

CC0327 - Simulação Estocástica

Números Aleatórios

Prof. Julio Barros

DEMA – UFC

Matemática Industrial

Geração de Números Aleatórios

- Uma simulação de qualquer sistema ou processo no qual existe(m) componente(s) inerentemente aleatória(s) requer um método para geração ou obtenção de números que sejam aleatórios ou pseudo-aleatórios.
- Atenção deve ser tomada com uso de métodos de geração de números aleatórios que sejam compatíveis computacionalmente.

Geração de Números Aleatórios (cont.)

- As pesquisas das décadas de 40 e 50 permitiram o desenvolvimento de métodos numéricos e aritméticos para gerar números aleatórios.
- Tais métodos são seqüenciais, nos quais cada novo número é gerado tomando-se um ou uma série de seus predecessores de acordo com uma fórmula matemática.
- O primeiro método (gerador) foi proposto por von Neumann e Metropolis em 1940 e foi chamado de método midsquare.

Método Midsquare

- Um exemplo do método midsquare para gerar números aleatórios uniformes no intervalo $[0, 1]$:

i	Z_i	U_i	Z_i^2
0	7182	-	51581124
1	5811	0.5811	33767721
2	7677	0.7677	58936329
3	9363	0.9363	87665769
4	6657	0.6657	44315649
5	3156	0.3156	09960336
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Método Midsquare (cont.)

- Processo para o midsquare
 - Se $Z_i = 0$ para algum i , então $U_j = Z_j = 0$ para todo $j > i$.
 - U_{i+1} é determinado por U_i , i.e., U_{i+1} é uma função de U_i . Assim, U_i e U_{i+1} são não independentes.
- Hoje, os números aleatórios gerados em computador são mais sofisticados e parecem ser independentes, desde que passem uma série de testes estatísticos.
- De um modo geral, os números aleatórios gerados por computador não verdadeiramente aleatórios, chamados de pseudo-aleatório).

Geração de Bons Números Aleatórios (cont.)

- Um bom gerador de números aleatórios deve apresentar várias propriedades:
 - Acima de tudo, os números produzidos devem ser uniformemente distribuídos no intervalo $[0, 1]$ e não exibir qualquer correlação uns com os outros; caso contrário, a simulação resultante deverá ser completamente inválida.
 - De forma prática, desejamos que o gerador seja rápido e possibilite a geração de uma quantidade razoável de números.
 - Desejamos que ele sejam capaz de reproduzir exatamente uma dada sequência de números aleatórios, por pelos menos dois motivos:. Primeiro, ele poderá ser avaliado facilmente por um programa de computador. Mais importante ainda, poderemos desejar usar tais números aleatórios (sequência) na simulação de diferentes sistemas para obter uma comparação mais precisa.

Geração de Bons Números Aleatórios (cont.)

- Desejamos também que o gerador produza várias sequências de números aleatórios separadamente. Assim veríamos se, uma sequência é simplesmente um subsequência de números produzidos pelo gerador, com uma sequência começando de onde a sequência anterior terminou.

Métodos de Geração

- Técnica da Transformação Inversa (TTI)
 - Distribuição Exponencial
 - Distribuição Uniforme
 - Distribuição Triangular
 - Distribuição Empírica Discreta
 - Distribuição Empírica Contínua
- Técnica de Aceitação e Rejeição

Técnica da Transformada Inversa

- A técnica de transformação inversa pode ser usada para gerar amostra das distribuições exponencial, Weibull e uniforme, e distribuições empíricas.
- Em particular, é usada para gerar amostras de uma variedade de distribuições discretas.
- Um procedimento passo a passo do uso da técnica da transformação inversa, ilustrada pela distribuição exponencial:
Passo 1 Determine fdc (função distribuição cumulativa) da variável aleatória. Para a distribuição exponencial a fdc é

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad x \geq 0$$

Técnica da Transformada Inversa (cont.)

Passo 2 Seja $F(x) = R$ onde X é definido.

para distribuição exponencial, tem-se

$$1 - e^{-\lambda x} = R \quad \text{para} \quad x \geq 0$$

Sendo X uma variável aleatória (a exponencial no caso é), a seguinte relação

$$1 - e^{-\lambda x} = R$$

também é, chamada de R . E R tem distribuição uniforme sobre o intervalo $(0, 1)$.

Técnica da Transformada Inversa (cont.)

Passo 3 Resolver a equação $F(X) = R$ para X em termos de R .
Para distribuição exponencial, a solução é a seguinte:

$$1 - e^{-\lambda X} = R$$

$$e^{-\lambda X} = 1 - R$$

$$-\lambda X = \ln(1 - R)$$

$$X = \frac{-1}{\lambda} \ln(1 - R)$$

Técnica da Transformada Inversa (cont.)

Passo 4 Gere (quantos sejam necessários) número aleatórios uniformes R_1, R_2, R_3, \dots , e calcule a respectivas variáveis

onde
$$X_i = F^{-1}(R_i)$$

$$F^{-1}(R_i) = \frac{-1}{\lambda} \ln(1 - R_i)$$

Uma simplificação é usualmente aplicada para substituir $1 - R_i$ por R_i

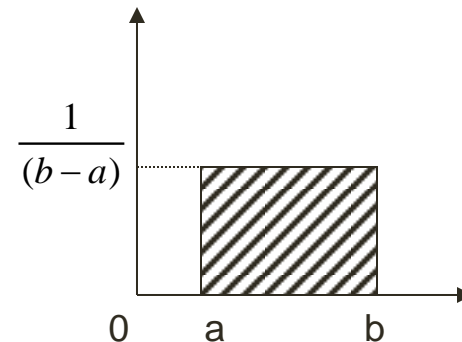
justificado pois ambos R_i e $1 - R_i$ são uniformemente distribuídos entre $(0, 1)$.

$$X_i = \frac{-1}{\lambda} \ln R_i$$

Distribuição Uniforme

- Considere uma variável aleatória X uniformemente distribuída no intervalo $[a, b]$.
- a fdp de X é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



Passo 1 A fdc é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Passo 2 Seja $F(X) = (X - a) / (b - a) = R$

Passo 3 Resolver para X em termos R , assim $X = a + (b - a) R$

Distribuição Triangular

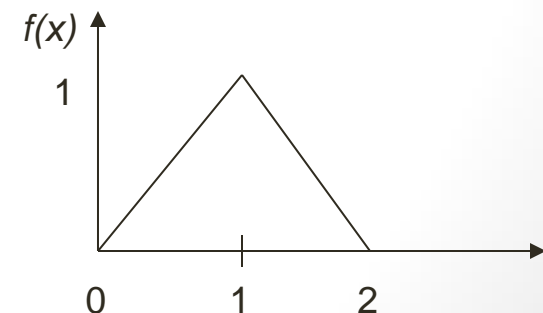
- Considere um variável aleatória X com fdp

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Esta distribuição é chamada de triangular definida em $(0, 2)$ e moda 1.

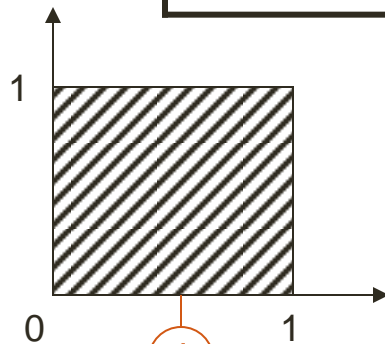
Passo 1 A fdc é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{2}, & 0 < x \leq 1 \\ 1 - \frac{(2-x)^2}{2}, & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$



Distribuição Empírica Discreta

Tempo de Serviço	Probabilidade	Probabilidade Cumulativa	Número Aleatório
1	0.10	0.10	0.01 – 0.10
2	0.20	0.30	0.11 – 0.30
3	0.30	0.60	0.31 – 0.60
4	0.25	0.85	0.61 – 0.85
5	0.10	0.95	0.86- 0.95
6	0.05	1.00	0.96 – 000

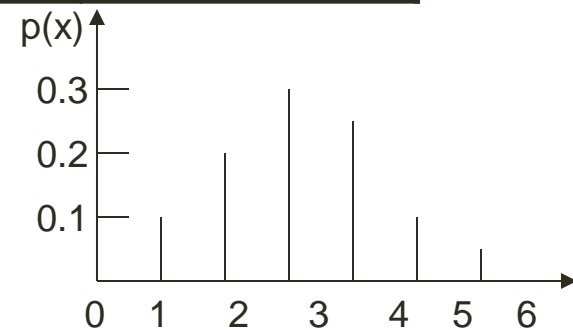


1

Gere um amostra
De uma distribuição
uniforme entre 0-1

2

Converta a amostra 0-1
sample na amostra
equivalente da população
alvo

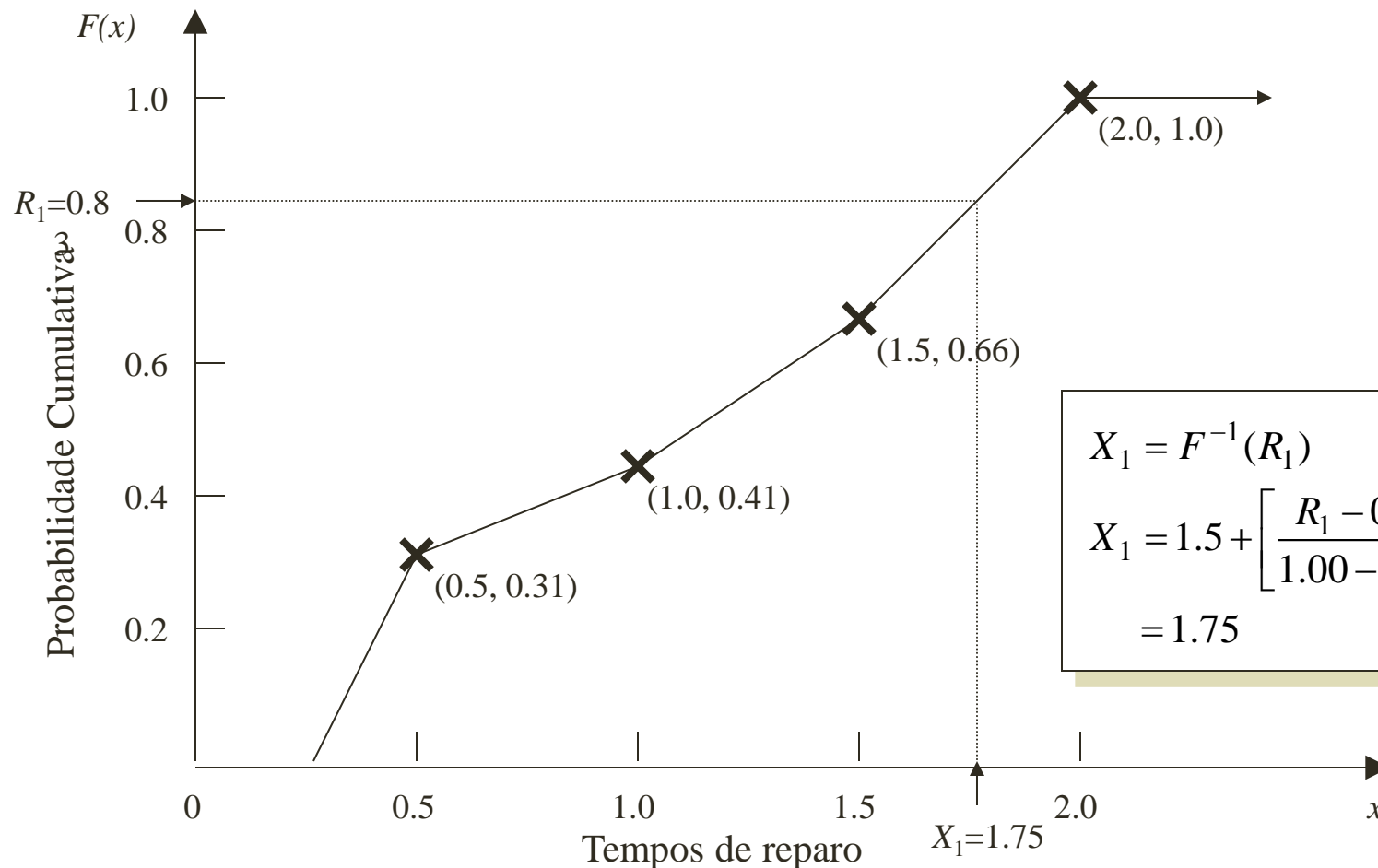


Distribuição Empírica Contínua

- Caso não haja informações para encontrar a distribuição teórica que permita uma boa modelagem para dos dados de entrada, então deve ser necessário o uso de uma distribuição empírica dos dados.
 - Suponha que 100 tempos de reparo de peças tenham sido coletados. Os dados estão sumarizados na tabela seguintes em termos do número de observações em vários intervalos de tempo. Por exemplo, ocorreram 31 observações entre 0 e 0.5 hora, 10 entre 0.5 e 1 hora, e assim por diante.

<i>Interval (Hours)</i>	<i>Frequency</i>	<i>Relative Frequency</i>	<i>Cumulative Frequency</i>
$0.0 \leq x \leq 0.5$	31	0.31	0.31
$0.5 < x \leq 1.0$	10	0.10	0.41
$1.0 < x \leq 1.5$	25	0.25	0.66
$1.5 < x \leq 2.0$	24	0.24	1.00

Distribuição Empírica Continua (cont.)



$$X_1 = F^{-1}(R_1)$$

$$X_1 = 1.5 + \left[\frac{R_1 - 0.66}{1.00 - 0.66} \right] (2.0 - 1.5)$$
$$= 1.75$$

Técnica de Rejeição-Aceitação

- Suponha que necessitamos definir um método para gerar uma variável aleatória, X , uniformemente distribuída entre $\frac{1}{4}$ e 1.

Passo 1: Gere um número aleatório $u \sim U(0, 1)$

Passo 2a: Se $u \geq 0.25$, aceite $X = u$, então vá ao passo 3.

passo 2b: Se $u < 0.25$, rejeite u , e retorne ao passo 1.

Passo 3: Se um outro número aleatório uniforme no intervalo $[1/4, 1]$ for necessário, repita o procedimento começando do passo 1. Senão, pare.

Testes para Números Aleatórios

- As propriedades desejáveis para números aleatórios são:
 - uniformidade e independência
- Para assegurar que tais propriedades estão presentes, uma série de testes podem ser realizados.
- Estes testes podem ser localizados em duas categorias de acordo com as propriedades de interesse.
 - Teste para uniformidade
 - Teste para independência

Testes para Números Aleatórios (cont.)

- **Teste de Frequência:** Use teste de Qui-Quadrado para comparar a distribuição do conjunto de números gerados para uma distribuição uniforme.
- **Teste de Execuções (Runs):** Teste as execuções crescentes e decrescentes ou as execuções acima ou abaixo da média para comparar os valores atuais com os valores esperados. A estatística para comparação é a Qui-Quadrado.

Teste de freqüência

- **TESTE DE FREQUENCIA**
- Números Aleatórios oriundos da distribuição uniforme e diversos testes tem sido desenvolvidos. Consideraremos o teste de ajustamento (aderência) χ^2 .
- O teste de Aderência requer que:
 - 50 observações no total
 - freqüências esperadas de pelo menos cinco em cada classe
 - A seguinte tabela mostra os resultados para um total de 100 observações divididos em escala de 0.10 em cada classe.

Teste de Frequência (cont.)

- Teste de frequência

<i>Classes</i>	<i>Frequencia Observada f_o</i>	<i>Frequencia Esperada f_e</i>	$(f_o - f_e)^2 / f_e$
<i>0.00 – 0.10</i>	<i>9</i>	<i>10</i>	<i>0.10</i>
<i>0.10 – 0.20</i>	<i>12</i>	<i>10</i>	<i>0.40</i>
<i>0.20 – 0.30</i>	<i>10</i>	<i>10</i>	<i>0.00</i>
<i>0.30 – 0.40</i>	<i>11</i>	<i>10</i>	<i>0.10</i>
<i>0.40 – 0.50</i>	<i>8</i>	<i>10</i>	<i>0.40</i>
<i>0.50 – 0.60</i>	<i>10</i>	<i>10</i>	<i>0.00</i>
<i>0.60 – 0.70</i>	<i>10</i>	<i>10</i>	<i>0.00</i>
<i>0.70 – 0.80</i>	<i>7</i>	<i>10</i>	<i>0.90</i>
<i>0.80 – 0.90</i>	<i>12</i>	<i>10</i>	<i>0.40</i>
<i>0.90 – 1.00</i>	<i>11</i>	<i>10</i>	<i>0.10</i>
	<i>100</i>	<i>100</i>	<i>2.40</i>

Teste de Frequência (cont.)

- A questão é,
 - Estes números estão uniformemente distribuídos?
 - Calcule a estatística χ^2 dos dados usando a equação

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$$

- Dando o valor de $\chi^2 = 2.40$. Testando a hipótese nula que os números aleatórios seguem uma distribuição uniforme,

$$H_0 : R_i \sim U [0, 1]$$

- compare o valor calculado χ^2 ao valor obtidos da tabela com base em $(10-1) = 9$ graus de liberdade e nível de significância $\alpha = 0.05$.
- Este valor χ^2 é 16.919, que é maior que valor χ^2 calculado.
- Assim, aceita-se a hipótese nula, ou seja, os dados gerados são uniformemente distribuídos.

Teste de Execuções Crescente e Decrescente

- **TESTE DE EXECUÇÕES CRESCENTES E DECRESCENTES**
- Os números podem passar no teste de uniformidade e não serem aleatórios.
 - Por exemplo, os números 0.00, 0.10, 0.20, 0.30, 0.40, ...obviamente não são aleatórios.
- Os números também devem ser seqüencialmente aleatórios para serem julgados verdadeiramente aleatórios.
- Uma variedade de testes pode ser usados para tal propósito.
- Consideraremos um teste de execução crescente e decrescente.

Teste de Execuções Crescente e Decrescente (cont.)

- Em uma seqüência de números, se um número é seguido por um número maior, temos então um execução crescente.
- Caso contrário, se um número é seguido de número menor, temos um execução decrescente.
- Se os números são verdadeiramente aleatórios, espera-se que sejam encontrado um certo números de execuções crescente e decrescente.
- Em uma seqüência of N números, espera-se encontrar a média e variância de execuções segundo as equações:

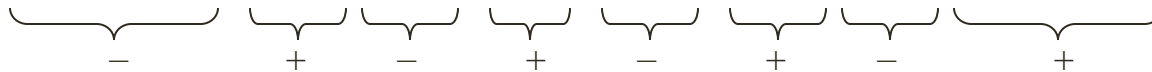
$$\mu = \frac{2N - 1}{3}$$

$$\delta^2 = \frac{16N - 29}{90}$$

Teste de Execuções Crescente e Decrescente (cont.)

- Como exemplo, suponha que tenha sido gerados 40 números.
0.43, 0.32, 0.48, 0.23, 0.90, 0.72, 0.94, 0.11, 0.14, 0.67,

0.61, 0.25, 0.45, 0.56, 0.87, 0.54, 0.01, 0.64, 0.65, 0.32, 0.03,


- + - + - + - +

0.93, 0.08, 0.58, 0.41, 0.32, 0.03, 0.18, 0.90, 0.74, 0.32,


- + - + -

0.75, 0.42, 0.71, 0.66, 0.03, 0.44, 0.99, 0.40, 0.51


+ - + - + -


+ - + - + - +

Teste de Execuções Crescente e Decrescente (cont.)

- Espera-se encontrar 26.33 execuções
- Existem 26 execuções na seqüência dos 40 números.

$$H_0 : \mu = 26.33$$

$$H_1 : \mu \neq 26.33$$

$$Z_{0.025} = \pm 1.96$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\delta} = \frac{26 - 26.33}{2.61} = -0.31 > -1.96$$

$$\mu = \frac{2 \times 40 - 1}{3} = 26.33$$

$$\delta^2 = \frac{16 \times 40 - 29}{90} = 6.79$$

$$\delta = 2.61$$

- Aceitamos que os números gerados são aleatórios.

Tabela de Números Aleatórios

10097	32533	76520	13586	34673	54876	80959	09117	39292	74945
37542	04805	64894	74296	24805	24037	20636	10402	00822	91655
08422	68953	19645	09303	23209	02560	15953	34764	35080	33606
99019	02529	09376	70715	38311	31165	88676	74397	04436	27659
12807	99970	80157	36147	64032	36653	98951	16877	12171	76833
66065	74717	34072	76850	36697	36170	65813	39885	11190	29170
31060	10805	45571	82406	35303	42614	86799	07439	23403	09732
85269	77602	02051	65692	68665	74818	73053	85247	18623	88579
63573	32135	05325	47048	90553	57548	28468	28709	83491	25624
73796	45753	03529	64778	35808	34282	60935	20344	35273	88435
98520	17767	14905	68607	22109	40558	60970	93433	50500	73998
11805	05431	39808	27732	50725	68248	29405	24201	52775	67851
...									