Programación Entera

Tomás de la Rosa

Esquema

1. Introducción

2. Ejemplos Prácticos
   - Réplica de Fondos Índice
   - Estrategia Neutral con Opciones

Esquema

1. Introducción

2. Ejemplos Prácticos
   - Réplica de Fondos Índice
   - Estrategia Neutral con Opciones

Motivación

- En algunos problemas de optimización redondear es una opción, pero estamos perdiendo el valor óptimo que podríamos alcanzar en la realidad
  - Una asignación de activos, nos podría indicar 18,73 acciones
- En ocasiones necesitamos modelar condiciones lógicas, ejemplo asignaciones todo o nada

Programación Entera

- Un problema de programación lineal entera es uno de programación lineal al que añadimos las restricciones adicionales para que algunas (incluso todas) sus variables sean números enteros
- Cuando todas las variables deben ser enteras hablamos de un programa lineal entero puro
- Cuando alguna de sus variables deben ser enteras nos referimos a un programa mixto o MIP (*mixed integer programs*)
- Para problemas de asignación utilizamos un caso especial: variables *booleanas*, enteros que pueden ser 0 ó 1

Programación Entera (Ejemplo)

- Disponemos de 19 millones para invertir en 4 proyectos, en el que participamos con una inversión inicial o no participamos. Los datos son los siguientes

Proyecto	1	2	3	4
Inversión inicial	4	6	5	7
Valor presente	4.6	6.6	5.4	7.3

- ¿En qué proyectos debemos invertir para maximizar el valor presente de las inversiones?

Programación Entera (Ejemplo)

- Una solución ingenua sería ir eligiendo los proyectos a partir del ratio de rentabilidad

Proyecto	1	2	3	4
Inversión inicial	4	6	5	7
Valor presente	4.6	6.6	5.4	7.3
VP/Inv	1.15	1.1	1.08	1.043

- Al elegir los proyectos 1, 2, y 3 obtenemos un valor presente de 16.6
- Pero este no es el valor óptimo que podríamos obtener

Programación Entera (Ejemplo)

- Las variables de decisión representan si participamos o no de cada proyecto
- Un modelado como problema de programación lineal es:

$$
\begin{aligned}
Max\, Z &= 4.6x_1 + 6.6x_2 + 5.4x_3 + 7.3x_4 \\
s.a. \quad 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 &\leq 19 \\
x_i &\geq 0 \\
x_i &\leq 1
\end{aligned}
$$

- La solución a este problema es $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0.57$
- La parte entera de la solución nos da la solución ingenua
- El redondeo de la solución nos da una solución infactible

Programación Entera (Ejemplo)

- Añadimos la restricción para que las variables de decisión sean 0 ó 1.
- Un modelado como problema de programación entera es:

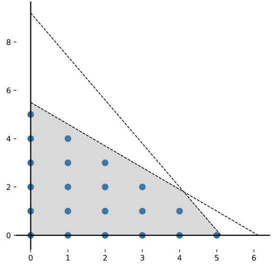
$$Max\ Z = 4.6x_1 + 6.6x_2 + 5.4x_3 + 7.3x_4$$

$$\begin{aligned} s.a. \quad 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 &\leq 19 \\ x_i &\geq 0 \\ x_i &\leq 1 \\ x_i &\ es\ entero \end{aligned}$$

- La solución a este problema es $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1$
- El óptimo es 19.3

Espacio de Soluciones

- Si las variables fueran reales tendríamos una región factible
- Las soluciones en la programación entera corresponden a los puntos de enteros dentro de la región factible
- El problema es más restringido
- La solución óptima no ocurre en los vértices, salvo que coincida con un punto de enteros



Relajación de Restricciones

- Técnica para hacer más sencillo el problema original, de modo que la solución al problema relajado nos sirva en la resolución del original
- En un MIP la relajación directa es ignorar la restricción de variables enteras.
- Para un MIP $\mathcal{P}$, y una versión relajada $\mathcal{P}_R$, observamos que:
  - el óptimo de $\mathcal{P}_R$ es igual o mejor (irreal) que el óptimo de $\mathcal{P}$, porque es un problema con menos restricciones
  - si $\mathcal{P}_R$ es infactible, $\mathcal{P}$ también lo es
  - la solución a $\mathcal{P}_R$ nos da una cota superior (max) o una cota inferior (min)
  - el redondeo de la solución $\mathcal{P}_R$ no es necesariamente el óptimo de $\mathcal{P}$

Algoritmo Branch and Bound

1. Iniciar $B = +\infty$
2. Resolver el problema relajado. Si la solución es entera, terminar; en otro caso ir al paso 3
3. Ramificar sobre una variable de decisión y crear dos subconjuntos de la región factible
4. Determinar una cota superior z_s del problema original
5. Marcar como nodos terminales aquellos que:
    - El subconjunto es infactible
    - $z_s \leq B$
    - z_s se alcanza en un punto factible y $z_s > B$. Hacer $z_s = B$. Ir al paso 3
6. Parar si todos los nodos son terminales. El óptimo es z_s

Modelado de Restricciones

- Suponemos como en el ejemplo inicial que tenemos 4 variables binarias de decisión que representan los proyectos en que invertimos
- Modelar restricciones
  - Podemos elegir como mucho 2 proyectos

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$$

  - Los proyectos 2 y 3 son excluyentes

$$x_2 + x_3 \leq 1$$

  - Si se participa en el proyecto 1, hay que participar en el 4

$$x_1 - x_4 \leq 0$$

Modelado Condiciones Lógicas

- Variables binarias **indicadoras** que nos dicen si una determinada restricción debe cumplirse o no
- Asumimos que el valor 1 implica que nos interesa que se cumpla la restricción

$$\delta = 1 \implies \sum_{j \in N} a_j x_j \leq b$$

- Representación como restricción lineal

$$\sum_{j \in N} a_j x_j + M\delta \leq M + b$$

- M es una constante muy alta, que debe ser superior a la expresión $\sum_{j \in N} a_j x_j - b$

Modelado Condiciones Lógicas

$$\delta = 1 \implies \sum_{j \in N} a_j x_j \leq b \equiv \sum_{j \in N} a_j x_j + M\delta \leq M + b$$

- Re-escribiendo

$$\sum_{j \in N} a_j x_j - b \leq M(1 - \delta)$$

- Para el caso $\delta = 0$, se cumple por definición de M

$$\sum_{j \in N} a_j x_j - b \leq M$$

- Para el case $\delta = 1$, tenemos la restricción original que exigimos

$$\sum_{j \in N} a_j x_j - b \leq 0$$

Modelado de Condiciones Lógicas

- Nos puede interesar la relación inversa. Si se cumple una restricción queremos forzar el valor de la variable indicadora

$$\sum_{j \in N} a_j x_j \leq b \implies \delta = 1$$

- Modelamos como

$$\sum_{j \in N} a_j x_j - (m - \epsilon)\delta \geq b + \epsilon$$

- m es la cota inferior de la expresión $\sum_{j \in N} a_j x_j - b$

Modelado de Condiciones Lógicas

- Para desigualdades mayor que:

$$\delta = 1 \implies \sum_{j \in N} a_j x_j \geq b$$

- modelamos como:

$$\sum_{j \in N} a_j x_j + m\delta \geq m + b$$

Modelado de Condiciones Lógicas

- Si para una variable de decisión que cumpla $0 \leq x \leq M$, queremos modelar la implicación:

$$x > 0 \implies \delta = 1$$

- lo podemos modelar como

$$x \leq M\delta$$

Modelado de Condiciones Lógicas

- para el caso general de la desigualdad tenemos

$$\sum_{j \in N} a_j x_j \geq b \implies \delta = 1$$

- modelamos como:

$$\sum_{j \in N} a_j x_j - (M + \epsilon)\delta \leq b - \epsilon$$

Esquema

1. Introducción

2. Ejemplos Prácticos
   - Réplica de Fondos Índice
   - Estrategia Neutral con Opciones

Esquema

1. Introducción

2. Ejemplos Prácticos
   - Réplica de Fondos Índice
   - Estrategia Neutral con Opciones

Réplica de Fondos Índice

- Construir una cartera que replique un índice, seleccionando un sub-conjunto de los activos que lo componen
- Para cada activo se selecciona un activo representante dentro de de la cartera. Podría ser el propio activo o uno semejante
- Se construye a partir de una medida de similitud, por ejemplo la correlación histórica de los rendimientos
- Enfoque equivalente a hacer clustering de los activos y seleccionar un miembro de cada grupo

Réplica de Fondos Índice

- Seleccionar k activos de un índice de n componentes
- Variables de decisión
  - Matriz $X_{n \times n}$ de binarias. Cada fila debe elegir el representante del activo i
  - Vector Y que representa con binarias si un activo está dentro de la cartera
- Maximizamos la correlación que corresponde a la matriz X
- Restricciones
  - Cada fila en X debe tener sólo un elemento seleccionado
  - Los elementos seleccionados de Y son iguales a k
  - Si un elemento en Y no es seleccionado, la columna en X debe estar vacía

- Modelo

$$Max\ Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j = k$$

$$\forall i \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1$$

$$\forall i \forall j x_{ij} \leq y_j$$

Esquema

1. Introducción

2. Ejemplos Prácticos
   - Réplica de Fondos Índice
   - Estrategia Neutral con Opciones

Estrategia Neutral con Opciones

- La volatilidad implícita de la opciones sobre acciones es mayor que la volatilidad en el índice en que cotizan
- El precio relativo de las opciones put/call sobre acciones debería ser mayor que en el índice
- Podemos plantear una estrategia neutral con opciones:
  1. Comprar 1 put/call sobre el futuro del IBEX35
  2. Vender una cesta de opciones put/call equivalentes al nominal del contrato comprado

Estrategia Neutral con Opciones

- La volatilidad implícita de la opciones sobre acciones es mayor que la volatilidad en el índice en que cotizan
- El precio relativo de las opciones put/call sobre acciones debería ser mayor que en el índice
- Podemos plantear una estrategia neutral con opciones:
  1. Comprar 1 put/call sobre el futuro del IBEX35
  2. Vender una cesta de opciones put/call equivalentes al nominal del contrato comprado
- Inconvenientes en la práctica:
  - La cesta de opciones no es replicable de forma exacta porque no hay opciones de las acciones menos líquidas
  - Los multiplicadores de los contratos afectan la capacidad de ajustarnos al peso en el índice
  - Riesgos individuales por empresa

Estrategia Neutral con Opciones

- Problema a resolver
  - Dado un nominal de n contratos de opciones sobre el futuro del IBEX35
  - Elegir el número de contratos de opciones put/call disponibles sobre las acciones, intentando replicar lo máximo posible la cesta equivalente

Estrategia Neutral con Opciones

- Problema a resolver
  - Dado un nominal de n contratos de opciones sobre el futuro del IBEX35
  - Elegir el número de contratos de opciones put/call disponibles sobre las acciones, intentando replicar lo máximo posible la cesta equivalente
- Para resolver el problema utilizamos datos históricos recientes, donde nos interesa aproximar el valor de los nominales de ambas patas de la estrategia a lo largo de una ventana de tiempo

Estrategia Neutral con Opciones

- Variables de decisión:
  - Número de contratos de cada opción para las acciones disponibles
  - Para cada día observado, un término de error entre nominal de contratos del índice y la cesta

Estrategia Neutral con Opciones

- Variables de decisión:
  - Número de contratos de cada opción para las acciones disponibles
  - Para cada día observado, un término de error entre nominal de contratos del índice y la cesta
- Función objetivo:
  - minimizar la suma de los valores absolutos de los término de error
  - alternativa de mínimos cuadrados, pero convierte el problema en cuadrático

Estrategia Neutral con Opciones

- Variables de decisión:
  - Número de contratos de cada opción para las acciones disponibles
  - Para cada día observado, un término de error entre nominal de contratos del índice y la cesta
- Función objetivo:
  - minimizar la suma de los valores absolutos de los término de error
  - alternativa de mínimos cuadrados, pero convierte el problema en cuadrático
- Restricciones
  - El número de contratos debe ser no negativos
  - Para cada día, la resta de nominales de cada pata es igual al término de error