = 15;
       beta = beta graus*pi/180;
35 -
36
       %% Ganho dos controladores
37
38 -
       Kx = wnx^2*Ix;
39 -
       Ky = wny^2*Iy;
40 -
       Kz = wnz^2*Iz;
41
42 -
       Kxd = 2*zetax*wnx*Ix;
43 -
       Kyd = 2*zetay*wny*Iy;
44 -
       Kzd = 2*zetay*wnz*Iz;
45
       %Inversa da matriz Aw* (com a condição de otimalidade)
46
       invAw = 0.5*[1 \ 0 \ 0.5 \ 0.5;0 \ 1 \ 0.5 \ -0.5; \ -1 \ 0 \ 0.5 \ 0.5; \ 0 \ -1 \ 0.5 \ -0.5];
47 -
48
49
       %Inversa da matriz Aw_falha
       invAw_falha = inv([1 0 -1; 0 1 0; 1 1 1]);
50 -
51
52 -
       SampleTime = 0.1;
53
54
       %sim('SistemaCompleto4Rodas SemFalha');
       sim('SistemaCompleto4Rodas ComFalha');
```

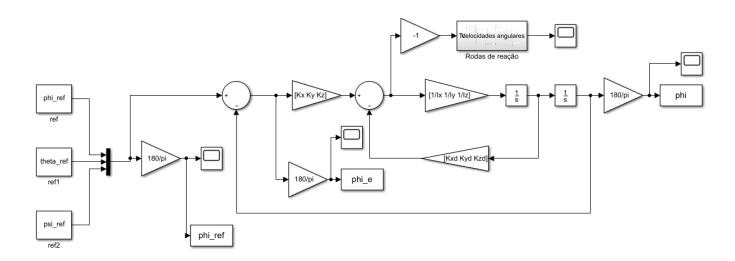
Diagramas de blocos implementado no Simulink - Sistema sem falha:



Sub-bloco das rodas de reação:



Diagramas de blocos implementado no Simulink - Sistema com falha:



Sub-bloco das rodas de reação:

