

# Mecânica Clássica - Anotações

Rodrigo Moreira

5 de maio de 2021

**Sobre este texto:** As páginas a seguir consistem de anotações realizadas durante um estudo de férias sobre Mecânica Analítica. O material base para este estudo é [1]. Os livros [2, 3] foram utilizados como suplemento. O plano é estudar as seguintes seções de [1]:

**Capítulo 2:** seções 2.1, 2.2 e 2.4.

**Capítulo 3:** seções 3.1, 3.2 e 3.4.

**Capítulo 5:** seções 5.1.1, 5.1.3, 5.2, 5.3.1, 5.3.3, 5.3.4 (apenas as duas primeiras subseções) e 5.4.1 (apenas as duas primeiras subseções)

**Capítulo 8:** seções 8.1, 8.2.1, 8.2.2, 8.2.3 e 8.3.

**Capítulo 9:** seções 9.1, 9.2.1 e 9.2.2 (apenas as duas primeiras subseções).

.

## Sumário

<b>I</b>	<b>Mecânica Lagrangiana</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Formalismo Lagrangiano</b>	<b>3</b>
1.1	Vínculos e Espaço de Configurações . . . . .	3
1.2	Equações de Lagrange . . . . .	8
1.3	Aspectos Geométricos e Princípio de Hamilton . . . . .	13
	<b>Referências</b>	<b>19</b>

# Parte I

## Mecânica Lagrangiana

### 1 Formalismo Lagrangiano

#### 1.1 Vínculos e Espaço de Configurações

Considere um sistema formado por  $N$  partículas<sup>1</sup> se deslocando em um espaço tridimensional, que por simplicidade, consideremos como  $\mathbb{R}^3$ <sup>2</sup>. **Vínculos** são fatores de caráter geométrico, oriundos de agentes externos ao sistema estudado, e que restringem as possíveis posições e velocidades das partículas que compõem o sistema.

**Exemplo 1.1.** *Se a trajetória de uma partícula restringe-se a uma esfera de raio  $R$ , temos que as coordenadas desta partícula respeitam a seguinte relação:*

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0. \quad (1.1)$$

A Equação (1.1) é o que chamamos de equação de vínculo.

Podemos generalizar a Equação (1.1) para o sistema de  $N$  partículas citado anteriormente. Se considerarmos este conjunto de objetos como sendo um subconjunto de  $\mathbb{R}^{3N+1}$ , mais geralmente, equações de vínculo seriam funções suaves que relacionariam as coordenadas das partículas da seguinte forma:

$$f_I(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, t) = 0, \quad I = 1, \dots, K < 3N, \quad (1.2)$$

onde  $\mathbf{x}_k$  é posição da  $k$ -ésima partícula,  $t$  representa um instante de tempo e  $K$  representa a quantidade de vínculos aos quais o sistema obedece. O fator  $t$  foi levado em consideração, pois, podemos pensar que o sistema restringe-se a uma região que pode mudar com o tempo<sup>3</sup>. As funções dadas pela Equação (1.2) caracterizam o que se chama de **vínculo holonômico**. Na situação em que ocorrem dependências com as velocidades das partículas na eq. (1.2), temos que

$$f_I(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \dot{\mathbf{x}}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_n, t) = 0. \quad (1.3)$$

No caso da Equação (1.3), diz-se que o vínculo é **não-holonômico**. Se pudermos integrar uma equação do tipo 1.3 de modo a torná-la da forma em 1.2, ainda dizemos que o vínculo é holonômico.

<sup>1</sup>Objetos pontuais com uma massa específica e sujeitos a interações físicas no sentido mais intuitivo possível.

<sup>2</sup>Em geral, poderia tratar-se de qualquer espaço euclidiano  $\mathbb{E}^n$ , i.e., um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno.

<sup>3</sup>Pense por exemplo que as partículas encontram-se sobre uma superfície que oscila com o tempo.

**Exemplo 1.2.** Na situação em que um disco de raio  $R$  rola sem deslizar sob uma superfície horizontal, temos que a equação que garante esta condição é

$$\dot{x} = R\dot{\phi},$$

onde  $x$  é a posição do centro de massa e  $\phi$  é o ângulo de rotação com relação ao eixo que passa pelo centro de massa, perpendicular ao plano de rotação. Como esta equação pode ser integrada para assumir o aspecto  $x - R\phi = 0$ , temos que o vínculo nesta situação é holonômico.

**Definição 1.1.** Um sistema mecânico é dito **holonômico** quando todos os vínculos deste sistema são holonômicos.

### Relação entre Vínculos e Trabalho

No caso simples, onde  $N = K = 1$ , se  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$  é a força conhecida que atua sobre a partícula (*e.g.*, força gravitacional) e  $\mathbf{C}$  é a força devido ao vínculo (*e.g.*, força de atrito com a superfície), temos que, pela equação do vínculo e pela 2ª lei de Newton,

$$f(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (1.4)$$

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} + \mathbf{C}. \quad (1.5)$$

Com isso, temos 4 equações (1.4 e cada componente de 1.5), mas 6 incógnitas (as componentes de  $\mathbf{x}$  e de  $\mathbf{C}$ ). A princípio, o que justifica desconhecermos as componentes de  $\mathbf{C}$  é o fato de existir mais uma força compatível com vínculo geométrico<sup>4</sup>. Para poder diminuir a quantidade de incógnitas e conseguirmos obter  $\mathbf{x}(t)$ , impomos que  $\mathbf{C}$  é necessariamente perpendicular à superfície. Os detalhes desta imposição serão descritos a seguir.

Se  $f(\mathbf{x}, t) = c$  é a equação para uma superfície qualquer, providenciado que  $\nabla f \neq 0$ <sup>5</sup>, sabemos que o gradiente será perpendicular à superfície no ponto  $(\mathbf{x}, t)$ . Desta forma, podemos escrever a força de vínculo como sendo

$$\mathbf{C} = \lambda \nabla f(\mathbf{x}, t), \quad (1.6)$$

onde  $\lambda \in \mathbb{R}$  é um parâmetro que pode depender de  $t$ . Com isso, reduzimos nosso número de incógnitas para 4:  $\lambda$  e as componentes de  $\mathbf{x}$ . A partir de certa condição, a interpretação física da Equação (1.6) é de que a força de vínculo não realiza trabalho. Isto pode ser verificado assumindo que  $\mathbf{F}$  é conservativa. Sob estas hipóteses, temos que ao tomar o produto escalar de 1.5 com  $\dot{\mathbf{x}}$ :

$$m\ddot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 \right) = -\nabla V \cdot \dot{\mathbf{x}} + \lambda \nabla f \cdot \dot{\mathbf{x}}.$$

<sup>4</sup>Por exemplo, se impomos que a partícula se restringe a uma superfície, então a ação de qualquer força paralela a esta no ponto onde a partícula se encontra ainda resulta em uma força compatível com o vínculo.

<sup>5</sup>Para  $K, N > 1$ , é necessário que a matriz de entradas  $\frac{\partial f_I}{\partial x^\alpha}$  tenha pelo menos posto  $K$ .

Visto que

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \nabla V \cdot \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial t}, \\ \frac{df}{dt} &= \nabla f \cdot \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial t},\end{aligned}$$

temos que

$$\frac{dE}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V \right) = \frac{\partial V}{\partial t} - \lambda \frac{\partial f}{\partial t},$$

pois  $\frac{df}{dt} = 0$  por conta de a partícula permanecer na superfície. Supondo que o potencial não varie com o tempo, então a variação de energia da partícula daria-se exclusivamente por conta da dependência temporal de  $f$  e isso implica que  $\mathbf{C}$  realiza trabalho sobre a partícula. Para verificar que isto é verdade, pense no caso em que não há dependência temporal de  $f$ ; como  $\mathbf{C}$  é perpendicular à superfície, então  $\mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0$ . Agora, se existe alguma dependência temporal, não necessariamente temos que  $\mathbf{C}$  é perpendicular à velocidade da partícula e portanto há trabalho sendo realizado.

### Coordenadas Generalizadas

Para um sistema de  $N$  partículas com  $K$  vínculos holonômicos independentes, sabemos que a equação de movimento para a  $i$ -ésima partícula é dada por

$$m_i \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_i + \mathbf{C}_i, \quad (1.7)$$

onde  $\mathbf{C}_i$  é a força de vínculo atuando sobre a partícula. Por superposição, temos que para cada partícula, essa força é dada por

$$\mathbf{C}_i = \sum_{I=1}^K \lambda_I \nabla_i f_I, \quad (1.8)$$

onde  $\nabla_i$  é o gradiente com respeito às coordenadas do vetor  $\mathbf{x}_i$ <sup>6</sup>.

A partir de um raciocínio análogo ao de antes, se  $V(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t)$  representa a energia potencial total do sistema, então a variação da energia total do sistema é dada por

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{x}_i^2}{2} + V \right).$$

Se todas as forças derivam deste potencial, então, tomando o produto escalar de ambos os lados da eq. (1.7) com  $\dot{\mathbf{x}}_i$  e somando em  $i$ , segue que

$$\sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{x}_i^2}{2} = - \sum_{i=1}^N \nabla_i V \cdot \dot{\mathbf{x}}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{I=1}^K \lambda_I \nabla_i f_I \cdot \dot{\mathbf{x}}_i. \quad (1.9)$$

---

<sup>6</sup>Lembre que agora cada  $f_I$  é uma função definida em algum subconjunto de  $\mathbb{R}^{3N}$ .

Veja que

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \sum_{i=1}^N \nabla_i V \cdot \dot{\mathbf{x}}_i + \frac{\partial V}{\partial t}, \\ \frac{df_I}{dt} &= \sum_{i=1}^N \nabla_i f_I \cdot \dot{\mathbf{x}}_i + \frac{\partial f_I}{\partial t}.\end{aligned}$$

Substituindo estes resultados na eq. (1.9), e assumindo que  $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ , como  $f_I(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = 0$  para cada  $I$ , concluímos que

$$\frac{dE}{dt} = - \sum_{I=1}^K \lambda_I \frac{\partial f_I}{\partial t}.$$

Desta forma, se nenhum dos vínculos possui alguma dependência temporal, a energia do sistema permanece constante.

Agora, para  $i \in \{1, \dots, N\}$ , seja  $\boldsymbol{\tau}_i$  um vetor tal que

$$\sum_{i=1}^N \boldsymbol{\tau}_i \cdot \nabla_i f_I = 0, \quad I = 1, \dots, K. \quad (1.10)$$

Como o posto da matriz de entradas  $\partial f_I / \partial x^\alpha$  é  $K$ , então a eq. (1.10) determina  $K$  coordenadas do vetor  $\boldsymbol{\tau} := (\boldsymbol{\tau}_1, \dots, \boldsymbol{\tau}_N)$ , de forma que apenas  $3N - K$  dessas coordenadas são independentes. Desta forma, tomando o produto escalar de eq. (1.7) com  $\boldsymbol{\tau}_i$  e somando em  $i$ , conclui-se facilmente que

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{x}}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \boldsymbol{\tau}_i = 0. \quad (1.11)$$

A eq. (1.11) é conhecida como **princípio de d'Alembert**. Podemos interpretar os vetores  $\boldsymbol{\tau}_i$  como possíveis deslocamentos “infinitesimais” da  $i$ -ésima partícula, contanto que estes respeitem os vínculos do sistema, e chamamos eles de **deslocamentos virtuais**. As  $3N - K$  relações obtidas somadas com as  $K$  relações independentes dadas pelos vínculos nos fornecem as  $3N$  relações necessárias para definir as componentes de  $\mathbf{x} := (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ .

Do que foi visto acima, uma vez escolhidos  $N$  vetores  $\boldsymbol{\tau}_i$  apropriados, podemos definir as trajetórias das partículas que compõem nosso sistema. Perceba que os vínculos na eq. (1.2) definem em conjunto uma hiper-superfície de  $\mathbb{R}^{3N}$ <sup>7</sup> e uma vez escolhidos os vetores que satisfazem 1.10, o vetor  $\boldsymbol{\tau}$  definido há pouco é tangencial a esta hiper-superfície. De agora em diante, a hiper-superfície definida pelos vínculos holonômicos será denotada por  $Q$  e chamaremos ela de **variedade de configurações**.

<sup>7</sup>Analogamente,  $\mathbb{E}^{3N}$ . Também podemos levar em conta o parâmetro  $t$  e adicionar uma dimensão temporal.

Considere uma região  $U \subset \mathbb{R}^{3N+1}$  que contém um ponto  $\mathbf{x} \in Q$ . Para cada  $\alpha \in \{1, \dots, 3N\}$ , seja  $q^\alpha: U \rightarrow \mathbb{R}$  um mapa  $C^\infty(U \cap Q)$  tal que ele seja invertível, isto é, tal que:

$$q^\alpha = q^\alpha(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t),$$

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(q^1, \dots, q^{3N}, t),$$

e que a matriz Jacobiana desta transformação seja não-singular. Se conseguirmos encontrar um conjunto de funções  $q^\alpha$  tais que as equações de vínculo mostrem que uma quantidade destas funções é constante, então facilitaremos o trabalho de resolver as equações de movimento. Sem perda de generalidade, a menos de dependências temporais, podemos definir que as últimas  $K$  funções como

$$q^{n+I}(\mathbf{x}) := R_I(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_K(\mathbf{x})), \quad I = 1, \dots, K, \quad (1.12)$$

onde  $n \equiv 3N - K$ . Assim, também podemos escrever as funções de vínculo como funções dos  $q_{n+1}, \dots, q_{n+K}$ . Impondo os vínculos, temos que

$$q^{n+I} = R_I(0, \dots, 0) \quad (1.13)$$

e portanto temos o que havíamos desejado: o novo conjunto de coordenadas é constante para uma certa quantidade delas. A dinâmica do sistema então se reduz a entender como que as outras  $n$  coordenadas se comporta em função do tempo. Por definição,  $n$  é o **número de graus de liberdade** do nosso sistema e também a dimensão de  $Q$ . A eq. (1.13) informa que os pontos continuam restritos à variedade de configuração e as demais funções  $q^1, \dots, q^n$  são chamadas de **coordenadas generalizadas**.

Vejamos a seguir alguns exemplos de variedades de configuração.

**Exemplo 1.3.** *Um caso simples de variedade de configuração é um plano. No caso de apenas uma partícula temos  $N = 1$  e  $K = 1$ . Daí, segue que  $n = 2$ . O vínculo é simplesmente a equação que restringe a partícula ao plano.*

**Exemplo 1.4.** *A esfera  $S^1$ . Como visto em qualquer livro introdutório de geometria diferencial, essa esfera trata-se de uma variedade diferenciável de dimensão 1. Ela é o espaço de configuração do pêndulo planar simples (fig. 1), sendo  $\theta$  a coordenada generalizada que representa o ângulo entre o eixo vertical e a haste do pêndulo. Explicitamente, as equações de vínculo são*

$$f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

$$f_2(x, y, z) = z = 0.$$

**Exemplo 1.5.** *No caso do pêndulo planar duplo, o espaço de configurações é o produto  $S^1 \times S^1$ , o que é intuitivo uma vez que sabemos o espaço de configurações para o pêndulo do exemplo anterior. As coordenadas generalizadas são os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  entre as hastes e o eixo vertical.*

Outros dois exemplos seriam o pêndulo esférico e o pêndulo esférico duplo, mas acredito que a ideia para encontrar o espaço de configurações deles já tenha ficado evidente em vista dos dois exemplos sobre pêndulos acima.

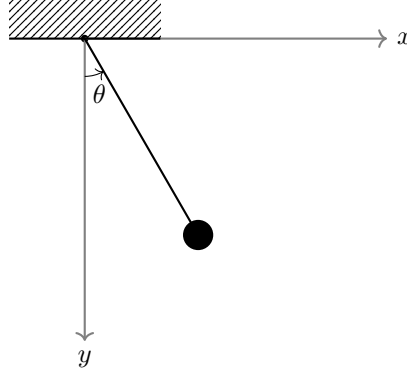


Figura 1: Representação do pêndulo simples.

## 1.2 Equações de Lagrange

Como cada ponto  $\mathbf{x}_i \in Q$  pode ser escrito em função das coordenadas generalizadas  $q^\alpha$ , então o vetor tangente ao ponto  $\mathbf{x}_i$  com relação a uma curva parametrizada pela  $\gamma$ -ésima coordenada generalizada é dado simplesmente por  $\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\gamma}$ . Como existem  $n$  coordenadas generalizadas, isto nos permite concluir que um vetor tangente ao ponto  $\mathbf{x}_i$  é da forma

$$\boldsymbol{\tau}_i = \epsilon^\alpha \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha},$$

onde implicitamente está sendo feita uma soma de 1 até  $n$  indexada por  $\alpha$ . Daí, pela eq. (1.11) (princípio de d'Alembert), obtemos  $n$  equações da forma

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{x}}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (1.14)$$

Assumindo que as forças conhecidas  $\mathbf{F}_i$  derivem de um potencial  $V$ , facilmente conclui-se que

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial q^\alpha}.$$

Com relação ao produto  $\ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha}$ , utilizando a regra do produto temos que

$$\ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} = \frac{d}{dt} \left[ \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} \right] - \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha}. \quad (1.15)$$

No entanto,

$$\mathbf{v}_i \equiv \dot{\mathbf{x}}_i = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \implies \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha}.$$

Daí

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial q^\beta \partial q^\alpha} \dot{q}^\beta + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\beta} \dot{q}^\beta + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q^\alpha}.$$



Se para cada  $i$  na eq. (1.15) multiplicarmos o termo por  $m_i$  e utilizarmos o resultado acima, segue que

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \left( m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q^\alpha} \right].$$

Pela linearidade da derivação, sendo a energia cinética do sistema  $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$ , segue que:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha}.$$

Aplicando a igualdade acima juntamente com aquela obtida assumindo que as forças são conservativas, conclui-se que o princípio de d'Alembert assume a forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q^\alpha} = 0.$$

Como os  $\mathbf{x}_i$  são funções apenas dos  $q^\alpha$ , então o potencial também será função apenas dos  $q^\alpha$ , de forma que  $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}^\alpha} = 0$ . Em vista disso, podemos definir uma função denominada **Lagrangiana** da forma a seguir:

$$L = T - V,$$

e com isso concluir que para cada  $\alpha$  vale que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0. \quad (1.16)$$

As 1.16 são conhecidas como **equações de Lagrange**. A partir do processo para obter as equações de Lagrange, podemos concluir que em um sistema onde todas as forças derivam de uma função escalar  $V$  e onde os vínculos são suaves, as equações de Lagrange são equivalentes à segunda lei de Newton e, mais do que isso, representam uma forma simplificada de lidar com problemas envolvendo vínculos, pois basta encontrar as expressões para  $T$  e  $V$  em função das coordenadas generalizadas e resolver as equações de Lagrange.

**Exemplo 1.6.** *Em uma região onde existe um campo gravitacional uniforme, uma conta de massa  $m$  desliza ao longo de um aro circular de raio  $R$ . Assumindo que o aro gira em torno de um eixo radial com velocidade angular constante  $\Omega$ , escreva as equações de Lagrange para o sistema.*

*Primeiramente, observamos que o espaço de configurações do sistema é a esfera  $S^1$ , pois em coordenadas esféricas temos os vínculos  $r = R$  e  $\varphi = \Omega t$ , de forma que para este sistema de uma partícula,  $3N - K = 1$ . Logo, nossa variedade de configurações tem uma dimensão e dada a restrição imposta à partícula, é natural imaginar que  $Q = S^1$  e  $q = \theta$ . Desta forma, a lagrangiana do sistema é*

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{m}{2} (R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \Omega^2 \sin^2 \theta) + mgR \cos \theta,$$

onde o segundo termo na expressão para  $T$  advém da rotação do aro. Com isso, segue que a equação de Lagrange assume a forma

$$\ddot{\theta} = \Omega^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{g}{R} \sin \theta.$$

Se estivéssemos interessados em analisar pontos de equilíbrio do sistema, bastaria avaliar os pontos em que  $\ddot{\theta}$  se anula, pois a aceleração da partícula na direção  $\hat{\varphi}$  é nula (para verificar isso, basta abrir a expressão para aceleração em coordenadas esféricas) e a aceleração radial não afeta o módulo da velocidade.

**Exercício 1.1.** Encontre as equações de movimento para o pêndulo planar duplo.

### Invariância por mudança de coordenadas e lagrangianas equivalentes

Uma vez estabelecidas as coordenadas generalizadas  $q^\alpha$ , suponha que existam novas coordenadas  $g^\beta = g^\beta(q^1, \dots, q^n, t)$  que sejam funções suaves das antigas coordenadas generalizadas. Como o sistema a se estudado pode ser descrito tanto pelas  $q^\alpha$  como pelas  $g^\beta$ , é necessário que possamos também escrever as  $q^\alpha$  como funções suaves das novas coordenadas. Desta forma, temos que

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial q^\alpha}{\partial g^\beta} \dot{g}^\beta + \frac{\partial q^\alpha}{\partial t} \implies \frac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial \dot{g}^\beta} = \frac{\partial q^\alpha}{\partial g^\beta}.$$

Escrevendo cada termo das equações de Lagrange em função das novas coordenadas temos que

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{g}^\beta} = \sum_{\alpha=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \frac{\partial q^\alpha}{\partial \dot{g}^\beta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial \dot{g}^\beta} \right) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial q^\alpha}{\partial g^\beta},$$

pois  $q^\alpha$  não têm dependência com relação a  $\dot{g}^\beta$ . Consequentemente, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{g}^\beta} \right) &= \sum_{\alpha=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \frac{\partial q^\alpha}{\partial g^\beta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial q^\alpha}{\partial g^\beta} \right) \right] \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \frac{\partial q^\alpha}{\partial g^\beta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial g^\beta} \right]. \end{aligned}$$

Visto que

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial g^\beta} = \sum_{\alpha=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \frac{\partial q^\alpha}{\partial g^\beta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial g^\beta} \right),$$

concluimos que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{g}^\beta} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial g^\beta} = \sum_{\alpha=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \right] \frac{\partial q^\alpha}{\partial g^\beta} = 0.$$

**Definição 1.2 (Lagrangianas equivalentes).** *Se as lagrangianas  $L_1$  e  $L_2$  dão origem às mesmas equações de movimento para o mesmo sistema, diz-se que elas são equivalentes.*

**Proposição 1.1.** *Seja  $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ , uma função suave e seja  $L_1$  a lagrangiana de um sistema mecânico sujeito a vínculos holonômicos. Se  $L_2: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por*

$$L_2 = L_1 + \frac{dF}{dt},$$

*então  $L_1$  e  $L_2$  são equivalentes.*

Para a demonstração desta proposição, faremos uso do

**Lema 1.1.** *Seja  $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(q^1, \dots, q^n, t)$ , uma função suave. Então, para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$ , vale que*

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} \left( \frac{dF}{dt} \right) = \frac{\partial F}{\partial q^j},$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial q^j} \right) = \frac{\partial}{\partial q^j} \left( \frac{dF}{dt} \right).$$

*Demonstração do Lema 1.1.*

Seja  $j \in \{1, \dots, n\}$  e  $F(q^1, \dots, q^n, t)$  suave. Então:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} \left( \frac{dF}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial F}{\partial t} \right) = \frac{\partial F}{\partial q^j},$$

pois nem  $F$  nem suas derivadas parciais dependem de  $\dot{q}^j$ .

Para mostrar a segunda igualdade, basta usar a suavidade de  $F$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial q^j} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial q^j} \dot{q}^i + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q^j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial q^j \partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial^2 F}{\partial q^j \partial t} = \frac{\partial}{\partial q^j} \left( \frac{dF}{dt} \right).$$

■

*Demonstração da Proposição 1.1.*

Seja  $\alpha \in \{1, \dots, n\}$ . Segue da definição de  $L_2$  que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha} \left( \frac{dF}{dt} \right) \right).$$

Sendo  $L_1$  solução das equações de Lagrange e aplicando o lema 1.1 segue que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \left( L_1 + \frac{dF}{dt} \right) = \frac{\partial L_2}{\partial q^\alpha}.$$

■

### Conservação de energia

Uma vez fornecida uma lagrangiana<sup>8</sup>  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T - V$  para um determinado sistema mecânico sujeito a vínculos holonômicos, como obter uma expressão para a energia? Dadas certas condições, é possível obter a expressão para a energia do sistema do seguinte modo<sup>9</sup>:

$$E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{\gamma} \dot{q}^{\gamma} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\gamma}} - L. \quad (1.17)$$

Apesar de a expressão parecer um tanto arbitrária, seu lado direito é o que se chama por **transformada de Legendre** da função Lagrangiana; as definições mais formais da transformada serão apresentadas em algum ponto mais adiante. Por ora é suficiente ver que hipóteses precisam ser feitas sobre  $L$  para que a eq. (1.17) de fato seja a energia do sistema.

Se cada uma das partículas é uma função das coordenadas generalizadas e (possivelmente) do tempo, então temos que a velocidade da  $i$ -ésima partícula é dada por

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \equiv \mathbf{v}_i = \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^{\alpha}} \dot{q}^{\alpha} + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}.$$

Desta forma, a expressão para a energia cinética do sistema em função das velocidades generalizadas é:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^{\alpha}} \dot{q}^{\alpha} + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \right) \cdot \left( \sum_{\beta} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^{\beta}} \dot{q}^{\beta} + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \right).$$

Se utilizarmos a expressão acima na lagrangiana, então a eq. (1.17) assume a forma a seguir:

$$\sum_{\gamma} \dot{q}^{\gamma} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\gamma}} - L = \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha, \gamma} m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^{\alpha}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^{\gamma}} \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\gamma} + \sum_{i=1}^N \sum_{\gamma} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \dot{q}^{\gamma} - T + V,$$

pois o potencial independe de  $\dot{q}^{\gamma}$ . Claramente, a igualdade acima não equivale à energia do sistema, contudo, se supormos que os vínculos não possuem dependências temporais explícitas, então obtemos o que desejamos. Com efeito, se  $\partial_t \mathbf{x}_i = 0$  para todo  $t$ , então a energia cinética torna-se uma forma quadrática nas velocidades generalizadas, i.e.,  $T = \sum A_{\alpha\gamma} \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\gamma}$ . Consequentemente, temos que

$$E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{\gamma} \dot{q}^{\gamma} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\gamma}} - L = 2T - T + V = T + V.$$

<sup>8</sup>O uso da palavra “uma” se dá justamente por conta da proposição 1.1, já que não há uma única lagrangiana que nos forneça as informações de interesse para o sistema estudado.

<sup>9</sup>Por clareza, a convenção de Einstein será omitida no que segue.

Derivando a eq. (1.17) com relação ao tempo, verifica-se que

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Portanto, é preciso que a lagrangiana do sistema não possua dependências temporais para que a quantidade definida pela eq. (1.17) seja conservada.

Em conclusão, em um sistema mecânico sujeito a vínculos holonômicos, se a energia cinética é uma forma quadrática nas velocidades generalizadas e se a energia potencial depende exclusivamente das coordenadas generalizadas, a transformada de Legendre de  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  é a energia do sistema. Para que a energia seja conservada, então é necessário que  $L$  não dependa explicitamente do tempo.

**Exercício 1.2.** Aplique a eq. (1.17) na lagrangiana obtida no Exemplo 1.6 e verifique se esta grandeza equivale à energia e se ela é conservada.

### 1.3 Aspectos Geométricos e Princípio de Hamilton

A partir das subseções anteriores, sabemos que um sistema mecânico sujeito a vínculos holonômicos pode ser visto como uma hiper-superfície  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{3N}$  que pode ser localmente mapeada em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n < 3N$ , por meio de um conjunto  $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n)$  de funções suaves definidas num conjunto  $U \subset \mathcal{M}$ . Além disso, se  $\mathbf{q}'$  é outro conjunto de funções suaves, definidas numa região  $V \subset \mathcal{M}$  tal que  $U \cap V \neq \emptyset$ , as equações de Lagrange permanecem invariantes na região onde é possível descrever cada  $q^\alpha$  como função de  $\mathbf{q}'$  e as funções  $\mathbf{q} \circ \mathbf{q}'^{-1}$  e  $\mathbf{q}' \circ \mathbf{q}^{-1}$  são suaves<sup>10</sup>.

As características acima servem como motivadoras para a

**Definição 1.3.** Um *sistema mecânico* é uma tripla  $(\mathcal{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{F})$ , onde

- a)  $(\mathcal{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  é uma variedade Riemanniana cuja métrica induz o mapa  $\mu: T\mathcal{M} \rightarrow T^*\mathcal{M}$ :

$$\mu(p, v) \cdot (p, w) := \langle v, w \rangle_p, \quad \forall (p, v), \forall (p, w) \in T\mathcal{M},$$

denominado *operador massa*;

- b)  $\mathcal{F}: T\mathcal{M} \rightarrow T^*\mathcal{M}$  é um mapa diferenciável que satisfaz  $\mathcal{F}(T_p\mathcal{M}) \subset T_p^*\mathcal{M}$  para todo  $p \in \mathcal{M}$ , denominado *força externa*.

Por costume, chama-se a variedade  $\mathcal{M}$  de *espaço de configurações*<sup>11</sup>.

Se  $I \subset \mathbb{R}$  é um intervalo, então uma curva  $c: I \rightarrow \mathcal{M}$  que seja solução da equação de Newton é chamada de **trajetória do sistema mecânico**.

<sup>10</sup>Intuitivamente, essas inversas e composições estão bem definidas, pois, a princípio, podemos transitar entre diferentes sistemas de coordenadas que descrevem um sistema mecânico sem que as formas das leis físicas sejam alteradas. Em palavras chiques, esta característica é chamada de *covariância geral*.

<sup>11</sup>Para uma leitura mais aprofundada sobre os temas desta seção, vide [4] ou [5].

**Definição 1.4.** Dado um sistema mecânico, temos que a força externa  $\mathcal{F}$  é:

1. **Posicional** se  $\mathcal{F}(p, v)$  depende apenas de  $\pi(v)$  para todo  $(p, v) \in T\mathcal{M}$ .
2. **Conservativa** se existe  $V: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\mathcal{F}(p, v) = -dV_{\pi(v)}$  para todo  $(p, v) \in T\mathcal{M}$ . A função  $V$  é a **energia potencial**.

**Definição 1.5.** Seja  $(\mathcal{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{F})$  um sistema mecânico. A **energia cinética** do sistema é a função  $K: T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$K(p, v) := \frac{1}{2} \langle v, v \rangle_p,$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  é o produto interno em  $T_p\mathcal{M}$  definido pela métrica estabelecida.

Como a lagrangiana de um sistema mecânico é uma função das configurações e das velocidades relacionadas às configurações do sistema, é razoável defini-la como sendo uma função diferenciável  $L: T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ .

No que segue, sejam  $a, b \in \mathcal{M}$  e  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  tais que  $t_1 < t_2$ . Ademais, seja  $\mathcal{C}$  o conjunto de todas as curvas diferenciáveis  $c: [t_1, t_2] \rightarrow \mathcal{M}$  tal que  $c(t_1) = a$  e  $c(t_2) = b$ .

**Definição 1.6.** Sejam  $\mathcal{M}$  um sistema mecânico e  $L: T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  uma lagrangiana definida neste sistema. A **ação** determinada por  $L$  é a função  $S: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$S(c) := \int_{t_1}^{t_2} L(c(t), \dot{c}(t)) dt.$$

**Definição 1.7.** Dado  $\varepsilon > 0$ , uma **variação** de  $c \in \mathcal{C}$  é um mapa  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{C}$  tal que:

1.  $\gamma(0) = c$ ;
2. O mapa  $\tilde{\gamma}: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_1, t_2] \rightarrow \mathcal{M}$ , definido por  $\tilde{\gamma}(s, t) := \gamma(s)(t)$ , é diferenciável.

No mais, se  $S$  é a ação de um sistema mecânico, diz-se que  $c$  é um **ponto crítico** de  $S$  quando

$$\left. \frac{d}{ds} S(\gamma(s)) \right|_{s=0} = 0$$

para qualquer variação  $\gamma$  da curva  $c$ .

**Teorema 1.1 (Princípio de Hamilton).** Uma curva  $c \in \mathcal{C}$  é um ponto crítico da ação determinada por uma lagrangiana  $L: T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  se e somente se satisfaz as **equações de Euler-Lagrange**

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}(q(t), \dot{q}(t)) \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}(q(t), \dot{q}(t)) = 0$$

para qualquer carta  $(TU, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  em  $T\mathcal{M}$ .

*Demonstração.*

( $\Leftarrow$ ) Seja  $(U, \varphi) = (U, q^1, \dots, q^n)$  uma carta em  $\mathcal{M}$  tal que  $c([t_1, t_2]) \subset U$ <sup>12</sup>. Dado  $\varepsilon > 0$ , seja  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow C$  uma variação de  $c$  e defina  $q(s, t) := (q \circ \tilde{\gamma})(s, t)$ . Localmente, a expressão para a ação do sistema é

$$S(\gamma(s)) = \int_{t_1}^{t_2} L(q(s, t), \frac{\partial q}{\partial t}(s, t)) dt,$$

onde  $L(q(s, t), \frac{\partial q}{\partial t}(s, t))$  é um abuso de notação para a composição  $L \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ , com  $\tilde{\varphi}^{-1}$  sendo a inversa do mapa de coordenadas da carta induzida  $(TU, \tilde{\varphi})$ ,  $\tilde{\varphi} = (q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ .

A derivada da ação  $S$  avaliada em  $s = 0$  é

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} S(\gamma(s)) \right|_{s=0} &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \left( q(0, t), \frac{\partial q}{\partial t}(0, t) \right) \frac{\partial q^\alpha}{\partial s}(0, t) dt \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \left( q(0, t), \frac{\partial q}{\partial t}(0, t) \right) \frac{\partial^2 q^\alpha}{\partial s \partial t}(0, t) dt. \end{aligned}$$

Integração por partes implica em

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} S(\gamma(s)) \right|_{s=0} &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \left( q(0, t), \frac{\partial q}{\partial t}(0, t) \right) \frac{\partial q^\alpha}{\partial s}(0, t) dt \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \left( q(0, t), \frac{\partial q}{\partial t}(0, t) \right) \frac{\partial q}{\partial s}(0, t) \Big|_{t_1}^{t_2} \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^n \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \left( q(0, t), \frac{\partial q}{\partial t}(0, t) \right) \right) \frac{\partial q^\alpha}{\partial s}(0, t) dt. \end{aligned}$$

Como por hipótese  $\forall s \gamma(s) \in C$ , segue que  $\forall s \ q(s, t_1) := q(\gamma(s)(t_1)) = q(c(t_1)) = q(a)$  e  $q(s, t_2) := q(\gamma(s)(t_2)) = q(c(t_2)) = q(b)$ . Consequentemente

$$\frac{\partial q}{\partial s}(0, t_1) = \frac{\partial q}{\partial s}(0, t_2) = 0.$$

Disto, conclui-se facilmente que a expressão para a derivada da ação em  $s = 0$  é

$$\left. \frac{d}{ds} S(\gamma(s)) \right|_{s=0} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^n \left[ \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \right] (q(t), \dot{q}(t)) w^\alpha(t) dt,$$

<sup>12</sup>Isto não é necessariamente verdade, para o caso em que a imagem está contida em mais de uma carta, vide o capítulo 7 de [4].

onde  $q(t) \equiv q(c(t))$ ,  $\dot{q}(t) \equiv \partial q / \partial t (0, t)$  e  $w^\alpha(t) \equiv \partial q^\alpha / \partial s (0, t)$ . Visto que localmente  $c: [t_1, t_2] \rightarrow \mathcal{M}$  satisfaz as equações de Euler-Lagrange, então conclui-se que

$$\left. \frac{d}{ds} S(\gamma(s)) \right|_{s=0} = 0.$$

Sendo  $\gamma$  qualquer, ao estender o resultado acima para toda variação tem-se que a curva  $c$  é um ponto crítico da ação.

( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $c$  é ponto crítico da ação do sistema. Escolhidas uma carta  $(U, \varphi)$  e um mapa suave  $w: [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $w(t_1) = w(t_2) = 0$ , tem-se que o mapa  $q(s, t) := q(t) + sw(t)$  é a forma local do mapa induzido por uma variação  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{C}$  da curva  $c$ . Se  $\rho: [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave e positiva tal que  $\rho(t_1) = \rho(t_2) = 0$ , então basta definir as funções coordenadas de  $w$  como sendo

$$w^\alpha(t) := \left[ \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \right] (q(t), \dot{q}(t)) \rho(t).$$

Daí, como  $c$  é ponto crítico da ação, tem-se que:

$$\left. \frac{d}{ds} S(\gamma(s)) \right|_{s=0} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^n \left[ \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \right]^2 (q(t), \dot{q}(t)) \rho(t) dt = 0.$$

Portanto, para cada  $\alpha$  vale que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) (q(t), \dot{q}(t)) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} (q(t), \dot{q}(t)) = 0.$$

■

Fisicamente, o princípio de Hamilton<sup>13</sup> exprime que a evolução temporal de um sistema mecânico é descrito por uma trajetória  $c: [t_1, t_2] \rightarrow \mathcal{M}$  no espaço de configurações em que a grandeza chamada *ação* não possui perturbações de primeira ordem.

**Definição 1.8.** *Seja  $\mathcal{M}$  um sistema mecânico. A **derivada fibrada**<sup>14</sup> da função lagrangiana  $L$  é a aplicação  $\mathbb{F}L: T\mathcal{M} \rightarrow T^*\mathcal{M}$  que a cada  $(p, v) \in T\mathcal{M}$  designa um elemento  $\mathbb{F}L_v \in T_p^*\mathcal{M}$  definido por*

$$(\mathbb{F}L)_v(w) := \left. \frac{d}{dt} L(v + tw) \right|_{t=0}, \quad \forall w \in T_p\mathcal{M}.$$

Para não carregar a notação, tem-se que  $(\mathbb{F}L)_v \equiv \mathbb{F}L(p, v)$ .

**Definição 1.9.** *Seja  $L: T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  a lagrangiana de um sistema mecânico. A sua função **Hamiltoniana associada**,  $H: T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , é a função definida por*

$$H(v) := (\mathbb{F}L)_v(v) - L(v).$$

<sup>13</sup>Também chamado de *princípio da ação estacionária* ou *princípio da mínima ação*.

<sup>14</sup>Tradução livre do termo *fiber derivative*.



Seja  $(a, v) \in T\mathcal{M}$ <sup>15</sup>. Em coordenadas locais  $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ , a Hamiltoniana associada exprime-se como

$$H(q(a), \dot{q}(v)) = \dot{q}^\alpha(v) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - L(q(a), \dot{q}(v)).$$

Daí, segue que a hamiltoniana associada (em coordenadas locais) é a mesma grandeza definida na eq. (1.17) e portanto é definida a partir da transformada de Legendre da lagrangiana. Visto que nesta seção a energia cinética é uma forma quadrática das coordenadas generalizadas e que a lagrangiana é uma função independente do tempo, concluímos o mesmo da seção anterior: a hamiltoniana equivale à energia do sistema e ela é constante. Esta última característica encontra-se no

**Teorema 1.2.** *A função Hamiltoniana associada é constante ao longo das soluções das equações de Euler-Lagrange.*

**Exercício 1.3.** *Prove o teorema 1.2.*

Um aspecto importante do formalismo lagrangiano é sua capacidade de explicitar a relação entre simetrias e quantidades conservadas. Isso será explorado um pouco mais detalhadamente a seguir.

**Definição 1.10.** *Seja  $G$  um grupo e  $S$  um conjunto. Diz-se que  $G$  atua em  $S$  se existe um homomorfismo  $\phi$  entre  $G$  e o grupo de bijeções de  $S$  em  $S$ . Equivalentemente:*

$$\phi(g)(p) = A(g, p),$$

onde  $A: G \times S \rightarrow S$  é um mapa que satisfaz:

1. Se  $e \in G$  é o elemento neutro, então  $A(e, p) = p$ ,  $\forall p \in S$ ;
2. Se  $g, h \in G$ , então  $A(gh, p) = A(g, A(h, p))$ ,  $\forall g, h \in G \forall p \in S$ .

Por costume, denota-se  $A(g, p)$  por  $g \cdot p$ .

**Definição 1.11.** *Seja  $G$  um grupo de Lie atuando em uma variedade  $\mathcal{M}$ . A lagrangiana  $L: T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita  $G$ -invariante se*

$$L((dg)_p v) = L(v),$$

para todos  $v \in T_p \mathcal{M}$ ,  $p \in \mathcal{M}$  e  $g \in G$ , onde  $g: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  é o mapa  $p \mapsto g \cdot p$ .

Recordando que  $\mathfrak{g} \equiv T_e G$ , temos o seguinte:

**Definição 1.12.** *Seja  $G$  um grupo de Lie atuando em uma variedade  $\mathcal{M}$ . A ação infinitesimal de  $V \in \mathfrak{g}$  em  $\mathcal{M}$  é o campo vetorial  $X^V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  definido por*

$$X_p^V := \left. \frac{d}{dt} (\exp(tV) \cdot p) \right|_{t=0} = (dA_p)_e V,$$

onde  $A_p: G \rightarrow \mathcal{M}$  é o mapa  $A_p(g) = g \cdot p$ .

<sup>15</sup>Optei por usar  $a$  no lugar de  $p$ , pois físicos reservam este último símbolo para denotar o momento linear.

**Teorema 1.3 (Noether).** *Seja  $G$  um grupo de Lie atuando em uma variedade  $\mathcal{M}$ . Se  $L: T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  for  $G$ -invariante, então  $J^V: T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  definido por  $J^V(v) := \mathbb{F}L_v(X^V)$  é constante ao longo das soluções das equações de Euler-Lagrange para todo  $V \in \mathfrak{g}$ .*

*Demonstração.*

■

**Exemplo 1.7.**

**Exemplo 1.8.**

## Referências

- [1] Jorge V. José e Eugene J. Saletan. *Classical Dynamics: A Contemporary Approach*. Cambridge University Press, 1998. DOI: [10.1017/CB09780511803772](https://doi.org/10.1017/CB09780511803772).
- [2] Nivaldo A. Lemos. *Analytical Mechanics*. Cambridge University Press, 2018. DOI: [10.1017/9781108241489](https://doi.org/10.1017/9781108241489).
- [3] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag New York, 1989. DOI: [10.1007/978-1-4757-2063-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2063-1).
- [4] Leonor Godinho e José Natário. *An Introduction to Riemannian Geometry. With Applications to Mechanics and Relativity*. Universitext. Springer, 2014.
- [5] Michael Spivak. *Physics for mathematicians: Mechanics I*. Publish or Perish, 2010.