Programación Cuadrática

Tomás de la Rosa

Esquema

1. Introducción
2. Optimización de Carteras

Esquema

1 Introducción

2 Optimización de Carteras

Optimización Cuadrática

- Un problema de programación cuadrática es un problema en el que:
  - La función objetivo es una función cuadrática de las variables
  - Las restricciones son lineales en las variables

Formas Cuadráticas

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & x_1 x_3 \\ x_1 x_2 & x_2^2 & x_2 x_3 \\ x_1 x_3 & x_2 x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = x_1^2 - 2x_1 x_2$$

Formas Cuadráticas

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_1x_2 & x_2^2 & x_2x_3 \\ x_1x_3 & x_2x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = x_1^2 - 2x_1x_2$$

$$x^TQx = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Formas Cuadráticas

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_1x_2 & x_2^2 & x_2x_3 \\ x_1x_3 & x_2x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = x_1^2 - 2x_1x_2$$

$$x^TQx = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$(x^TQ)x = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 & -x_1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1^2 - 2x_1x_2$$

Optimización Cuadrática

- La forma estándar de un problema de optimización cuadrática es

$$minZ = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x$$

$$\begin{aligned} s.a. \quad & Ax = a \\ & Bx \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- La función objetivo es convexa cuando Q es una matriz semidefinida positiva. Esto es $y^T Qy \geq 0$ para cualquier vector y
- Si esta condición se cumple el problema se puede resolver en tiempo polinomial con el método del punto interior

Esquema

Optimización de Carteras

- Propuesto inicialmente por H. Markovitz en la década de 1950s
- Formaliza el principio de diversificación en la construcción de carteras de inversión
- El problema (en general):
  - Un inversor dispone de un universo de activos a los que puede asignar su inversión
  - ¿Cuál es la mejor asignación de activos que puede realizar el inversor?

Optimización de Carteras

- Maximizar el valor de la cartera implica encontrar la "mejor" rentabilidad, pero esto no es posible, ya que para los activos la rentabilidad es una variable aleatoria
- Mejor planteamiento: Maximizar el valor de la cartera considerando la **rentabilidad esperada**, $E(R_i) = \mu_i$
- La incertidumbre ante el valor de la cartera lo asociamos al **riesgo** y podemos medirlo con la varianza de dicho valor

Rentabilidad y Riesgo de la Cartera

- Si X es el vector de porcentajes que representa la asignación de activos de la cartera:
- Rentabilidad:

$$E[x] = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i = \mu^T x$$

- Riesgo:

$$Var[x] = \sum_{i=1}^{n} Cov(x_i, x_j) x_i x_j = x^T Q x$$

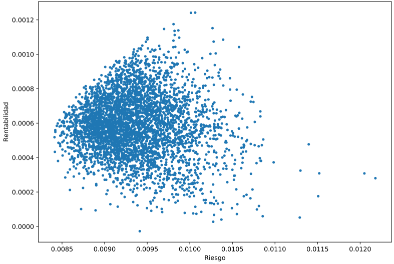
- donde,
  - μ_i es el retorno esperado del activo i
  - Q es la matriz de covarianzas de los retornos

Relación Rentabilidad-Riesgo

- Los inversores son por naturaleza aversos al riesgo
  - frente a 2 carteras de misma rentabilidad esperada deberían escoger la de menor varianza
  - frente a 2 carteras de igual varianza deberían escoger la de mayor rentabilidad esperada
- Esta relación rentabilidad-riesgo nos define un espacio de posibles carteras, de las que tendríamos que elegir cuál es la “mejor”

Espacio Rentabilidad-Riesgo

- la elección de la mejor cartera plantea un problema multi-objetivo de maximizar la rentabilidad y minimizar el riesgo
- se busca la **frontera eficiente** definida por el conjunto de carteras con mayor rentabilidad por cada nivel de riesgo



Opción 1

- Minimizar la varianza para un nivel específico de retorno esperado
- Iterar para distintos valores de riesgo entre:
  - la cartera de varianza mínima
  - la varianza correspondiente al mayor rendimiento esperado
- Si R es el valor de retorno esperado para una iteración:

$$minZ = \frac{1}{2}x^T Qx$$

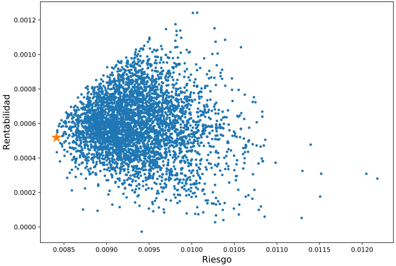
$$s.a.$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i > R$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

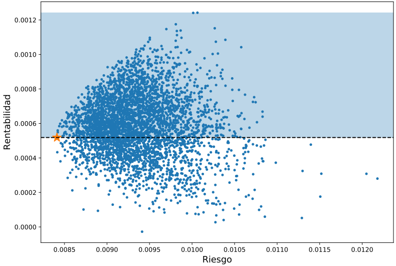
Opción 1

- Minimizar la varianza para un nivel específico de retorno esperado
- Iterar para distintos valores de riesgo entre:
  - la cartera de varianza mínima
  - la varianza correspondiente al mayor rendimiento esperado



Opción 1

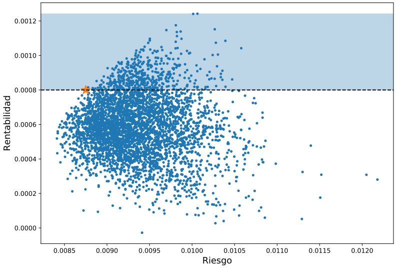
- Minimizar la varianza para un nivel específico de retorno esperado
- Iterar para distintos valores de riesgo entre:
  - la cartera de varianza mínima
  - la varianza correspondiente al mayor rendimiento esperado



Optimización Media-Varianza

Opción 1

- Minimizar la varianza para un nivel específico de retorno esperado
- Iterar para distintos valores de riesgo entre:
  - la cartera de varianza mínima
  - la varianza correspondiente al mayor rendimiento esperado



Opción 2

- Maximizar el retorno esperado un nivel específico de varianza esperada
- Iterar para distintos valores entre límites de varianza
- Si σ_P^2 es el valor de varianza a conseguir en la iteración:

$$
\begin{aligned}
& max\, Z = \mu^T x \\
s.a. \quad & \sum_{i=1}^{n} \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j x_i x_j = \sigma_P^2 \\
& \sum_{i=1}^{n} x_i = 1
\end{aligned}
$$

- Esta alternativa tiene una restricción cuadrática y no se considera programación cuadrática. Se descarta este enfoque

Opción 3

- La función objetivo considera la rentabilidad ajustada al riesgo
- Un parámetro δ es una constante que sirve para ajustar la aversión al riesgo
- Iteramos sobre distintos valores de δ para determinar la frontera eficiente

$$max\, Z = \mu^T x - \frac{\delta}{2} x^T Q x$$

$$s.a.$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

Algunas Consideraciones

- Posiciones cortas
  - El modelo básico acepta pesos negativos (posiciones cortas)
  - Para restringir la cartera a posiciones largas se añade la restricción que obliga a los pesos a ser no negativos

Algunas Consideraciones

- Posiciones cortas
  - El modelo básico acepta pesos negativos (posiciones cortas)
  - Para restringir la cartera a posiciones largas se añade la restricción que obliga a los pesos a ser no negativos
- Diversificación
  - La solución de la cartera óptima no está obligada a ser una cartera diversificada
  - El resultado es dependiente de las entradas al problema, que por lo general son estimaciones que pueden estar sesgadas
  - En la práctica se complementa la diversificación con restricciones adicionales

Restricciones Adicionales

- La capacidad de modelar de forma genérica restricciones lineales dentro de del problema nos permite por ejemplo:
  - Asignar el peso máximo de un activo dentro de la cartera
  - Asignar un peso agregado máximo por grupo de activos (e.g. sectores, países)
  - Ejemplo

$$
\begin{aligned}
& max\ Z = \mu^T x - \frac{\delta}{2} x^T Q x \\
s.a. \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\
& x_5 + x_6 + x_7 \leq 0.3 \\
& x_i \leq 0.2
\end{aligned}
$$

Costes de Rebalanceo

- La optimización de media-varianza puede recalcularse repetidamente pasado un período de tiempo
- Dada la sensibilidad del resultado a las estimaciones de los parámetros de entrada, las carteras de un período a otro pueden variar significativamente
- El modelo de optimización puede modificarse para:
  1. Restringir que los cambios posibles de una cartera a otra sean menores que un límite establecido
  2. Penalizar las expresiones que incluyan rentabilidad para incluir los costes asociados a la compra-venta

Costes de Rebalanceo

- Para limitar los cambios de una cartera a un máximo de V, partimos de una cartera anterior que representamos por $p0$
- Nuevas variables de decisión:
  - y: Vector de compra. y_i es la cantidad del activo i que compramos
  - z: Vector de venta. z_i es la cantidad del activo i que vendemos

Costes de Rebalanceo

- Para limitar los cambios de una cartera a un máximo de V, partimos de una cartera anterior que representamos por $p0$
- Nuevas variables de decisión:
  - y: Vector de compra. y_i es la cantidad del activo i que compramos
  - z: Vector de venta. z_i es la cantidad del activo i que vendemos
- Nuevas restricciones:
  - $x_i - p0_i \leq y_i, \quad y_i \geq 0$
  - $p0_i - x_i \leq z_i, \quad z_i \geq 0$
  - $\sum_{i=1}^{n}(y_i + z_1) \leq V$