

# Seminarium: Programowanie w teorii typów

## Teoria typów

Wojciech Jedynek, Paweł Wieczorek

Instytut Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego

5 października 2011

# Plan

- Przypomnimy sobie ideę konstruktywizmu oraz izomorfizmu Curry'ego-Howarda.
- Zapoznamy się z podstawami teorii typów Martina-Löfa:
  - ▶ Zapoznamy się z sędami w tym systemie.
  - ▶ Sformułujemy podstawowe typy jak liczby naturalne.
  - ▶ Przebrniemy przez formalne definicje podstawowych typów zależnych:  $\Pi$ -typ,  $\Sigma$ -typ.
  - ▶ Zobaczymy jak teoria typów koduje logikę pierwszego rzędu.

# Matematyka konstruktywna

- powstały na początku poprzedniego wieku pogląd na temat fundamentów matematyki
- L.E.J.Brouwer, twórca ideologii
- empiryczna zawartość twierdzeń matematycznych
- co znaczy orzeczenie o istnieniu pewnego obiektu?
- odrzucenie dowodów przez sprowadzenie do sprzeczności
- odrzucenie idealistycznego podejścia do prawdziwości orzeczeń
- E. Bishop, konstruktywna analiza matematyczna

# Książkowy przykład twierdzenia niekonstruktywnego

## Twierdzenie

*Istnieją takie dwie liczby niewymierne  $a$  oraz  $b$ , że  $a^b$  jest liczbą wymierną.*

## Dowód.

Orzeczenie, że  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbf{Q}$  musi być prawdziwe lub musi być fałszywe.

- jeżeli jest prawdziwe to mamy szukane  $a$  oraz  $b$
- jeżeli jest fałszywe to niech  $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  oraz  $b = \sqrt{2}$ , wtedy  $a^b = 2$



Jedyne co wiemy, to to że muszą istnieć takie liczby.

## Kolejny przykład.

### Twierdzenie (klasycznie)

*Jeżeli funkcja  $f$  jest ciągła na przedziale  $[0, 1]$  oraz wartości funkcji na krańcach przedziału mają różne znaki to istnieje punkt w tym przedziale na którym funkcja się zeruje.*

### Twierdzenie (konstruktywnie)

*Jeżeli funkcja  $f$  jest ciągła na przedziale  $[0, 1]$  oraz wartości funkcji na krańcach przedziału mają różne znaki to dla każdego  $\epsilon > 0$  istnieje punkt w tym przedziale na którym bezwzględna wartość funkcji jest mniejsza od  $\epsilon$ .*

# Interpretacja Brouwer-Heyting-Kołmogorow

- $A \wedge B$  to konstrukcja składająca się z dwóch pod-konstrukcji
- $A \vee B$  to konstrukcja składająca się z lewej lub prawej pod-konstrukcji
- $A \rightarrow B$  to metoda przekształcająca konstrukcję  $B$  mając do dyspozycji  $A$
- $\perp$  absurd, konstrukcja której nie można zrealizować
- $\forall x.P(x)$  to metoda przekształcająca wartość  $a$  w konstrukcję  $P(a)$
- $\exists x.P(x)$  to konstrukcja mająca składać się ze świadka  $a$  oraz z konstrukcji  $P(a)$
- $\neg A$  to skrót od  $A \rightarrow \perp$
- Czy przy tej interpretacji wszystkie klasyczne prawa mają sens?
  - ▶  $\exists x P(x) \vee \neg \exists x P(x)$
  - ▶  $\exists x P(x) \equiv \neg(\forall x \neg P(x))$
  - ▶  $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$

# System naturalnej dedukcji

- system dowodzenia
- posługujemy się sędami  $\Gamma \vdash \varphi$
- dowód to wyprowadzenie o strukturze drzewa
  - ▶ korzeń - wniosek (sąd)
  - ▶ węzeł - reguła wnioskowania
  - ▶ liść - aksjomat
- reguły wprowadzania i eliminacji spójników logicznych

$$\frac{\frac{\frac{A \wedge B \vdash A \wedge B}{A \wedge B \vdash B} \quad \frac{A \wedge B \vdash A \wedge B}{A \wedge B \vdash A}}{A \wedge B \vdash B \wedge A}}{\vdash A \wedge B \rightarrow B \wedge A}$$

# System naturalnej dedukcji

$$I_{\wedge} \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \quad E_{\wedge 1} \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}$$

$$I_{\vee 1} \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \quad E_{\vee} \frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}$$

$$I_{\rightarrow} \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \quad E_{\rightarrow} \frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

$$AX \frac{}{\Gamma, A \vdash A}$$



# Izomorfizm Curry-Howard (proposition as types)

- Martin-Löf, Curry, Howard, deBruijn i wiele innych
- typy oznaczają formuły
- otypowane termy oznaczają dowody dla swoich typów (formuł)
- izomorfizm pomiędzy wyprowadzeniami formuł w logice intuicjonistycznej a sędami w systemie typów
- realizacja BHK

$$\text{I} \rightarrow \frac{\Gamma, x : A \vdash t : B}{\Gamma \vdash \lambda x. t : A \rightarrow B} \quad \text{E} \rightarrow \frac{\Gamma \vdash f : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash x : A}{\Gamma \vdash f x : B}$$

## System typów dla $\lambda$ -rachunku

$$I_{\wedge} \frac{\Gamma \vdash M : A \quad \Gamma \vdash N : B}{\Gamma \vdash (M, N) : A \wedge B} \quad E_{\wedge_1} \frac{\Gamma \vdash M : A \wedge B}{\Gamma \vdash \text{fst } M : A}$$

$$I_{\rightarrow} \frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x. M : A \rightarrow B} \quad E_{\rightarrow} \frac{\Gamma \vdash M : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash M N : B}$$

$$I_{\vee_1} \frac{\Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash \text{inl } M : A \vee B}$$

$$E_V \frac{\Gamma \vdash M : A \vee B \quad \Gamma, x : A \vdash P : C \quad \Gamma, x : B \vdash Q : C}{\Gamma \vdash \text{when } M (\lambda x. P) (\lambda x. Q) : C}$$

$$A_X \frac{}{\Gamma, x : A \vdash x : A}$$

# Teoria typów: historia, idee, początki

- Teoria typów jako logika matematyczna - B. Russel

$$A = \{w \mid w \notin w\}$$

# Teoria typów: historia, idee, początki

- Teoria typów jako logika matematyczna - B. Russel

$$A = \{w \mid w \notin w\}$$

- $\lambda$ -rachunek , funkcja jako pojęcie pierwotne - A.Church
- System typów, likwidacja paradoksu Kleene'go

$$K = \lambda x. \neg(x \ x)$$

$$(K \ K) = \neg(K \ K) = \neg\neg(K \ K) = \dots$$

# Teoria typów Martina-Löfa

- Per Martin-Löf, A Theory of Types, 1972
- Per Martin-Löf, Constructive Mathematics and Computer Programming, 1979
- Per Martin-Löf, **Intuitionistic Type Theory**, 1980
- Per Martin-Löf, Truth of a Proposition, Evidence of a Judgement, Validity of a Proof, 1985
- B. Nordström, K. Petersson, and Jan M. Smith, **Programming in Martin-Löf's Type Theory: An Introduction**, 1990

# Wyrażenia jakimi się posługujemy

- język wyrażeń:
  - ▶  $e(e')$  - aplikacja (  $e(e_1, \dots, e_n)$  skrócony zapis  $e(e_1) \dots (e_n)$  )
  - ▶  $(x)e$  - abstrakcja
  - ▶ stałe, np  $\lambda$ ,  $\Pi$ , *apply*, 0, *succ*

# Wyrażenia jakimi się posługujemy

- Pozwalamy na definiowanie nowych stałych jako makra, np

$$\textit{double} \equiv (n)(n + n)$$

$$\textit{double}(n) \equiv n + n$$

- Równość definicyjna

- ▶ relacja równoważności, kongruencja
- ▶ surowa równość na wyrażeniach
- ▶ nic nie mówi o znaczeniu
- ▶ elementy równe definicyjne traktujemy jako synonimy

$$((x)b)(a) \equiv b[x := a]$$

$$((x)b(x)) \equiv b \quad x \text{ nie występuje w } b$$

$$((x)b) \equiv (y)(b[x := y])$$

# Wzbogacony system typów o więcej sądów

- Teoria typów Martina-Löfa - system w stylu naturalnej dedukcji, w którym możemy wydawać różne sądy:
  - ▶  $A$  set - jest zbiorem
  - ▶  $a \in A$  - jest elementem zbioru
  - ▶  $a =_A b \in A$  elementy  $a$  oraz  $b$  są równe w zbiorze  $A$
  - ▶  $A = B$  - zbiory  $A$  oraz  $B$  są równymi zbiorami
- elementy zbiorów dzielimy na
  - ▶ kanoniczne - wartości (postać normalna)
  - ▶ niekanoniczne - obliczenia
- sformułowanie zbioru to
  - ▶ określenie kanonicznych elementów jakie ten zbiór zawiera
  - ▶ określenie co znaczy że dwa elementy są równe w tym zbiorze
  - ▶ określenie obliczeń



# Sądy mają więcej interpretacji

- $A$  set - jest zbiorem
  - ▶  $a \in A$  -  $a$  jest elementem zbioru
- $A$  set - jest problemem, zagadnieniem, zadaniem
  - ▶  $a \in A$  -  $a$  jest rozwiązaniem problemu  $A$
- $A$  prop - jest formułą logiczną
  - ▶  $a \in A$  -  $a$  jest dowodem propozycji  $A$
  - ▶  $A$  true - umiemy zrealizować  $A$ , istnieje dowód  $A$
- $A$  set - jest specyfikacją
  - ▶  $a \in A$  -  $a$  jest programem spełniającym specyfikację  $A$

# Reguły wnioskowania

- reguły formułowania
- reguły wprowadzania
- reguły eliminacji
- reguły równościowe

$$\frac{A \text{ set} \quad B(x) \text{ set } [x \in A]}{(\forall x \in A) B(x) \text{ set}}$$

$$\frac{A \text{ set } [\Gamma] \quad B(x) \text{ set } [x \in A, \Delta]}{(\forall x \in A) B(x) \text{ set } [\Gamma, \Delta]}$$

# Reguły wnioskowania

- reguły formułowania
- reguły wprowadzania
- reguły eliminacji
- reguły równościowe

$$\frac{A \text{ set} \quad B(x) \text{ set } [x \in A]}{(\Pi x \in A) B(x) \text{ set}}$$

$$\frac{A \text{ set } [\Gamma] \quad B(x) \text{ set } [x \in A, \Delta]}{(\Pi x \in A) B(x) \text{ set } [\Gamma, \Delta]}$$

$$\frac{A \text{ set} \quad B \text{ set}}{A \rightarrow B \text{ set}}$$

$$\frac{b(x) \in B [x \in A]}{\lambda b \in A \rightarrow B}$$

# Reguły wnioskowania

- reguły formułowania
- reguły wprowadzania
- reguły eliminacji
- reguły równościowe

$$\frac{A \text{ set} \quad B(x) \text{ set } [x \in A]}{(\Pi x \in A) B(x) \text{ set}}$$

$$\frac{A \text{ set } [\Gamma] \quad B(x) \text{ set } [x \in A, \Delta]}{(\Pi x \in A) B(x) \text{ set } [\Gamma, \Delta]}$$

$$\frac{A \text{ set} \quad B \text{ set}}{A \rightarrow B \text{ set}}$$

$$\frac{b(x) \in B [x \in A]}{\lambda b \in A \rightarrow B}$$

$$\frac{A \text{ set } [\Gamma] \quad B \text{ set } [\Delta] \quad b(x) \in B [\Theta, x \in A]}{\lambda b \in A \rightarrow B [\Gamma, \Delta, \Theta]}$$

## Zbiór liczb naturalnych

$$\begin{array}{c} \frac{}{Nat \text{ set}} \quad \frac{}{0 \in Nat} \quad \frac{n \in Nat}{succ(n) \in Nat} \\[1em] \frac{n = n' \in Nat}{succ(n) = succ(n') \in Nat} \end{array}$$

## Zbiór liczb naturalnych

$$\frac{}{Nat \text{ set}} \quad \frac{}{0 \in Nat} \quad \frac{n \in Nat}{succ(n) \in Nat}$$

$$\frac{n = n' \in Nat}{succ(n) = succ(n') \in Nat}$$

$$\frac{a \in N \quad C \quad d \in C \quad e(x, y) \in C [x \in Nat, y \in C]}{natrec(a, d, e) \in C}$$

$$\frac{C \text{ set} \quad C \quad e(x, y) \in C [x \in Nat, y \in C]}{natrec(0, d, e) = d \in C}$$

$$\frac{a \in N \quad C \text{ set} \quad d \in C \quad e(x, y) \in C [x \in Nat, y \in C(x)]}{natrec(succ(a), d, e) = e(a, natrec(a, d, e)) \in C}$$

# Zbiór liczb naturalnych

$$\frac{}{Nat \text{ set}} \quad \frac{}{0 \in Nat} \quad \frac{n \in Nat}{succ(n) \in Nat}$$

$$\frac{n = n' \in Nat}{succ(n) = succ(n') \in Nat}$$

$$\frac{a \in N \quad C(v) \text{ set } [v \in Nat] \quad d \in C(0) \quad e(x, y) \in C(succ(x)) [x \in Nat, y \in C(x)]}{natrec(a, d, e) \in C(a)}$$

$$\frac{C(v) \text{ set } [v \in Nat] \quad C(0) \quad e(x, y) \in C(succ(x)) [x \in Nat, y \in C(x)]}{natrec(0, d, e) = d \in C(a)}$$

$$\frac{a \in N \quad C(v) \text{ set } [v \in Nat] \quad d \in C(0) \quad e(x, y) \in C(succ(x)) [x \in Nat, y \in C(x)]}{natrec(succ(a), d, e) = e(a, natrec(a, d, e)) \in C(succ(a))}$$

## Zbiór liczb naturalnych

$$\frac{a \in N \quad C(v) \text{ set } [v \in Nat] \quad d \in C(0) \quad e(x, y) \in C(succ(x)) [x \in Nat, y \in C(x)]}{natrec(a, d, e) \in C(a)}$$

$$\frac{a \in N \quad C(v) \text{ prop } [v \in Nat] \quad C(0) \text{ true} \quad C(succ(x)) \text{ true } [x \in Nat, C(x) \text{ true}]}{C(a) \text{ true}}$$



# Produkt indeksowanej rodziny zbiorów (w matematyce)

- matematyczna definicja

$$\prod_{x \in A} B_x = \left\{ f : A \rightarrow \bigcup_{x \in A} B_x \mid \forall x \in A. f(x) \in B_x \right\}$$

- zależność przeciwdziedziny od argumentu

$$\text{sort} \in \prod_{xs \in \text{Lists}} \{ys \in \text{Lists} \mid \text{perm}(ys, xs) \wedge \text{sorted}(ys)\}$$

$$\text{perm}(\text{sort}(xs_0), xs_0) \wedge \text{sorted}(\text{sort}(xs_0))$$

- możemy też wyrazić „zwykły” zbiór funkcji, jeżeli  $B_x = B$  to

$$\prod_{x \in A} B_x = A \rightarrow B$$

## Produkt indeksowanej rodziny zbiorów

$$\frac{A \text{ set} \quad B(x) \text{ set } [x \in A]}{(\prod_{x \in A} B(x)) \text{ set}} \quad \frac{b(x) \in B(x) [x \in A]}{\lambda b \in (\prod_{x \in A} B(x)) \text{ set}}$$

## Produkt indeksowanej rodziny zbiorów

$$\frac{A \text{ set} \quad B(x) \text{ set } [x \in A]}{(\prod_{x \in A} B(x)) \text{ set}} \quad \frac{b(x) \in B(x) [x \in A]}{\lambda b \in (\prod_{x \in A} B(x)) \text{ set}}$$

$$\frac{A = A' \quad B(x) = B'(x) [x \in A]}{(\prod_{x \in A} B(x)) = (\prod_{x \in A'} B'(x))}$$

$$\frac{b(x) = b'(x) \in B(x) [x \in A]}{\lambda b = \lambda b' \in (\prod_{x \in A} B(x)) \text{ set}}$$

## Produkt indeksowanej rodziny zbiorów

$$\frac{f \in (\prod_{x \in A} B(x)) \quad a \in A}{\text{apply}(f, a) \in B(a)} \qquad \frac{b(x) \in B(x) [x \in A] \quad a \in A}{\text{apply}(\lambda b, a) = b(a) \in B(a)}$$

$$\frac{a = a' \in A \quad f = f' \in (\prod_{x \in A} B(x))}{\text{apply}(f, a) = \text{apply}(f', a') \in B(a)}$$

## Produkt indeksowanej rodziny zbiorów

$$(\forall x \in A)B(x) \equiv (\prod_{x \in A} B(x))$$

## Produkt indeksowanej rodziny zbiorów

$$(\forall x \in A)B(x) \equiv (\prod_{x \in A} B(x))$$

$$\frac{A \text{ set} \quad B(x) \text{ set } [x \in A]}{(\prod_{x \in A} B(x)) \text{ set}} \Rightarrow \frac{A \text{ set} \quad B(x) \text{ prop } [x \in A]}{(\forall x \in A)B(x) \text{ prop}}$$

## Produkt indeksowanej rodziny zbiorów

$$(\forall x \in A)B(x) \equiv (\prod_{x \in A} B(x))$$

$$\frac{A \text{ set} \quad B(x) \text{ set } [x \in A]}{(\prod_{x \in A} B(x)) \text{ set}} \Rightarrow \frac{A \text{ set} \quad B(x) \text{ prop } [x \in A]}{(\forall x \in A)B(x) \text{ prop}}$$

$$\frac{b(x) \in B(x) [x \in A]}{\lambda b \in (\prod_{x \in A} B(x)) \text{ set}} \Rightarrow \frac{B(x) \text{ true } [x \in A]}{(\forall x \in A)B(x) \text{ true}}$$

# Produkt indeksowanej rodziny zbiorów

$$(\forall x \in A)B(x) \equiv (\prod_{x \in A} B(x))$$

$$\frac{A \text{ set} \quad B(x) \text{ set } [x \in A]}{(\prod_{x \in A} B(x)) \text{ set}} \Rightarrow \frac{A \text{ set} \quad B(x) \text{ prop } [x \in A]}{(\forall x \in A)B(x) \text{ prop}}$$

$$\frac{b(x) \in B(x) [x \in A]}{\lambda b \in (\prod_{x \in A} B(x)) \text{ set}} \Rightarrow \frac{B(x) \text{ true } [x \in A]}{(\forall x \in A)B(x) \text{ true}}$$

$$\frac{f \in (\prod_{x \in A} B(x)) \quad a \in A}{\text{apply}(f, a) \in B(a)} \Rightarrow \frac{(\forall x \in A)B(x) \text{ true} \quad a \in A}{B(a) \text{ true}}$$



## Produkt indeksowanej rodziny zbiorów

$$\frac{(\forall x \in A)(\forall y \in B)P(x, y) \text{ true}}{\vdots} \frac{}{(\forall y \in B)(\forall x \in A)P(x, y) \text{ true}}$$

## Produkt indeksowanej rodziny zbiorów

$$\frac{\frac{(\forall x \in A)(\forall y \in B)P(x, y) \text{ true}}{\vdots}}{(\forall y \in B)(\forall x \in A)P(x, y) \text{ true}}$$

- Załóżmy że  $f \in (\prod x \in A)(\prod y \in B)P(x, y)$ , oraz że  $x$  nie występuje w  $B$

$$\frac{f \in (\prod x \in A)(\prod y \in B)P(x, y) \quad x \in A [x \in A]}{\underbrace{\text{apply}(f, x) \in (\prod y \in B)P(x, y) [x \in A]}_D}$$

$$\frac{\frac{\overbrace{\text{apply}(f, x) \in (\prod y \in B)P(x, y) [x \in A]}^D \quad y \in B [y \in B]}{\text{apply}(\text{apply}(f, x), y) \in P(x, y) [y \in B, x \in A]}}{\frac{\lambda x. \text{apply}(\text{apply}(f, x), y) \in (\prod x \in B)P(x, y) [y \in B]}{\lambda y. \lambda x. \text{apply}(\text{apply}(f, x), y) \in (\prod y \in B)(\prod x \in A)P(x, y)}}$$

# Produkt indeksowanej rodziny zbiorów

- Jeżeli  $x$  nie występuje w  $B$  to

$$A \rightarrow B \equiv (\prod_{x \in A} B)$$

# Produkt indeksowanej rodziny zbiorów

- Jeżeli  $x$  nie występuje w  $B$  to

$$A \rightarrow B \equiv (\prod_{x \in A}) B$$

$$\frac{A \text{ set} \quad B \text{ set } [x \in A]}{A \rightarrow B \text{ set}} \quad \frac{b(x) \in B [x \in A]}{\lambda b \in A \rightarrow B}$$

# Produkt indeksowanej rodziny zbiorów

- Jeżeli  $x$  nie występuje w  $B$  to

$$A \rightarrow B \equiv (\prod_{x \in A} B)$$

$$\begin{array}{c} \frac{A \text{ set} \quad B \text{ set } [x \in A]}{A \rightarrow B \text{ set}} \quad \frac{b(x) \in B [x \in A]}{\lambda b \in A \rightarrow B} \\[2ex] \frac{A \text{ prop} \quad B \text{ prop } [A \text{ true}]}{A \rightarrow B \text{ prop}} \quad \frac{B \text{ true } [A \text{ true}]}{A \rightarrow B \text{ true}} \end{array}$$

## Suma rozłączna indeksowanej rodziny zbiorów

$$\sum_{x \in A} B_x = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B_a\}$$

## Suma rozłączna indeksowanej rodziny zbiorów

$$\sum_{x \in A} B_x = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B_a\}$$

$$\frac{A \text{ set} \quad B(x) \text{ set } [x \in A]}{(\sum x \in A) B(x) \text{ set}}$$

$$\frac{a \in A \quad p \in B(a)}{\langle a, p \rangle \in (\sum x \in A) B(x)}$$

## Suma rozłączna indeksowanej rodziny zbiorów

$$\sum_{x \in A} B_x = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B_a\}$$

$$\frac{A \text{ set} \quad B(x) \text{ set } [x \in A]}{(\sum x \in A) B(x) \text{ set}}$$

$$\frac{a \in A \quad p \in B(a)}{\langle a, p \rangle \in (\sum x \in A) B(x)}$$

$$\frac{A = A' \quad B(x) = B'(x) [x \in A]}{(\sum x \in A) B(x) = (\sum x \in A') B'(x)}$$

$$\frac{a = a' \in A \quad b = b' \in B(a)}{\langle a, b \rangle = \langle a', b' \rangle \in (\sum x \in A) B(x) \text{ set}}$$



## Suma rozłączna indeksowanej rodziny zbiorów

$$\frac{c \in (\Sigma x \in A) B(x) \quad C(v) \text{ set } [v \in (\Sigma x \in A) B(x)] \quad d(x, y) \in C(\langle x, y \rangle) [x \in A, y \in B(a)]}{\text{split}(c, d) \in C(c)}$$

## Suma rozłączna indeksowanej rodziny zbiorów

$$\frac{c \in (\Sigma x \in A) B(x) \quad C(v) \text{ set } [v \in (\Sigma x \in A) B(x)] \quad d(x, y) \in C(\langle x, y \rangle) [x \in A, y \in B(a)]}{\text{split}(c, d) \in C(c)}$$

$$\frac{a \in A \quad b \in B(a) \quad C(v) \text{ set } [v \in (\Sigma x \in A) B(x)] \quad d(x, y) \in C(\langle x, y \rangle) [x \in A, y \in B(a)]}{\text{split}(\langle a, b \rangle, d) = d(a, b) \in C(\langle a, b \rangle)}$$

## Suma rozłączna indeksowanej rodziny zbiorów

$$\frac{c \in (\Sigma x \in A)B(x) \quad C(v) \text{ set } [v \in (\Sigma x \in A)B(x)] \quad d(x, y) \in C(\langle x, y \rangle) [x \in A, y \in B(a)]}{\text{split}(c, d) \in C(c)}$$

$$\frac{a \in A \quad b \in B(a) \quad C(v) \text{ set } [v \in (\Sigma x \in A)B(x)] \quad d(x, y) \in C(\langle x, y \rangle) [x \in A, y \in B(a)]}{\text{split}(\langle a, b \rangle, d) = d(a, b) \in C(\langle a, b \rangle)}$$

$$\frac{c = c' \in (\Sigma x \in A)B(x) \quad C(v) \text{ set } [v \in (\Sigma x \in A)B(x)] \quad d(x, y) = d'(x, y) \in C(\langle x, y \rangle) [x \in A, y \in B(a)]}{\text{split}(c, d) = \text{split}(c', d') \in C(c)}$$

## Suma rozłączna indeksowanej rodziny zbiorów

$$(\exists x \in A)B(x) \equiv (\Sigma x \in A)B(x)$$

## Suma rozłączna indeksowanej rodziny zbiorów

$$(\exists x \in A) B(x) \equiv (\Sigma x \in A) B(x)$$

$$\frac{A \text{ set} \quad B(x) \text{ set } [x \in A]}{(\Sigma x \in A) B(x) \text{ set}} \Rightarrow \frac{A \text{ set} \quad B(x) \text{ prop } [x \in A]}{(\exists x \in A) B(x) \text{ prop}}$$

## Suma rozłączna indeksowanej rodziny zbiorów

$$(\exists x \in A)B(x) \equiv (\Sigma x \in A)B(x)$$

$$\frac{A \text{ set} \quad B(x) \text{ set } [x \in A]}{(\Sigma x \in A)B(x) \text{ set}} \Rightarrow \frac{A \text{ set} \quad B(x) \text{ prop } [x \in A]}{(\exists x \in A)B(x) \text{ prop}}$$

$$\frac{a \in A \quad p \in B(a)}{\langle a, p \rangle \in (\Sigma x \in A)B(x)} \Rightarrow \frac{a \in A \quad B(a) \text{ true}}{(\exists x \in A)B(x) \text{ true}}$$

# Suma rozłączna indeksowanej rodziny zbiorów

$$(\exists x \in A)B(x) \equiv (\Sigma x \in A)B(x)$$

$$\frac{A \text{ set} \quad B(x) \text{ set } [x \in A]}{(\Sigma x \in A)B(x) \text{ set}} \Rightarrow \frac{A \text{ set} \quad B(x) \text{ prop } [x \in A]}{(\exists x \in A)B(x) \text{ prop}}$$

$$\frac{a \in A \quad p \in B(a)}{\langle a, p \rangle \in (\Sigma x \in A)B(x)} \Rightarrow \frac{a \in A \quad B(a) \text{ true}}{(\exists x \in A)B(x) \text{ true}}$$

$$\frac{c \in (\Sigma x \in A)B(x) \quad C(v) \text{ set } [v \in (\Sigma x \in A)B(x)] \quad d(x, y) \in C(\langle x, y \rangle) [x \in A, y \in B(a)]}{\text{split}(c, d) \in C(c)}$$

$$\frac{(\exists x \in A)B(x) \text{ true} \quad \downarrow \quad C \text{ prop} \quad C \text{ true } [x \in A, B(a) \text{ true}]}{C \text{ true}}$$

# Suma rozłączna indeksowanej rodziny zbiorów

- Jeżeli  $x$  nie występuje w  $B$  to

$$A \times B \equiv A \wedge B \equiv (\Sigma x \in A) B$$

$$\frac{A \text{ set} \quad B \text{ set } [x \in A]}{A \times B \text{ set}}$$

$$\frac{a \in A \quad b \in B}{\langle a, b \rangle \in A \times B}$$

$$\frac{A \text{ prop} \quad B \text{ prop } [A \text{ true}]}{A \wedge B \text{ prop}}$$

$$\frac{A \text{ true} \quad B \text{ true}}{A \wedge B \text{ true}}$$



# Suma rozłączna indeksowanej rodziny zbiorów

- $\text{fst}(p) \equiv \text{split}(p, (x, y)x)$
- Niech  $A, B$  będą poprawnymi typami, niech  $\langle a, b \rangle \in A \times B$
- Niech  $d(x, y) = x$
- Niech  $C(p) = A$

$$\frac{\begin{array}{l} a \in A \quad b \in B \quad C(v) \text{ set } [v \in A \times B] \\ d(x, y) \in C(\langle x, y \rangle) \text{ } [x \in A, y \in B] \end{array}}{\text{split}(\langle a, b \rangle, (x, y)d(x, y)) = d(a, b) \in C(\langle a, b \rangle)}$$

$$\frac{\begin{array}{l} a \in A \quad b \in B \quad A \text{ set } [v \in A \times B] \\ x \in A \text{ } [x \in A, y \in B] \end{array}}{\text{split}(\langle a, b \rangle, (x, y)x) = a \in A}$$