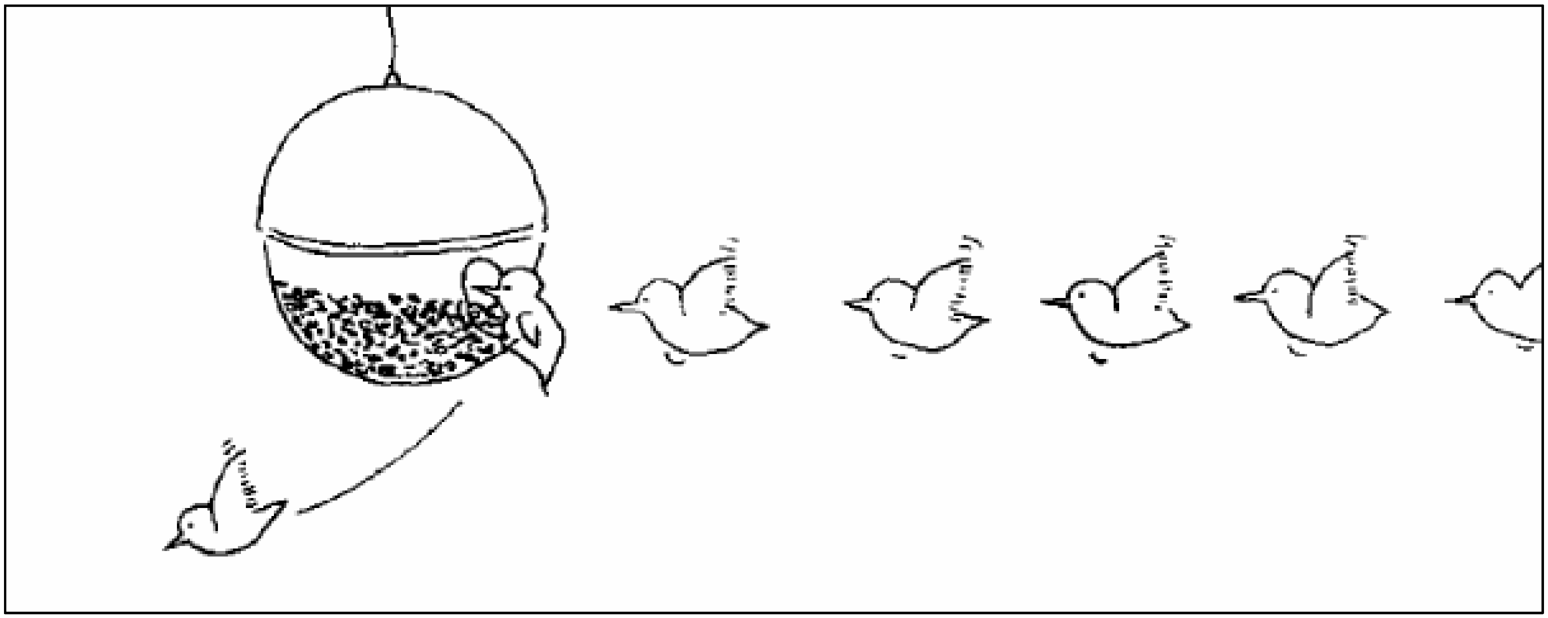
Modelagem Analítica 1

Capítulo 8

Tópicos

1. **Introdução**
2. **Processos Estocásticos**
3. **Terminologia e Notação Básica da Teoria de Filas**
4. **Análise Estocástica e Modelos de Fila Simples**
5. **Leis Operacionais**

Exemplo de um Sistema de Filas



Drawing by McCallister, © 1977, *The New Yorker Magazine, Inc.*

Introdução

- Matemático dinamarquês A. K. Erlang entre 1909 e 1917, trabalhando na Cia. Telefônica de Copenhague.
- Aplicou teoria de probabilidades a problemas de tráfego de telefonia.
- Determinar numero de telefonistas e de linhas para minimizar o tempo de espera (na fila) por uma chamada.
- Hoje a teoria de filas é aplicada a praticamente todo o processo ou sistema que envolva a possibilidade de formação de filas (falta de equilíbrio entre a oferta e a demanda de serviços).
- O objetivo deste capítulo é introduzir o tema e os principais conceitos sem, no entanto, maiores aprofundamentos em suas provas matemáticas, a menos do estritamente necessário.

Variáveis aleatórias e processos estocásticos.

- Exemplos
  - ✓ *n(t)*, num. chamadas numa central no tempo *t*.
    - Seu comportamento é explicado por uma função de distribuição de probabilidade para cada possível valor de *t*.
  - ✓ *w(t)*, tempo de espera na fila.
    - Também uma função aleatória no tempo
- Modelagem analítica variáveis aleatórias, que são funções do tempo.
- Tais funções são chamadas de *processos estocásticos* e são úteis na representação do estado de um sistema de filas.

Sistemas Estocásticos

- São sistemas que apresentam variações aleatórias no seu estado ao longo do tempo.
- São, portanto, sistemas dinâmicos e com mudanças aleatórias em suas variáveis de estado.
- Se subdividem em quatro tipos:

1 - Processos de estado-contínuo ou de estado-discreto

- Conhecidos como processo contínuo ou processo discreto.
- Representação do estado do sistema por variáveis contínuas ou discretas.
  - ✓ Exemplo, o número de clientes numa fila. $n(t)$ é um processo discreto assumindo valores 0, 1, 2, ...
  - ✓ Exemplo é o estado de um servidor (livre ou ocupado) representado por valores 0 ou 1, respectivamente.
  - ✓ Exemplo, tempo de espera $w(t)$ é representado por uma variável real e, portanto, trata-se de um processo contínuo.
- Quando um processo estocástico é discreto, também é chamado de *cadeia estocástica*.

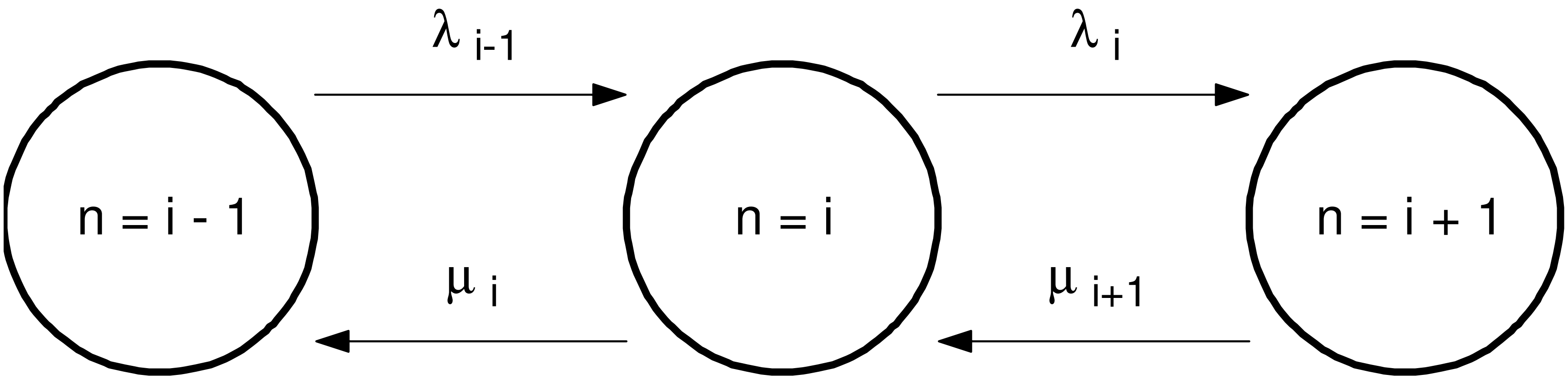
2 - Processos de Markov

- Um processo é dito *de Markov* ou processo *Markoviano*, se seus futuros estados dependem apenas do presente.
- Análise simples (independe da trajetória passada).
- Para prever o futuro de um processo contínuo de *Markov*, é suficiente conhecer seu estado presente.
- Isto é possível se o tempo de um estado possui uma distribuição exponencial (ou dita sem memória).
- Há limitações de sua aplicabilidade.
- Processos discretos de *Markov* também são conhecidos como *Cadeias de Markov*.

3 - Processos de Nascimento e Morte

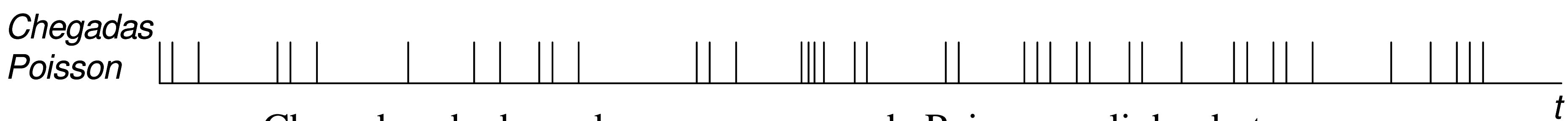
- Processos discretos de *Markov*.
- Transições de estado estão restritas aos estados visinhos.
- O sistema flui de estado para estado dependendo de seus parâmetros λ e μ (taxa média de chegadas de clientes e taxa média de serviços respectivamente).
- Um estado n do sistema pode ser representado por inteiros e sua mudança se dará somente para os estados $n + 1$ ou $n - 1$.

3 - Processos de Nascimento e Morte



4 - Processos de Poisson

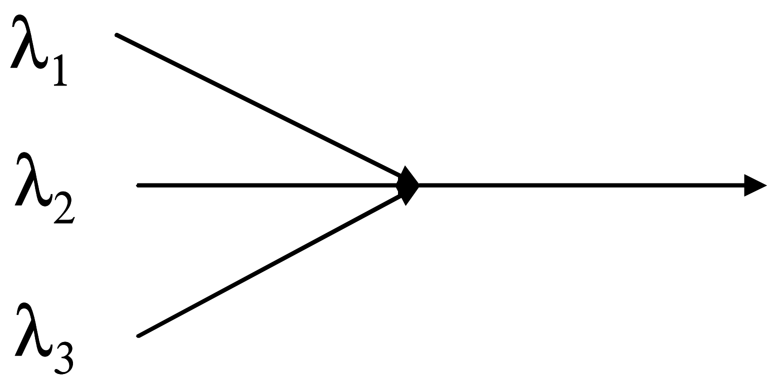
- TEC são IID (Independentes e Identicamente Distribuídos) com distribuição exponencial;
- Número de chegadas n em um período $(t,\ t + x)$ apresenta uma distribuição de Poisson.



Chegadas obedecendo a um processo de Poisson na linha do tempo.

4 - Processos de Poisson - Propriedades

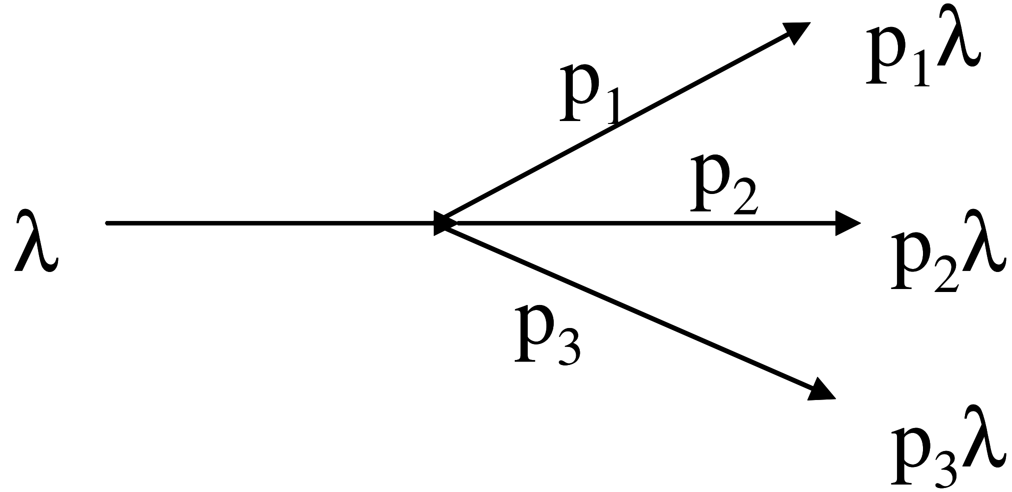
1. A intercalação de k fluxos de *Poisson* com taxa média λ_i resulta num fluxo de Poisson com a taxa média λ dada pelo somatório dos λ_i para $i = 1, 2, 3 \ldots k$.



$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

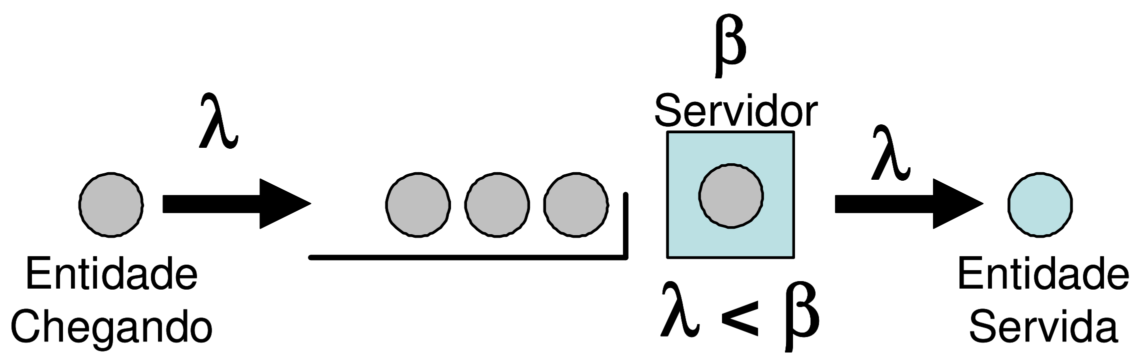
4 - Processos de Poisson - Propriedades

2. Um fluxo de Poisson se divide em sub-fluxos com probabilidade *p* para cada um dos ramos, cada sub-fluxo também é Poisson com taxa média $p_i\lambda$.



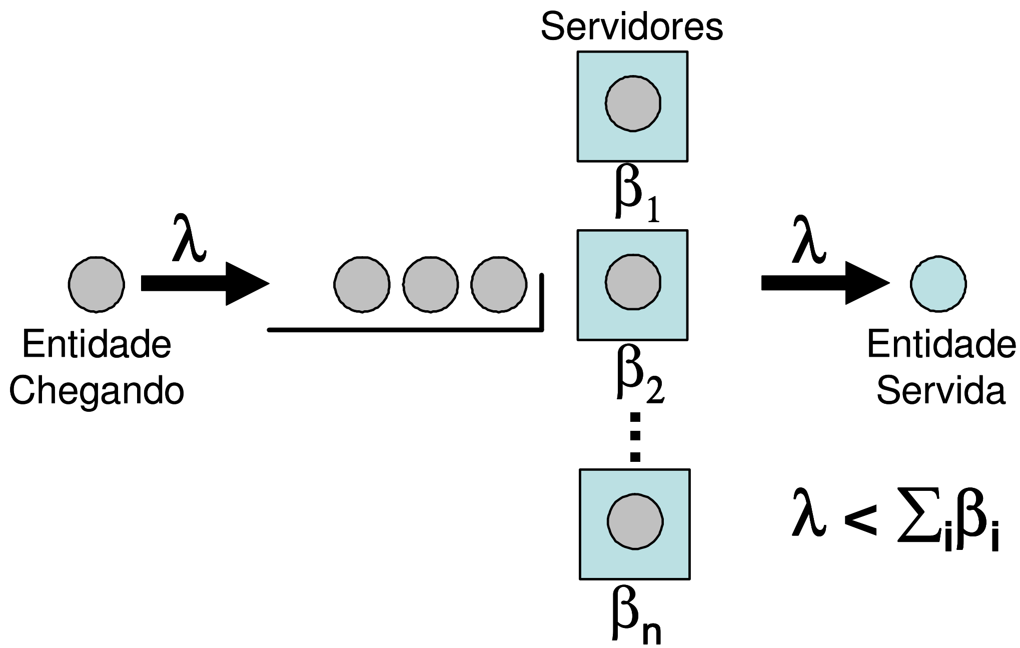
4 - Processos de Poisson - Propriedades

3. Se as chegadas de clientes em um sistema de fila simples, que apresente tempo de serviço exponencial com média β, ocorrem de acordo com um fluxo de *Poisson* com taxa média λ, as saídas também apresentarão comportamento *Poisson* com a mesma taxa média λ, desde que $\lambda < \beta$.



4 - Processos de Poisson - Propriedades

4. Se as chegadas de clientes em um sistema de fila com múltiplos servidores, ocorrem de acordo com um fluxo de *Poisson* com taxa média λ, as saídas também apresentarão comportamento *Poisson* com a mesma taxa média λ, desde que $\lambda < \sum_i \beta_i$. Os servidores devem ter tempos de serviço exponencialmente distribuídos com média β_i.



Relações entre os vários tipos de processos estocásticos.