Anotações sobre teoria da medida

Rodrigo Ramos

5 de maio de 2021

Sobre o texto: As páginas a seguir são um resumo do meu estudo sobre teoria da medida usando o livro do Bartle.

Sumário

1 Introdução e funções mensuráveis

Pelo o que parece, estudar teoria da medida é interessante, no sentido que ela permite generalizar a integral de Riemann à uma nova integral, chamada de integral de Lebesgue. Associados a esta nova integral, estão alguns teoremas de convergência que virão a calhar durante um possível estudo formal de mecânica quântica (teoremas da convergência monótona e dominada, por exemplo), além disso, ela permite uma caracterização mais detalhada dos espaços de Hilbert onde as funções de onda residem.
Durante esta toda parte trabalharemos com a **reta real estendida**, $\bar{\mathbb{R}}$, que é o conjunto $\mathbb{R}$ juntamente dos símbolos $-\infty$ e $+\infty$. Estes símbolos não são números reais. Bem, devem existir outras razões para que a adoção deste conjunto seja usual em livros de medida e integração, mas uma delas é que os teoremas de convergência que temos por objetivo entender não fariam sentido sem o uso de $\bar{\mathbb{R}}$[1].
Dados os símbolos $\pm\infty$ e um número $x \in \mathbb{R}$, definimos que:

1) $(\pm\infty) + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty$;

2) $(\pm\infty)(\pm\infty) = \infty$ *e* $(\pm\infty)(\mp\infty) = -\infty$;

3) $x(\pm\infty) = (\pm\infty)x = \begin{cases} \pm\infty, & se\ x > 0 \\ 0, & se\ x = 0 \\ \mp\infty, & se\ x < 0 \end{cases}$

Também é útil definir os limites superior e inferior de uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais:

$$lim\ sup\ x_n := \underset{m}{inf}(\underset{n\geq m}{sup}\, x_n)$$

$$lim\ inf\ x_n := \underset{m}{sup}(\underset{n\geq m}{inf}\, x_n)$$

Quando $lim\ sup\ x_n$ e $lim\ inf\ x_n$ são iguais, dizemos que este é o limite da sequência.

Definição 1.1 (σ-álgebra)**.** *Seja X um conjunto. Uma família Σ de subconjuntos de X é uma σ-álgebra (lê-se sigma álgebra) em X se satisfaz as seguintes propriedades:*

1) $\emptyset \in \Sigma$ *e* $X \in \Sigma$*;*

2) *Para todo $A \in \Sigma$, temos que $X \setminus A \equiv A^c \in \Sigma$;*

3) *Seja (A_n) uma sequência de elementos de Σ, então* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$[2].

[1] Provavelmente, algo relacionado ao supremo e ao ínfimo do conjunto vazio :p.
[2] Na verdade, o conjunto de índices não precisa ser $\mathbb{N}$, basta que ele seja algum conjunto enumerável $\mathcal{J}$.

Exemplo 1.1. *Seja* $X = \mathbb{N}$. *Definindo* $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ *e* $B = \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}$, *temos que* $\Sigma = \{\emptyset, A, B, \mathbb{N}\}$ *é uma* σ*-álgebra em* $\mathbb{N}$.

Definição 1.2 (Espaço mensurável)**.** *Seja* X *um conjunto e* Σ *uma* σ*-álgebra em* X. *O par ordenado* (X, Σ) *é chamado de um espaço mensurável. Ainda, diz-se que todo* $A \in \Sigma$ *é um conjunto* Σ*-mensurável.*

Quando uma σ-álgebra está subentendida em X, então, para não carregar a notação, iremos dizer que X é um espaço mensurável e que $A \in \Sigma$ é mensurável.

Exercício 1.1. *Sejam* A *e* B *subconjuntos de um conjunto* X. *Mostre que* $A \setminus B = A \cap B^c$.

Proposição 1.1. *Seja* (X, Σ) *um espaço mensurável. Então:*

a) *Para todos* $A \in \Sigma$ *e* $B \in \Sigma$ *temos que* $A \setminus B \in \Sigma$, *onde* $A \setminus B := \{x \in X : x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

b) *Dada uma sequência* (A_n) *de elementos de* Σ, *então* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.

Demonstração.

a) Seja X um conjunto e sejam $A \in \Sigma$ e $B \in \Sigma$ quaisquer, onde Σ é uma σ-álgebra em X. Como A é Σ-mensurável, então A^c também o é. Logo, o conjunto $A^c \cup B$ é Σ-mensurável, pois é união enumerável de elementos de Σ. Disto, segue que $(A^c \cup B)^c = A \cap B^c \in \Sigma$. Pelo exercício 1.1, conclui-se que $A \setminus B \in \Sigma$. Como A e B são Σ-mensuráveis quaisquer, temos que $\forall A, B \in \Sigma$ vale que $A \setminus B \in \Sigma$.

b) Seja (A_n) uma sequência arbitrária de conjuntos Σ-mensuráveis em um espaço mensurável (X, Σ). Como para cada $n \in \mathbb{N}$ o conjunto A_n é Σ-mensurável, então $A^c \in \Sigma$. Segue que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \Sigma$. Pela definição de σ-álgebra, temos que $\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$. Como (A_n) é qualquer, então o resultado vale para toda sequência (A_n) de elementos de Σ.

$\blacksquare$

Exercício 1.2. *Seja* (X, Σ_1) *e* (X, Σ_2) *espaços mensuráveis. Defina* $\Sigma_3 := \{A : A \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2\}$. *Mostre que* Σ_3 *é uma* σ*-álgebra em* X.

Exercício 1.3. *Seja* $\mathcal{A}$ *uma coleção de índices, tal que, dado um conjunto* X, $\forall \alpha \in \mathcal{A}$ *temos que* Σ_α *é um* σ*-álgebra em* X. *Mostre que* $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} \Sigma_\alpha$ *é uma* σ*-álgebra em* X.

Exercício 1.4. *Seja* $\mathcal{F}$ *uma família não-vazia de subconjuntos de* X. *Mostre que a interseção de todas as* σ*-álgebras em* X *que contêm* $\mathcal{F}$ *é uma* σ*-álgebra em* X. *Além disto, mostre que esta é a menor* σ*-álgebra que contém* $\mathcal{F}$. *Denota-se esta* σ*-álgebra por* $\sigma(\mathcal{F})$ *e diz-se que ela é a* σ*-álgebra gerada por* $\mathcal{F}$.

Exemplo 1.2 (Álgebra de Borel)**.** *Seja (X, τ) um espaço topológico. Então $\sigma(\tau)$ é uma σ-álgebra em X, denominada* ***álgebra de Borel****. Costuma-se denotá-la por $\mathcal{B}$ e seus elementos são chamados de conjuntos borelianos. Um exemplo de álgebra de Borel é $(\mathbb{R}, \tau)$, onde τ é a topologia usual da reta.*

Exemplo 1.3. *Seja $X = \bar{\mathbb{R}}$ e seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Borel em $\mathbb{R}$. Para cada $E \in \mathcal{B}$, defina os conjuntos a seguir:*

$$E_1 = E \cup \{+\infty\},\ E_2 = E \cup \{-\infty\},\ E_3 = E \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Então, o conjunto $\bar{\mathcal{B}}$ dos $E,\ E_1,\ E_2$ e E_3 tal que $E \in \mathcal{B}$ é uma σ-álgebra em $\bar{\mathbb{R}}$, chamada de álgebra de Borel estendida.

Definição 1.3. *Seja (X, Σ) um espaço mensurável e seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Diz-se que f é Σ-mensurável quando para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto*

$$\{x \in X :\ f(x) > \alpha\}$$

for Σ-mensurável.

Lema 1.1. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$, onde X é um espaço mensurável. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) *$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $A_\alpha = \{x \in X :\ f(x) > \alpha\}$ é mensurável.*

b) *$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $B_\alpha = \{x \in X :\ f(x) \leq \alpha\}$ é mensurável.*

c) *$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $C_\alpha = \{x \in X :\ f(x) \geq \alpha\}$ é mensurável.*

d) *$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $D_\alpha = \{x \in X :\ f(x) < \alpha\}$ é mensurável.*

Demonstração.
Claramente, $A_\alpha^c = B_\alpha$, portanto, **a)** $\iff$ **b)** é verdade. Um raciocínio análogo pode ser aplicado entre **c)** e **d)**. Resta mostrar que **a)** $\iff$ **c)**.

Assumindo **a)**, então, temos que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_{\alpha - 1/n}$ é mensurável. Logo, pela proposição 1.1, segue que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{\alpha-1/n}$ é mensurável. Agora, dado $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{\alpha-1/n}$ qualquer, temos que $f(x) > \alpha - 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, portanto, $f(x)$ é cota superior desta interseção e concluímos que ela é um subconjunto não-vazio e limitado de $\mathbb{R}$, isto é, possui supremo em $\mathbb{R}$. Como $\alpha = \sup \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{\alpha-1/n}$, então necessariamente $f(x) \geq \alpha$, pois α é a menor cota superior desta interseção. Segue que $x \in C_\alpha$. É fácil concluir que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{\alpha-1/n} \subseteq C_\alpha$. A outra inclusão é imediata, pois se $x \in C_\alpha$, então $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x) \geq \alpha > \alpha - 1/n$.
Conclusão: $C_\alpha = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{\alpha-1/n}$, logo C_α é mensurável, i.e., **a)** $\implies$ **c)**.

Assumindo **c)**, veja que $A_\alpha = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_{\alpha+1/n}$. Como $C_{\alpha+1/n}$ é mensurável para cada $n \in \mathbb{N}$, então a união deles também será mensurável. Conclusão: A_α é mensurável. ■

Exercício 1.5. *Mostre que* $A_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha+1/n}$.

A seguir temos alguns exemplos de funções mensuráveis (em cada exemplo, assuma que X é um espaço mensurável, por tudo que é sagrado).

Exemplo 1.4. *Dado* $\alpha \in \mathbb{R}$, *seja* $f : X \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = \alpha$ *para todo* $x \in X$. *Então,* $A_\beta = \emptyset$ *para todo* $\beta \geq \alpha$ *e* $A_\beta = X$ *para todo* $\beta < \alpha$.

Exemplo 1.5. *A função característica de um subconjunto* $E \subseteq X$, $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in E \\ 0, & se\ x \notin E \end{cases}$$

é mensurável. Com efeito, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, *se* $\alpha < 0$, *então,* $A_\alpha = X$*; se* $0 \leq \alpha < 1$, *então* $A_\alpha = E$ *e por fim, se* $\alpha \geq 1$, *então* $A_\alpha = \emptyset$.

Exemplo 1.6. *Seja* $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ *um espaço mensurável, onde* $\mathcal{B} = \sigma(\tau)$, *sendo* τ *a topologia usual da reta. Então, qualquer função contínua* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é* $(\mathcal{B}-)$*mensurável. Com efeito, dado que* f *é contínua, então para qualquer* α *real temos que* A_α *é um conjunto aberto e portanto um elemento de* $\mathcal{B}$. *De agora em diante,* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *denotará a álgebra de Borel gerada pela topologia usual da reta.*

Exercício 1.6. *Considere a álgebra de Borel* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *na reta. Mostre que toda função monótona* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é mensurável.*

Lema 1.2. *Seja* X *um espaço mensurável e sejam* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *mensuráveis. Então segue que as seguintes funções também são mensuráveis:*

i) cf, *para todo* $c \in \mathbb{R}$.

ii) f^2.

iii) $f + g$.

iv) fg.

v) $|f|$.

Demonstração.

i) Se c = 0, então cf é constante, portanto ela é mensurável. No caso em que $c > 0$, visto que f é mensurável, temos que $\{x \in X : f(x) > \alpha/c\}$ é mensurável para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$. O caso para c negativo é análogo.

ii) Para qualquer $\alpha < 0$, temos que $\{x \in X : f^2(x) > \alpha\} = X$. Para $\alpha \geq 0$, temos que $\{x \in X : f^2(x) > \alpha\} = \{x \in X : f(x) > \sqrt{\alpha}\}$. Facilmente conclui-se que f^2 é mensurável.

iii) Veja que $f(x)+g(x)<\alpha \iff \exists r \in \mathbb{Q}$ *tal que* $f(x)<r<\alpha-g(x)$. Logo, o conjunto

$$S_r := \{x \in X:\ f(x)<r\} \cap \{x \in X:\ g(x)<\alpha-r\}$$

é mensurável para cada racional. Fixado α, segue que $\{x \in X:\ (f+g)(x)<\alpha\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} S_r$, isto é, o conjunto é uma união enumerável de conjuntos mensuráveis. Logo, para cada α fixado, $\{x \in X:\ (f+g)(x)<\alpha\}$ é mensurável. Conclusão: $f+g$ é mensurável.

iv) Visto que $fg \equiv \frac{1}{2}(f+g)^2 - \frac{1}{2}(f^2+g^2)$, utilizando os itens anteriores, conclui-se que fg é mensurável.

v) Para qualquer $\alpha<0$, temos que $\{x \in X:\ |f(x)|>\alpha\} = X$. Quando $\alpha \geq 0$, segue que $\{x \in X:\ |f(x)|>\alpha\} = \{x \in X:\ f(x)>\alpha\} \cup \{x \in X:\ f(x)<-\alpha\}$. Logo, no caso positivo, $\{A_\alpha\}$ é uma união enumerável de conjuntos mensuráveis e portanto é mensurável. Conclui-se que $|f|$ é mensurável.

$\blacksquare$

Definição 1.4. *Seja $f:\ X \to \mathbb{R}$ uma função definida em um espaço mensurável. As **partes positiva e negativa de f**, denotadas respectivamente por f^+ e f^-, são as funções não-negativas definidas por*

$$f^+(x) := \sup\{f(x),0\}, \qquad f^-(x) := \sup\{-f(x),0\}.$$

Exercício 1.7. *Mostre que, para qualquer função f definida em um conjunto X, vale que $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$. Como corolário, mostre que $f^+ = \frac{1}{2}(f+|f|)$ e $f^- = \frac{1}{2}(|f|-f)$.*

Definição 1.5. *Uma $f:\ X \to \bar{\mathbb{R}}$ é dita Σ-mensurável quando $\{x \in X:\ f(x)>\alpha\}$ é um elemento de Σ para todo α real. O conjunto todas estas funções é denotado por $M(X,\Sigma)$.*

Temos que

$$\{x \in X:\ f(x)=+\infty\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X:\ f(x)>n\}$$

$$\{x \in X:\ f(x)=-\infty\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X:\ f(x)\leq -n\}.$$

Daí, quando $f \in M(X,\Sigma)$, estes conjuntos são mensuráveis.
Uma forma mais conveniente de identificar funções $f \in M(X,\Sigma)$ encontra-se no

Lema 1.3. *Seja $f:\ X \to \bar{\mathbb{R}}$. Então $f \in M(X,\Sigma)$ se e somente se os conjuntos*

$$A = \{x \in X:\ f(x)=+\infty\} \quad e \quad B = \{x \in X:\ f(x)=-\infty\}$$

são mensuráveis e se a função $f_1 : X \to \bar{\mathbb{R}}$ definida por

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \notin A \cup B \\ 0, & x \in A \cup B \end{cases}$$

for mensurável.

Demonstração.
Para mostrar a ida, assuma que $f \in M(X, \Sigma)$. Já sabemos que A e B são mensuráveis. Além disso, seja $\alpha \in \mathbb{R}$.

Se $\alpha \geq 0$, então:

$$\{x \in X : f_1(x) > \alpha\} = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \setminus A$$

é um conjunto mensurável. No caso em que $\alpha < 0$, temos que

$$\{x \in X : f_1(x) > \alpha\} = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \cup B$$

também é mensurável.

Daí, conclui-se que $f_1 \in M(X, \Sigma)$.

Para mostrar a volta, basta ver que

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} = \{x \in X : f_1(x) > \alpha\} \cup A;$$
$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \setminus B$$

quando $\alpha \geq 0$ e $\alpha < 0$, respectivamente. Daí, conclui-se que $f \in M(X, \Sigma)$. ■

Corolário 1.1. *Se $f : X \to \bar{\mathbb{R}} \in M(X, \Sigma)$, então cf, f^2, $|f|$, f^+ e f^- são mensuráveis.*

Corolário 1.2. *Sejam $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ mensuráveis e defina os conjuntos*

$$E_1 = \{x \in X : f(x) = \infty \text{ e } g(x) = -\infty\}$$
$$E_2 = \{x \in X : f(x) = -\infty \text{ e } g(x) = +\infty\}.$$

Se $f + g$ é definida do modo usual em $X \setminus (E_1 \cup E_2)$ e se é definido que $(f + g)(E_1 \cup E_2) = \{0\}$, então $f + g$ é mensurável.

Para definir a mensurabilidade do produto fg, faremos uso do

Lema 1.4. *Seja (f_n) uma sequência em $M(X, \Sigma)$. Sejam*

$$f(x) = \inf f_n(x), \qquad F(x) = \sup f_n(x)$$
$$f^*(x) = \liminf f_n(x), \quad F^*(x) = \limsup f_n(x).$$

Então f, F, f^* e F^* são mensuráveis.

Demonstração.

Usando a definição de ínfimo, temos que para cada $x \in X$ e para cada $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\inf f_n(x) \geq \alpha \iff f_n(x) \geq \alpha.$$

Daí, conclui-se que

$$C_\alpha \equiv \{x \in X : f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : \ f_n(x) \geq \alpha\}.$$

Como cada $\{x \in X : \ f_n(x) \geq \alpha\}$ é mensurável, então C_α é mensurável, pois Σ é fechada com relação a interseções enumeráveis.

De forma análoga ao caso acima, temos as seguintes igualdades:

$$\{x \in X : \ F(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : \ f_n(x) > \alpha\},$$

$$\{x \in X : \ f^*(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{m=n}^{\infty} \{x \in X : \ f_m(x) \geq \alpha\} \right),$$

$$\{x \in X : \ F^*(x) > \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{x \in X : \ f_m(x) > \alpha\} \right).$$

Daí, F, f^* e F^* são mensuráveis. ■

Corolário 1.3. *Seja (f_n) uma sequência em $M(X, \Sigma)$ que converge para f. Então $f \in M(X, \Sigma)$.*

Demonstração.

(f_n) convergir pontualmente para f significa que $f(x) = \liminf f_n(x)$. Visto que $\liminf f_n(x) = f^*(x)$, segue que f é mensurável. ■

Para caracterizar a mensurabilidade do produto fg quando $f, g \in M(X, \Sigma)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ defina o **truncamento de f** como sendo

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \textit{se } |f(x)| \leq n \\ n, & \textit{se } f(x) > n \\ -n, & \textit{se } f(x) < -n \end{cases}$$

O truncamento é uma função mensurável, pois podemos escrevê-lo como

$$f_n(x) = f(x)\chi_{\{|f(x)| \leq n\}} + n\chi_{\{f(x) > n\}} - n\chi_{\{f(x) < -n\}}.$$

Além disso, $f_n(x) \to f(x)$ pontualmente: se $f(x) \in \mathbb{R}$, como a reta é arquimediana, então existe n_0 tal que $f(x) < n_0$; no caso em que $f(x) = \pm\infty$, temos que $f_n(x) = \pm n$ e $\lim f_n(x) = \pm\infty$.

Se g_m é o truncamento de $g \in M(X, \Sigma)$, então pelo lema 1.2, segue que para cada $m, n \in \mathbb{N}$, $f_n g_m$ é mensurável. Daí, pelo corolário anterior, temos que

$$f(x)g_m(x) = \lim_n f_n(x)g_m(x)$$

é mensurável para cada m. Novamente, pelo lema 1.2, o produto fg_m. Invocando novamente o corolário anterior, concluímos que

$$(fg)(x) = \lim_m f(x)g_m(x)$$

é mensurável.

Lema 1.5. *Se $f \in M(X, \Sigma)$ é não-negativa, então existe uma sequência (φ_n) em $M(X, \Sigma)$ tal que*

a) $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ *para todos* $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$.

b) (φ_n) *converge pontualmente para* f.

c) *Cada* φ_n *tem um número finito de valores reais.*

Demonstração.
Fixado $n \in \mathbb{N}$, para $k = 0, 1, \ldots, n2^n - 1$ defina o conjunto

$$E_{kn} := \left\{ x \in X : \; \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \right\}$$

e se $k = n2^n$, definida $E_{nk} = \{x \in X : \; f(x) \geq n\}$. Ainda mantendo n fixado, temos que a coleção $\{E_{kn}$ é uma cobertura disjunta de X. Desta forma, defina $\varphi_n : \; X \to \mathbb{R}$ como sendo

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n2^n} \frac{k}{2^n} \chi_{E_{kn}}(x).$$

Como cada $\chi_{E_{kn}}$ é mensurável, então φ_n é mensurável para cada n. Além disso, por construção, vale que φ_n tem um número finito de valores reais.

Para mostrar que (φ_n) é não-decrescente e que converge pontualmente, uma vez fixado $x \in X$ e escolhido $n \in \mathbb{N}$ arbitrários, temos que os cenários a seguir. Se $f(x) < n$, então

$$\begin{aligned} x \in E_{kn} &\iff \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \\ &\iff \frac{2k}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k+1}{2^{n+1}} \; ou \; \frac{2k+1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{(2k+1)+1}{2^{n+1}} \\ &\iff x \in E_{2k(n+1)} \cup E_{(2k+1)(n+1)}. \end{aligned}$$

Se $n < n+1 \leq f(x)$, temos que $f_n(x) = n$ e $f_{n+1}(x) = n+1$. Se $n \leq f(x) < n+1$, temos que $f_n(x) = n$ e $f_{n+1}(x) = \lfloor f(x)2^{n+1} \rfloor / 2^{n+1}$. Daí, em qualquer situação segue que $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$. Sendo x e n quaisquer, então o resultado vale para todo $x \in X$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se $f(x) < \infty$, então $(\varphi_n(x))$ é uma sequência limitada e crescente de números reais e portanto é convergente. Visto que o limite superior é $f(x)$, segue que $\varphi_n(x) \to f(x)$. Se $f(x) = \infty$, $\varphi_n(x) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto $\varphi(x) \to \infty = f(x)$. ∎

2 Medidas e Integrais

2.1 Medidas

Definição 2.1. *Seja (X, Σ) um espaço mensurável. Uma **medida** é uma função $\mu : \Sigma \to \bar{\mathbb{R}}$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

a) $\mu(\emptyset) = 0$.

b) $\mu(E) \geq 0$ *para todo* $E \in \Sigma$.

c) Para qualquer coleção $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de Σ disjuntos dois a dois, vale que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Esta propriedade por vezes é denominada de σ-aditividade.

*À tripla (X, Σ, μ) dá-se o nome **espaço de medida**.*

Quando $\mu(E) \neq \infty$ para qualquer $E \in \Sigma$, diz-se que μ é uma medida finita. Se existe uma coleção $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\Sigma = \bigcup_n E_n$ e $\mu(E_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, diz-se que μ é uma medida σ-finita.

Nos exemplos a seguir, considere(X, Σ) como um espaço mensurável.

Exemplo 2.1. *Uma vez fixado $x \in X$, define-se a **medida de Dirac**, $\delta_x : \Sigma \to \bar{\mathbb{R}}$, por*

$$\delta_x(E) = \begin{cases} 1, & se\ x \in E \\ 0, & se\ x \notin E \end{cases}$$

Exemplo 2.2. *Fixado $D \subset X$, para cada $E \in \Sigma$ considere $\nu(E)$ como sendo o número de elementos de $E\ capD$. Define-se então*

$$\nu(E) = \begin{cases} |E \cap D|, & se\ E \cap D\ \acute{e}\ finito \\ \infty, & se\ E \cap D\ \acute{e}\ infinito \end{cases}$$

onde $|E \cap D|$ é a cardinalidade da interseção. Na situação em que D é um conjunto enumerável, temos que

$$\nu(E) = \sum_{x \in D} \delta_x(E).$$

Exemplo 2.3. *Sejam $D \subset X$ um conjunto enumerável e $m : D \to (0,\infty)$. Podemos tornar X num espaço de medida ao definirmos $\mu : \Sigma \to \bar{\mathbb{R}}$ como*

$$\mu(E) = \sum_{x \in D} m(x)\delta_x(E).$$

Medidas deste tipo são chamadas de ***medidas discretas****. Se $m(x)$ representa a massa do ponto x, então $\mu(E)$ seria uma forma de definir a massa do conjunto E.*

Exemplo 2.4. *Considere $X = \mathbb{R}$ e $\Sigma = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Existe uma única medida λ definida em $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ que coincide com o comprimento dos intervalos abertos e limitados $E = (a,b)$, ou seja, tal que $\lambda(E) = b - a$. Esta é a* ***medida de Lebesgue****.*

Exemplo 2.5. *Considere $X = \mathbb{R}$ e $\Sigma = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Se $f : \mathbb{R} to \mathbb{R}$ é uma função contínua crescente, então existe uma única medida λ_f definida na álgebra de Borel da reta tal que $\lambda(E) = f(b) - f(a)$ quando $E = (a,b)$. Esta é a* ***medida de Borel-Stieltjes gerada por f****.*

Exemplo 2.6. *Se $\mu : \Sigma \to \bar{\mathbb{R}}$ é uma medida tal que $\mu(E) \in [0,1]$ para todo $E \in \Sigma$ e $\mu(X) = 1$, então a tripla (X, Σ, μ) é chamada de* ***espaço de probabilidade****.*

Lema 2.1. *Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Então*

a) Se $E, F \in \Sigma$ e $E \subseteq F$, então $\mu(E) \leq \mu(F)$.

b) Se $E, F \in \Sigma$, $E \subseteq F$ e $\mu(E) < \infty)$, então $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$.

c) Se (E_n) é uma sequência crescente em Σ, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim \mu(E_n).$$

d) Se (F_n) é uma sequência decrescente em Σ e $\mu(F_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim \mu(F_n).$$

Demonstração.

a) Basta escrever F como sendo a união disjunta $(F \setminus E) \cup E$. Daí, pela positividade de μ e σ-aditividade conclui-se que

$$\mu(E) \leq \mu(E) + \mu(F \setminus E) = \mu(F).$$

b) Como $\mu(E) < \infty$, podemos subtraí-la de ambos os lados da igualdade $\mu(F) = \mu(F \setminus E) + \mu(E)$ e obter a igualdade desejada.

c) No caso em que $\mu(E_n) = \infty$ para algum $n \in \mathbb{N}$, a igualdade é imediata.

Suponha agora que $\mu(E_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Defina $G_n \coloneqq E_n \setminus E_{n-1}$ e por consistência, defina $E_0 = \emptyset$. Claramente $G_{n+1} \cap G_n = \emptyset$ e $\bigcup_n G_n = \bigcup_n E_n$. Logo, por σ-aditividade temos que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(G_k).$$

Agora, dado $n \in \mathbb{N}$, temos que $\sum_{k=1}^{n} \mu(G_k)$ é uma soma telescópica, ou seja,

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(G_k) = \mu(E_n) - \mu(E_0).$$

Como a medida de E_0 é zero, segue que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(G_k) = \lim \sum_{k=1}^{n} \mu(G_k) = \lim \mu(E_n).$$

d) Observe que

$$\mu(F_n) < \infty \ e \ \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq F_n \implies \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) < \infty.$$

Além disso, da finitude de $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right)$ e por $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) \subseteq F_1$, temos que

$$\mu\left(F_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \mu(F_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right). \tag{2.1}$$

Pelas leis de De Morgan, vale que

$$F_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_1 \setminus F_n).$$

Veja que $(F_1 \setminus F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de conjuntos mensuráveis. Daí, pelo item anterior concluímos que

$$\mu\left(F_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (F_1 \setminus F_n)\right) = \lim \mu(F_1 \setminus F_n).$$

Usando o item b, temos que

$$\mu\left(F_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \mu(F_1) - \lim \mu(F_n). \tag{2.2}$$

Como (F_n) é uma sequência decrescente, temos que $0 \leq \mu(F_{n+1}) \leq \mu(F_n) \leq \mu(F_1) < \infty$, ou seja, a sequência das medidas é uma sequência não-crescente e limitada de números reais e portanto é convergente.

Usando as eq. (2.1) e eq. (2.2), conclui-se que

$$\lim \mu(F_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right).$$

■

Definição 2.2. *Sejam P uma proposição e X um espaço de medida. Diz-se que P vale em quase toda parte pela medida μ, abreviadamente q.t.p.[μ], se existe um conjunto $N \in \Sigma$ tal que $\mu(N) = 0$ e P vale no complementar de N. Quando a medida mu está subentendida, simplesmente diz-se que a P vale em quase toda parte — abreviadamente q.t.p..*

Se (f_n) é uma sequência num espaço de medida, então ela converge em q.t.p[μ] se existe $N \in \Sigma$ tal que $\mu(N) = 0$ e $\lim f_n(x) = f(x)$ para todo $x \notin N$. Isto é denotado por

$$f = \lim f_n, \ \ q.t.p.[\mu].$$

Por vezes pode ser útil relaxar alguns dos axiomas que definem uma medida, como por exemplo na

Definição 2.3. *Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Uma **carga** é uma função $\lambda : \ \Sigma \to \mathbb{R}$ que é σ-aditiva e tal que $\lambda(\emptyset) = 0$.*

Exercício 2.1. *Mostre que a combinação linear de cargas também é uma carga.*

Construção de medidas

2.2 Integração

Para iniciar o estudo de integração no contexto de teoria da medida, trabalharemos primeiro com um caso mais simples, que mais para a frente permitirá a definição da *integral de Lebesgue*.

Antes de prosseguirmos, é pertinente apresentar a notação a seguir: se (X, Σ, μ) for um espaço de medida, o conjunto de todas as funções mensuráveis não-negativas definidas neste espaço é denotado por $M^+(X, \Sigma)$. Além do mais, nesta subseção trabalharemos com um espaço de medida (arbitrário) (X, Σ, μ) fixado.

Definição 2.4. *Uma função $\varphi : \ X \to \mathbb{R}$ é dita **simples** se admite apenas um número finito de valores.*

Seja $\{E_j\}_{j=1}^{n}$ uma partição de X tal que uma função simples e mensurável φ assume apenas um valor a_j em cada E_j, sendo que $i \neq j \implies a_i \neq a_j$.

Podemos representar tal função unicamente como

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j},$$

onde $a_j \in \mathbb{R}$ é o valor de φ em E_j. Essa representação de φ é única e será chamada de *representação padrão de* φ.

Definição 2.5. *Seja $\varphi \in M^+(X, \Sigma)$ uma função simples. Na representação padrão, a integral de φ relativa à medida μ é o valor*

$$\int \varphi \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j).$$

Lema 2.2. *Seja $\varphi \in M^+(X, \Sigma)$ uma função simples. A integral $\int \varphi \mathrm{d}\mu$ independe da representação de φ.*

Demonstração.
Seja

$$\varphi = \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(F_k)$$

uma representação de φ, onde $\{F_k\}_{k=1}^{m}$ é outra partição de X e os coeficientes $c_k \in [0, +\infty)$ não são todos distintos. Observe que o conjunto das interseções não-vazias $\{E_j \cap F_k\}$ forma uma partição de X, logo se $x \in X$ pertence a um elemento arbitrário deste conjunto, digamos $E_{j_0} \cap F_{k_0}$, então $a_{j_0} = \varphi(x) = b_{k_0}$. Daí, segue que:

$$\int \varphi \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_j \mu(E_j \cap F_k).$$

A soma acima percorre todos os índices, pois nas interseções vazias temos $\mu(E_j \cap F_k) = 0$. Pela observação acima, segue que

$$\int \varphi \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_k \mu(E_j \cap F_k) = \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(F_k),$$

sendo a última igualdade obtida pelo fato de $\{E_j \cap F_k\}$ ser uma partição de X. ■

Com consequência da definição 2.5, temos o

Lema 2.3. *a) Sejam $\varphi, \psi \in M^+(X, \Sigma)$ funções simples e $c \geq 0$. Então*

$$\int c\varphi \mathrm{d}\mu = c \int \varphi \mathrm{d}\mu,$$

$$\int (\varphi + \psi) \mathrm{d}\mu = \int \varphi \mathrm{d}\mu + \int \psi \mathrm{d}\mu.$$

b) *Se $\lambda : \Sigma \to \bar{\mathbb{R}}$ for definida para cada $E \in \Sigma$ por*

$$\lambda(E) := \int \varphi\chi_E \mathrm{d}\mu,$$

então λ é uma medida em X.

Demonstração.

a) Considere o caso em que $c = 0$. Então, $c\varphi$ é identicamente zero e portanto $\int c\varphi \mathrm{d}\mu = 0$. Além disso, sendo $\int \varphi \mathrm{d}\mu$ ser finita ou não, temos que $0 \int \varphi \mathrm{d}\mu = 0$, logo vale a igualdade do lema.
Suponha agora que $c > 0$. Neste caso, a representação padrão de $c\varphi$ é

$$c\varphi = \sum_{j=1}^{n} c a_j \chi_{E_j},$$

donde conclui-se que sua integral é

$$\int c\varphi \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{n} c a_j \mu(E_j) = c \sum_{j=1}^{n} c a_j \mu(E_j) = c \int \varphi \mathrm{d}\mu.$$

Seja $\psi = \sum\limits_{k=1}^{m} b_k \chi_{F_k}$ a representação padrão de ψ. Sendo $\{F_k\}_{k=1}^{m}$ também uma partição de X, facilmente vemos que

$$\int \varphi \mathrm{d}\mu + \int \psi \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} E_j \cap F_k\right) + \sum_{k=1}^{m} b_k \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j \cap F_k\right).$$

Visto que $\{E_j \cap F_k\}$ forma uma partição de X, pela σ-aditividade de μ temos que

$$\int \varphi \mathrm{d}\mu + \int \psi \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k)$$

O lado direito da igualdade acima é uma representação não-padrão de $\varphi + \psi$. Como a integral de uma função simples não-negativa independe de sua representação (lema 2.2), obtemos a igualdade desejada.

b) Basta mostrar que λ obedece às propriedades listadas na definição 2.1. Veja que

$$\varphi\chi_E = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j \cap E}.$$

Daí:

$$\lambda(E) = \sum_{j=1}^{n} a_j \int \chi_{E_j \cap E} \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E \cap E_j).$$

Para cada E_j, o mapa $E \in \Sigma \mapsto \mu(E_j \cap E$ é uma medida. Com efeito, se $E = \emptyset$, então $E_j \cap \emptyset = \emptyset$ e portanto $\mu(E \cap \emptyset) = 0$. Como este mapa é a restrição de μ ao conjunto $\{E_j \cap E : \; E \in \Sigma\} \subset \Sigma$, a não-negatividade é imediata. Por último, se $\{F\}_{k=1}^{\infty}$ é uma coleção disjunta de conjuntos mensuráveis, temos que

$$\mu\left(E_j \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (E_j \cap F_k)\right).$$

Como essas interseções são disjuntas, vale a σ-aditividade.

Como a multiplicação usual de uma medida por um número não-negativo ainda é uma medida e a soma usual de medidas também é uma medida, conclui-se que λ satisfaz a definição 2.1.

■

Definição 2.6. *Se $f \in M^+(X, \Sigma)$, a **integral de f com respeito à medida μ** é definida como*

$$\int f \mathrm{d}\mu := \sup_{\varphi \leq f} \int \varphi \mathrm{d}\mu,$$

onde o supremo é tomado no conjunto das funções simples não-negativas mensuráveis.

No caso em que E é um conjunto mensurável, define-se a integral de f em E com respeito à medida μ como

$$\int_E f \mathrm{d}\mu := \sup_{\varphi \leq f} \int \varphi \chi_E \mathrm{d}\mu.$$

As integrais da definição 2.6 estão bem definidas pois todo subconjunto da reta estendida admite supremo (convença-se disso, ou seja, demonstre esse fato). Além disso, a monotonicidade destas integrais é assegurada pelo

Lema 2.4. *a) Sejam $f, g \in M^+(X, \Sigma)$ tais que $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in X$. Então*

$$\int f \mathrm{d}\mu \leq \int g \mathrm{d}\mu.$$

b) Sejam E e F conjuntos mensuráveis tais que $E \subseteq F$. Então

$$\int_E f \mathrm{d}\mu \leq \int_F f \mathrm{d}\mu.$$

Demonstração.

a) Sejam $\Phi_f^+ = \{\varphi \in M^+(X, \Sigma) : \; \varphi \text{ é simples e } 0 \leq \varphi \leq f\}$ e Φ_g^+ o conjunto análogo para a função g. Como $f \leq g$, então $\Phi_f^+ \subseteq \Phi_g^+$. Disto, rapidamente verifica-se que vale a desigualdade desejada.

b) Como $f\chi_E \leq f\chi_F$, ao aplicarmos o item a obtemos a desigualdade desejada.

■

A partir da definição 2.6 e do lema 2.4, podemos enunciar um dos teoremas essenciais de convergência na teoria de integração de Lebesgue:

Teorema 2.1 (convergência dominada). *Seja* (f_n) *uma sequência não-decrescente de funções em* $M^+(X,\Sigma)$ *que converge para uma função* f*, então*

$$\int f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

Demonstração.

Pelo corolário 1.3, temos que f é mensurável. Além disso, pelo lema 2.4, para todo $n \in \mathbb{N}$, valem as seguintes desigualdades:

$$\int f_n \mathrm{d}\mu \leq \int f_{n+1} \mathrm{d}\mu \leq \int f \mathrm{d}\mu,$$

donde conclui-se que

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu \leq \int f \mathrm{d}\mu.$$

■