

Teoría de Control



Sistema Térmico

Comisión 4k9

2021

Integrantes:

(45276) Bagatoli Naselli, Javier Alejandro Ivan

(45185) Céspedes Ortega, Rodrigo Gabriel

(45352) Fernández Quatrini, Renzo Abel

(45106) Giralda Lima, Ramsés

Índice:

Breve descripción del sistema	3
Obtención de la función de transferencia en s para θ_{p1}:	6
Obtención de la función de transferencia en s para θ_f:	6
Obtención de las formas canónicas para θ_{p1}:	7
Obtención de las formas canónicas para θ_f:	10
Clasificación de la función de transferencia de θ_{p1}:	12
Clasificación de la función de transferencia de θ_f:	14
Análisis de Estabilidad para la función θ_{p1}:	17
Análisis de Observabilidad y Controlabilidad de θ_{p1}:	25
Análisis de Estabilidad para la función θ_f:	26
Análisis de Observabilidad y Controlabilidad para θ_{pf}:	36
Bibliografía:	37

Breve descripción del sistema

El sistema consiste en la transmisión de calor proveniente de una resistencia eléctrica a un recinto cerrado, separado del ambiente por una pared

Objetivos de la simulación:

El objetivo de la simulación es analizar las variaciones de temperatura tanto en el fluido como en la pared.

Fronteras y supuestos considerados:

- El calor que puede brindar la resistencia es infinito
- El recinto a calentar siempre tendrá una forma Rectangular
- La temperatura ambiente siempre es menor que la deseada en el recinto
- Se desestima el valor del calor transmitido por radiación
- Se desestima la deformación de las paredes por calor
- Se asume una posición fija para la fuente de calor
- Se asume que las paredes no tienen ningún límite físico para almacenar calor.

q_E [W]	: Flujo de calor entregado por la resistencia
e [m]	: Espesor de la pared
m_{p1} [Kg]	: masa de la pared ¹
$cp1$ [J]/([Kg]*[K°])	: calor específico de la pared a 25 C°
C_{p1} [J]/[K°] = $cp1 * m_{p1}$: capacidad calorífica de la pared
A_{p1} [m²]	: Área de la pared
T_{p1} [K°]	: Temperatura pared
m_f [Kg]	: masa del fluido
cf [J]/([Kg]*[K°])	: calor específico del fluido a 25 C°
C_f [J]/[K°] = $cp1 * m_{p1}$: capacidad calorífica del fluido
T_f [K°]	: Temperatura del fluido
K [J]/([seg]*[m]*[K°])	: es la coeficiente de conductividad, mientras mayor sea, mejor conductor de calor será (también se escribe λ)
R_{p1} ([m²]*[K°])/[W] = e/K	: Es la resistencia térmica
C_{aire} [J]/[K°]	: Es la capacidad calorífica del exterior de las paredes
$Q = C * (T_i - T_f) \rightarrow C * dT$: Energía absorbida, o entregada

Variables manipulables:

Las variables sobre las que podemos tener total control son el calor ofrecido por la resistencia y la temperatura deseada en el interior del recinto.

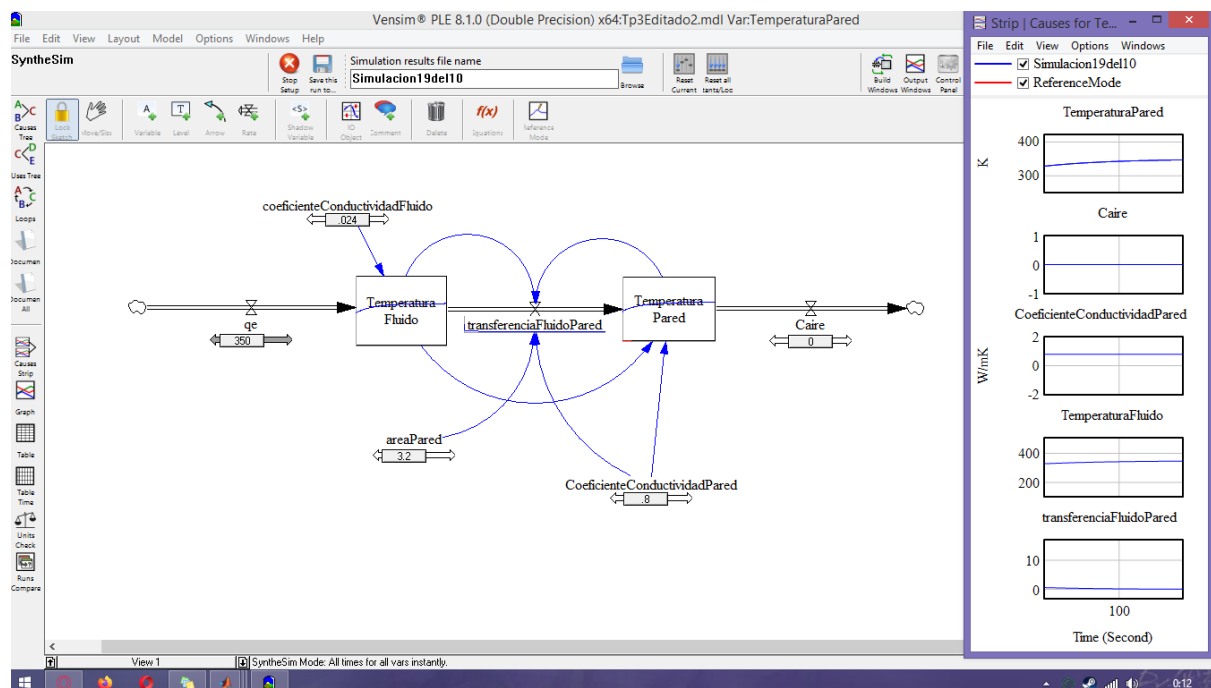
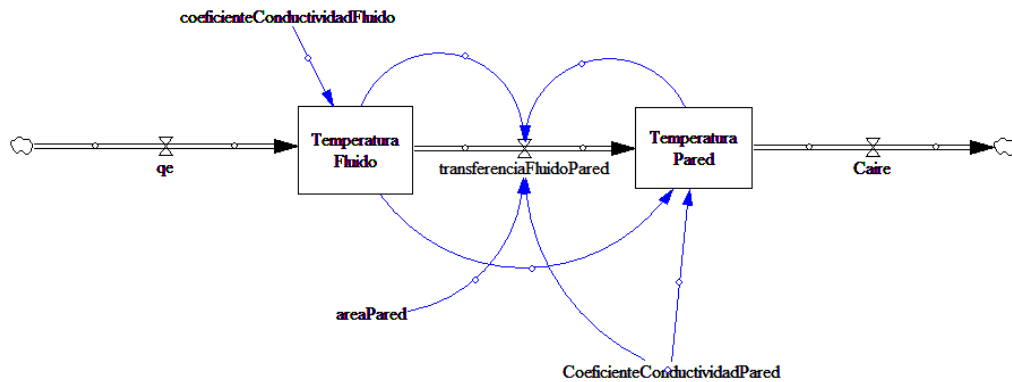
También tenemos control sobre otras variables pero sólo antes de que empiece la simulación y se tornen en valores constantes, estas son: Las dimensiones del recinto, el material de sus paredes y el del fluido de su interior.

¹el subíndice p1 viene de pared 1 porque el sistema originalmente estaba pensado con varias capas de paredes, sin embargo estas fueron eliminadas para dejar solo 2 variables de estado, pero los nombres de los subíndices se quedaron

Variables ajenas:

Las únicas variables ajenas del sistema son la temperatura ambiente, y lo relacionado al coeficiente de película del recinto como la presión y la turbulencia

Antes de comenzar a analizar los modelos matemáticos y sistemas de ecuaciones creemos conveniente ver primero el diagrama de Forrester del sistema



En este se pueden ver dos variables de nivel, las cuales son la Temperatura del Fluido y la Temperatura de la Pared. Las cuales se ven afectadas por variables las cuales se consideran constantes dentro del sistema, tales como coeficientes de conductividades (aire y pared), área transversal de la pared. Además podemos ver que la entrada del sistema, es q_E , la cual representa el calor suministrado por la resistencia. Y la salida del sistema es Ca_{ire} .

Fórmulas:

A continuación se detallan las fórmulas utilizadas en Vensim para poder tener las primeras representaciones gráficas del sistema.

Nota: Dado que tuvimos problemas para representar el sistema solamente utilizando los valores numéricos de las entradas y salidas decidimos utilizar condicionales para hacerlo de la forma más correcta, ello conlleva a que determinados términos del sistema tuvieran que ser anulados mediante su multiplicación por cero ya que el programa nos exige que estén en las ecuaciones.:

Variable de nivel: **Temperatura Fluido** :

IF THEN ELSE ((qe > TemperaturaFluido),
(qe-TemperaturaFluido)*coeficienteConductividadFluido-(IF THEN ELSE (0 < transferenciaFluidoPared, transferenciaFluidoPared*0, 0))
, 0)

condición inicial: 270 grados kelvin

Flujo: **transferenciaFluidoPared**

(TemperaturaFluido-TemperaturaPared)+0*(CoeficienteConductividadPared*areaPared)

Variable de nivel: **Temperatura Pared**

IF THEN ELSE ((transferenciaFluidoPared > TemperaturaPared),
-(Caire)+IF THEN ELSE (0 < TemperaturaPared,
(TemperaturaFluido-TemperaturaPared)*CoeficienteConductividadPared, 0)
, 0)

Valor inicial: 260 grados kelvin

Una vez comprendido el sistema, se procederá a plantear el sistema de ecuaciones en el tiempo:

$$q_E = c_f * \frac{dT_f}{dt} + \frac{A_{p1}}{R_{p1}} * (T_f - T_p)$$

$$\frac{A_{p1}}{R_{p1}} * (T_f - \theta_p) = c_p * \frac{dT_p}{dt} + C_{aire} d\theta$$

Luego las pasamos al dominio de los complejos aplicando transformada de Laplace (con condiciones iniciales nulas) y obtenemos lo siguiente²

$$q_E = c_f * s * \theta_f + \frac{A_{p1}}{R_{p1}} * (\theta_f - \theta_p)$$

² Es importante aclarar que el término de Caire*dθ está en las ecuaciones del tiempo por motivos físicos, puesto que representa la transferencia de calor de la pared al ambiente exterior, sin embargo esta transmisión de calor es prácticamente despreciable y como se aclaró en los límites del estudio, las paredes pueden almacenar toda la energía que demande el experimento sin sufrir cambios físicos, por lo que se eliminó este término en el siguiente paso, cuando se aplicó la transformada de Laplace

$$\frac{A_{p1}}{R_{p1}} * (\theta_f - \theta_p) = c_p * s * \theta_p$$

Luego ordenamos

$$q_E = (C_f * s + \frac{A_{p1}}{R_{p1}}) * \theta_f - \frac{A_{p1}}{R_{p1}} * \theta_{p1}$$

$$0 = \frac{A_{p1}}{R_{p1}} * \theta_f - (\frac{A_{p1}}{R_{p1}} + c_{p1} * s) * \theta_{p1}$$

Como el objetivo del estudio es analizar la variación de temperatura en el fluido y en la pared, debemos obtener 2 funciones de transferencia, una de ellas que tenga como salida θ_{p1} y otra θ_f . Por este motivo, a partir de ahora comenzaremos a trabajar distinguiendo las cosas que hagamos para la función de transferencia de θ_{p1} y de θ_f

Obtención de la función de transferencia en s para θ_{p1} :

$$\theta_f = (\frac{A_{p1}}{R_{p1}} + c_{p1} * s) * \theta_{p1} * \frac{R_{p1}}{A_{p1}} = \theta_{p1} + \frac{R_{p1}}{A_{p1}} * c_{p1} * s * \theta_{p1}$$

$$\theta_f = \frac{1}{C_f * s + \frac{A_{p1}}{R_{p1}}} * (q_E + \frac{A_{p1}}{R_{p1}} * \theta_{p1})$$

$$\theta_{p1} + \frac{R_{p1}}{A_{p1}} * c_{p1} * s * \theta_{p1} = \frac{1}{C_f * s + \frac{A_{p1}}{R_{p1}}} * (q_E + \frac{A_{p1}}{R_{p1}} * \theta_{p1})$$

$$c_f * s * \theta_{p1} + \frac{A_{p1}}{R_{p1}} * \theta_{p1} + \frac{R_{p1}}{A_{p1}} * c_{p1} * c_f * s^2 * \theta_{p1} + c_{p1} * s * \theta_{p1} = q_E + \frac{A_{p1}}{R_{p1}} * \theta_{p1}$$

$$\theta_{p1} * (c_f * s + \frac{A_{p1}}{R_{p1}} + \frac{R_{p1}}{A_{p1}} * c_{p1} * c_f * s^2 + c_{p1} * s - \frac{A_{p1}}{R_{p1}}) = q_E$$

$$\theta_{p1} = \frac{q_E}{\frac{R_{p1}}{A_{p1}} * c_{p1} * c_f * s^2 + (c_f + c_{p1}) * s}$$

$$\theta_{p1} = \frac{\frac{q_E}{(\frac{R_{p1}}{A_{p1}} * c_{p1} * c_f)}}{s^2 + \frac{c_f + c_{p1}}{\frac{R_{p1}}{A_{p1}} * c_{p1} * c_f} * s}$$

Obtención de la función de transferencia en s para θ_f :

$$\theta_{p1} = [(C_f * s + \frac{A_{p1}}{R_{p1}}) * \theta_f - q_E] * \frac{R_{p1}}{A_{p1}}$$

$$\theta_{p1} = (\frac{A_{p1}}{R_{p1}} * \theta_f) * \frac{1}{(\frac{A_{p1}}{R_{p1}} + c_{p1} * s)}$$

$$\frac{A_{p1}}{R_{p1}} = F$$

$$[(C_f * s + F) * \theta_f - q_E] * F^{-1} = F * \theta_f * \frac{1}{(F+C_{p1}*s)}$$

$$(C_f * s + F) - \frac{q_E}{\theta_f} = F^2 * \frac{1}{(F+C_{p1}*s)}$$

$$(C_f * s + F) - F^2 * \frac{1}{(F+C_{p1}*s)} = \frac{q_E}{\theta_f}$$

$$\theta_f = q_E * \frac{1}{(C_f*s+F)-F^2*\frac{1}{(F+C_{p1}*s)}}$$

$$\theta_f = q_E * \frac{1}{\frac{(C_f*s+F)*(F+C_{p1}*s)+F^2*(F+C_{p1}*s)-F^2}{(F+C_{p1}*s)}}$$

$$\theta_f = q_E * \frac{1}{\frac{(s^2*C_f*C_{p1})+(s*F*C_f)+(s*F*C_{p1})+F^2+F^2+s*F*C_{p1}-F^2}{(F+C_{p1}*s)}}$$

$$\theta_f = \frac{q_E*(F+C_{p1}*s)}{(s^2*C_f*C_{p1})+2*(s*F*C_{p1})+(s*F*C_f)+F^2}$$

$$\theta_f = \frac{q_E*(F+C_{p1}*s)}{(s^2*C_f*C_{p1})+s*(2*F*C_{p1}+F*C_f)+F^2} * \frac{\frac{1}{(C_f*C_{p1})}}{\frac{1}{(C_f*C_{p1})}}$$

$$\theta_f = \frac{q_E*(F+C_{p1}*s)*\frac{1}{(C_f*C_{p1})}}{(s^2)+(\frac{s*(2*F*C_{p1}+F*C_f)}{C_f*C_{p1}})+(\frac{F^2}{C_f*C_{p1}})}$$

$$\theta_f = \frac{q_E*(F+C_{p1}*s)*\frac{1}{(C_f*C_{p1})}}{(s^2)+\frac{s*(2*F*C_{p1}+F*C_f)}{C_f*C_{p1}}+\frac{F^2}{C_f*C_{p1}}}$$

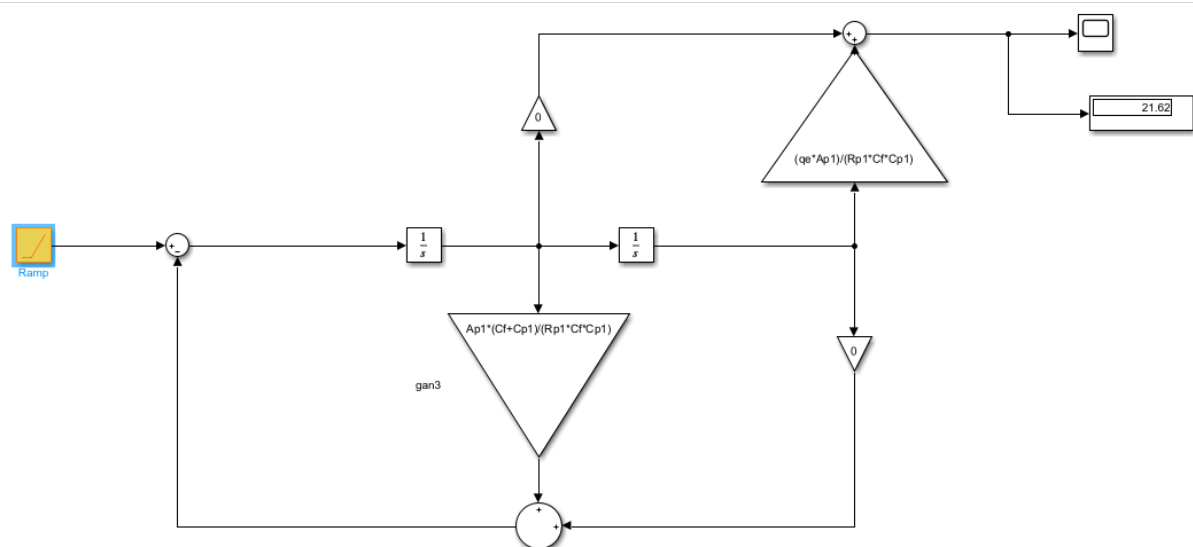
$$\theta_f = \frac{(s*q_E*C_{p1}+q_E*F)*\frac{1}{(C_f*C_{p1})}}{(s^2)+\frac{s*(2*F*C_{p1}+F*C_f)}{C_f*C_{p1}}+\frac{F^2}{C_f*C_{p1}}} = \frac{(\frac{s*q_E}{C_f})+(\frac{q_E*F}{C_f*C_{p1}})}{(s^2)+\frac{s*(2*F*C_{p1}+F*C_f)}{C_f*C_{p1}}+\frac{F^2}{C_f*C_{p1}}}$$

$$\theta_f = \frac{(s*q_E*C_{p1}+q_E*F)*\frac{1}{(C_f*C_{p1})}}{(s^2)+s*(\frac{2*F}{C_f}+\frac{F}{C_{p1}})+\frac{F^2}{C_f*C_{p1}}}$$

Obtención de las formas canónicas para θ_{p1} :

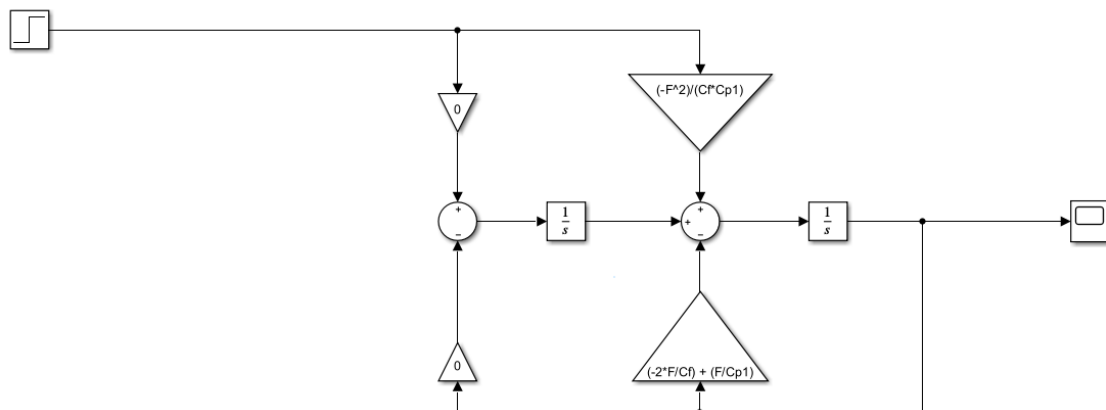
FCC para θ_{p1}

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{-A_{p1} * (C_f + C_{p1})}{R_{p1} * C_f * C_{p1}} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{q_E * A_{p1}}{R_{p1} * C_f * C_{p1}} & 0 \end{bmatrix}$$



FCO para θ_{p1}

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{-A_{p1} * (C_f + C_{p1})}{R_{p1} * C_f * C_{p1}} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{q_E * A_{p1}}{R_{p1} * C_f * C_{p1}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 1]$$



Para calcular la FCD de θ_{p1} :

$$H = - \frac{A_{p1}}{R_{p1}} * \frac{c_f + c_p}{c_f * c_p}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ 0 & H - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - H * \lambda = \lambda * (\lambda - H)$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = H$$

$$\frac{\frac{q_E * A_{P1}}{R_{P1} * c_f * c_{p1}}}{s^2 + \frac{A_{P1} * (c_f + c_{p1})}{R_{P1} * c_f * c_{p1}} * s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s-H)}$$

$$A = \frac{\frac{q_E * A_{P1}}{R_{P1} * c_f * c_{p1}} * s}{s * (s-H)} - \frac{B * s}{(s-H)}$$

Si hacemos s=0

$$A = \frac{q_E * A_{P1}}{R_{P1} * c_f * c_{p1} * (-H)}$$

$$B = \frac{\frac{q_E * A_{P1}}{R_{P1} * c_f * c_{p1}} * (s-H)}{s * (s-H)} - \frac{A * (s-H)}{s}$$

Si hacemos s=H

$$B = \frac{q_E * A_{P1}}{R_{P1} * c_f * c_{p1} * H}$$

Reemplazamos H por lo que era

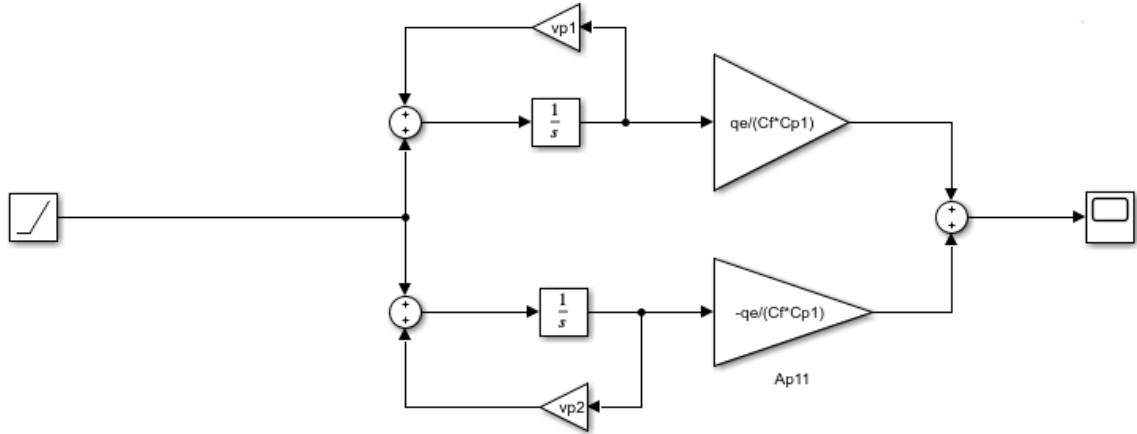
$$B = \frac{q_E * A_{P1}}{R_{P1} * c_f * c_{p1} * \frac{A_{P1} * \frac{c_f + c_{p1}}{R_{P1} * c_f * c_{p1}}}{q_E * c_f * c_{p1}}} = \frac{q_E}{-(c_f + c_{p1})}$$

$$A = \frac{q_E}{c_f + c_{p1}}$$

$$FT = \frac{q_E}{c_f + c_{p1}} * \left(\frac{-1}{s} + \frac{1}{(s-H)} \right)$$

FCD para θ_1 :

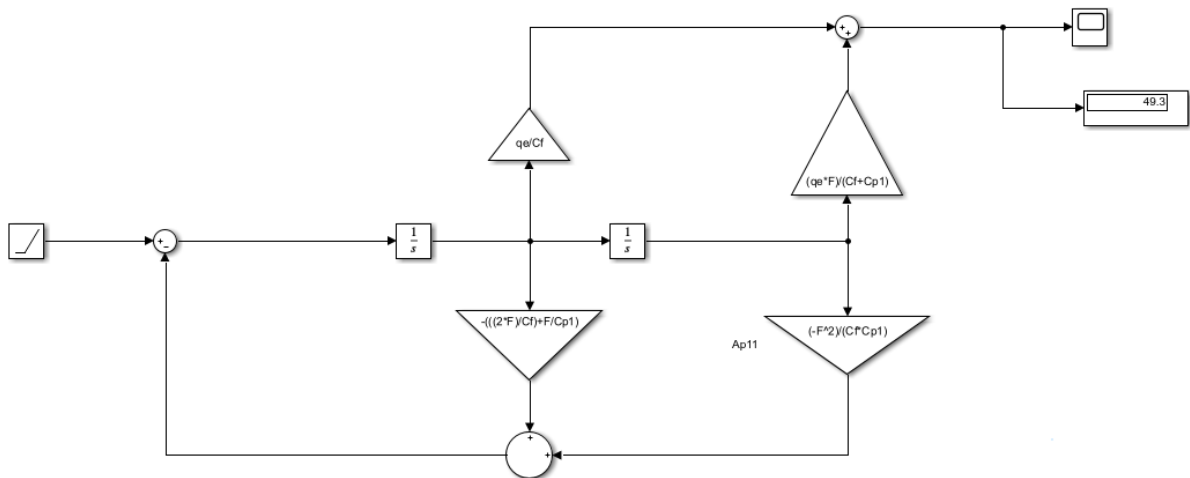
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{q_E}{c_f + c_{p1}} & \frac{-q_E}{c_f + c_{p1}} \end{bmatrix}$$



Obtención de las formas canónicas para θ_f :

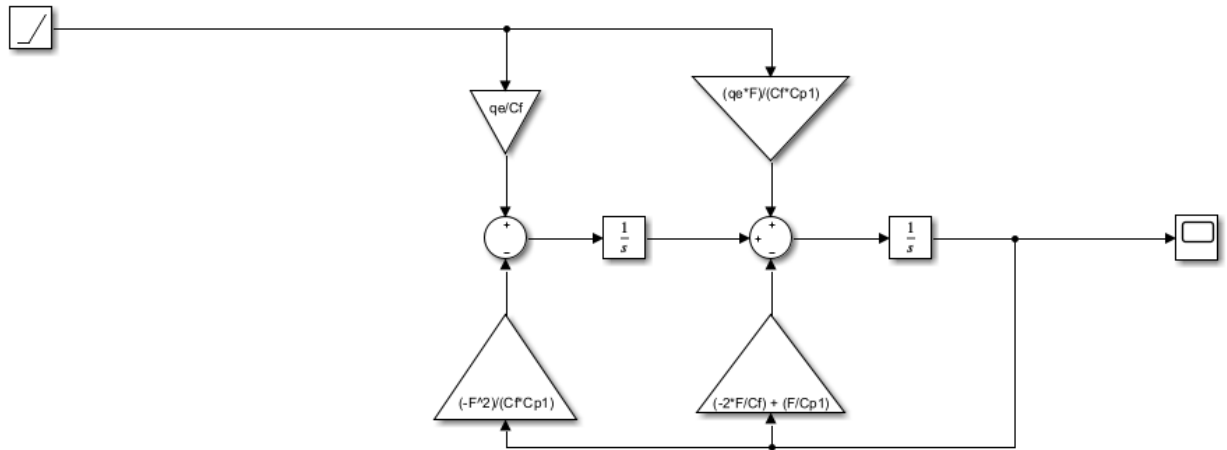
FCC para θ_f :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-F^2}{C_f * C_{p1}} & -\left(\frac{2*F}{C_f} + \frac{F}{C_{p1}}\right) \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{q_E * F}{C_f * C_{p1}} & \frac{q_E}{C_f} \end{bmatrix}$$



FCO para θ_f :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-F^2}{C_f * C_{p1}} \\ 1 & -\left(\frac{2*F}{C_f} + \frac{F}{C_{p1}}\right) \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{q_E * F}{C_f * C_{p1}} \\ \frac{q_E}{C_f} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$



FCD para θ_f :

$$I = \frac{-F^2}{C_F * C_{p1}} \quad H = \frac{-2*F}{C_F} + \frac{F}{C_{p1}} \quad J = \frac{q_E * F}{C_F * C_{p1}} \quad K = \frac{q_E}{C_F}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ I & H - \lambda \end{bmatrix} = -\lambda * (H - \lambda) - I = \lambda^2 - \lambda * H - I$$

$$\lambda_1 = \frac{H + \sqrt{H^2 + 4*I}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{H - \sqrt{H^2 + 4*I}}{2}$$

$$\frac{(s*K)+J}{s^2 + s*(-H) + (-I)} = \frac{A}{s-\lambda_1} + \frac{B}{s-\lambda_2}$$

$$A = \left[\frac{s*K+J}{(s-\lambda_1)*(s-\lambda_2)} - \frac{B}{(s-\lambda_2)} \right] * (s - \lambda_1)$$

Si $s=\lambda_1$

$$A = \frac{\lambda_1*K+J}{(s-\lambda_2)*\lambda_1} = \frac{\lambda_1*K+J}{(\lambda_1-\lambda_2)*\lambda_1} = \frac{K+J}{\sqrt{H^2+4*I}}$$

$$B = \left[\frac{s*K+J}{(s-\lambda_1)*(s-\lambda_2)} - \frac{A*s}{(s-\lambda_1)} \right] * s - \lambda_2$$

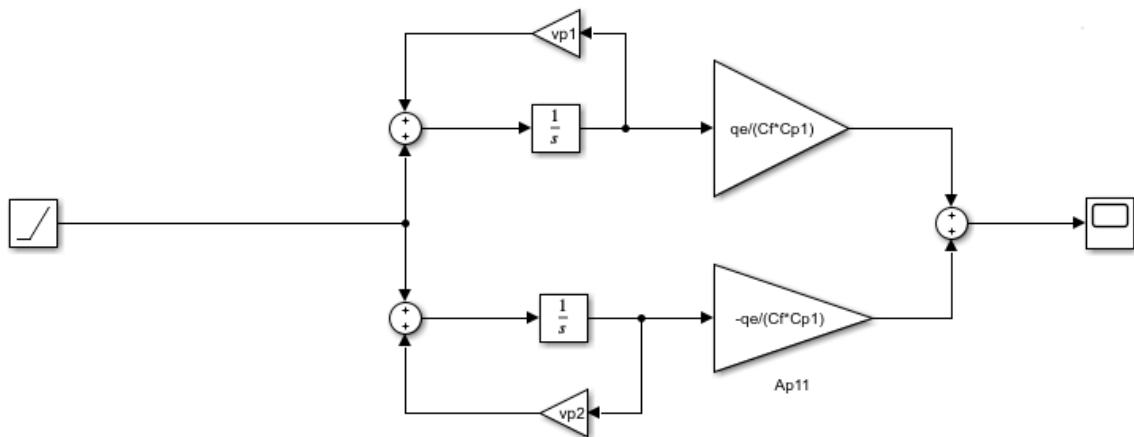
Si $s=\lambda_2$

$$B = \frac{K+J}{(\lambda_2-\lambda_1)} = \frac{K+J}{-\sqrt{H^2+4*I}}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{F}{2} * \left(\frac{-2}{C_f} + \frac{1}{C_{p1}} + \sqrt{\frac{4 * C_{p1}^2 - 8 * C_{p1} * C_f + C_f^2}{C_f^2 * C_{p1}^2}} \right) & 0 \\ 0 & \frac{F}{2} * \left(\frac{-2}{C_f} + \frac{1}{C_{p1}} - \sqrt{\frac{4 * C_{p1}^2 - 8 * C_{p1} * C_f + C_f^2}{C_f^2 * C_{p1}^2}} \right) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1 * K + J}{\sqrt{H^2 + 4 * I * \lambda_1}} & \frac{\lambda_2 * K + J}{-\sqrt{H^2 + 4 * I * \lambda_2}} \end{bmatrix}$$



Clasificación de la función de transferencia de θ_{p1} :

Para la clasificación, primero obtenemos la función de transferencia en el dominio del tiempo:

$$FT = \frac{q_E}{C_F + C_{p1}} * \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{(s-H)} \right)$$

$$y(t) = \frac{q_E}{C_F + C_{p1}} * (e^{0*t} - e^{H*t})$$

$$y(t) = \frac{q_E}{C_F + C_{p1}} * \left(-e^{\frac{-A_{p1} * t * (C_F + C_{p1})}{R_{p1} * C_{p1} * C_f}} + 1 \right)$$

Clasificación respecto de la continuidad:

Dado que nuestra función de transferencia es una función exponencial, es continua, pues no hay ningún valor de t para el que no haya imagen

Clasificación respecto de la analiticidad:

Para lograr ser una función analítica, la nuestra debe ser continua y derivable en su dominio de estudio, en este caso $t \in \mathbb{R}$.

Dado nuevamente a que la nuestra es una función exponencial desplazada, es continua y como no contiene puntos angulosos, es derivable. Por lo tanto, es analítica.

Clasificación respecto de la linealidad:

Partiendo del sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{-A_{p1} * (C_f + C_{p1})}{R_{p1} * C_{p1} * C_f} * x_2 \end{aligned}$$

Demostraciones:

Demostración de Homogeneidad de \dot{x}_1 :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ A * \dot{x}_1 &= A * x_{A2} \end{aligned}$$

Demostración de Homogeneidad de \dot{x}_2 :

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \frac{-A_{p1} * (C_f + C_{p1})}{R_{p1} * C_{p1} * C_f} * x_2 \\ A * \dot{x}_2 &= \frac{-A_{p1} * (C_f + C_{p1})}{R_{p1} * C_{p1} * C_f} * (A * x_2) \\ A * \dot{x}_2 &= A * \left(\frac{-A_{p1} * (C_f + C_{p1})}{R_{p1} * C_{p1} * C_f} * x_2 \right) \end{aligned}$$

Demostración de Superposición de \dot{x}_1 :

$$\dot{x}_{11} = x_{21} \text{ y } \dot{x}_{12} = x_{22}$$

$$x_{21} + x_{22} = x_{21} + x_{22}$$

$$\dot{x}_{11} + \dot{x}_{12} = x_{21} + x_{22}$$

Demostración de Superposición de \dot{x}_2 :

$$\dot{x}_{21} = H * x_{21} \text{ y } \dot{x}_{22} = H * x_{22}$$

$$H * x_{21} + H * x_{22} = H * (x_{21} + x_{22})$$

$$\dot{x}_{21} + \dot{x}_{22} = H * (x_{21} + x_{22})$$

De esta forma se demuestra que el sistema cumple con las condiciones de homogeneidad y superposición y por lo tanto es lineal.

Clasificación respecto de la Varianza en el tiempo:

Hipótesis:

$$\text{Si } n_2(t) = n_1(t - t_0) \Rightarrow F(n_2(t)) = F(n_1(t - t_0))$$

Demostración:

$$F(n_2(t)) = \frac{q_E}{C_F + C_{p1}} * \left(1 - e^{\frac{-A_{p1} * (C_F + C_{p1}) * n_2(t)}{R_{p1} * C_{p1} * C_f}} \right)$$

$$F(n_1(t - t_0)) = \frac{q_E}{C_F + C_{p1}} * \left(1 - e^{\frac{-A_{p1} * (C_F + C_{p1}) * n_1(t - t_0)}{R_{p1} * C_{p1} * C_f}} \right) = \frac{q_E}{C_F + C_{p1}} * \left(1 - e^{\frac{-A_{p1} * (C_F + C_{p1}) * n_2(t)}{R_{p1} * C_{p1} * C_f}} \right)$$

$$F(n_1(t - t_0)) = F(n_2(t))$$

En conclusión, el sistema θ_{p1} es invariante en el tiempo

Clasificación respecto de la causalidad:

Ateniéndonos a la definición de sistema causal: "Un sistema es causal si no depende de valores futuros de las entradas para determinar las salidas", nuestro sistema es causal.

Clasificación respecto de si tiene o no memoria:

El sistema es sin memoria porque la salida depende sólo de la entrada en ese mismo instante de tiempo.

Esto se entiende dado que no necesitamos darle otro valor más que el de la variable t como entrada a la función para obtener un resultado, no necesitamos conocimiento de entradas anteriores ni posteriores.

Clasificación respecto de la inversibilidad:

$$- \left(\frac{C_f + C_{p1}}{q_E} * y(t) \right) + 1 = e^{\frac{-A_{p1} * t * (C_F + C_{p1})}{R_{p1} * C_{p1} * C_f}}$$

$$- \frac{R_{p1} * C_{p1} * C_f}{A_{p1} * (C_F + C_{p1})} * \ln \left(- \left(\frac{C_f + C_{p1}}{q_E} * y \right) + 1 \right) = t$$

En conclusión, el sistema es inversible.

Clasificación de la función de transferencia de θ_f :

Para la clasificación, primero obtenemos la función de transferencia en el dominio del tiempo, debido a la complejidad de su cálculo se hizo en matlab con el siguiente script:

```
syms s t;
qE = sym('qE');
Cf = sym('Cf');
Cp1 = sym('Cp1');
Ap1 = sym('Ap1');
```

```

Rp1 = sym('Rp1');
F = Ap1/Rp1;
num = ((s*qE)/Cf)+((qE*F)/(Cp1*Cf));
den = s^2+s*F*(2/Cf+1/Cp1)+F^2/(Cf*Cp1);
fun = num/den;
ilaplace(fun)

```

Y el resultado fue:

$$(qE \cdot \exp(-(t(Ap1 \cdot Cf \cdot Rp1 + 2 \cdot Ap1 \cdot Cp1 \cdot Rp1))/(2 \cdot Cf \cdot Cp1 \cdot Rp1^2)) \cdot (\cosh((Ap1 \cdot t(Cf^2/4 + Cp1^2)^{1/2})/(Cf \cdot Cp1 \cdot Rp1)) + (Cf \cdot Cp1 \cdot Rp1 \cdot \sinh((Ap1 \cdot t(Cf^2/4 + Cp1^2)^{1/2})/(Cf \cdot Cp1 \cdot Rp1)) \cdot (Ap1/(Cp1 \cdot Rp1) - (Ap1 \cdot Cf \cdot Rp1 + 2 \cdot Ap1 \cdot Cp1 \cdot Rp1)/(2 \cdot Cf \cdot Cp1 \cdot Rp1^2)))/(Ap1 \cdot (Cf^2/4 + Cp1^2)^{1/2}))) / Cf$$

Debido a la notoria complejidad de la función y lo engorroso que sería trabajar con esta, decidimos agrupar las constantes bajo nuevos nombres (específicamente los polos y los residuos de la función luego de aplicar suma de fracciones parciales), de la forma:

```

syms s t;
A = sym('A');
B = sym('B');
p1 = sym('p1');
p2 = sym('p2');
F = (A*s/(s-p1))+(B/(s-p2));
ilaplace(F)

```

Este script nos dio como resultado:

$$B \cdot \exp(p2 \cdot t) + A \cdot \text{dirac}(t) + A \cdot p1 \cdot \exp(p1 \cdot t)$$

Esta última, será la forma de la función de transferencia con la que trabajaremos para θ_f

Clasificación respecto de la continuidad:

Dado que nuestra función de transferencia es una función exponencial, sumada a una delta dirac, es continua en cualquier punto distinto de $t=0$, pues en $t=0$ delta dirac vale infinito, y en el resto de puntos, todos los valores tienen imagen

Clasificación respecto de la analiticidad:

Para lograr ser una función analítica, la nuestra debe ser continua y derivable en su dominio de estudio, en este caso $\{ t \in \mathbb{R} \Rightarrow t > 0 \}$.

Dado nuevamente a que la nuestra es una función exponencial desplazada, es continua y como no contiene puntos angulosos, es derivable. Por lo tanto, es analítica.

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ \infty & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\theta(t) = B * e^{\lambda_2 * t} + A * \text{dirac}(t) + A * \lambda_2 * e^{\lambda_1 * t}$$

$$t = 0 \Rightarrow \theta(t) = \infty$$

$$t > 0 \Rightarrow \theta(t) = \theta(t) = B * e^{\lambda_2 * t} + A * \lambda_2 * e^{\lambda_1 * t}$$

Clasificación respecto de la linealidad:

Partiendo del sistema de ecuaciones:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{-F}{C_f + C_{p1}} * x_1 - \left(\frac{2*F}{C_f} + \frac{F}{C_{p1}} \right) * x_2$$

Demostraciones:

Homogeneidad para \dot{x}_1 :

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$A * \dot{x}_1 = A * x_2$$

Homogeneidad para \dot{x}_2 :

$$\dot{x}_2 = \frac{-F}{C_f + C_{p1}} * x_1 - \left(\frac{2*F}{C_f} + \frac{F}{C_{p1}} \right) * x_2$$

$$A * \dot{x}_2 = \frac{-F}{C_f + C_{p1}} * (A * x_1) - \left(\frac{2*F}{C_f} + \frac{F}{C_{p1}} \right) * (A * x_2)$$

$$A * \dot{x}_2 = A * \left(\frac{-F}{C_f + C_{p1}} * x_1 - \left(\frac{2*F}{C_f} + \frac{F}{C_{p1}} \right) * x_2 \right)$$

Superposición para \dot{x}_1 :

$$\dot{x}_{11} = x_{21} \text{ y } \dot{x}_{12} = x_{22}$$

$$x_{21} + x_{22} = x_{21} + x_{22}$$

$$\dot{x}_{11} + \dot{x}_{12} = x_{21} + x_{22}$$

Superposición para \dot{x}_2 :

$$\dot{x}_{21} = \frac{-F}{C_f + C_{p1}} * x_{11} - \left(\frac{2*F}{C_f} + \frac{F}{C_{p1}} \right) * x_{21} \text{ y } \dot{x}_{22} = \frac{-F}{C_f + C_{p1}} * x_{12} - \left(\frac{2*F}{C_f} + \frac{F}{C_{p1}} \right) * x_{22}$$

$$\frac{-F}{C_f + C_{p1}} * x_{11} - \left(\frac{2*F}{C_f} + \frac{F}{C_{p1}} \right) * x_{21} + \frac{-F}{C_f + C_{p1}} * x_{12} - \left(\frac{2*F}{C_f} + \frac{F}{C_{p1}} \right) * x_{22} =$$

$$\frac{-F}{C_f + C_{p1}} * (x_{11} + x_{12}) - \left(\frac{2*F}{C_f} + \frac{F}{C_{p1}} \right) * (x_{21} + x_{22})$$

$$x'_{21} + x'_{22} = \frac{-F}{c_f + c_{p1}} * (x_{11} + x_{12}) - \left(\frac{2*F}{c_f} + \frac{F}{c_{p1}} \right) * (x_{21} + x_{22})$$

De esta forma se demuestra que el sistema cumple con las condiciones de homogeneidad y superposición y por lo tanto es lineal.

Clasificación respecto de la Varianza en el tiempo:

Hipótesis:

$$\text{Si } n_2(t) = n_1(t - t_0) \Rightarrow F(n_2(t)) = F(n_1(t - t_0))$$

Demostración:

$$F(n_2(t)) = B * e^{\lambda_2 * n_2(t)} + A * \lambda_1 * e^{\lambda_1 * n_2(t)}$$

$$F(n_1(t - t_0)) = B * e^{\lambda_2 * n_1(t-t_0)} + A * \lambda_1 * e^{\lambda_1 * n_1(t-t_0)} = B * e^{\lambda_2 * n_2(t)} + A * \lambda_1 * e^{\lambda_1 * n_2(t)}$$

$$F(n_1(t - t_0)) = F(n_2(t))$$

En conclusión, el sistema θ_f es invariante en el tiempo

Clasificación respecto de la causalidad:

Como dijimos para la función de transferencia anterior, ateniéndonos a la definición de sistema causal: "Un sistema es causal si no depende de valores futuros de las entradas para determinar las salidas", nuestro sistema es causal.

Clasificación respecto de si tiene o no memoria:

El sistema es sin memoria debido a que la salida sólo depende de la entrada en ese mismo instante de tiempo.

Esto se entiende dado que no necesitamos darle otro valor más que el de la variable t como entrada a la función para obtener un resultado, no necesitamos conocimiento de entradas anteriores ni posteriores.

Clasificación respecto de la inversibilidad:

No se puede conseguir t en función de y , por lo que se concluye que no es inversible.

Análisis de Estabilidad para la función θ_{p1} :

Partiendo de la función de transferencia que obtuvimos al principio determinamos que:

$$FT = \frac{q_E}{c_f + c_{p1}} * \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{(s-H)} \right) \text{ tal que } H = - \frac{A_{p1}}{R_{p1}} * \frac{c_f + c_p}{c_f * c_p}$$

Los polos de la función son: $s=0$ y $s=H$

No tiene ceros debido a que los polinomios del numerador son de grado cero

Es una función de tipo 1

Gráficas de trayectorias

$$x_1'(t) = e^{0*t} * 1$$

$$x_2'(t) = e^{t*H} * 1$$

En ambos casos, $x_1'(0)$ y $x_2'(0)$ son 1 debido a que no hay un término de entrada en ninguno de los casos. Por este mismo motivo sabemos que el punto de equilibrio es (0;0)

Para la realización de las gráfica se utilizaron datos de dos ejemplos para que fuera apreciable:

Antes de pasar al ejemplo, pondremos H en términos que se puedan obtener:

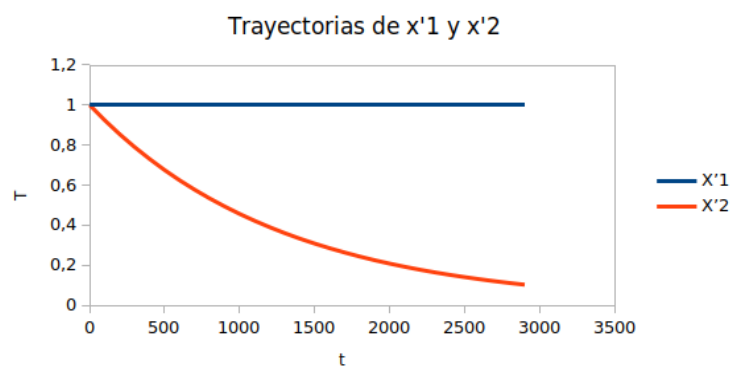
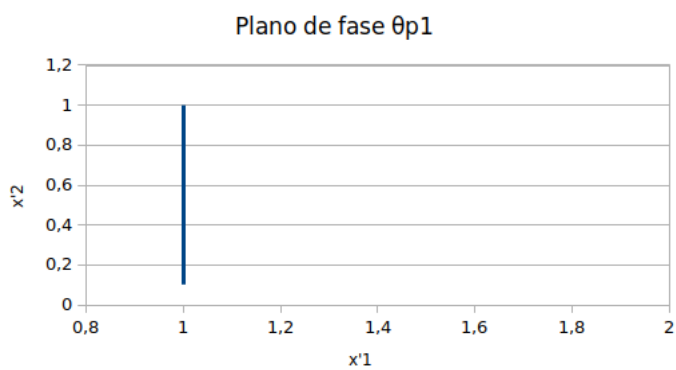
$$H = - \frac{K * A_{p1} * (c_{p1} * m_{p1} + c_f * m_f)}{e * c_{p1} * m_{p1} * c_f * m_f}$$

Ejemplo 1: Pared de ladrillo sólido de 2m² de superficie y 0,2m de grosor. Como es de ladrillo sólido, su calor específico es de 900[J]/([Kg]*[K°]), y conociendo su densidad (2000kg/m³) y el volumen de la pared (0,4m³), sabemos que su masa es de 800kg. Finalmente su coeficiente de conductividad es de 0,75W/(m*K°).

En cuanto al fluido en su interior, será aire. O sea, tendrá un calor específico de 1005[J]/([Kg]*[K°]), y como su volumen será de 8m³ y su densidad 1,2041kg/m³, por lo que su masa será 9,6328kg.

t	X'1	X'2
0	1	1
100	1	0,92448977304769
200	1	0,85468134046977
300	1	0,790144158478993
400	1	0,730480193747202
500	1	0,675321468533184
600	1	0,624327791178476
700	1	0,577184657973955
800	1	0,53360131345695
900	1	0,493308957175765

1000	1	0,456059085861816
1100	1	0,421621960784727
1200	1	0,389785190837795
1300	1	0,360352422614983
1400	1	0,333142129400511
1500	1	0,307986491602103
1600	1	0,284730361722983
1700	1	0,263230307489067
1800	1	0,243353727229841
1900	1	0,224978032057025
2000	1	0,207989889797115
2100	1	0,192284526014749
2200	1	0,177765077815958
2300	1	0,16434199644588
2400	1	0,151932494996456
2500	1	0,140460037817843
2600	1	0,129853868484488
2700	1	0,120048573404589
2800	1	0,110983678381507
2900	1	0,102603275638917

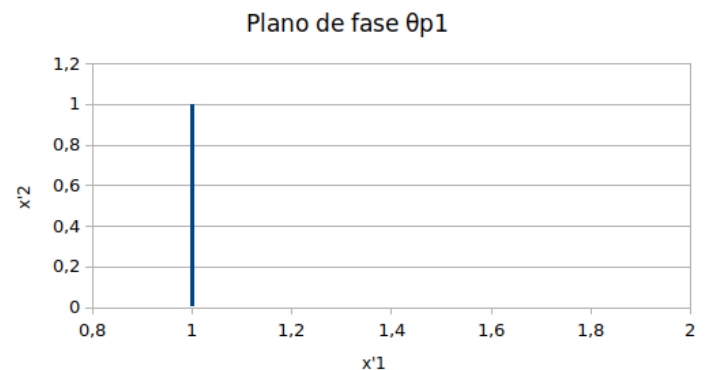
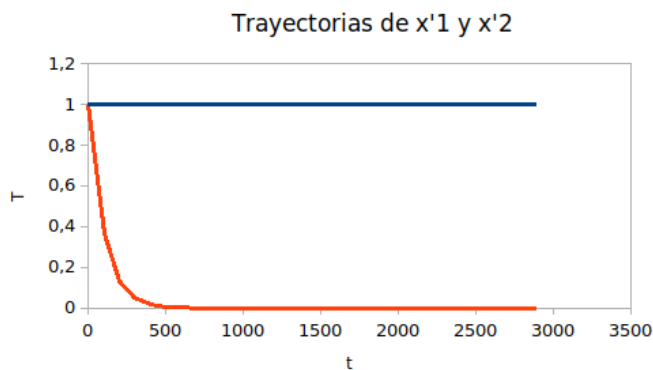


contacto 0.01m^3 su masa es equivalente a 25Kg por pared y para finalizar disponemos de su coeficiente de conductividad como 1,05 W/mK.

En el recinto interior tendrá agua, la cual posee un calor específico de 4180 J/(Kg*K), un volumen de 0.9412m³, contando con una densidad de 1000kg/m³ ello nos da una masa de 941,2kg.

t	X'1	X'2
0	1	1
100	1	0,604914052753276
200	1	0,365921011218393
300	1	0,221350761883695
400	1	0,133898186451091
500	1	0,080996894622444
600	1	0,048996159786492
700	1	0,029638465585794
800	1	0,017928724334891
900	1	0,010845337298115
1000	1	0,006560496938479
1100	1	0,003968536791131
1200	1	0,002400623673823
1300	1	0,001452170995668
1400	1	0,00087843864228
1500	1	0,000531379879197
1600	1	0,000321439156277
1700	1	0,000194443062737
1800	1	0,00011762134111
1900	1	7,11508021410601E-05
2000	1	4,30401200797951E-05
2100	1	2,60355734684565E-05
2200	1	1,57492842625597E-05
2300	1	9,52696337122839E-06

2400	1	5,76299402332177E-06
2500	1	3,48611607064048E-06
2600	1	2,10880060065946E-06
2700	1	1,27564311779346E-06
2800	1	7,71654448251264E-07
2900	1	4,66784619616765E-07



Como el punto de equilibrio es $(k; 0) // k \in \mathbb{R}$, nuestro punto de equilibrio es realmente una recta, o sea que nuestro sistema es estable, puesto que los gráficos plano de fase de ambos ejemplos del se dirigen hacia la recta $x'1$, que son nuestros múltiples puntos de equilibrio.

Para continuar con el análisis, como el denominador de nuestra función era de segundo orden decidimos probar poner la función de transferencia en términos de K , ω y ξ . Pero resultó un absurdo matemático.

$$\theta_{p1} = \frac{q_E * A_{p1}}{R_{p1} * C_{p1} * C_f} * \frac{1}{s^2 - H * s} = \frac{K * w_n^2}{s^2 + 2 * \xi * w_n * s + w_n^2}$$

Entonces $w_n = 0$

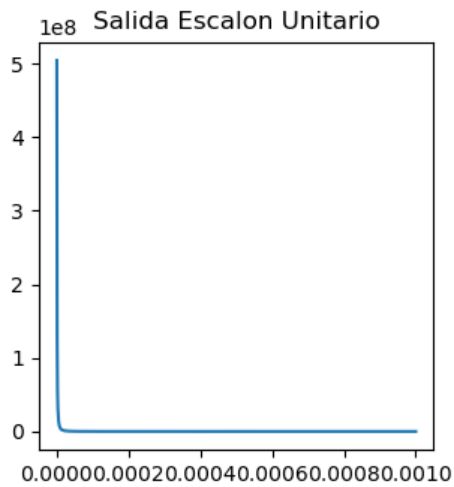
$$\frac{q_E * A_{p1}}{R_{p1} * C_{p1} * C_f} = K * w_n^2 = K * 0 \Rightarrow \text{Absurdo}$$

Finalmente, no se puede realizar el método de Ruth Hurwitz debido a que la función de transferencia de θ_{p1} no cumplía con la condición necesaria de que el polinomio del denominador esté completo:

$$\theta_{p1} = \frac{\frac{q_E}{(A_{p1} * C_{p1} * C_f)}}{s^2 + \frac{C_f + C_{p1}}{A_{p1} * C_{p1} * C_f} * s}$$

Respuesta del sistema frente a distintas entradas θ_{p1} :

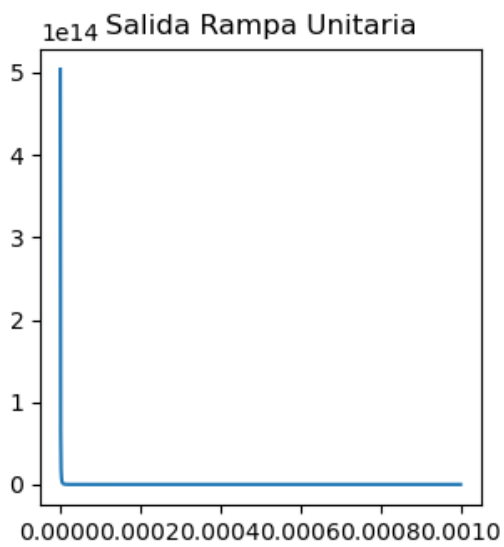
Entrada escalón unitario:



$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} T(s) = \infty$$

$$ess = 1 / 1 + k_p = 0$$

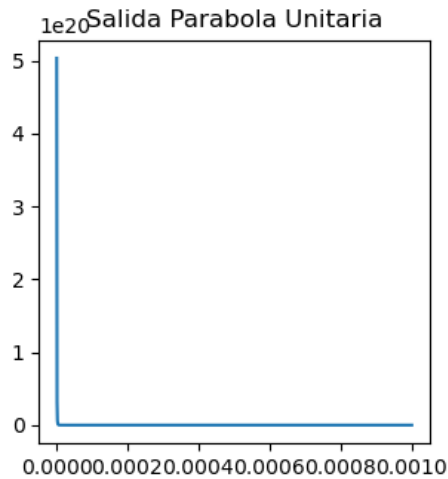
Entrada rampa unitaria:



$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} T(s) * s = 5.0566 * 10^{-4}$$

$$ess = 1 / k_v = 1977.608$$

Entrada parábola unitaria:



$$k_a = \lim_{s \rightarrow 0} T(s) * s^2 = 0$$

$$ess = 1 / k_a = \infty$$

Como conclusión, podemos ver que al ser nuestra función de transferencia de tipo 1, la entrada que nos permite obtener un error finito y no nulo es la rampa unitaria

Análisis de respuesta de Nyquist para $\theta p1$:

Primero obtenemos los componentes para el plano complejo del dominio

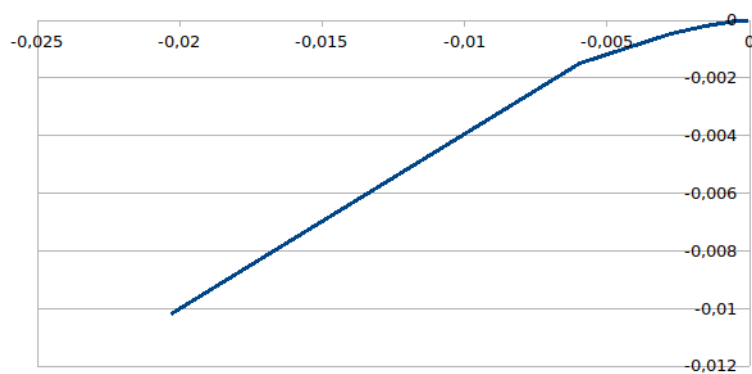
$$F(\omega) = \frac{qE * Ap1}{Rp1 * Cp1 * Cf} * \left(\frac{-1}{\omega^2 + H^2} + \frac{H}{\omega^3 + H^2 * \omega} \right)$$

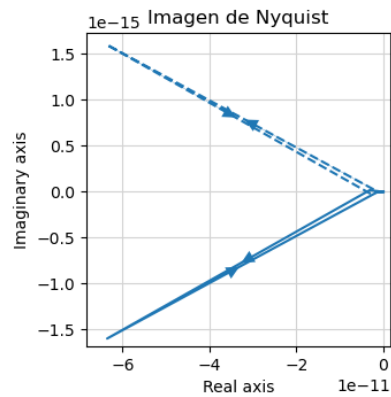
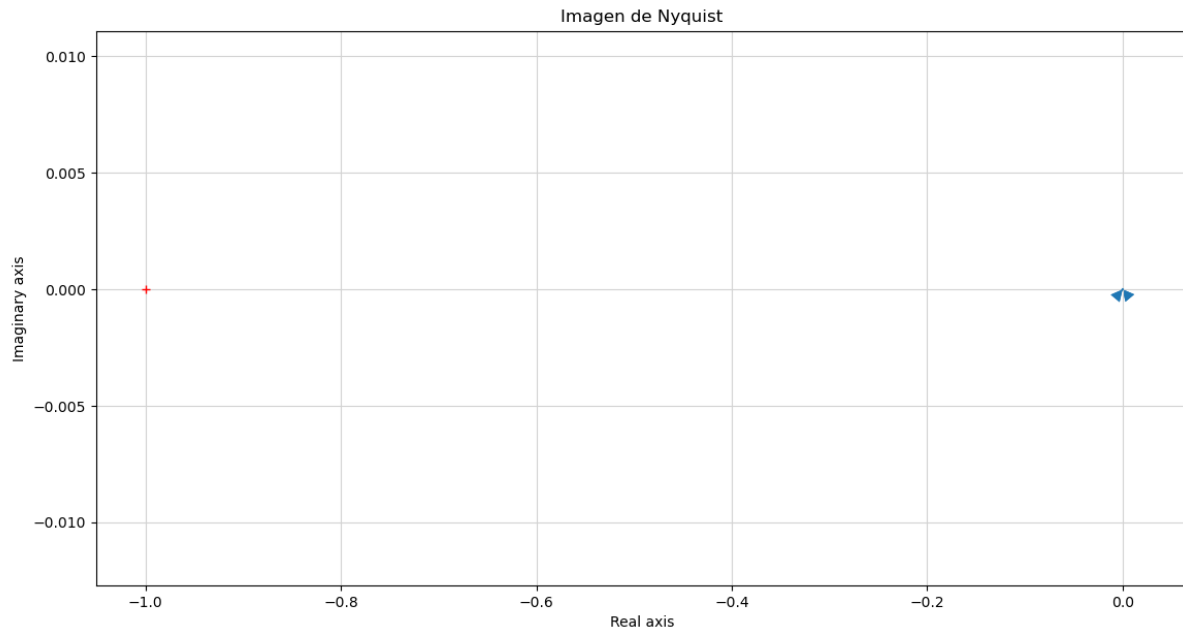
Luego, continuando con nuestro segundo ejemplo de la pecera obtenemos lo siguiente:

w	Real	Imaginario
0	-0,100595320757088	infinito
0,01	-0,020290980684559	-0,010199644790634
0,02	-0,005976948336353	-0,001502213000704
0,03	-0,002747099843723	-0,000460293878776
0,04	-0,001563928599332	-0,000196534564286
0,05	-0,001006547774215	-0,000101192051004
0,06	-0,00070113513346	-5,87398035174256E-05
0,07	-0,00051607398608	-3,70591912980558E-05
0,08	-0,000395594804959	-2,48566503162464E-05
0,09	-0,000312826925621	-1,7472040475551E-05

0,1	-0,000253539614569	-1,27446477287392E-05
0,11	-0,000209628567976	-9,57943273851651E-06
0,12	-0,000176204875629	-7,3810591420389E-06
0,13	-0,000150177979071	-5,80690757184135E-06
0,14	-0,000129516831834	-4,65029160228641E-06
0,15	-0,000112842276887	-3,78148682413795E-06
0,16	-9,91912561916563E-05	-3,11627243163995E-06
0,17	-8,78748130755062E-05	-2,59834911628145E-06
0,18	-7,83895607240506E-05	-2,18911076006515E-06
0,19	-7,03607932176622E-05	-1,86148326367003E-06
0,2	-6,35049466489264E-05	-1,59609806035675E-06
0,21	-5,76042395164127E-05	-1,37885044224911E-06
0,22	-5,24891778515269E-05	-1,19930349566011E-06
0,23	-4,80262566224822E-05	-1,04962196663141E-06
0,24	-4,41091658128326E-05	-9,23846063874653E-07
0,25	-4,0652404718099E-05	-8,17387970459684E-07
0,26	-3,75865793037901E-05	-7,26677084444326E-07
0,27	-3,48548941573124E-05	-6,48906335111826E-07
0,28	-3,24105044379281E-05	-5,81848299095515E-07
0,29	-3,02144950751862E-05	-5,23720233798225E-07

Camino de Nyquist





Siendo que no hay ningún polo en semiplano real positivo del dominio ($P=0$), y que en la imagen la trayectoria no encierra en ningún momento el punto $(-1;0)$, o sea $n=0$, podemos concluir entonces que $Z=0$ y por ende que el sistema es estable

Análisis de Observabilidad y Controlabilidad de θ_{p1} :

Hacemos el análisis a partir de la FCO de la función θ_{p1} :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{-A_{p1} * (C_f + C_{p1})}{R_{p1} * C_f * C_{p1}} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{q_E * A_{p1}}{R_{p1} * C_f * C_{p1}} \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 1]$$

$$C = [B|AB] = \begin{bmatrix} \frac{q_E * A_{p1}}{R_{p1} * C_f * C_{p1}} & 0 \\ 1 & \frac{q_E * A_{p1} - A_{p1} * (C_f + C_{p1})}{R_{p1} * C_f * C_{p1}} \end{bmatrix}$$

$$|C| = \frac{q_E * A_{p1} * (q_E * A_{p1} - A_{p1} * (C_f + C_{p1}))}{R_{p1} * C_f * C_{p1}}$$

$|C|$ será distinto de 0 si $A_{p1} * (C_f + C_{p1}) \neq q_E * A_{p1}$. En ese caso el sistema será controlable, caso contrario el sistema será no controlable

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{-A_{p1} * (C_f + C_{p1})}{R_{p1} * C_f * C_{p1}} \end{bmatrix}$$

$$|O| = -1$$

Como $|O| \neq 0$, el sistema es observable

Análisis de Estabilidad para la función θ_f :

$$FT = \frac{(s * q_E * C_{p1} + q_E * F) * \frac{1}{(C_f * C_{p1})}}{(s^2) + s * B + C}$$

$$B = \left(\frac{2 * F}{C_f} + \frac{F}{C_{p1}} \right)$$

$$C = \frac{F^2}{C_f * C_{p1}}$$

$$F = \frac{A_{p1}}{R_{p1}}$$

$$\text{Los polos de la función son: } s_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4 * C}}{2} \text{ y } s_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4 * C}}{2}$$

$$\text{Los ceros de la función son: } s = \frac{-F}{C_{p1}}$$

Es una función de tipo 0

Para conseguir $x_1(t)$ y $x_2(t)$, primero calculamos $(sI-A)$, y luego ejecutamos los siguientes scripts en matlab para conseguir $(sI-A)^{-1}$ y después para conseguir las antitransformadas de Laplace.

Como nuestras condiciones iniciales eran $x_1(0)=x_2(0)=1$, al multiplicar ambas ecuaciones por 1 no se modificaron.

Scripts:

```
clear;
```

```
syms s f Cf Cp1
```

```
p1=s;
```

```
p2=-1;
```

```
p3=f/(Cf*Cp1)
```

```
p4=s+(((2*f)/Cf) + (f/Cp1))
```

```
r1= (Cf*f + 2*Cp1*f + Cf*Cp1*s)/(f + Cf*f*s + 2*Cp1*f*s + Cf*Cp1*s^2);
```

```
r2= (Cf*Cp1)/(f + Cf*f*s + 2*Cp1*f*s + Cf*Cp1*s^2);
```

```
r3= -f/(f + Cf*f*s + 2*Cp1*f*s + Cf*Cp1*s^2);
```

```
r4= (Cf*Cp1*s)/(f + Cf*f*s + 2*Cp1*f*s + Cf*Cp1*s^2);
```

```
disp("r1:");
```

```
inversaR1 =(ilaplace(r1))
```

```
disp("-----");
```

```
pause;
```

```
disp("r2:");
```

```
inversaR2 =(ilaplace(r2))
```

```
disp("-----");
```

```
pause;
```

```
disp("r3:");
```

```
inversaR3 =(ilaplace(r3))
```

```
disp("-----");
```

```
pause;
```

```
disp("r4:");
```

```
inversaR4 =(ilaplace(r4));
```

```
disp(inversaR4);
```

```
disp("-----");
```

```
pause;
```

```
disp("Los X")
```

```
x1= inversaR1 + inversaR2;
```

```
x2= inversaR3 + inversaR4;
```

```
disp(x1);
```

```
disp(x2);
```

```
x1 : exp(-(t(Cff + 2Cp1f))/(2CfCp1))(cosh(((Cf^2f^2)/4 + CfCp1f^2 - CfCp1f + Cp1^2f^2)^(1/2))/(CfCp1)) + (sinh(((Cf^2f^2)/4 + CfCp1f^2 - CfCp1f +
```

$$Cp1^{2f^2}^{(1/2)} / (CfCp1) (Cff + 2Cp1f) / (2((Cf^2f^2)/4 + CfCp1f^2 - CfCp1f + Cp1^{2f^2}^{(1/2)})) + (2CfCp1 \exp(-(t(Cff + 2Cp1f)) / (2CfCp1))) \sinh((t(Cf^2f^2 + 4CfCp1f^2 - 4CfCp1f + 4Cp1^{2f^2}^{(1/2)}) / (2CfCp1))) / (Cf^2f^2 + 4CfCp1f^2 - 4CfCp1f + 4Cp1^{2f^2}^{(1/2)})^{(1/2)}$$

$$x2: \exp(-(t(Cff + 2Cp1f)) / (2CfCp1)) (\cosh((t((Cf^2f^2)/4 + CfCp1f^2 - CfCp1f + Cp1^{2f^2}^{(1/2)}) / (CfCp1)) - (\sinh((t((Cf^2f^2)/4 + CfCp1f^2 - CfCp1f + Cp1^{2f^2}^{(1/2)}) / (CfCp1) (Cff + 2Cp1f) / (2((Cf^2f^2)/4 + CfCp1f^2 - CfCp1f + Cp1^{2f^2}^{(1/2)})) - (2f \exp(-(t(Cff + 2Cp1f)) / (2CfCp1))) \sinh((t(Cf^2f^2 + 4CfCp1f^2 - 4CfCp1f + 4Cp1^{2f^2}^{(1/2)}) / (2CfCp1))) / (Cf^2f^2 + 4CfCp1f^2 - 4CfCp1f + 4Cp1^{2f^2}^{(1/2)})^{(1/2)}$$

Análisis de la función cuadrática:

$$s^2 + Bs + C = s^2 + 2\varepsilon\omega s + \omega$$

Dando como resultado que ω es: $\sqrt{C} = \frac{Ap1}{Rp1 * \sqrt{Cf * Cp1}}$

Y que ε sera $\frac{B}{2\sqrt{C}} = \frac{F(\frac{2}{Cf} + \frac{1}{Cp1})}{\frac{2F}{\sqrt{Cf * Cp1}}} = \frac{(2 * Cp1 + Cf) * \sqrt{Cf * Cp1}}{2 * Cp1 * Cf}$

Como Cp1 y Cf son coeficientes positivos, el ε debe ser positivo, ni siquiera puede ser 0 porque eso implicaría que $2Cp1 = -Cf$, y como ambos tienen el mismo signo, no podría ocurrir. Entonces:

Si $\sqrt{C_{p1}} * \sqrt{C_f} < C_{p1} + \frac{\sqrt{C_f}}{2}$ entonces $0 < \varepsilon < 1$, las raíces son complejas conjugadas con parte real negativa. Esto muestra un comportamiento subamortiguado estable.

Si $\sqrt{C_{p1}} * \sqrt{C_f} = C_{p1} + \frac{\sqrt{C_f}}{2}$ entonces $\varepsilon = 1$, o sea las raíces son reales iguales y negativas y la respuesta del sistema es una expresión exponencial con signo negativo. Esto muestra un comportamiento monotónico estable crítico o Amortiguado crítico porque si se disminuye el valor del coeficiente de amortiguamiento la respuesta es de tipo subamortiguado y si, por lo contrario, se aumenta el sistema es más sobreamortiguado.

Si $\sqrt{C_{p1}} * \sqrt{C_f} > C_{p1} + \frac{\sqrt{C_f}}{2}$ entonces $\varepsilon > 1$, las raíces son reales diferentes y negativas y la respuesta del sistema es un Comportamiento estable sobreamortiguado.

Cualquiera sea el caso, el sistema es estable

Análisis por el método de Ruth Hurwitz:

Para aplicar el método de Ruth Hurwitz debemos satisfacer la condición necesaria de que el polinomio denominador de la función transferencia debe estar completo y tener todos sus elementos con el mismo signo. Para esto se asume que B y C son positivos debido a que todas las variables que en estos intervienen (Ap1, Rp1, Cf y Cp1) son números positivos.

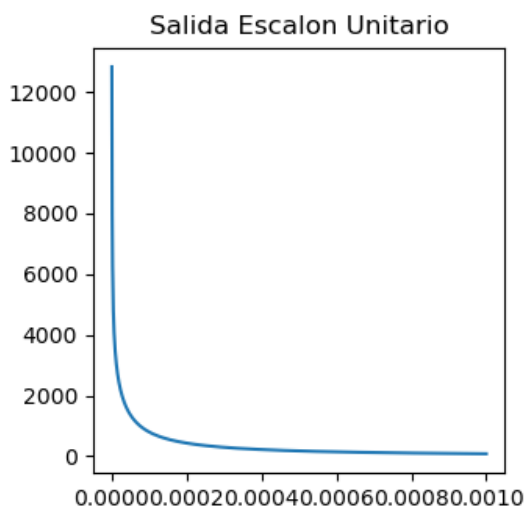
De esta forma calculamos la tabla:

$(s^2)+s*B+C$		
S_2	1	C
S_1	B	
S_0	C	

Finalmente al ser todos positivos se demuestra que el sistema es estable.

Respuesta del sistema frente a distintas entradas θ f:

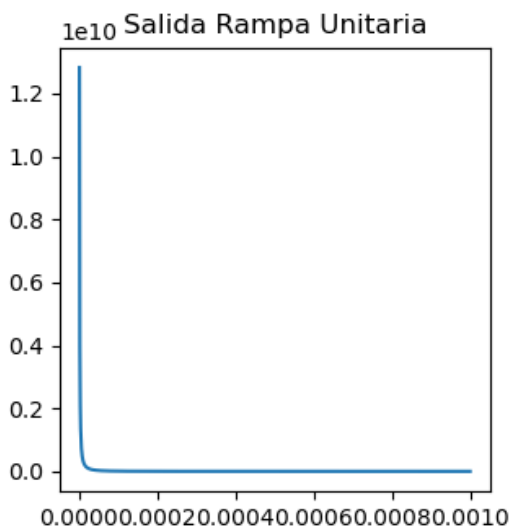
Entrada escalón unitario:



$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} T(s) = 0.009524$$

$$ess = 1 / 1 + k_p = 0.990566$$

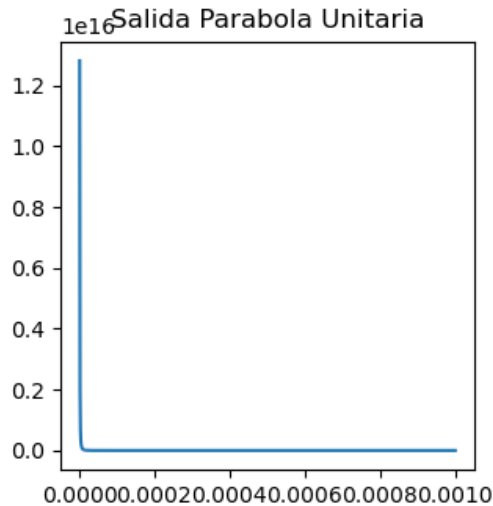
Entrada rampa unitaria:



$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} T(s) * s^2 = 0$$

$$ess = 1 / 1 + k_v = \infty$$

Entrada parábola unitaria:



$$k_a = \lim_{s \rightarrow 0} T(s) * s^2 = 0$$

$$ess = 1 / k_a = \infty$$

Como el sistema es de tipo 0, la única entrada que no nos da infinito como salida es la escalón unitario

Análisis de respuesta de Nyquist para θ_{pf} :

Primero ponemos la función en términos de w

$$F(s) = \frac{(s * q_E * C_{p1} + q_E * F) * \frac{1}{C_{p1} * C_f}}{s^2 + s * B + C}$$

$$F(w) = \frac{-w^2 * F + C * F + C_{p1} * B * w^2 + C * C_{p1} * w * i - C_{p1} * w^3 * i - F * B * w * i}{w^4 - C * w^2 - C * w^2 + C^2 + B * w^2}$$

$$F(w) = \left[\frac{(C_{p1} * B - F) * w^2 + C * F}{w^4 + (B - 2 * C) * w^2 + C^2} + \frac{-C_{p1} * w^3 + (C * C_{p1} - F * B) * w}{w^4 + (B - 2 * C) * w^2 + C^2} * i \right] * \frac{q_E}{C_{p1} * C_f}$$

t	X'1	X'2
0	19,047619047619	0

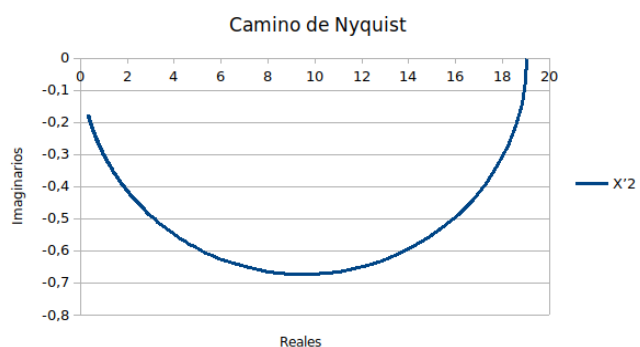
1E-07	18,9937218010903	-0,07154692603525
2E-07	18,8338447527394	-0,14188937902425
3E-07	18,5732813403459	-0,209889540754207
4E-07	18,2203747380467	-0,274535303719047
5E-07	17,7858737042795	-0,334985578771147
6E-07	17,2821623295956	-0,390598194120458
7E-07	16,7224596706815	-0,440939591637258
8E-07	16,1200745540258	-0,485778096429678
9E-07	15,4877779622555	-0,525064330332682
1E-06	14,8373276175123	-0,558903173620666
1,1E-06	14,1791531834105	-0,587521637043677
1,2E-06	13,5221902160738	-0,611236342864815
1,3E-06	12,8738382968892	-0,630423334083302
1,4E-06	12,2400132665517	-0,645491899952449
1,5E-06	11,625263522376	-0,656863201824404
1,6E-06	11,0329239235836	-0,664953794089544
1,7E-06	10,4652861449144	-0,670163676864469
1,8E-06	9,92376996441695	-0,672868262223247
1,9E-06	9,40908511712343	-0,673413536539529
2E-06	8,92137757620387	-0,67211370772786
2,1E-06	8,46035732673269	-0,669250694605595
2,2E-06	8,02540694689257	-0,665074913589251
2,3E-06	7,61567176715583	-0,659806923411862
2,4E-06	7,2301332235843	-0,653639588214501
2,5E-06	6,86766742869695	-0,646740506424575
2,6E-06	6,52709109572477	-0,639254524815455
2,7E-06	6,20719688015575	-0,631306214190548
2,8E-06	5,90678002656087	-0,62300222677681
2,9E-06	5,62465798388047	-0,614433487748903
3E-06	5,35968441431491	-0,605677196525709

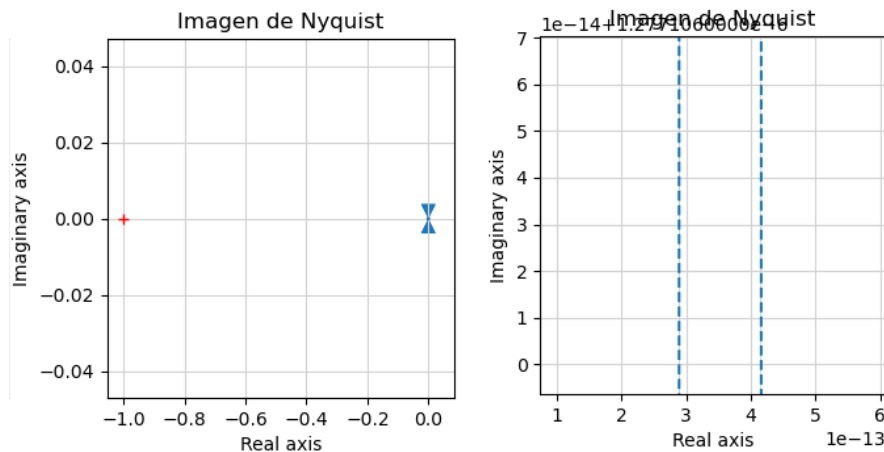
3,1E-06	5,11075879125257	-0,596798629603504
3,2E-06	4,87683257203536	-0,587852747445307
3,3E-06	4,65691274709547	-0,57888561474748
3,4E-06	4,45006340933915	-0,569935647366935
3,5E-06	4,25540585547619	-0,561034701169298
3,6E-06	4,07211762193202	-0,552209018688712
3,7E-06	3,89943076913955	-0,54348004924153
3,8E-06	3,73662965641237	-0,534865157344093
3,9E-06	3,58304839242925	-0,526378233184581
4E-06	3,43806810107677	-0,518030217651762
4,1E-06	3,30111410679614	-0,509829553136481
4,2E-06	3,17165311579153	-0,501782570063759
4,3E-06	3,04919044791823	-0,493893817925609
4,4E-06	2,93326735749804	-0,486166348490109
4,5E-06	2,82345846866079	-0,478601957870828
4,6E-06	2,71936934124353	-0,47120139325433
4,7E-06	2,62063417611867	-0,463964529298912
4,8E-06	2,52691366353179	-0,456890518528474
4,9E-06	2,43789297418491	-0,449977919443673
5E-06	2,35327989006684	-0,443224805549531
5,1E-06	2,27280307014583	-0,436628858045976
5,2E-06	2,1962104447962	-0,430187444536949
5,3E-06	2,12326773207007	-0,423897685777265
5,4E-06	2,05375706852378	-0,417756512187063
5,5E-06	1,98747574717077	-0,41176071161548
5,6E-06	1,92423505518425	-0,405906969622227
5,7E-06	1,86385920415932	-0,400191903363396
5,8E-06	1,80618434602086	-0,394612090011626
5,9E-06	1,75105766799937	-0,389164090507097
6E-06	1,69833656046823	-0,383844469321406

6,1E-06	1,64788785182325	-0,378649810818488
6,2E-06	1,59958710497803	-0,37357673271299
6,3E-06	1,55331797043527	-0,368621897054777
6,4E-06	1,50897159126974	-0,363782019106906
6,5E-06	1,46644605571802	-0,359053874431851
6,6E-06	1,4256458934109	-0,354434304455718
6,7E-06	1,38648161160481	-0,349920220741685
6,8E-06	1,34886926806839	-0,345508608170799
6,9E-06	1,31273007755887	-0,341196527199966
7E-06	1,27799004908121	-0,336981115342629
7,1E-06	1,24457965136109	-0,332859587996825
7,2E-06	1,21243350418254	-0,328829238727354
7,3E-06	1,18149009344228	-0,324887439093492
7,4E-06	1,15169150795799	-0,321031638100427
7,5E-06	1,12298319623667	-0,317259361341299
7,6E-06	1,09531374156433	-0,313568209886957
7,7E-06	1,06863465391945	-0,309955858972191
7,8E-06	1,04290017734182	-0,306420056519992
7,9E-06	1,01806711150613	-0,302958621539204
8E-06	0,99409464635713	-0,299569442425613
8,1E-06	0,970944208761091	-0,296250475191961
8,2E-06	0,948579320217451	-0,292999741648411
8,3E-06	0,926965464756082	-0,28981532755165
8,4E-06	0,906069966219533	-0,286695380737879
8,5E-06	0,885861874197312	-0,283638109252475
8,6E-06	0,866311857940772	-0,280641779486949
8,7E-06	0,84739210764336	-0,277704714332019
8,8E-06	0,829076242522125	-0,274825291354003
8,9E-06	0,811339225183135	-0,272001941000427
9E-06	0,794157281795975	-0,26923314483958

9,1E-06	0,777507827641427	-0,26651743383776
9,2E-06	0,761369397631902	-0,263853386677121
9,3E-06	0,74572158143658	-0,261239628116318
9,4E-06	0,730544962872885	-0,258674827395544
9,5E-06	0,715821063252916	-0,256157696687035
9,6E-06	0,701532288398261	-0,253686989591698
9,7E-06	0,687661879059245	-0,251261499682137
9,8E-06	0,674193864495369	-0,248880059092056
9,9E-06	0,661113018992709	-0,246541537151785
1E-05	0,648404821111394	-0,244244839069422
1,01E-05	0,636055415472243	-0,241988904656951
1,02E-05	0,624051576906238	-0,239772707100553
1,03E-05	0,612380676803934	-0,237595251774183
1,04E-05	0,601030651514188	-0,235455575095448
1,05E-05	0,589989972652925	-0,233352743422708
1,06E-05	0,579247619193026	-0,231285851992305
1,07E-05	0,568793051215973	-0,229254023894768
1,08E-05	0,558616185214679	-0,227256409088827
1,09E-05	0,548707370845018	-0,225292183452066
1,1E-05	0,539057369030992	-0,223360547867013
1,11E-05	0,52965733133536	-0,221460727341501
1,12E-05	0,520498780513858	-0,219591970162131
1,13E-05	0,511573592176968	-0,21775354707966
1,14E-05	0,502873977488587	-0,215944750525199
1,15E-05	0,494392466835884	-0,214164893856089
1,16E-05	0,486121894409271	-0,212413310630375
1,17E-05	0,478055383635581	-0,210689353908795
1,18E-05	0,470186333411546	-0,208992395583269
1,19E-05	0,46250840508821	-0,207321825730865
1,2E-05	0,455015510160344	-0,205677051992261

1,21E-05	0,447701798617977	-0,204057498973779
1,22E-05	0,440561647920064	-0,202462607672038
1,23E-05	0,433589652552977	-0,200891834920378
1,24E-05	0,42678061413898	-0,199344652856173
1,25E-05	0,42012953206211	-0,197820548408218
1,26E-05	0,413631594581088	-0,196319022803403
1,27E-05	0,407282170400774	-0,194839591091889
1,28E-05	0,401076800675591	-0,193381781690073
1,29E-05	0,395011191420004	-0,191945135940614
1,3E-05	0,389081206302751	-0,190529207688848
1,31E-05	0,383282859802997	-0,189133562874942
1,32E-05	0,377612310707941	-0,187757779141144
1,33E-05	0,372065855932718	-0,186401445453539
1,34E-05	0,366639924644598	-0,18506416173773
1,35E-05	0,361331072674614	-0,183745538527878
1,36E-05	0,356135977200788	-0,182445196628576
1,37E-05	0,351051431688081	-0,181162766789048
1,38E-05	0,346074341071104	-0,179897889389177
1,39E-05	0,341201717166464	-0,178650214136885
1,4E-05	0,336430674302411	-0,177419399776434





Siendo que no hay ningún polo en semiplano real positivo del dominio ($P=0$), y que en la imagen la trayectoria no encierra en ningún momento el punto $(-1;0)$, o sea $n=0$, podemos concluir entonces que $Z=0$ y por ende que el sistema es estable

Análisis de Observabilidad y Controlabilidad para θ_{pf} :

Hacemos el análisis a partir de la FCO de la función θ_f :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-F^2}{C_f * C_{p1}} \\ 1 & -\left(\frac{2*F}{C_f} + \frac{F}{C_{p1}}\right) \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{q_E * F}{C_f * C_{p1}} \\ \frac{q_E}{C_f} \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 1]$$

$$C = [B|AB] = \begin{bmatrix} \frac{q_E * F}{C_f * C_{p1}} & \frac{-F^2}{C_f * C_{p1}} * \frac{q_E}{C_f} \\ \frac{q_E}{C_f} & \frac{q_E * F}{C_f * C_{p1}} - \left(\frac{2 * F}{C_f} + \frac{F}{C_{p1}}\right) * \frac{q_E}{C_f} \end{bmatrix}$$

$$|C| = \frac{q_E * F}{C_f * C_{p1}} * \frac{q_E * F}{C_f * C_{p1}} - \left(\frac{2 * F}{C_f} + \frac{F}{C_{p1}}\right) * \frac{q_E}{C_f} - \left(\frac{-F^2}{C_f * C_{p1}} * \frac{q_E}{C_f} * \frac{q_E}{C_f}\right)$$

$$|C| = \left(\frac{q_E * F}{C_f * C_{p1}}\right)^2 - \left(\frac{2*F}{C_f} + \frac{F}{C_{p1}}\right) * \frac{q_E}{C_f} + \frac{F^2}{C_f * C_{p1}} * \left(\frac{q_E}{C_f}\right)^2$$

Si $\left(\frac{q_E * F}{C_f * C_{p1}}\right)^2 + \frac{F^2}{C_f * C_{p1}} * \left(\frac{q_E}{C_f}\right)^2 \neq \left(\frac{2*F}{C_f} + \frac{F}{C_{p1}}\right) * \frac{q_E}{C_f}$ podemos asumir que el determinante de C es distinto de 0 y el sistema es controlable

$$O = \begin{bmatrix} C \\ C_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -(\frac{2 * F}{C_f} + \frac{F}{C_{p1}}) \end{bmatrix}$$

$$|O| = -1$$

Como $|O| \neq 0$, el sistema es observable

Bibliografía:

<http://defensorabogado.com/penalistas/La%20capacidad%20calor%C3%ADfica%20de%20un%20ladrillo%20com%C3%BAn%20/>

<http://es.nextews.com/51b00f85-2/>

<https://esn-d.techinfus.com/kirpich/teploprovodnost-i-teploemkost/>

https://www.ohio.edu/mechanical/thermo/property_tables/air/air_Cp_Cv.html

https://es.abcdef.wiki/wiki/Density_of_air

http://www.vaxasoftware.com/doc_edu/qui/caloresph2o.pdf

<https://material-properties.org/es/vidrio-densidad-capacidad-calorifica-conductividad-termica/>

https://www.vasa.com.ar/wp-content/uploads/2019/10/VASA_-_BT_1_Tipos_de_Vidrios_ba%CC%81sicos_y_procesados_FINAL.pdf

<https://material-properties.org/es/vidrio-densidad-capacidad-calorifica-conductividad-termica/>

<https://2.bp.blogspot.com/-ikfftJHLwu0/WY4YK6J8FnI/AAAAAAAAAWQ/U16QOWONFYwV/R01OyOqxZ5-DDOIcaQwJACLCBGAs/s1600/rrr.jpg>