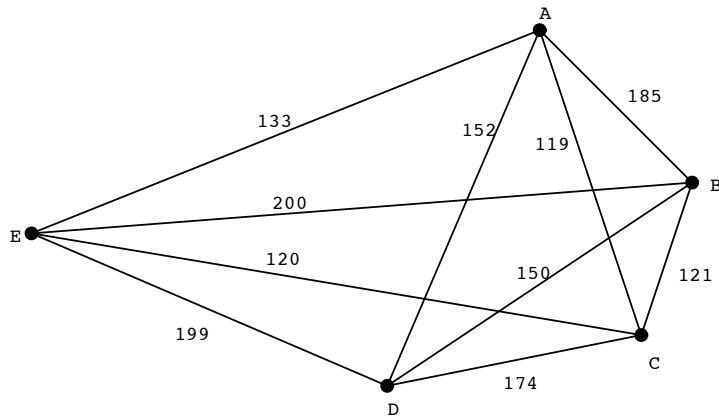


3.8 O Problema do Caixeiro Viajante

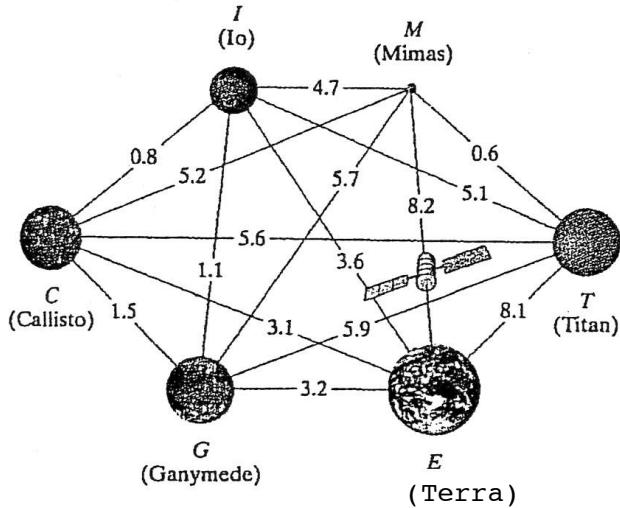
O *Problema do Caixeiro Viajante* (PCV) é o nome que usualmente se dá a uma série de problemas reais importantes que podem ser modelados em termos de ciclos Hamiltonianos em grafos completos. De seguida apresentaremos três exemplos deste tipo de problema, começando com um que dá o nome a esta classe de problemas.

Exemplo (Zé Pedro, o caixeiro viajante). O Zé Pedro é um caixeiro viajante que tem clientes em cinco cidades, que abreviamos por A , B , C , D e E . Ele precisa de planejar uma viagem de negócios com cidade de partida e de destino final A (a cidade onde mora), passando por cada uma das restantes quatro cidades precisamente uma vez. O grafo abaixo representa o custo de cada viagem (em qualquer um dos sentidos) entre cada par de cidades.



Qual o percurso mais barato para esta viagem do Zé Pedro? Por outras palavras, pretendemos encontrar um ciclo Hamiltoniano óptimal no grafo dado (isto é, um ciclo Hamiltoniano cuja soma do peso das arestas é mínimo).

Exemplo (As Luas de Júpiter e Saturno). No ano 2020 será lançada da Terra uma expedição para explorar as luas de Júpiter e Saturno. Serão visitadas Calisto, Ganímedes, Io (luas de Júpiter), Mimas e Titã (luas de Saturno), onde serão recolhidas amostras com as quais a expedição voltará à Terra. A seguinte figura indica a duração da missão (em anos) entre cada par de luas. Como determinar um ciclo Hamiltoniano óptimal (de duração mais curta) no grafo representado?



Exemplo (Vida em Marte). A tabela abaixo indica as distâncias aproximadas, em milhas, entre sete locais de Marte, onde cientistas da NASA pensam haver maior probabilidade de encontrar vestígios de vida.

	A	G	H	I	N	P	W
A	-	7500	5000	2800	3500	1500	2200
G	7500	-	3000	6000	8000	6500	5000
H	5000	3000	-	4000	4800	3500	2800
I	2800	6000	4000	-	2000	3000	2900
N	3500	8000	4800	2000	-	4000	3200
P	1500	6500	3500	3000	4000	-	1300
W	2200	5000	2800	2900	3200	1300	-

Quer-se planear uma viagem que colocará um robô em Marte, aterrando em A . O robô deverá percorrer cada um dos locais, recolher amostras de solo e regressar a A , de onde um foguetão trará as amostras para Terra de forma a serem analisadas. Como encontrar um ciclo Hamiltoniano óptimal no grafo correspondente?

De comum a estes três exemplos, temos um problema que é modelado por um grafo completo cujas arestas têm pesos. A solução do problema consiste em encontrar um ciclo Hamiltoniano no grafo, de forma a que a soma dos pesos das arestas escolhidas seja tão pequeno (ou tão grande, dependendo do problema) quanto possível. Aqui não se põe a questão da existência de ciclo Hamiltoniano, já que o grafo subjacente é completo, logo Hamiltoniano. A questão que se põe é a da procura de uma solução óptimal.

Observação. O modelo subjacente ao problema dado é sempre um grafo simples. Se houver vértices que não são adjacentes, podemos introduzir as arestas em falta de forma

a obter o grafo completo, e atribuir-lhes o peso $+\infty$. Assim, só serão aceites soluções cujo peso seja finito.

Outros problemas que é comum encontrar na categoria de problemas PCV são os seguintes:

- rotas de autocarros escolares;
- redes de distribuição postal;
- construção de placas de circuitos integrados;
- programação de máquinas para realizar várias tarefas em sucessão.

Duas estratégias simples de resolução do PCV

–Método Exaustivo

Este método consiste em fazer uma lista de todos os ciclos Hamiltonianos do grafo, calcular o peso de cada um e escolher um de peso mínimo.

Quantos ciclos Hamiltonianos é que existem no grafo completo de n vértices K_n ?

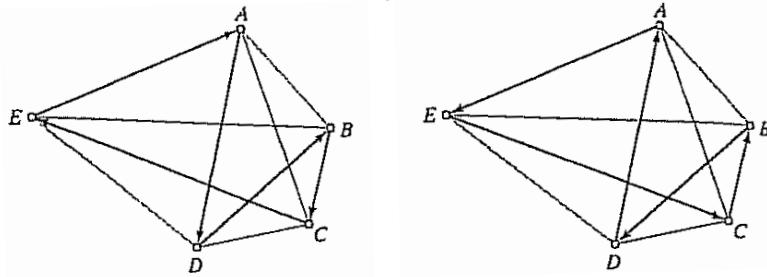
Um caminho em K_n é determinado por uma sequência de vértices distintos. Para ser um ciclo Hamiltoniano, todos os vértices devem ocorrer na sequência, e o último vértice deverá ser igual ao primeiro. Logo, existem $n!$ sequências distintas. No entanto, num ciclo não interessa qual é o vértice inicial, já que podemos começar em qualquer vértice. Assim, podemos fixar o vértice inicial e obtemos um total de $(n - 1)!$ ciclos Hamiltonianos distintos em K_n ².

Exemplo (Zé Pedro, o caixeiro viajante). Uma forma de resolver o problema do Zé Pedro é usar o método de exaustão em que se calculam os pesos dos $4! = 24$ ciclos Hamiltonianos possíveis em K_5 :

²Como não interessa o sentido em que o ciclo é percorrido, podemos identificar um ciclo com o seu ciclo inverso, obtendo então um total de $(n - 1)!/2$ ciclos Hamiltonianos em K_n

ciclo Hamiltoniano	custo total	ciclo inverso
A-B-C-D-E-A	$185+121+174+199+133=812$	A-E-D-C-B-A
A-B-C-E-D-A	$185+121+120+199+152=777$	A-D-E-C-B-A
A-B-D-C-E-A	$185+150+174+120+133=762$	A-E-C-D-B-A
A-B-D-E-C-A	$185+150+199+120+119=773$	A-C-E-D-B-A
A-B-E-C-D-A	$185+200+120+174+152=831$	A-D-C-E-B-A
A-B-E-D-C-A	$185+200+199+174+119=877$	A-C-D-E-B-A
A-C-B-D-E-A	$119+121+150+199+133=722$	A-E-D-B-C-A
A-C-B-E-D-A	$119+121+200+199+152=791$	A-D-E-B-C-A
A-C-D-B-E-A	$119+174+150+200+133=776$	A-E-B-D-C-A
A-C-E-B-D-A	$119+120+200+150+152=741$	A-D-B-E-C-A
A-D-B-C-E-A	$152+150+121+120+133=676$	A-E-C-B-D-A
A-D-C-B-E-A	$152+174+121+200+133=780$	A-E-B-C-D-A

Verificamos assim que há exactamente dois ciclos optimais, o ciclo $A - D - B - C - E - A$ e o seu inverso, o ciclo $A - E - C - B - D - A$. Em qualquer dos casos, o Zé Pedro gasta 676 Euros na sua viagem de trabalho e esta é a melhor solução.

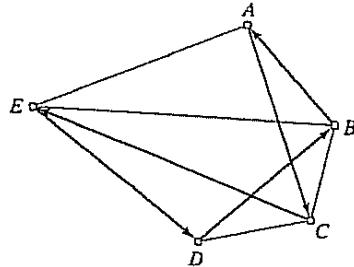


Este método é, em geral, impossível de implementar já que o número de operações a efectuar é da ordem de $(n-1)!$ para K_n . Num (super) computador capaz de determinar o peso de mil biliões (isto é, 10^{15}) de ciclos Hamiltonianos por segundo (actualmente um tal computador não existe!), este método demoraria 10 meses para $n = 24$, 20 anos para $n = 25$, 500 anos para $n = 26$ e 284 milhões de anos para $n = 30$.

–Método do Vizinho Mais Próximo (*método guloso*)

Escolhe-se um vértice e a aresta de menor peso incidente nesse vértice. Esta aresta determina um outro vértice. De cada novo vértice escolhe-se a aresta de menor peso, de entre as arestas que são incidentes nesse vértice e num vértice que ainda não foi escolhido. No final, regressa-se ao vértice inicial.

Exemplo (Zé Pedro, o caixeiro viajante). No caso do Zé Pedro, por este algoritmo ele começa pelo vértice A . De A vai para C , de C para E , depois para D e finalmente para B , de onde regressa a A .



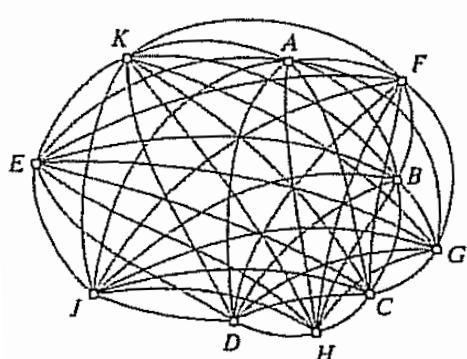
O custo desta viagem é de 773 Euros.

O método do vizinho mais próximo é muito mais rápido do que o método de exaustão, embora não produza, em geral, uma solução óptima. No caso do exemplo anterior, o custo adicional é de 97 Euros, e o erro relativo é de $97/676 \simeq 14,3\%$.

Será que este método *guloso* é suficientemente eficiente? Se considerarmos como uma única operação a procura de entre todas as arestas incidentes num dado vértice da aresta de menor peso, então em K_n temos de efectuar uma operação para o primeiro vértice, uma operação para o segundo, e assim sucessivamente. Quando chegarmos ao último vértice ainda não escolhido a única hipótese é voltar ao vértice inicial. Logo, o *custo* deste algoritmo é da ordem das $n - 1$ operações.

Por exemplo, se $n = 30$ e nos permitirmos demorar um minuto por cada operação, conseguimos aplicar este algoritmo em meia hora, algo que, usando o método exaustivo demoraria a um (super) computador mais de 200 milhões de anos a executar. Este é o ponto forte deste e de muitos outros algoritmos de tipo *guloso*.

Exemplo (Zé Pedro, o caixeiro viajante). Suponhamos que o Zé Pedro consegue alargar o seu negócio e ter um leque de clientes espalhados por dez cidades. O custo das viagens entre as cidades está representado abaixo, em forma de um grafo e de uma tabela:



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K
A	*	185	119	152	133	321	297	277	412	381
B	185	*	121	150	200	404	458	492	379	427
C	119	121	*	174	120	332	439	348	245	443
D	152	150	174	*	199	495	480	500	454	489
E	133	200	120	199	*	315	463	204	396	487
F	321	404	332	495	315	*	356	211	369	222
G	297	458	439	480	463	356	*	471	241	235
H	277	492	348	500	204	211	471	*	283	478
I	412	379	245	454	396	369	241	283	*	304
K	381	427	443	489	487	222	235	478	304	*

Neste caso, para usar o método exaustivo temos de calcular o peso de $9! = 362880$ ciclos Hamiltonianos. Demorando 30 segundos por cada um dos ciclos demoraríamos

3024 horas, o que é mais de 4 meses a trabalhar 24 horas por dia, 7 dias por semana. Tentemos então o método do vizinho mais próximo. O ciclo que obtemos é

$$A - C - E - D - B - J - G - K - F - H - A,$$

cujo custo é de 2153 Euros. Será esta uma boa aproximação do custo óptimal? Usando um computador é possível verificar que, neste caso, o valor de um ciclo óptimal é 1914 Euros. O erro relativo é assim $\frac{2153-1914}{1914} \simeq 12,5\%$.

-Método do Vizinho Mais Próximo com Repetição

Este algoritmo funciona como o algoritmo do vizinho mais próximo descrito atrás, sendo a diferença que este último é implementado tantas vezes quantos os vértices do grafo, tomando de cada vez um vértice diferente como vértice inicial. Depois, é escolhido o ciclo de peso menor como resultado final do algoritmo. Se for obtido o ciclo

$$X_1 - X_2 - \cdots - X_k \quad \text{com } X_1 = X_k, \quad (3.2)$$

como resultado deste método, e quisermos um ciclo de vértice inicial X_j , então tomamos o ciclo

$$X_j - X_{j+1} - \cdots - X_k = X_1 - X_2 - \cdots - X_{j-1},$$

cujo peso é o mesmo do de (3.2).

Exemplo (Zé Pedro, o caixeiro viajante). Voltando mais uma vez ao exemplo do Zé Pedro e aplicando o algoritmo do vizinho mais próximo com repetição, obtemos sucessivamente os ciclos:

ciclo	custo em Euros
A-C-E-D-B-A	773
B-C-A-E-D-B	722
C-A-E-D-B-C	722
D-B-C-A-E-D	722
E-C-A-D-B-E	741

Assim, este algoritmo escolhe o ciclo $B-C-A-E-D-B = C-A-E-D-B-C = D-B-C-A-E-D$, cujo custo é de 722 Euros. Como sabemos, este não é um ciclo óptimal, mas o resultado é mais satisfatório do que o obtido usando o algoritmo do vizinho mais próximo (sem repetição) começando em A .

-Método da Aresta de Menor Peso

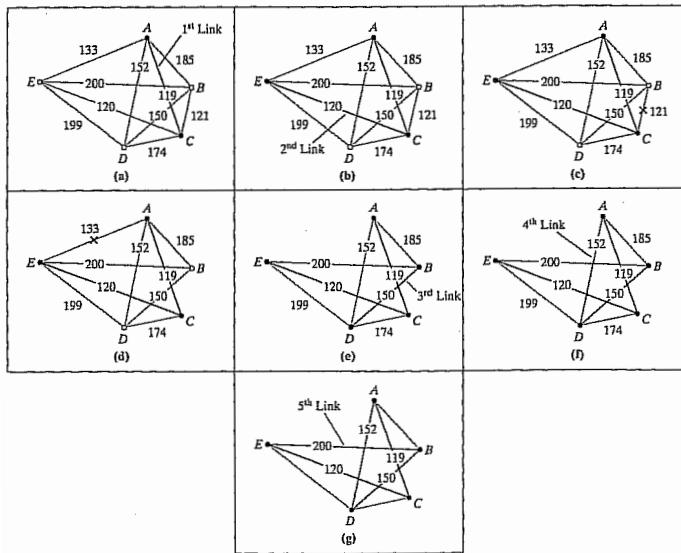
A ideia deste algoritmo é encontrar um ciclo Hamiltoniano à custa de arestas “soltas”. Este é ainda um exemplo de um algoritmo guloso.

Começamos por escolher a aresta de menor peso do grafo. Depois, escolhemos a aresta de menor peso de entre as arestas que não foram ainda escolhidas (que não tem de ser adjacente à primeira), obedecendo às seguintes regras:

1. não permitir que se forme um ciclo a não ser que já todos os vértices sejam incidentes com alguma das arestas já escolhidas;
2. não permitir que de entre as arestas escolhidas haja três incidentes no mesmo vértice.

Repetimos este processo até obtermos um ciclo, que será necessariamente um ciclo Hamiltoniano. Se alguma destas duas regras fosse violada não obteríamos um ciclo Hamiltoniano. Reciprocamente, se seguirmos estas regras terminamos com um ciclo Hamiltoniano.

Exemplo (Zé Pedro, o caixeiro viajante). Usemos este algoritmo no problema do Zé Pedro com cinco cidades.



Obtemos o ciclo $A - C - E - B - D - A$, de peso 741 Euros.

Exemplo (As Luas de Júpiter e Saturno). Voltando ao exemplo da exploração das luas de Júpiter e de Saturno, o método da aresta de menor peso conduz ao ciclo $C - I - G - M - T - E - C$, de duração 19,4 anos. No entanto, o método do vizinho mais próximo com repetição constrói o ciclo $T - M - I - C - G - E - T$, de duração 18,9 anos.

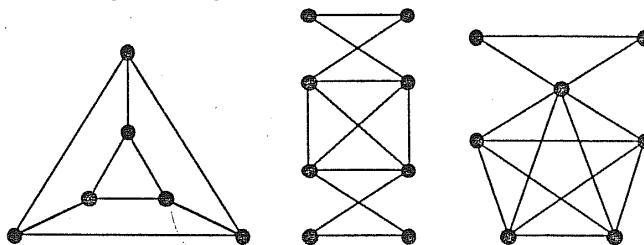
Exemplo (Vida em Marte). Retomemos o problema do robô a recolher amostras de solo em Marte apresentado no início. Vamos aplicar-lhe os algoritmos que acabámos de discutir:

1. Método exaustivo. Temos de calcular o peso de $6! = 720$ ciclos Hamiltonianos. Usando um computador obtemos um ciclo óptimal de 20100 milhas.
2. Método da aresta de menor peso. Obtemos o ciclo $A - P - W - H - G - N - I - A$, de peso 21400 milhas.
3. Método do vizinho mais próximo. Começando em A , obtemos o ciclo $A - P - W - H - G - I - N - A$, de peso 20100 milhas.
4. Método do vizinho mais próximo com repetição. Uma vez que começando em A obtivémos um ciclo óptimal, este método produzirá uma solução com o mesmo peso.

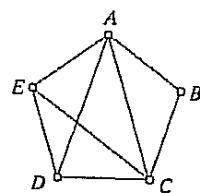
No caso deste exemplo, o melhor método foi o algoritmo do vizinho mais próximo. O que é mais surpreendente ainda é que esse algoritmo produziu um ciclo óptimal. Infelizmente, nem sempre é assim.

3.9 Exercícios

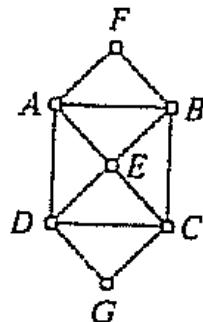
1. Indique quais dos seguintes grafos têm ciclos ou caminhos hamiltonianos.



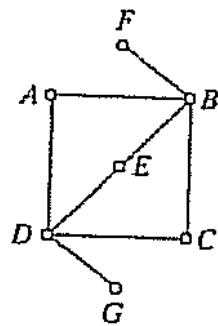
2. Faça uma lista de todos os possíveis ciclos hamiltonianos no seguinte grafo.



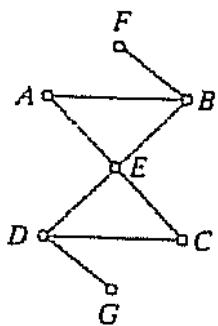
3. Para o seguinte grafo,



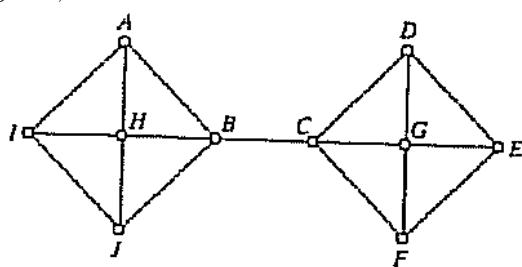
- (a) determine um caminho hamiltoniano de A a E .
 - (b) determine um ciclo hamiltoniano começando em A e terminando com a aresta EA .
 - (c) determine um caminho hamiltoniano de A a C .
 - (d) determine um caminho hamiltoniano de F a G .
4. Explique porque é que o seguinte grafo não tem nem ciclos hamiltonianos nem caminhos hamiltonianos.



5. Explique porque é que o seguinte grafo não tem ciclos hamiltonianos mas tem um caminho hamiltoniano.



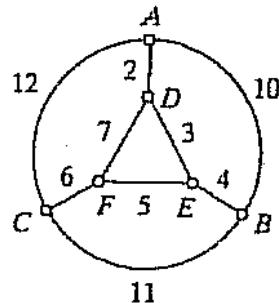
6. Para o seguinte grafo,



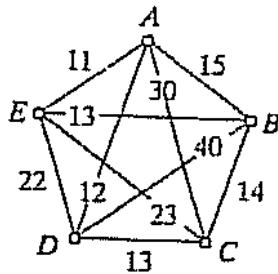
- (a) determine um caminho hamiltoniano de A a D .
 - (b) determine um caminho hamiltoniano de G a H .
 - (c) explique porque é que não existe nenhum caminho hamiltoniano que comence em B .
 - (d) explique porque é que o grafo não é hamiltoniano.
7. Seja G um grafo bipartido com bipartição $V(G) = X \dot{\cup} Y$.
- (a) Mostre que se G é Hamiltoniano então $|X| = |Y|$.

- (b) Mostre que se $|X| \neq |Y|$ mas G tem algum caminho Hamiltoniano então $|X| = |Y| \pm 1$.
- (c) Mostre que o recíproco de cada uma das afirmações anteriores é falso, mesmo se G for conexo.
8. Caracterize os grafos simples que têm algum circuito Euleriano que é simultaneamente um ciclo Hamiltoniano.
9. Mostre que a condição “ $\deg(v) \geq n/2$ ” no Teorema de Dirac não pode ser substituída pela condição mais fraca “ $\deg(v) \geq (n - 1)/2$ ”.
10. Prove o Teorema 3.8.
11. Prove o Teorema 3.12, modificando o algoritmo dado para a construção de um ciclo Hamiltoniano em grafos satisfazendo as hipóteses do Teorema de Ore.
12. Seja H um grafo simples Euleriano e $G = L(H)$ o seu grafo de linhas (ver o exercício 8 da secção 3.6). Mostre que G é Hamiltoniano.
13. Tem de planejar um jantar para 6 pessoas: A, B, C, D, E e F . Estes convidados irão sentar-se à volta de uma mesa redonda e as suas posições à mesa têm de ser marcadas de forma a que cada convidado esteja sentado entre dois amigos (isto é, os convidados à direita e à esquerda são ambos amigos da pessoa do meio, embora não tenham de ser amigos entre si). Assume-se que as relações de amizade são sempre mútuas.
Suponha finalmente que as relações de amizade entre os convidados são determinadas apenas por: A é amigo de B e de F ; B é amigo de A, C e E ; C é amigo de B, D, E e F ; E é amigo de B, C, D e F .
- (a) Construa um *grafo de amizades* para estes convidados.
- (b) Determine todas as possibilidades para a marcação das posições à mesa para o jantar.
- (c) É possível sentar os convidados de forma a que B e E fiquem um ao lado do outro? Em caso afirmativo indique uma possibilidade e em caso negativo explique porque não é possível.
14. Numa festa com n convidados, sendo $n \geq 4$, pretende-se marcar os seus lugares à volta da mesa de jantar de forma a que cada convidado esteja sentado entre dois convidados seus conhecidos (ver o exercício anterior). Mostre que se quaisquer dois dos convidados conhecem, entre eles, os restantes $n - 2$ convidados, então uma tal disposição dos convidados à mesa é sempre possível.

15. Seja G um grafo simples com n vértices para o qual se verifica $\deg(u) + \deg(v) \geq n - 1$, para todo o par de vértices não adjacentes u e v de G . Prove que G é conexo. [Sugestão: Mostre que dados vértices distintos x e y , então ou x e y são adjacentes ou têm algum vizinho comum.]
16. Seja G um grafo simples com $n \geq 3$ vértices e pelo menos $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$ arestas. Mostre que G é Hamiltoniano. Dê um exemplo de um grafo simples com n vértices e $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$ arestas que não seja Hamiltoniano. [Sugestão: Use o Teorema de Ore.]
17. Seja n um inteiro positivo. O **n -cubo** é o grafo Q_n cujos vértices são os n -uplos de 0's e 1's, estando dois tais n -uplos ligados por uma aresta se e só se diferirem em precisamente uma das suas coordenadas.
- Represente os grafos Q_1 , Q_2 e Q_3 de forma a que seja perceptível a sua designação de “cubos”.
 - Mostre que Q_n é um grafo bipartido e regular. Represente os grafos Q_1 , Q_2 e Q_3 de forma a que seja perceptível que são bipartidos.
 - Mostre que Q_n é Hamiltoniano.
18. Para o seguinte grafo com arestas pesadas,



- determine um caminho hamiltoniano de A a C e calcule o seu peso.
 - determine outro caminho hamiltoniano de A a C e calcule o seu peso.
 - determine um caminho hamiltoniano óptimal de A a C e indique o seu peso.
19. Uma empresa de distribuição localizada em A tem de fazer entregas nos quatro locais B , C , D , E e depois regressar a A . O seguinte grafo indica o tempo aproximado (em minutos) de viagem entre estes locais.

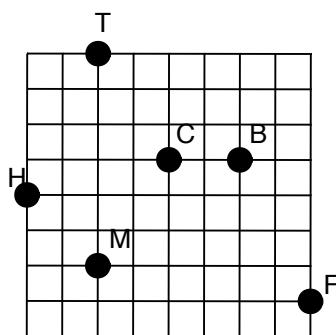


- (a) Aplique o algoritmo do vizinho mais próximo, começando em A . Qual é o tempo de viagem para esse percurso?
- (b) Aplique o algoritmo do vizinho mais próximo, começando em D . Apresente a resposta como um ciclo começando em A .
- (c) Suponha que a última paragem da carrinha de entregas antes de regressar a A tem de ser D . Determine o ciclo hamiltoniano óptimal que satisfaz esta condição. Qual é o tempo de viagem para esse percurso?
20. Os Tedio Boys, uma banda de Coimbra, vão fazer uma *digressão* dos EUA, dando concertos nas sete cidades indicadas na tabela, que indica as distâncias entre elas (em milhas).

	Boston	Dallas	Houston	Louisville	Nashville	Pittsburgh	St. Louis
Boston	-	1748	1804	941	1088	561	1141
Dallas	1748	-	243	819	660	1204	630
Houston	1804	243	-	928	769	1313	779
Louisville	941	819	928	-	168	388	263
Nashville	1088	660	769	168	-	553	299
Pittsburgh	561	1204	1313	388	553	-	588
St. Louis	1141	630	779	263	299	588	-

- (a) Aplique o algoritmo do vizinho mais próximo começando em Nashville. Qual é a distância total do percurso obtido?
- (b) Aplique o algoritmo do vizinho mais próximo começando em St. Louis. Qual é a distância total do percurso obtido?
- (c) Encontre um ciclo hamiltoniano usando o algoritmo do vizinho mais próximo com repetição e indique o comprimento em milhas desse percurso.

- (d) Encontre um ciclo hamiltoniano usando o algoritmo da aresta de menor peso e indique o comprimento em milhas desse percurso.
21. A Idália vai ter uma manhã muito atarefada! Tem de ir: às Finanças, depositar um cheque ao Banco, comprar beterrabas à Mercearia, visitar uma amiga ao Hospital, e ao Talho comprar meio quilo de jarrete. Claro está, a Idália terá de sair de Casa e a esta regressar ao fim da manhã. Na seguinte planta estão marcados a Casa da Idália e os locais onde ela tem de ir. Cada quarteirão tem aproximadamente 1 Kilómetro de comprimento e não é possível atravessar os quarteirões diagonalmente.



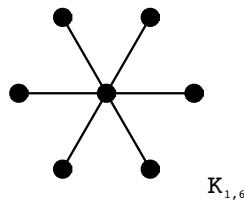
- (a) Modele este problema usando um grafo com arestas pesadas.
- (b) Encontre um percurso razoavelmente curto para a Idália, usando dois dos métodos heurísticos estudados e indicando a distância que ela terá de percorrer em cada um dos casos.
22. Seis programas de computador, P_1, \dots, P_6 , têm de correr em sequência num computador central. Cada programa precisa de recursos próprios, como por exemplo parte da memória principal do computador, um compilador e *drives*. Mudar os recursos de um programa para outro demora tempo, que é precioso. A matriz $C = (c_{ij})$ abaixo indica o tempo c_{ij} necessário para a conversão entre os recursos de P_i e de P_j (note-se qua a matriz é simétrica).

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 30 & 90 & 10 & 30 & 10 \\ 30 & 0 & 80 & 40 & 20 & 20 \\ 90 & 80 & 0 & 40 & 20 & 30 \\ 10 & 40 & 40 & 0 & 60 & 10 \\ 30 & 20 & 20 & 60 & 0 & 90 \\ 10 & 20 & 30 & 10 & 90 & 0 \end{pmatrix}$$

Use o algoritmo da aresta de menor peso para determinar uma sequência para os programas correrem de forma a que o tempo de conversão entre os vários recursos seja relativamente pequeno.

3.10 Árvores

Dado um conjunto de n vértices, qual será o menor número de arestas entre eles que é necessário ter de forma a que o grafo correspondente seja conexo? Por exemplo, se quisermos construir uma rede de comunicações entre n localizações distintas, qual é o número mínimo de ligações a efectuar? Um possível modelo para uma solução deste problema é o grafo bipartido completo $K_{1,n-1}$, também conhecido por **estrela**.



Outra possibilidade é o caminho P_n obtido retirando uma aresta ao ciclo C_n :



Em qualquer um destes casos foram usadas $n - 1$ arestas. Será possível resolver o problema usando um grafo com menos arestas?

Seja G um grafo com $|V(G)| = n$. Dada uma aresta $\alpha \in E(G)$, já foi visto nos exercícios que $\omega(G) \leq \omega(G - \alpha) \leq \omega(G) + 1$. Logo, se $A \subseteq E(G)$ então

$$\omega(G) \leq \omega(G - A) \leq \omega(G) + |A|.$$

Fazendo $A = E(G)$ obtemos que $|V(G)| = \omega(G - E(G)) \leq \omega(G) + |E(G)|$, ou seja, $|E(G)| \geq |V(G)| - \omega(G)$. Decorre então o seguinte resultado:

Proposição 3.13. (a) *Num grafo G com n vértices e e arestas tem-se $e \geq n - \omega(G)$. Em particular, se G for conexo então $e \geq n - 1$.*

(b) *Para cada $n \geq 1$ existem grafos conexos com n vértices e $n - 1$ arestas. Em qualquer grafo conexo com esta relação entre número de vértices e de arestas, todas as arestas são pontes.*

Demonstração. A parte (a) e a primeira afirmação da parte (b) decorrem dos parágrafos anteriores. Seja G um grafo conexo com n vértices e $n - 1$ arestas. Dada $\alpha \in E(G)$, o grafo $G - \alpha$ tem n vértices e $n - 2$ arestas, logo é desconexo, por (a). Assim, todas as arestas de G são pontes. \square

Um grafo diz-se uma **árvore** se for conexo e todas as suas arestas forem pontes. Dito de outra forma, uma árvore é um grafo conexo G tal que $G - \alpha$ é desconexo para toda a aresta $\alpha \in E(G)$. É claro que uma árvore é necessariamente um grafo simples.

Teorema 3.14. *Um grafo conexo com n vértices é uma árvore se e só se tem exactamente $n - 1$ arestas.*

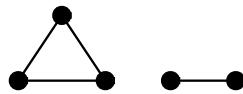
Demonstração. Pela proposição anterior, qualquer grafo conexo com $n - 1$ arestas é uma árvore, já que todas as suas arestas são pontes.

Reciprocamente, suponhamos que G é uma árvore com n vértices. Vamos provar, por indução sobre n , que G tem $n - 1$ arestas. Se $n = 1$ então necessariamente G não tem arestas e o resultado verifica-se nesse caso. Suponhamos então que $n \geq 2$ e que o resultado é válido para todas as árvores com menos de n vértices. Como $n \geq 2$ e G é conexo, $|E(G)| \geq 1$. Tome-se $\alpha \in E(G)$. Por G ser árvore, $G - \alpha$ tem exactamente duas componentes conexas, digamos H e K . Além disso, todas as arestas de H são pontes, o mesmo sucedendo com K . Logo, H e K são árvores com menos de n vértices. Pela hipótese de indução aplicada a H e a K , obtemos

$$\begin{aligned} |E(G)| &= |E(H)| + |E(K)| + 1 = |V(H)| - 1 + |V(K)| - 1 + 1 \\ &= |V(H)| + |V(K)| - 1 = |V(G)| - 1 = n - 1. \end{aligned}$$

Fica assim provado o resultado, por indução sobre n . □

Observação. A hipótese de conexão no teorema anterior é essencial, como mostra o seguinte grafo com 5 vértices e 4 arestas, que **não** é uma árvore:



Lema 3.15. *Sejam G um grafo e $\alpha \in E(G)$. Então α é uma ponte se e só se α não pertence a nenhum ciclo de G .*

Demonstração. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que G é conexo e simples. Suponhamos que C é um ciclo em G contendo α , digamos

$$C = v_0\alpha_1v_1 \cdots \alpha_m v_m \alpha v_0.$$

Então existe ainda um caminho em $G - \alpha$ entre as extremidades v_0 e v_m de α , a saber,

$$C' = v_0\alpha_1v_1 \cdots \alpha_m v_m,$$

pois $\alpha \neq \alpha_i$ para todo o $1 \leq i \leq m$. Logo $G - \alpha$ é ainda conexo e α não é ponte.

Suponhamos agora que α não é ponte. Então existe um caminho em $G - \alpha$ entre as extremidades v_0 e v_m de α . Concatenando esse caminho com o caminho $v_m \alpha v_0$ obtemos um ciclo em G contendo α . □

Teorema 3.16. *Seja G um grafo conexo. Então G é uma árvore se e só se G não contiver ciclos.*

Demonstração. Como numa árvore todas as arestas são pontes, resulta do lema anterior que as árvores não contêm ciclos e que num grafo sem ciclos todas as arestas são pontes. \square

Podemos ainda caracterizar as árvores pela seguinte propriedade:

Teorema 3.17. *Um grafo G sem lacetes é uma árvore se e só se existe um único caminho entre cada par de vértices distintos u e v . Tal caminho é necessariamente um caminho de comprimento mínimo, igual a $d(u, v)$.*

Demonstração. Suponhamos primeiro que G é uma árvore. Como G é conexo, dados dois vértices distintos u e v , existe um caminho entre eles. Sejam C e C' dois caminhos entre u e v e suponhamos, por redução ao absurdo, que estes caminhos são diferentes. Então têm de diferir em pelo menos uma aresta, digamos $\alpha \in E(C) \setminus E(C')$. Seja C^* o caminho inverso de C' , de v a u . Então $CC^* - \alpha$ é um passeio entre as extremidades de α , pois esta aresta ocorre exactamente uma vez no passeio fechado CC^* . Isto mostra que o grafo $G - \alpha$ é ainda conexo, o que é absurdo pois G é árvore. Logo os caminhos C e C' são iguais.

Suponhamos agora que entre dois quaisquer vértices distintos de G existe um único caminho. Então, em particular, G é conexo. Seja α uma aresta de G , com extremidades u e v . Como G não tem lacetes, $u \neq v$. Se α pertencesse a algum ciclo, digamos C , haveria pelo menos dois caminhos distintos entre u e v : $u\alpha v$ e $C - \alpha$, o que contradiria a hipótese. Logo, pelo último lema, α é ponte. Assim, G é uma árvore. \square

Apresentamos de seguida uma última caracterização das árvores:

Teorema 3.18. *Seja G um grafo com n vértices. As seguintes condições são equivalentes:*

- (a) G é uma árvore;
- (b) G é um grafo sem ciclos com $n - 1$ arestas;
- (c) G é um grafo conexo com $n - 1$ arestas.

Demonstração. A implicação (a) \implies (b) já foi estabelecida, assim como a equivalência entre (a) e (c). Resta então provar que a condição (b) implica (c).

Suponhamos então que G não tem ciclos. Sejam G_1, \dots, G_k as componentes conexas de G . Então cada G_i é um grafo conexo sem ciclos, logo uma árvore. Assim,

$$\begin{aligned} |E(G)| &= \sum_{i=1}^k |E(G_i)| = \sum_{i=1}^k (|V(G_i)| - 1) \\ &= \sum_{i=1}^k |V(G_i)| - k = |V(G)| - k = n - k. \end{aligned}$$

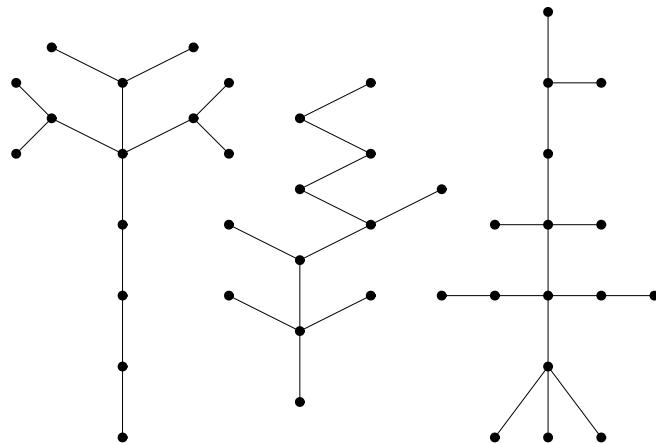
Como, por hipótese, $|E(G)| = n - 1$, resulta que $k = 1$ e G é conexo, provando (c). \square

Um grafo sem ciclos (ou, de forma equivalente, um grafo cujas arestas são todas pontes) diz-se uma **floresta**. Como foi visto na prova do teorema anterior, as componentes conexas de uma floresta são árvores e tem-se

$$|E(G)| = |V(G)| - \omega(G)$$

se G for uma floresta.

Exemplo. Uma floresta com 3 árvores



Proposição 3.19. *Seja G uma árvore com $n \geq 2$ vértices. Então G tem pelo menos 2 vértices de grau 1.*

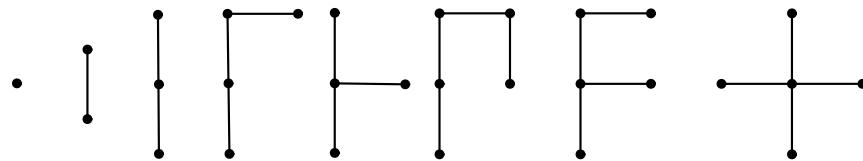
Demonstração. Seja $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ a sequência de graus de G . Suponhamos, por redução ao absurdo, que G tem no máximo 1 vértice de grau 1. Então $d_1 \geq 1$ e $d_i \geq 2$ para $2 \leq i \leq n$. Logo,

$$2(n - 1) = 2|E(G)| = \sum_{j=1}^n d_j \geq 1 + 2(n - 1),$$

o que é absurdo. Assim, pelo menos dois dos vértices de G têm grau 1. \square

Sejam G uma árvore com $|V(G)| = n \geq 2$, $v \in V(G)$ um vértice de grau 1 e $\alpha \in E(G)$ a única aresta de G incidente com v . Então $G - \alpha$ tem exatamente duas componentes conexas: uma é uma árvore com $n - 1$ vértices e a outra é um vértice isolado. Reciprocamente, dada uma árvore G' com $n - 1$ vértices e um novo vértice x , podemos construir uma árvore G com n vértices acrescentando o vértice x a G' e uma nova aresta entre x e um (qualquer) vértice de G' . Em G , $\deg(x) = 1$. Podemos assim construir todas as árvores recursivamente: começamos com um vértice isolado e vamos acrescentando em cada passo um novo vértice e uma aresta entre este e um dos vértices anteriores, fazendo-o de todas as formas possíveis.

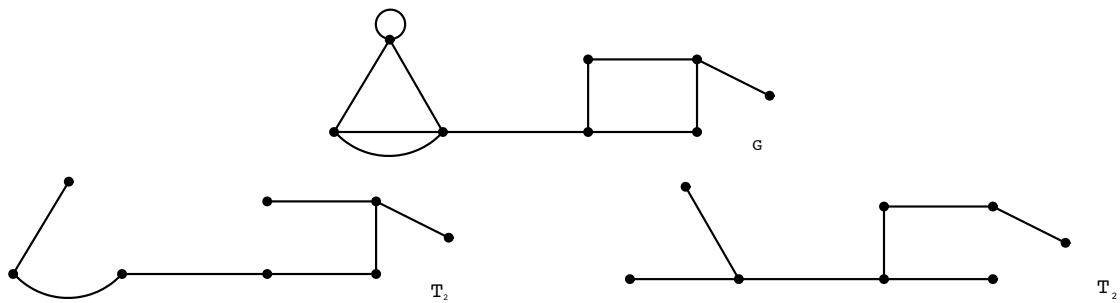
Exemplo. Todas as árvores, a menos de isomorfismo, com menos de 6 vértices:



Seja G um grafo conexo arbitrário. Se G não for árvore, existe alguma aresta de G que não é ponte. Ao retirar a G uma tal aresta ficamos com um subgrafo de G que é gerador e conexo. Iterando este processo o número suficiente de vezes ($|E(G)| - |V(G)| + 1$ vezes) obtemos um subgrafo conexo gerador de G cujas arestas são todas pontes, ou seja obtemos um subgrafo gerador de G que é uma árvore. Um tal subgrafo diz-se uma **árvore geradora** de G . Temos então, pelo algoritmo acabado de descrever:

Teorema 3.20. *Um grafo é conexo se e só se tem alguma árvore geradora.*

Exemplo. Um grafo G e suas árvores geradoras T_1 e T_2 . Note-se que estas árvores não são isomórficas.



Como mostra o exemplo anterior, um grafo conexo tem, em geral, várias árvores geradoras diferentes, nem todas isomórficas. É conhecida uma fórmula para o número de árvores geradoras de um grafo simples. Um caso particular dessa fórmula foi estabelecido por Cayley em 1889, que provou que o grafo completo K_n tem n^{n-2} árvores

geradoras distintas. Por exemplo, é fácil de ver que K_4 tem 16 árvores geradoras diferentes, embora estas determinem apenas duas classes de isomorfismo.

Os dois resultados que se seguem mostram que existe uma espécie de *propriedade de troca* entre as árvores geradoras de um grafo. O primeiro permite modificar uma árvore geradora de forma a que esta passe a conter uma aresta específica. O segundo permite, sempre que possível, modificar uma árvore geradora dada, de forma a que esta deixe de conter uma aresta específica.

Teorema 3.21. *Seja T uma árvore geradora de um grafo conexo G . Seja ainda α uma aresta de G que não pertence a T e não é um lacete. Então existe uma aresta β de T tal que o grafo T' obtido acrescentando a T a aresta α e retirando-lhe a aresta β é ainda uma árvore geradora de G .*

Demonstração. Seja $n = |V(G)| = |V(T)|$. O grafo \tilde{T} obtido acrescentando a T a aresta α é conexo mas não é uma árvore porque tem n arestas, logo contém algum ciclo que necessariamente contém a aresta α . Como α não é lacete, um tal ciclo tem comprimento não inferior a 2 e nenhuma das suas arestas é ponte. Seja β uma qualquer aresta desse ciclo diferente de α . Então β é uma aresta de T e $T' = \tilde{T} - \beta$ é um subgrafo gerador de G , conexo, com $|E(T')| = n-1$ arestas; logo é uma árvore geradora de G . \square

Teorema 3.22. *Sejam T_1 e T_2 árvores geradoras do grafo conexo G . Dada uma aresta β de T_1 , existe uma aresta α de T_2 tal que o grafo obtido retirando a aresta β a T_1 e acrescentando-lhe a aresta α é ainda uma árvore geradora de G . Se β não pertencer a T_2 então α não pertence a T_1 .*

Demonstração. Seja $\tilde{T} = T_1 - \beta$. Então, como β é ponte de T_1 , \tilde{T} tem duas componentes conexas, digamos \tilde{T}_1 e \tilde{T}_2 . Mas como T_2 é um subgrafo gerador conexo de G , existe alguma aresta α de T_2 entre um vértice de \tilde{T}_1 e um vértice de \tilde{T}_2 . Assim, ao acrescentar α ao grafo \tilde{T} obtemos um grafo conexo T' com $|E(\tilde{T})| + 1 = |E(T_1)| = |V(G)| - 1$ arestas. Logo, T' é uma árvore geradora de G . Em particular, se β não pertencer a T_2 então α não pertence a T_1 . \square

Finalizamos esta secção com uma aplicação a problemas envolvendo ligações de custo mínimo. O exemplo que se segue estabelece a relação entre este problema e as árvores geradoras.

Exemplo. Suponhamos que se pretende construir uma rede de abastecimento de gás entre as localidades x_1, \dots, x_n . O custo de construção de uma ligação directa entre x_i e x_j é $a_{ij} > 0$. Como deverão ser feitas as ligações entre estas localidades de forma a que o custo total de construção da rede seja mínimo?

Podemos modelar este problema por um grafo (simples) de vértices v_1, \dots, v_n em que existe uma aresta entre v_i e v_j se e só se for possível fazer uma ligação entre as localidades x_i e x_j ; nesse caso, associamos a essa aresta o peso a_{ij} . O problema de

minimização do custo da rede corresponde a encontrar um subgrafo gerador do grafo inicial que seja conexo e tal que a soma dos pesos das suas arestas seja tão pequeno quanto possível. Tal subgrafo será necessariamente uma árvore, pois caso contrário seria possível eliminar ainda alguma ligação sem comprometer a conexão do grafo e reduzindo os custos, por os pesos serem positivos. Logo, pretende-se encontrar uma árvore geradora do grafo inicial de peso mínimo.

Seja G um grafo e $c : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$ uma **função peso** nas suas arestas³. O **peso** de um subgrafo H de G é

$$c(H) = \sum_{\alpha \in E(H)} c(\alpha),$$

a soma dos pesos das arestas de H . Uma árvore geradora de peso mínimo, de entre os pesos de todas as árvores geradoras de G , diz-se uma **árvore geradora minimal**. Em geral, um grafo com função peso nas arestas pode ter várias árvores geradoras minimais (no entanto, ver o exercício 28 da secção 3.11).

Apresentamos de seguida um algoritmo, devido a Kruskal, que permite construir uma árvore geradora minimal de um grafo conexo G com função peso nas arestas. Este é mais um exemplo de um *algoritmo guloso*, pois em cada passo escolhe-se uma aresta de peso mínimo de entre as arestas que não criam ciclos no subgrafo em construção.

Algoritmo de Kruskal

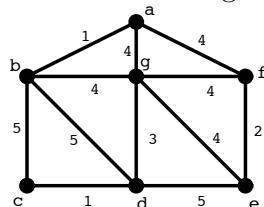
Seja G um grafo conexo e c uma função peso nas suas arestas.

Passo 1. Fazer $A = \emptyset$.

Passo 2. Enquanto existir $\alpha \in E(G) \setminus A$ tal que o subgrafo $(V(G), A \cup \{\alpha\})$ não contém ciclos, escolher uma tal aresta α de peso mínimo e substituir A por $A \cup \{\alpha\}$.

Passo 3. Fazer $T = (V(G), A)$.

Exemplo. Aplicando o algoritmo de Kruskal ao grafo:

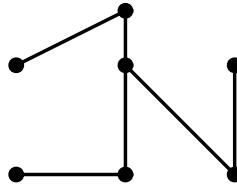


³Se for conveniente, podemos estender c de forma a que possa tomar valores em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, com a convenção de que $\lambda + \infty = \infty$ para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$.

podemos obter a seguinte sequência de arestas:

$$\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f\}, \{d, g\}, \{e, g\}, \{a, g\}$$

que determina a seguinte árvore geradora minimal, de peso 15:



Vejamos que, ao contrário do que acontece em geral com o(s) algoritmo(s) guloso(s) no problema do caixeiro viajante, que dão apenas soluções aproximadas deste, o grafo $T = (V(G), A)$ obtido pelo algoritmo de Kruskal é sempre uma árvore geradora minimal.

Teorema 3.23. *Seja G um grafo conexo com função peso nas arestas c . Então o algoritmo de Kruskal descrito acima termina com uma árvore geradora minimal $T = (V(G), A)$ de G .*

Demonstração. O grafo $T = (V(G), A)$ obtido pelo algoritmo de Kruskal é, por construção, um subgrafo gerador de G sem ciclos. Como G é conexo e já não é possível implementar mais o Passo 2 em A (caso contrário o algoritmo não teria parado), T tem de ser conexo (senão existiria alguma aresta de G com extremidades em componentes conexas distintas de T ; uma tal aresta não criaria nenhum ciclo se acrescentada a T e seria possível prosseguir com o Passo 2). Logo, T é de facto uma árvore geradora de G .

Seja $T^* = (V(G), A^*)$ uma árvore geradora minimal de G com o máximo de arestas em comum com T . Queremos mostrar que $A^* = A$. Suponhamos que tal não se verifica. Seja $n = |V(G)|$ e sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ as arestas de T , ordenadas pela ordem em que foram escolhidas pelo algoritmo. Seja então α_k , $k \geq 1$, a primeira aresta de T que não pertence a A^* . Em particular, as arestas $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ são comuns a A e a A^* .

Pelo Teorema 3.21, existe uma aresta β de T^* tal que o grafo T' que se obtém acrescentando α_k a T^* e retirando-lhe β é ainda uma árvore geradora de G . Como foi visto na prova do Teorema 3.21, β é uma qualquer aresta diferente de α_k pertencente ao ciclo formado em T^* após lhe ser acrescentada a aresta α_k . Assim, como T não contém ciclos, nem todas as arestas desse ciclo pertencem a T e escolhemos β de forma a que não pertença a T . Temos que

$$c(T') = c(T^*) + c(\alpha_k) - c(\beta). \quad (3.3)$$

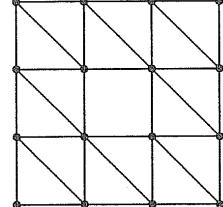
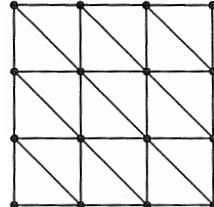
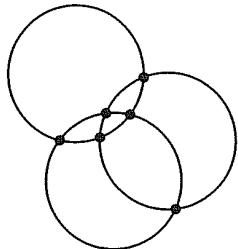
Como T^* é uma árvore geradora minimal, tem-se $c(\alpha_k) \geq c(\beta)$. Mas como $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ e β são arestas de T^* , o subgrafo $(V(G), \{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \beta\})$ não contém ciclos. Logo,

como depois de α_{k-1} foi escolhida a aresta α_k e não β , resulta que $c(\alpha_k) \leq c(\beta)$ e portanto $c(\alpha_k) = c(\beta)$. Isto prova que T' é uma árvore geradora minimal de G , pois $c(T') = c(T^*)$, por (3.3). Além disso, T' tem mais uma aresta em comum com T do que T^* , o que contraria a escolha de T^* . Assim, $A = A^*$ e $T = T^*$ é uma árvore geradora minimal de G . \square

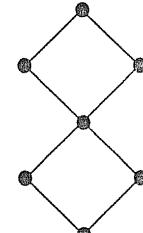
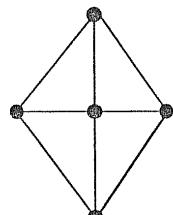
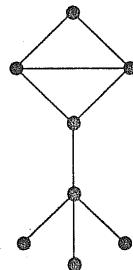
3.11 Exercícios

1. Nos exercícios que se seguem G é um grafo **simples**. Em cada um dos casos diga, justificando, se as condições indicadas garantem que G é árvore, se garantem que G não é árvore ou se não garantem nem uma coisa nem a outra.
 - (a) i. G tem 8 vértices e 10 arestas.
ii. G tem 8 vértices e 7 arestas.
iii. G tem 8 vértices e 7 arestas, todas pontes.
 - (b) i. G tem 8 vértices e algum caminho a ligar dois quaisquer deles.
ii. G é conexo, tem 8 vértices e não tem pontes.
iii. G tem 8 vértices e todas as arestas são pontes.
 - (c) i. G tem 10 vértices e é Hamiltoniano.
ii. G tem 10 vértices e existe um caminho Hamiltoniano em G .
iii. G tem 10 vértices, não tem circuitos e existe um caminho Hamiltoniano em G .
 - (d) i. G é conexo e tem 8 vértices, todos de grau par.
ii. G é conexo e tem 8 vértices, dois de grau ímpar e os restante de grau par.
iii. G é conexo e tem 8 vértices. O grau de cada vértice é 1 ou 3.
 - (e) i. G é conexo e tem 10 vértices, todos de grau 9.
ii. G é conexo e tem 10 vértices, um dos quais de grau 9 e os restantes de grau estritamente inferior.
iii. G é conexo e tem 10 vértices, todos de grau 2.
 - (f) i. G tem 10 vértices, v_1, \dots, v_{10} , e um único caminho a ligar v_1 a v_{10} .
ii. G tem 10 vértices, v_1, \dots, v_{10} , e dois caminhos a ligar v_1 a v_{10} .
iii. G tem 10 vértices e 9 arestas, todas pontes.
2. Dê um exemplo de dois grafos conexos com a mesma sequência de graus:
 - (a) ambos árvores mas não isomorfos.
 - (b) um Hamiltoniano e o outro não.
3. Mostre que um grafo é uma árvore se e só se não contém nenhum ciclo mas qualquer nova aresta que lhe seja adicionada cria exactamente um ciclo.
4. Quais são as árvores que têm atalhos Eulerianos?
5. Quais são as árvores que têm caminhos Hamiltonianos?

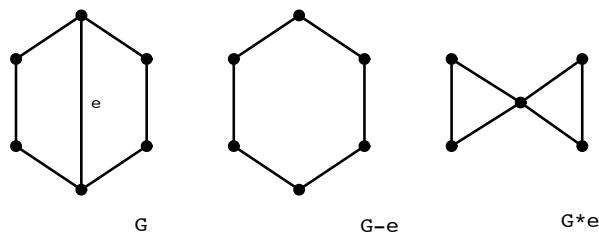
6. Construa, a menos de isomorfismo, todas as árvores com 7 vértices.
7. Mostre que os únicos grafos bipartidos completos que são árvores são as estrelas $K_{1,n}$.
8. Mostre que qualquer árvore com pelo menos dois vértices é um grafo bipartido.
9. Seja G um grafo com 4 componentes conexas e 24 arestas. Qual é o número máximo de vértices de G ?
10. Um grafo G diz-se **unicíclico** se for conexo e tiver um único ciclo. Mostre que um grafo é unicíclico se e só se for conexo e tiver tantos vértices como arestas.
11. Seja G uma floresta constituída por k árvores. Qual é o número mínimo de arestas que é necessário acrescentar a G para obter uma árvore?
12. Mostre que se uma árvore tem algum vértice de grau m então tem pelo menos m vértices de grau 1.
13. Seja T uma árvore com $n \geq 3$ vértices. Mostre que existe um vértice v de T tal que $\deg(v) \geq 2$ e todos os vértices adjacentes a v , com no máximo uma exceção, têm grau 1. [Sugestão: Considere um caminho de comprimento máximo em T .]
14. Encontre uma árvore geradora de cada um dos grafos seguintes:



15. Determine todas as árvores geradoras dos seguintes grafos conexos e determine, em cada caso, quais delas são não-isomórficas.



16. Seja T uma árvore com pelo menos $k \geq 2$ arestas. Quantas componentes conexas é que tem o subgrafo que se obtém retirando k das arestas de T ?
17. Seja α uma aresta do grafo conexo G .
- Mostre que α é uma ponte se e só se pertence a todas as árvores geradoras de G .
 - Mostre que α é um lacete se e só se não pertence a nenhuma árvore geradora de G .
18. Seja G um grafo sem lacetes e com uma única árvore geradora. Mostre que G é uma árvore.
19. Uma aresta α de um grafo G diz-se **contraída** se for retirada de G e de seguida as suas extremidades em G forem identificadas. O grafo resultante deste processo denota-se por $G * \alpha$ (ver figura abaixo).



- Mostre que se T for uma árvore geradora de G que contém α então $T * \alpha$ é uma árvore geradora de $G * \alpha$.
- Mostre que se U for uma árvore geradora de $G * \alpha$ então existe uma única árvore geradora T de G contendo α tal que $U = T * \alpha$.
- Seja $\tau(G)$ o número de árvores geradoras distintas (não necessariamente não-isomorfas) do grafo conexo G . Mostre, usando as alíneas anteriores, que se α é uma aresta de G que não é um lacete então

$$\tau(G) = \tau(G - \alpha) + \tau(G * \alpha).$$

20. Podemos usar o método do exercício anterior para calcular recursivamente $\tau(G)$ para um grafo conexo G . A figura seguinte exemplifica este processo, permitindo concluir que nesse caso $\tau(G) = 11$. Repita este método para o grafo G do exercício anterior, determinando assim $\tau(G)$ para esse grafo.

$$\begin{aligned}
 T(G) &= \text{(graph)} = \text{(graph)} + \text{(graph)} \\
 &= \left(\text{(graph)} + \text{(graph)} \right) + \left(\text{(graph)} + \text{(graph)} \right) \\
 &= \text{(graph)} + \left(\text{(graph)} + \text{(graph)} \right) + \left(\text{(graph)} + \text{(graph)} \right) \\
 &\quad + \left(\text{(graph)} + \text{(graph)} \right) = \text{(graph)} + \text{(graph)} + \left(\text{(graph)} + \text{(graph)} \right) \\
 &\quad + \text{(graph)} + \text{(graph)} + \left(\text{(graph)} + \text{(graph)} \right) \\
 &= \text{(graph)} + \text{(graph)} + \text{(graph)} + \left(\text{(graph)} + \text{(graph)} \right)
 \end{aligned}$$

21. Seja G uma árvore. Mostre que:

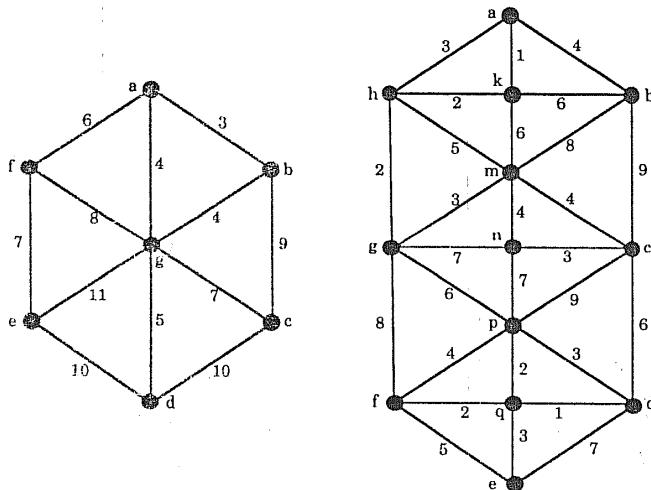
- (a) Dado um vértice v de G , $G - v$ é desconexo se e só se $\deg(v) > 1$.
- (b) Se G tem exactamente um vértice de grau 4 e quatro vértices de grau 1, determine o grau dos restantes vértices de G e mostre que G é união de dois caminhos disjuntos nas arestas.

22. Se $G = (V, E)$ é um grafo conexo e $u \in V$, define-se a **excentricidade** de u como $\epsilon(u) = \max\{d(u, v) \mid v \in V\}$, o **diâmetro** de G como $D(G) = \max\{\epsilon(u) \mid u \in V\}$, o **raio** de G como $R(G) = \min\{\epsilon(u) \mid u \in V\}$ e o **centro** de G como $\{u \in V \mid \epsilon(u) = R(G)\}$.

- (a) Mostre que $R(G) \leq D(G) \leq 2R(G)$ e dê exemplo de grafos que verifiquem as igualdades e de grafos que verifiquem as desigualdades estritas.
- (b) Determine o centro e o raio do grafo completo K_n , do grafo bipartido completo $K_{m,n}$, do n -ciclo C_n e do caminho P_n de comprimento n .
- (c) Dê exemplos de árvores cujo centro tenha cardinalidade 1 e 2, respectivamente. Mostre que em geral a cardinalidade do centro de uma árvore é 1 ou 2. [Sugestão: Mostre que retirando a uma árvore todos os seus vértices de grau 1 obtém uma árvore com o mesmo centro.]
- (d) Mostre que se o centro de G é G então, para todo o vértice u de V , $G - u$ é conexo.
- (e) Mostre que se $D(G) > 3$ então $D(\overline{G}) < 3$. Em particular, \overline{G} é conexo.

23. Seja G uma árvore com n vértices. Mostre que o comprimento do passeio fechado mais curto que contém todas as arestas de G pelo menos uma vez é $2(n - 1)$.

24. Considere os seguintes grafos com função peso nas arestas:



- (a) Encontre uma árvore geradora minimal de cada um deles.
- (b) Encontre uma árvore geradora maximal de cada um deles (isto é, uma árvore geradora cuja soma dos pesos das arestas seja máxima).
25. O seguinte algoritmo é mais um exemplo de um algoritmo guloso que determina uma árvore geradora minimal num grafo conexo G com função peso nas arestas. Vamos eliminando uma por uma as arestas de G de maior peso, desde que fazê-lo não resulte num grafo desconexo. O subgrafo obtido quando não for possível prosseguir é uma árvore geradora minimal de G . Aplique este algoritmo aos grafos do exercício anterior.
26. Considere o grafo completo K_n com vértices $\{1, \dots, n\}$, em que o peso da aresta determinada pelos vértices i e j é $i + j$. Aplique o algoritmo de Kruskal para obter uma árvore geradora minimal de cada um dos seguintes grafos:
- K_4 ;
 - K_6 ;
 - K_8 .
27. Repita o exercício anterior assumindo que o peso da aresta de K_n determinado pelos vértices i e j é $|i - j|$.
28. Seja G um grafo conexo com função peso nas arestas cujas arestas têm pesos distintos. Mostre que existe uma única árvore geradora minimal de G .
29. (ver o exercício 20 da secção 3.9) A seguinte tabela indica as distâncias (em milhas) entre as sete cidades da digressão dos Tedio Boys pelos EUA. Aplique o algoritmo de Kruskal para determinar uma árvore geradora ligando as cidades.

	Boston	Dallas	Houston	Louisville	Nashville	Pittsburgh	St. Louis
Boston	-	1748	1804	941	1088	561	1141
Dallas	1748	-	243	819	660	1204	630
Houston	1804	243	-	928	769	1313	779
Louisville	941	819	928	-	168	388	263
Nashville	1088	660	769	168	-	553	299
Pittsburgh	561	1204	1313	388	553	-	588
St. Louis	1141	630	779	263	299	588	-

3.12 Fórmula de Euler e coloração de mapas

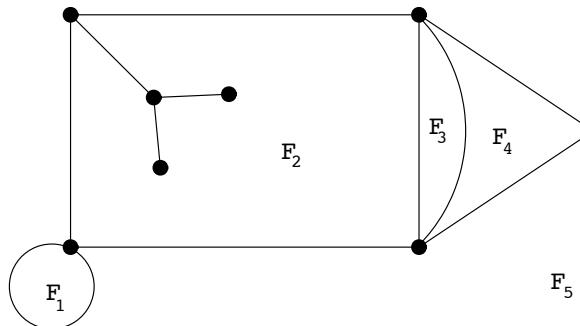
Terminamos esta introdução à teoria de grafos com uma secção onde será provada a Fórmula de Euler e estudada a coloração de mapas no plano. Provaremos, em particular, que qualquer mapa no plano (ou na esfera) pode ser colorido com cinco cores, de forma a que países que partilhem uma fronteira tenham cores distintas. Esta é uma versão mais fraca do conhecido Teorema das quatro cores, cuja prova esteve em aberto durante mais de 100 anos.

Seja G um grafo planar e G' uma representação planar de G . Então G' decompõe o plano em regiões cuja fronteira é reunião de curvas formadas pelas arestas de G . Todas estas regiões são limitadas, com excepção de uma que é ilimitada. Dizemos que estas regiões, incluindo a ilimitada, são as **faces** de G' .

Queremos associar a cada face de G' o número de arestas na sua fronteira de forma a que cada aresta seja contada exactamente duas vezes quando percorremos o conjunto de todas as faces de G' . Assim, consideramos um passeio fechado de comprimento mínimo pela fronteira de cada face e contamos o número de arestas nesse passeio. Assim, se G' tiver r faces cujas fronteiras têm, respectivamente, f_1, \dots, f_r arestas, temos que

$$f_1 + \dots + f_r = 2|E(G)|$$

Exemplo. A seguinte representação planar G' do grafo G tem 8 vértices, 11 arestas e 5 faces.



O número de arestas na fronteira de F_1 , F_3 e F_4 é 1, 2 e 3, respectivamente. O número de arestas na fronteira de F_2 é 10 (e não 4 nem 7) e o número de arestas na fronteira de F_5 é 6.

De seguida provaremos a Fórmula de Euler, que relaciona os números de vértices, arestas e faces de uma representação planar de um grafo conexo.

Teorema 3.24 (Fórmula de Euler). *Seja G um grafo planar conexo. Então o número f de faces de uma qualquer representação planar de G não depende dessa representação e é dado pela fórmula*

$$v - e + f = 2$$

onde $v = |V(G)|$ e $e = |E(G)|$.

Demonstração. Como G é conexo, G tem alguma árvore geradora, digamos T , com v vértices e $v - 1$ arestas.

Seja G' uma representação planar de G . Então G' contém uma representação planar T' de T . Além disso, como T não tem ciclos, T' tem apenas $f' = 1$ faces. Temos então que $v - e' + f' = 2$, onde $e' = |E(T)| = v - 1$.

Podemos agora ir acrescentando a T' as arestas que faltam de G' . Cada nova aresta cria algum novo ciclo que divide uma região existente em duas; logo, por cada aresta que acrescentamos, e' e f' aumentam em 1 e $v = |V(G)|$ mantém-se igual. Logo, $v - e' + f'$ mantém-se constante à medida que vamos acrescentando novas arestas de G' a T' . Como inicialmente se tinha $v - e' + f' = 2$, concluímos que $v - e + f = 2$. Além disso, o número de faces de G' , $f = e - v + 2$, só depende de G e não da sua representação planar G' , o que conclui a prova. \square

Vejamos agora uma condição necessária para um grafo ser planar. Recorde-se que pelo exercício 25 da secção 3.4 basta considerarmos grafos simples.

Teorema 3.25. *Seja G um grafo simples e planar. Então G tem algum vértice de grau não superior a 5.*

Demonstração. Podemos supor, sem perda de generalidade, que G é conexo. Seja G' uma representação planar de G . Como G não tem lacetes nem arestas múltiplas, a fronteira de cada face de G' tem pelo menos três arestas (com exceção dos casos triviais em que G tem menos de duas arestas). Logo, se f_1, \dots, f_r forem os números de arestas na fronteira de cada uma das r faces de G' , temos que

$$2e = f_1 + \cdots + f_r \geq 3r = 3(e - v + 2)$$

onde $e = |E(G)|$ e $v = |V(G)|$. Logo, $e \leq 3v - 6$. Pelo Teorema 3.1,

$$\sum_{u \in V(G)} \deg(u) = 2e \leq 6v - 12 < 6v.$$

Como $v = |V(G)|$, resulta que $\deg(u) \leq 5$ para algum $u \in V(G)$. \square

O teorema anterior será útil na prova do Teorema das cinco cores, mas parece ser demasiado fraco para provar que os grafos K_5 e $K_{3,3}$ não são planares. No entanto, podemos facilmente adaptar a prova apresentada de forma a obter uma prova da não planaridade destes grafos.

Proposição 3.26. (a) *O grafo completo K_n é planar se e só se $n \leq 4$.*

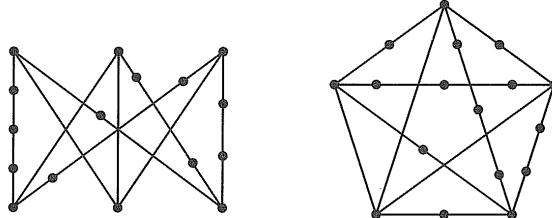
(a) *O grafo bipartido completo $K_{m,n}$ é planar se e só se $n \leq 2$ ou $m \leq 2$.*

Demonstração. É fácil de ver que K_n é planar para $n \leq 4$ e também que $K_{m,n}$ é planar se $n \leq 2$ ou $m \leq 2$. Além disso, qualquer grafo que tenha um subgrafo não planar é necessariamente não planar. Logo, temos apenas de provar que K_5 e $K_{3,3}$ não são planares.

Como foi visto na prova do Teorema 3.25, se G for um grafo simples conexo e planar com e arestas e v vértices, tem-se $e \leq 3v - 6$. Se $G = K_5$ então $e = 10$ e $v = 5$, o que prova que K_5 não é planar. Suponhamos agora que $G = K_{3,3}$ é planar. Como G é bipartido e simples, os ciclos de G têm comprimento não inferior a 4. Logo, repetindo o argumento do Teorema 3.25, concluímos que $2e \geq 4r$, onde r é o número de faces de uma (qualquer) representação planar de G . Pela Fórmula de Euler temos então $2v - 4 \geq e$. Como neste caso $v = 6$ e $e = 9$, esta relação não se verifica, o que prova que $K_{3,3}$ não é planar. \square

Sejam G um grafo e α uma aresta de G , ligando os vértices x e y . Consideremos o grafo G^* que se obtém adicionando um novo vértice z a G e substituindo a aresta α por duas novas arestas, uma entre x e z e outra entre z e y . Dizemos que G^* se obtém de G por **subdivisão** da aresta α . É claro que G é planar se e só se G^* também o for. Dizemos que o grafo H é uma **subdivisão** do grafo G se puder ser obtido de G por sucessivas subdivisões de arestas. Resulta que H é planar se e só se G é planar.

Exemplo. Os seguintes grafos são subdivisões de $K_{3,3}$ e K_5 , respectivamente. Logo, nenhum deles é planar.



Pela Proposição 3.26, um grafo planar não pode conter nenhum subgrafo que seja uma subdivisão de $K_{3,3}$ ou de K_5 . O seguinte resultado do matemático polaco Kuratowski caracteriza os grafos planares, provando que o recíproco da afirmação anterior também é válido. A prova, apesar de elementar é longa, e será omitida.

Teorema 3.27 (Kuratowski, 1930). *Um grafo é planar se e só se não tiver nenhum subgrafo que seja uma subdivisão de $K_{3,3}$ ou de K_5 .*

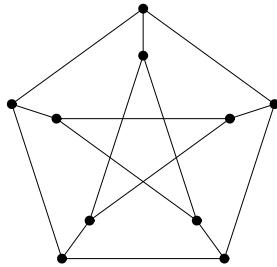
Uma outra caracterização dos grafos planares envolve a noção de contracção de uma aresta, introduzida no exercício 19 da secção 3.11. A **contracção** da aresta α no grafo G é o grafo $G * \alpha$ que se obtém retirando a aresta α a G e identificando as suas extremidades. Um grafo H diz-se uma **contracção** de G se puder ser obtido de G por sucessivas contracções de arestas.

Exemplo. A contracção de uma aresta de G .



Teorema 3.28. Um grafo é planar se e só se não tem nenhum subgrafo que admite uma contracção para $K_{3,3}$ ou para K_5 .

Exemplo. O grafo de Petersen não é planar, pois pode ser contraído para K_5 .



Considere-se um mapa, no plano ou na esfera, cujos países são regiões conexas. Queremos colorir este mapa de forma a que países que tenham uma fronteira em comum tenham cores distintas (assume-se que a fronteira consiste em pelo menos uma curva sem auto-intersecções, e portanto não se resume a um conjunto finito de pontos). O Teorema das quatro cores afirma que é sempre possível fazer uma tal coloração usando no máximo 4 cores distintas. No entanto, a prova deste teorema (provado em 1976 por Appel e Haken) é complexa e depende do uso de um computador. Faremos aqui a prova de que cinco cores são suficientes, que foi obtida por Heawood em 1890 usando ideias da “prova” errada que Kemp publicou em 1879 do Teorema das quatro cores.

Podemos formular o problema da coloração de mapas em termos de grafos da seguinte forma. Escolhemos um vértice no interior de cada região do mapa e unimos dois vértices por uma aresta se as regiões correspondentes tiverem uma fronteira em comum. Obtemos assim uma representação planar de um grafo simples G , dito o **grafo dual** do mapa. Desta forma, a coloração do mapa corresponde à coloração dos vértices de G de forma a que vértices adjacentes tenham cores distintas. O Teorema das quatro (respectivamente, cinco) cores pode portanto ser formulado da seguinte forma: “Todo o grafo planar simples pode ser colorido da forma acabada de descrever usando apenas 4 (respectivamente, 5) cores”.

Deste ponto em diante nesta secção consideraremos apenas grafos simples. Seja G um grafo simples. Uma **coloração dos vértices** de G é uma atribuição de uma cor a cada vértice de G , de forma a que vértices adjacentes tenham cores distintas.

Pensaremos nas cores simplesmente como etiquetas que, conforme seja conveniente, podem ser palavras (vermelho, verde, etc.) ou inteiros (1, 2, 3, etc.). Uma coloração que usa no máximo k cores diz-se uma **k -coloração** e o respectivo grafo diz-se **k -colorível**. O menor inteiro k tal que G é k -colorível diz-se o **número cromático** de G e denota-se por $\chi(G)$. Apenas com o intuito de familiarizar o leitor com esta noção, apresentamos de seguida alguns resultados elementares sobre o número cromático de um grafo, antes de prosseguirmos com a prova do Teorema das cinco cores.

Proposição 3.29. *Seja G um grafo simples com $|V(G)| = n \geq 1$. Então,*

$$1 \leq \chi(G) \leq n.$$

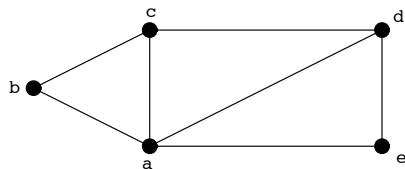
Além disso, $\chi(G) = n$ se e só se G for um grafo completo e $\chi(G) = 1$ se e só se $E(G) = \emptyset$.

Demonstração. A desigualdade é óbvia, bem como as igualdades $\chi(K_n) = n$ e $\chi(G) = 1$ se $E(G) = \emptyset$. Suponhamos que G não é um grafo completo. Então existem vértices não adjacentes u e v em G . Podemos então colorir os vértices de G com $n - 1$ cores, atribuindo a cada $x \in V(G) \setminus \{v\}$ uma cor distinta e a v a mesma cor atribuída a u . Logo $\chi(G) \leq n - 1$. Finalmente, se $E(G) \geq 1$ então é claro que $\chi(G) \geq 2$. \square

Proposição 3.30. *Seja H um subgrafo de um grafo simples G . Então $\chi(G) \geq \chi(H)$. Em particular, se G tiver algum subgrafo isomorfo a um grafo completo K_r , para algum $r \geq 1$, então $\chi(G) \geq r$.*

Demonstração. Basta observar que a restrição a H de uma k -coloração de G é uma k -coloração de H . \square

Exemplo. Considere-se o grafo G abaixo:



Os vértices a , b e c induzem um subgrafo isomorfo a K_3 , logo $\chi(G) \geq 3$. Atribuindo a a a cor 1, a b e d a cor 2 e a c e e a cor 3, obtemos uma 3-coloração de G . Logo $\chi(G) = 3$.

Teorema 3.31. *Seja G um grafo simples com $|E(G)| \geq 1$. Então $\chi(G) = 2$ se e só se G é bipartido.*

Demonstração. Note-se que como $|E(G)| \geq 1$, $\chi(G) \geq 2$. Suponhamos que $V(G) = X \dot{\cup} Y$ é uma bipartição de G . Então se atribuirmos aos vértices de X a cor 1 e aos de Y a cor 2 obtemos uma 2-coloração de G , donde resulta que $\chi(G) = 2$. Reciprocamente, se $\chi(G) = 2$ então dada uma 2-coloração $c : V(G) \rightarrow \{1, 2\}$ de G , temos que $X = c^{-1}(\{1\})$ e $Y = c^{-1}(\{2\})$ é uma bipartição de G . \square

Corolário 3.32. *Seja C_n o ciclo de comprimento $n \geq 3$. Então $\chi(C_n) = 2$ se n é par e $\chi(C_n) = 3$ se n é ímpar.*

Demonastração. Como $E(C_n) \neq \emptyset$, $\chi(C_n) \geq 2$. Se n for par então C_n é um grafo bipartido e $\chi(C_n) = 2$. Se $n = 2k + 1$ for ímpar então C_n não é bipartido e $\chi(C_n) \geq 3$. Sejam v_0, \dots, v_{2k} os vértices de C_n , de forma a que v_i e v_{i+1} são adjacentes, para $0 \leq i \leq 2k - 1$, e v_0 é adjacente a v_{2k} . Se atribuirmos a v_{2j} a cor 1, a v_{2j+1} a cor 2, $0 \leq j \leq k - 1$, e a v_{2k} a cor 3 obtemos uma 3-coloração de C_n e portanto $\chi(C_n) = 3$ se n for ímpar. \square

Exemplo (Calendarização de tarefas). Podemos formular muitos dos problemas de calendarização de tarefas em termos de coloração de vértices de um grafo. Identificamos as tarefas com os vértices de um grafo, de forma a que dois vértices são adjacentes se e só se as tarefas correspondentes não podem ocorrer simultaneamente. Desta forma, uma calendarização das tarefas corresponde a uma coloração dos vértices do grafo correspondente, sendo o número cromático desse grafo o número mínimo de “tempos” para que as tarefas possam ser todas realizadas.

Por exemplo, suponhamos que temos de calendarizar as 9 tarefas t_1, \dots, t_9 , sabendo que cada tarefa não pode ser realizada em simultâneo com a tarefa anterior nem com a tarefa seguinte da lista (consideramos que t_1 sucede a t_9 e que esta antecede t_1). O grafo correspondente é o ciclo C_9 , com $\chi(C_9) = 3$. Logo, são necessárias 3 sessões diferentes para realizar as 9 tarefas.

O seguinte resultado geral será de grande utilidade na prova do Teorema das cinco cores.

Lema 3.33. *Seja $H = (U, F)$ um grafo com uma k -coloração dos vértices em que duas das cores são vermelho e azul. Seja W o subconjunto de U constituído pelos vértices de cor vermelha ou azul e seja $H_{v,a}$ o subgrafo de H induzido por W . Dada uma componente conexa $C_{v,a}$ de $H_{v,a}$, podemos construir uma nova k -coloração de H trocando entre si as cores dos vértices de $C_{v,a}$ e mantendo as cores dos restantes vértices.*

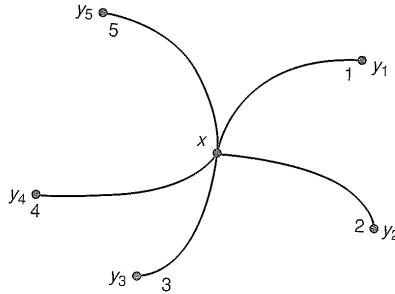
Demonastração. Suponhamos por redução ao absurdo que existem, após a troca de cores, dois vértices adjacentes com a mesma cor, digamos u e v . Como antes da troca de cores tínhamos uma coloração, a cor que agora é comum a u e a v tem de ser vermelho ou azul. Em particular, $u, v \in W$. Além disso, como u e v são adjacentes, pertencem à mesma componente conexa de $H_{v,a}$. Logo, ou são ambos vértices de $C_{v,a}$ ou nem um nem o outro pertence a $C_{v,a}$. No último caso, a sua cor não foi alterada, o que contradiz o facto de se ter uma coloração antes da troca de cores. Logo, u e v são ambos vértices de $C_{v,a}$. Mas então, antes da troca de cores em $C_{v,a}$, u e v teriam ainda a mesma cor, o que é absurdo. Logo, a troca de cores em $C_{v,a}$ é ainda uma k -coloração de H . \square

Podemos finalmente provar o Teorema das cinco cores.

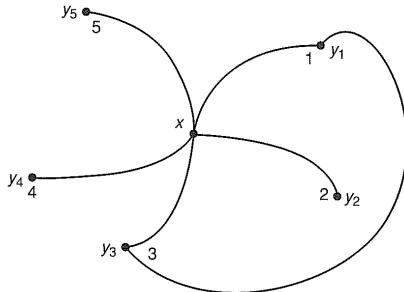
Teorema 3.34. *Todo o grafo simples planar é 5-colorível.*

Demonastração. Seja G um grafo simples planar com $|V(G)| = n$. Provaremos por indução sobre n que $\chi(G) \leq 5$. Se $n \leq 5$ o resultado é óbvio. Suponhamos então que $n > 5$. Assumimos que G já está representado como um grafo plano. Pelo Teorema 3.25, existe $x \in V(G)$ tal que $\deg(x) \leq 5$. Seja $H = G - x$. Por indução, existe uma 5-coloração de H . Se $\deg(x) \leq 4$ então podemos atribuir a x uma das cinco cores distintas das cores dos seus $\deg(x)$ vizinhos, e desta forma obter uma 5-coloração de G . Suponhamos agora que $\deg(x) = 5$, e sejam y_1, \dots, y_5 os seus vizinhos em G . Se dois destes 5 vértices tiverem a mesma cor, podemos ainda colorir x com uma das cinco cores não usada em y_1, \dots, y_5 de forma a obter uma 5-coloração de G .

Podemos então assumir que cada um dos vértices y_1, \dots, y_5 tem uma cor distinta, digamos que y_j tem a cor j (ver figura).

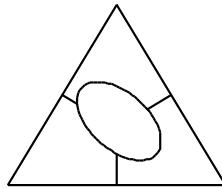


Consideremos o subgrafo $H_{1,3}$ de H , induzido pelos vértices de cores 1 e 3. Se y_1 e y_3 estiverem em componentes conexas distintas de $H_{1,3}$ então podemos aplicar o Lema 3.33 e construir uma nova 5-coloração de H em que y_1 e y_3 têm a mesma cor, digamos 1, e y_j mantém a cor j se $j \neq 1, 3$. Neste caso podemos, como antes, obter uma 5-coloração de G . Suponhamos então que y_1 e y_3 estão na mesma componente conexa de $H_{1,3}$. Então existe um caminho em H entre y_1 e y_3 em que as cores dos vértices são alternadamente 1 e 3. Este caminho, juntamente com as arestas entre x e y_1 e entre x e y_3 constitui uma curva fechada γ no plano, dividindo-o em duas regiões. Dos restantes três vértices, y_2 , y_4 e y_5 , ou um deles está no interior de γ e os dois restantes estão no exterior, ou vice-versa. Sem perda de generalidade, supomos, como na figura abaixo, que y_2 está no interior de γ e y_4 , y_5 estão no exterior.

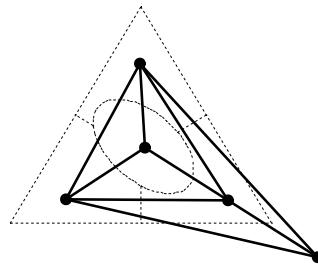


Consideremos agora o subgrafo $H_{2,4}$ de H , induzido pelos vértices de H de cores 2 e 4. Os vértices y_2 e y_4 não podem estar na mesma componente conexa de $H_{2,4}$, pois qualquer caminho em H entre y_2 e y_4 intersecta γ nalgum vértice de cor 1 ou 3. Logo, podemos trocar as cores 2 e 4 na componente conexa $C_{2,4}$ de $H_{2,4}$ que contém y_2 e obter, pelo Lema 3.33, uma 5-coloração de H em que y_2 e y_4 têm a cor 4. Assim, podemos atribuir a x a cor 2 e obter uma 5-coloração de G . Logo, $\chi(G) \leq 5$ e o resultado fica provado por indução sobre $n = |V(G)|$. \square

Considere-se o mapa



O grafo G , dual deste mapa, contém o grafo completo K_4 como subgrafo, como podemos ver pela figura abaixo.



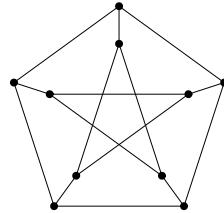
Temos portanto que $\chi(G) \geq 4$. No entanto, pelo Teorema das cinco cores, $\chi(G) \leq 5$. De facto, é fácil de verificar que $\chi(G) = 4$. O Teorema das quatro cores afirma que se tem sempre $\chi(G) \leq 4$ se G for um grafo (simples) planar.

3.13 Exercícios

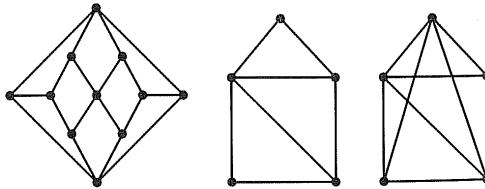
1. Dê um exemplo de um grafo planar simples em que cada vértice tenha grau pelo menos 5.
2. Seja G um grafo simples, planar, conexo e 4-regular com 10 faces. Determine o número de vértices de G e apresente uma representação planar de um grafo G nestas condições.
3. Seja G um grafo planar com n vértices, e arestas e f faces. Mostre que $n - e + f = 1 + \omega(G)$.
4. Seja G um grafo simples, planar e conexo com n vértices e $e = 3n - 6$ arestas. Mostre que em qualquer representação planar de G cada face é delimitada por exactamente 3 arestas.
5. Seja G um grafo simples, planar e conexo. Seja ainda t o máximo dos graus dos vértices de G . Para $i = 1, \dots, t$ seja n_i o número de vértices de G de grau i . Assim, $n = n_1 + \dots + n_t$, onde n é o número de vértices de G .
 - (a) Mostre que se $n \geq 3$ então

$$5n_1 + 4n_2 + 3n_3 + 2n_4 + n_5 \geq n_7 + 2n_8 + \dots + (t - 6)n_t + 12.$$
 - (b) Mostre que a desigualdade da alínea anterior é uma igualdade se e só se cada face de G é delimitada por exactamente 3 arestas.
 - (c) Conclua de (a) que G tem algum vértice de grau não superior a 5.
 - (d) Mostre que se $\deg(v) \geq 5$ para todo o vértice v de G então G tem pelo menos 12 vértices de grau 5.
 - (e) Mostre que se $n \geq 4$ e $\deg(v) \geq 3$ para todo o vértice v de G então G tem pelo menos 4 vértices de grau inferior a 6.
6. Seja G um grafo planar simples com $n \geq 2$ vértices. Mostre que G tem pelo menos dois vértices de grau não superior a 5.
7. Mostre que um grafo planar simples com menos de 12 vértices tem algum vértice de grau não superior a 4.
8. Mostre que um grafo planar simples com menos de 30 arestas tem algum vértice de grau não superior a 4.
9. Mostre que se G é um grafo simples, planar, bipartido e conexo com $e \geq 3$ arestas e n vértices então $e \leq 2n - 4$.

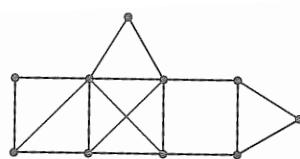
10. Use o Teorema de Kuratowski para mostrar que o grafo de Petersen representado abaixo não é planar.



11. Sabendo que as faces de um poliedro são todas triângulos e pentágonos, mostre que o número de faces do poliedro é par.
12. Seja G um grafo simples com $n \geq 11$ vértices. Mostre que os grafos G e \bar{G} (o complementar de G) não podem ser ambos planares.
13. Mostre que grafos isomorfos têm o mesmo número cromático.
14. Mostre que o número cromático de um grafo desconexo é o máximo dos números cromáticos das suas componentes conexas.
15. Calcule o número cromático de cada um dos seguintes grafos:



16. Qual é o número cromático do grafo que se obtém retirando ao grafo completo K_n :
- uma das suas arestas?
 - duas arestas adjacentes?
 - duas arestas não adjacentes?
17. Mostre que um grafo simples cujo número de ciclos de comprimento ímpar é 1 tem número cromático 3.
18. Determine o número cromático do seguinte grafo:



19. Seja F uma floresta. Mostre que $\chi(F) \leq 2$.
20. Encontre um grafo planar com duas representações planares distintas tais que, para algum inteiro f , uma delas tem uma face delimitada por f arestas e a outra não.
21. Dê um exemplo de um grafo planar que tenha número cromático 4 mas que não tenha nenhum subgrafo isomorfo a K_4 .
22. O plano é dividido em regiões por um número finito de rectas. Mostre que essas regiões podem ser coloridas usando apenas duas cores, de forma a que regiões que tenham uma fronteira em comum (isto é, pelo menos um segmento de recta de comprimento positivo) tenham cores distintas.
23. Repita o exercício anterior com circunferências em vez de rectas.
24. Numa escola vão decorrer 9 exames, cada um referente a uma das disciplinas A, B, \dots, I . Se algum aluno estiver inscrito a duas destas disciplinas então os respectivos exames terão de decorrer em horários disjuntos. Caso contrário, os exames poderão decorrer no mesmo horário. Na tabela abaixo estão assinalados (com uma cruz \times) os pares de disciplinas que têm algum aluno em comum. Pretende-se determinar o número mínimo de horários (disjuntos) necessários à marcação dos exames, e fazer a distribuição dos exames por horário. Interprete este problema em termos de coloração de grafos e determine o número mínimo de horários diferentes para os exames e uma possível distribuição destes pelos horários.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A		\times	\times	\times					
B	\times			\times					
C	\times				\times			\times	\times
D	\times	\times			\times	\times			
E			\times	\times		\times	\times		
F				\times	\times		\times		
G					\times	\times		\times	
H			\times				\times		\times
I			\times					\times	

25. Uma empresa farmacêutica quer armazenar 7 químicos diferentes, digamos C_1, \dots, C_7 . No entanto, por razões de segurança, alguns destes químicos têm de ser armazenados em locais diferentes. A tabela abaixo indica (com uma cruz \times) quais os pares de químicos que não podem ser armazenados juntos. Use

coloração de grafos para determinar o número mínimo de localizações diferentes necessárias para o armazenamento deste químicos, e de seguida indique como é que os químicos podem ser distribuídos por essas localizações.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
C_1		×				×	×
C_2	×		×	×			
C_3		×		×	×		
C_4		×	×		×	×	
C_5			×	×		×	×
C_6	×			×	×		×
C_7	×				×	×	

26. Um grafo diz-se **cromaticamente crítico** se a remoção de qualquer um dos seus vértices dá origem a um subgrafo com número cromático inferior. Seja G um grafo cromaticamente crítico. Mostre que:
- $\chi(G - x) = \chi(G) - 1$ para todo o vértice x de G .
 - G é conexo.
 - Todos os vértices de G têm grau não inferior a $\chi(G) - 1$.
 - Todo o grafo H tem algum subgrafo induzido G tal que $\chi(G) = \chi(H)$ e G é cromaticamente crítico.
27. Seja $k \geq 3$ um inteiro. Mostre que um grafo simples cujos vértices têm todos grau pelo menos $k - 1$ tem algum ciclo de comprimento maior ou igual a k . Conclua, usando o exercício anterior, que um grafo de número cromático igual a k tem algum ciclo de comprimento maior ou igual a k .
28. Seja G um grafo simples. Mostre que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, onde $\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} \deg(v)$.
29. Seja G um grafo simples. Mostre que G é bipartido se e somente se existe uma coloração de G tal que, para todo o vértice $v \in V(G)$, os vizinhos de v têm todos a mesma cor.

Bibliografia

- [1] Martin Aigner, *A course in enumeration*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 238, Springer, Berlin, 2007.
- [2] Martin Aigner and Günter M. Ziegler, *Proofs from The Book*, second ed., Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [3] Ian Anderson, *A first course in combinatorial mathematics*, second ed., Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1989.
- [4] David Barnette, *Map coloring, polyhedra, and the four-color problem*, The Dolciani Mathematical Expositions, vol. 8, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1983.
- [5] Norman L. Biggs, *Discrete mathematics*, Oxford Science Publications, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1985.
- [6] Norman L. Biggs, E. Keith Lloyd, and Robin J. Wilson, *Graph theory. 1736–1936*, second ed., The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1986.
- [7] Béla Bollobás, *Modern graph theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 184, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [8] Miklós Bóna, *A walk through combinatorics*, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2002.
- [9] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph theory with applications*, American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1976, disponível em www.ecp6.jussieu.fr/pageperso/bondy/books/gtwa/gtwa.html.
- [10] Richard A. Brualdi, *Introductory combinatorics*, second ed., North-Holland Publishing Co., New York, 1992.
- [11] Victor Bryant, *Aspects of combinatorics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

- [12] E. Bujalance, J. Bujalance, A.F. Costa, and E. Martinez, *Elementos de matemática discreta*, Sanz y Torres, 2000.
- [13] Robert G. Busacker and Thomas L. Saaty, *Finite graphs and networks: An introduction with applications*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1965.
- [14] COMAP (ed)., *For all practical purposes, introduction to contemporary mathematics*, W.H. Freeman, 1997.
- [15] Reinhard Diestel, *Graph theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 173, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [16] Martin Gardner, *The last recreations*, Copernicus, New York, 1997.
- [17] Israel Grossman and Wilhelm Magnus, *Groups and their graphs*, Random House, New York, 1964, New Mathematical Library.
- [18] C. L. Liu, *Introduction to combinatorial mathematics*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1968.
- [19] George E. Martin, *Counting: the art of enumerative combinatorics*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [20] Jiří Matoušek and Jaroslav Nešetřil, *Invitation to discrete mathematics*, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1998.
- [21] A.C.O. Morgado, J.B.P. Carvalho, P.C.P. Carvalho, and P. Fernandez, *Análise combinatória e probabilidade*, IMPA, 1991.
- [22] I. Niven, *Mathematics of choice*, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1965.
- [23] Oystein Ore, *Graphs and their uses*, second ed., New Mathematical Library, vol. 34, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1990.
- [24] Peter Tannenbaum, *Excursions in modern mathematics*, sixth ed., Prentice Hall, New Jersey, 2007.
- [25] Richard J. Trudeau, *Introduction to graph theory*, Dover Publications Inc., New York, 1993.
- [26] Alan Tucker, *Applied combinatorics*, third ed., John Wiley & Sons Inc., New York, 1995.
- [27] W. D. Wallis, *A beginner's guide to graph theory*, second ed., Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2007.