

# Anotações

Rodrigo Ramos

5 de maio de 2021

# Sumário

<b>I</b>	<b>Topologia</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Rudimentos de Topologia Geral</b>	<b>2</b>
1.1	Espaço Topológico . . . . .	2
1.2	Base e Sub-base . . . . .	4
1.3	Topologia Produto em $X \times Y$ . . . . .	6
1.4	Subespaço Topológico . . . . .	7
1.5	Mais definições . . . . .	8
1.6	Funções Contínuas (incompleto) . . . . .	14
1.7	Topologia Produto (incompleto) . . . . .	16
1.8	Compacidade e Paracompacidade . . . . .	18
1.9	Topologia Quociente (reescrever) . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Espaços Métricos</b>	<b>29</b>
<b>II</b>	<b>Análise em Variedades</b>	<b>36</b>
<b>3</b>	<b>Variedades Diferenciáveis</b>	<b>37</b>
<b>4</b>	<b>Espaços e Fibrados Tangentes</b>	<b>48</b>
4.1	Espaços Tangentes . . . . .	48
4.2	Fibrados Tangentes . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Subvariedades Diferenciáveis (incompleto)</b>	<b>64</b>
5.1	Imersões e Mergulhos . . . . .	64
<b>6</b>	<b>Campos Vetoriais (incompleto)</b>	<b>66</b>
6.1	Campos Vetoriais em Variedades . . . . .	66
6.2	Bracket de Lie . . . . .	68
<b>7</b>	<b>Tensores</b>	<b>73</b>
7.1	Álgebra Multilinear . . . . .	73
7.2	Produto Tensorial de Espaços Vetoriais . . . . .	75
7.3	Tensores covariantes, contravariantes, simétricos e alternantes . . . . .	80
7.4	Tensores e Campos Tensoriais em Variedades . . . . .	84

<b>8 Formas Diferenciais</b>	<b>91</b>
8.1 Álgebra de Tensores Alternantes . . . . .	91
8.2 Formas Diferenciais em Variedades . . . . .	98
<b>9 Orientação (incompleto)</b>	<b>108</b>
<b>10 Conexões Afins</b>	<b>109</b>
10.1 Derivada Covariante e Transporte Paralelo . . . . .	109
 <b>III Medida e Integração</b>	 <b>115</b>
<b>11 Espaços e Funções Mensuráveis</b>	<b>116</b>
<b>12 Espaços de Medida</b>	<b>125</b>
12.1 Medida . . . . .	125
12.2 Integração . . . . .	128
 <b>IV Aplicações</b>	 <b>133</b>
<b>13 Formalismo Lagrangiano</b>	<b>134</b>
13.1 Vínculos e Espaço de Configurações . . . . .	134
13.2 Equações de Lagrange . . . . .	138
13.3 Aspectos Geométricos e Princípio de Hamilton . . . . .	144
 <b>Bibliografia</b>	 <b>149</b>

### Sobre estas anotações

As páginas a seguir consistem de anotações minhas enquanto estudante de física. O objetivo delas é expor um pouco dos requisitos matemáticos que parecem necessários para uma compreensão mais formal de tópicos como mecânica clássica, relatividade geral e mecânica quântica. Caso sinta vontade de utilizá-las, advirto o(a) leitor(a) de que existem alguns exercícios presentes nelas. Em sua maioria, estes exercícios são bem simples, consistindo em exemplos/demonstrações que eu tive preguiça de digitar ou em exercícios retirados dos livros que eu utilizei durante meu estudo.

Sobre pré-requisitos: na parte [I](#), saber o básico de teoria ingênua dos conjuntos é mais do que o suficiente<sup>1</sup> para a [capítulo 1](#). Para a parte [II](#), além de algumas subseções da parte [I](#), saber álgebra linear e cálculo no  $\mathbb{R}^n$  é essencial. Já para a parte [III](#), ter boas noções de análise na reta ajuda bastante para entender algumas definições e passos em demonstrações, de resto, dá pra se virar. Por fim, na parte [IV](#), apenas básico de mecânica clássica é suficiente.

Para terminar, a parte [III](#) é independente das duas anteriores e boa parte da parte [IV](#) é independente das demais, pois possui um caráter menos matemático.

---

<sup>1</sup>Se precisar estudar isso, o livro de análise 1 do Elon, [\[1\]](#), possui um capítulo sobre o tema

Parte I

Topologia

# Capítulo 1

## Rudimentos de Topologia Geral

### 1.1 Espaço Topológico

Ingenuamente, podemos considerar um conjunto  $X$  como sendo uma determinada coleção de objetos chamados de elementos de  $X$ . *A priori*,  $X$  não possui características adicionais que nos permitam deduzir resultados significativos. Em outras palavras, falta a  $X$  algum tipo de estrutura. Por exemplo, se  $X = \mathbb{R}^n$ , as operações usuais de soma e multiplicação por escalar real em  $\mathbb{R}^n$  conferem a  $X$  a estrutura de um espaço vetorial<sup>1</sup> e formalmente denota-se o espaço vetorial como sendo a tripla ordenada  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ . Sem tais operações,  $\mathbb{R}^n$  é apenas uma coleção de  $n$ -úplas de números reais e nada mais.

Ainda com relação ao exemplo anterior, podemos fornecer mais estrutura a  $\mathbb{R}^n$  (entendendo-o como espaço vetorial) quando definimos, por exemplo, a norma euclidiana  $\|\cdot\|$ ; temos então um espaço vetorial normado e com isso podemos ter uma noção de distância ao impormos que a distância entre dois pontos  $x, y \in \mathbb{R}^n$  é dada por  $\|x - y\|$ , com isso  $\mathbb{R}^n$  torna-se um espaço métrico. A partir da noção de distância, podemos definir o que é uma vizinhança de um ponto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , como também podemos estabelecer o que é a continuidade de um mapa  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ou ainda definir formalmente o que é o limite de uma sequência convergente em  $\mathbb{R}^n$ .

Em parte, o papel da topologia geral é reformular as ideias de vizinhança, continuidade e limites sem ter de apelar à noção de distância introduzida em espaços métricos. Em outras palavras, estes conceitos podem ser entendidos quando introduzimos um determinado tipo de estrutura num conjunto arbitrário  $X$  que não seja aquela de um espaço métrico e, como veremos no que segue, essa estrutura é o que chamamos de uma topologia em  $X$ . No que segue, fazemos uma apresentação abstrata de o que é uma topologia a partir da apresentação dos

---

<sup>1</sup>Algebricamente falando,  $X$  tem a estrutura de um grupo abeliano com relação à soma e tem a estrutura de um módulo sobre  $\mathbb{R}$ .

axiomas que a definem; uma apresentação que tenha algum tipo de motivação geométrica pode ser encontrada em [2].

**Definição 1.1.** Dado um conjunto  $X$ , define-se como o conjunto das partes de  $X$ ,  $\mathbb{P}(X)$ , o conjunto de todos os subconjuntos de  $X$ .

**Exemplo 1.1.** Considere o conjunto  $X = \{0, 1, 2\}$ . É fácil verificar que  $\mathbb{P}(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, X\}$ .

**Exercício 1.1.** Se  $X$  é um conjunto finito com  $n$  elementos, então qual é a quantidade de elementos de  $\mathbb{P}(X)$ ?

**Definição 1.2.** Sejam  $X$  um conjunto e  $\tau$  um subconjunto de  $\mathbb{P}(X)$ . Se valem concomitantemente que:

- a)  $X$  e  $\emptyset$  pertencem a  $\tau$ ;
- b) Dada uma família indexada  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  tal que  $A_\lambda \in \tau$  para cada índice, tem-se
 
$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau;$$
- c) Dados  $A_1, \dots, A_n \in \tau$ , tem-se que  $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \tau$ ;

então, diz-se que  $\tau$  é uma topologia em  $X$ . Os elementos de  $\tau$  são chamados de abertos. O par ordenado  $(X, \tau)$  é chamado de espaço topológico.

Quando subentende-se que há uma topologia  $\tau$  em  $X$ , comumente diz-se que  $X$  é um espaço topológico, de modo a não mencionar-se a topologia.

**Exemplo 1.2.** No exemplo 1.1, o conjunto  $\tau = \mathbb{P}(X)$  é uma topologia em  $X$ . Veja, contudo, que essa topologia não é a única possível em  $X$ , pois o conjunto  $\tau' = \{\emptyset, X\}$  também é uma topologia em  $X$ . As topologias  $\tau$  e  $\tau'$  são chamadas de discreta e indiscreta, respectivamente.

**Exemplo 1.3.** O conjunto  $\tau_\infty = \{A \subset X \mid X - A \text{ é infinito, } \emptyset \text{ ou } X\}$  não pode ser uma topologia em  $X$ . Com efeito, se  $X$  for infinito, é possível fazer a partição  $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ , em que  $X_1, X_2$  são infinitos e  $X_3$  é finito. Logo,  $X - X_1 \cup X_2$  é finito e portanto não vale a propriedade **b** da definição 1.2.

**Exercício 1.2.** Seja  $X$  um conjunto. Verifique se o conjunto  $\tau_f = \{A \subset X \mid X - A \text{ é finito ou o próprio } X\}$  é uma topologia em  $X$ .

**Definição 1.3.** Sejam  $\tau_1$  e  $\tau_2$  duas topologias em  $X$ , tais que  $\tau_1 \subseteq \tau_2$ . Então, diz-se que  $\tau_1$  é mais grossa que  $\tau_2$ ,  $\tau_2$  é mais fina que  $\tau_1$  e as duas topologias são comparáveis.

**Exercício 1.3.** Mostre que a topologia discreta é a mais fina das topologias em um conjunto  $X$ . Analogamente, mostre que a topologia indiscreta é a mais grossa das topologias em  $X$ .

## 1.2 Base e Sub-base

**Definição 1.4.** Uma base para uma topologia em um conjunto  $X$  é uma coleção  $\mathcal{B}$  de elementos de  $\mathbb{P}(X)$  tal que as seguintes propriedades são respeitadas:

- a)  $(\forall x \in X) (\exists B \in \mathcal{B})$  tal que  $x \in B$
- b) Se  $x \in B_1 \cap B_2$  para dados  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  quaisquer, então existe  $B_3 \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Por definição, diremos que um subconjunto  $A$  é aberto em  $X$  se  $\forall x \in A$  existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B \subset A$ . Desta forma, a coleção desses subconjuntos é dita a **topologia em  $X$  gerada por  $\mathcal{B}$** . A seguir, mostraremos que, de fato, essa coleção é uma topologia.

*Demonstração.* Seja  $\tau$  essa coleção. Assim, se  $A = X$ , como  $\mathcal{B}$  é base, então  $X \in \tau$  pela primeira condição na definição 1.4. Se  $A = \emptyset$ , então por vacuidade tem-se que  $\emptyset \in \tau$ .

Dada uma família de índices  $\Lambda$  tal que  $A_\lambda$  pertence a  $\tau$  para cada  $\lambda$ , então para todo  $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$  tem-se que  $x \in A_\lambda$  para pelo menos um  $A_\lambda$ . Como  $A_\lambda$  é aberto,

então existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B \subset A_\lambda$ . Disto, decorre que  $B \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$  e como

$x$  é qualquer, o resultado vale para todo  $x$ , portanto  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau$ .

Seja  $x$  pertencente a  $A_1, A_2$  abertos em  $X$  e sejam  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  tais que  $B_1 \subset A_1$ ,  $B_2 \subset A_2$  e  $x$  pertença tanto a  $B_1$  como a  $B_2$ . Então,  $x \in B_1 \cap B_2$ , pela propriedade b na definição 1.4 existe  $B_3 \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset A_1 \cap A_2$ . Então  $A_1 \cap A_2$  é aberto em  $X$  e por indução finita demonstra-se que a interseção finita de abertos em  $X$  ainda é um aberto em  $X$ . ■

Dada a base  $\mathcal{B}$ , uma forma melhor de definir a topologia gerada por ela encontra-se no lema abaixo.

**Lema 1.1.** Sejam  $X$  um conjunto e  $\mathcal{B}$  uma base para uma topologia em  $X$ . Então, esta topologia é a coleção de uniões de elementos de  $\mathcal{B}$ .

*Demonstração.* Seja  $B \in \mathcal{B}$ . Então, para todo  $x$  em  $B$ , existe  $B' \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B' \subset B$ . Basta tomar  $B' = B$ . Então  $B \in \tau$ , e como  $B$  foi arbitrário, o resultado é generalizado para qualquer  $B$  na base, portanto,  $\mathcal{B} \subset \tau$ .

Agora, seja  $A \in \tau$ . Como  $\mathcal{B}$  é base, então, para todo  $x \in A$ , existe  $B_x \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B_x \subset A$ . Logo,  $x \in \bigcup_{x \in A} B_x$  e portanto segue que  $A \subset \bigcup_{x \in A} B_x$ . Se  $x$  está nesta união arbitrária, automaticamente,  $x$  está em  $A$ . Daí, conclui-se que  $A = \bigcup_{x \in A} B_x$ . ■

É possível também obter-se uma base em um espaço topológico  $X$  a partir de uma coleção de abertos de  $X$ . Este é o conteúdo do



**Lema 1.2.** *Seja  $X$  um espaço topológico e  $\mathcal{C}$  uma coleção de abertos da topologia em  $X$ . Se  $A$  é aberto e para todo  $x$  em  $A$  existe  $C$  em  $\mathcal{C}$  com  $x \in C \subset A$ , então  $\mathcal{C}$  é uma base para a topologia.*

*Demonstração.*  $\mathcal{C}$  obedece ao primeiro requisito para ser base: como existe uma topologia em  $X$ , segue que  $X$  é aberto e por hipótese  $\forall x \in X$  existe  $C \in \mathcal{C}$  tal que  $x \in C \subset X$ .

A coleção também satisfaz o segundo requisito: sejam  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$  e  $x \in C_1 \cap C_2$ . Segue das hipóteses que  $C_1 \cap C_2 \in \tau$ , de modo que existe  $C_3 \in \mathcal{C}$  com  $x \in C_3 \subset C_1 \cap C_2$ .

Explicitamente, sejam  $\tau$  a topologia em  $X$  e  $\tau_{\mathcal{C}}$  a topologia em  $X$  gerada pela base. Se  $A \in \tau$ , então segue das hipóteses que  $A \in \tau_{\mathcal{C}}$ , de modo que  $\tau \subset \tau_{\mathcal{C}}$  pois  $A$  é qualquer. Se  $O \in \tau_{\mathcal{C}}$ , então pelo lema 1.1,  $O = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ . Como cada  $C$  é aberto de  $\tau$ , segue que  $O \in \tau$ , de modo que  $\tau_{\mathcal{C}} \in \tau$ , pois  $O$  foi arbitrário. Das inclusões deduz-se que  $\tau_{\mathcal{C}} = \tau$ . ■

A seguir, serão vistos três exemplos de topologias em  $\mathbb{R}$ .

**Exemplo 1.4 (Topologia Padrão).** *Considere a coleção  $\mathcal{B}$  de todos os intervalos  $(a, b)$  em  $\mathbb{R}$ . Afirimo que esta coleção é uma base. Com efeito, para todo  $x \in \mathbb{R}$  é possível escolher  $\epsilon > 0$  tal que  $x \in (-\epsilon, \epsilon)$ , assim a condição **a** da definição 2.1 é satisfeita. Agora, suponha que  $x \in (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$ , então  $x \in (e, f)$ , com  $e = \max\{a_1, a_2\}$  e  $f = \min\{b_1, b_2\}$ . Já que  $(e, f)$  pertence à coleção, basta tomar  $B_3$  como sendo este elemento.*

**Exemplo 1.5 (Reta de Sorgenfrey).** *Considere agora a coleção  $\mathcal{B}_\ell$  dos intervalos do tipo  $[a, b)$ . Essa coleção também é uma base. Com efeito, para  $\forall x \in \mathbb{R}$  posso escolher  $\epsilon > 0$  arbitrário de modo que  $x \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Além disso, de modo análogo ao exemplo anterior,  $x \in [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2) \implies x \in [e, f) \implies x \in [x, f)$ . A topologia gerada por essa base é a topologia do limite inferior e a reta com esta topologia é chamada de reta de Sorgenfrey, denotada por  $\mathbb{R}_\ell$ . Uma utilidade da reta de Sorgenfrey é servir contra-exemplo (pesquise).*

**Exemplo 1.6 (K-topologia).** *Seja  $K = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{Z}\}$ . A coleção  $\mathcal{B}_k$  formada pelos intervalos da forma  $(a, b)$  e  $(a, b) - K$  é uma base que gera uma topologia em  $\mathbb{R}$ . Esta topologia é denominada K-topologia e  $\mathbb{R}_k$  é como a reta é simbolizada quando dotada desta topologia.*

**Exercício 1.4.** *Mostre que  $\mathcal{B}_k$  é uma base.*

**Exercício 1.5.** *Mostre que as topologias de  $\mathbb{R}_\ell$  e  $\mathbb{R}_k$  são mais finas que a topologia padrão da reta. Ainda, mostre que não é possível comparar a topologia da reta de Sorgenfrey com a K-topologia.*

**Exercício 1.6.** *Sejam  $a, b \in \mathbb{Z}$ , com  $b > 0$ . A coleção dos conjuntos da forma  $S(a, b) = \{a + nb | n \in \mathbb{Z}\}$ , junto com  $\emptyset$ , é uma base para uma topologia em  $\mathbb{Z}$ . Mostre isso. Essa é a topologia de Furstenberg. A partir dela, pode-se mostrar que o conjunto dos números primos é infinito (sinta-se livre para tentar).*

**Definição 1.5.** Uma sub-base ou pré-base em um conjunto  $X$  é uma coleção  $\mathcal{S}$  de subconjuntos de  $X$  tal que  $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X$ .

É possível obter uma base  $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$  a partir de uma pré-base  $\mathcal{S}$  adotando, como elementos da base, interseções finitas de elementos de  $\mathcal{S}$ . De fato, como a pré-base cobre  $X$ , segue que para todo  $x \in X$  existe  $S \in \mathcal{S}$  tal que  $x \in S$ ; como  $S = S \cap S$ , conclui-se  $S$  está em  $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ . Para verificar a segunda condição de base, considere os conjuntos  $B_1 = S_1 \cap \dots \cap S_n$  e  $B_2 = S'_1 \cap \dots \cap S'_m$  tal que  $x \in B_1 \cap B_2$ . Como  $B_1 \cap B_2$  continua sendo interseção finita, este pertence a  $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ . Basta tomar  $B_3 = B_1 \cap B_2$  e termina-se a prova de que essa coleção é uma base.

**Exercício 1.7 (Munkres).** Considere  $\{\tau_{\alpha}\}$  como uma família de topologias em um conjunto  $X$ .

- a) Dentre os conjuntos  $\bigcap \tau_{\alpha}$  e  $\bigcup \tau_{\alpha}$ , qual(is) deles são uma topologia em  $X$ ?
- b) Mostre que existem uma menor topologia (única) em  $X$  contendo  $\bigcup \tau_{\alpha}$  e uma maior topologia (única) em  $X$  que contém  $\bigcap \tau_{\alpha}$ .

**Exercício 1.8 (Munkres).** A coleção contável  $\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$  é uma base para uma topologia em  $\mathbb{R}$ ? Se sim, como essa topologia se relaciona com a topologia padrão da reta?

### 1.3 Topologia Produto em $X \times Y$

O intuito desta seção é rapidamente definir uma topologia no produto cartesiano  $X \times Y$  de dois espaços topológicos  $X$  e  $Y$ , além de como definir uma base e uma pré-base que gerem tal topologia.

**Definição 1.6.** Sejam  $X, Y$  espaços topológicos com as respectivas topologias  $\tau_X$  e  $\tau_Y$ . A topologia produto em  $X \times Y$  é aquela originada pela base  $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \tau_X, V \in \tau_Y\}$ .

Para mostrar que  $\mathcal{B}$  é uma base, veja que  $X \times Y$  pertence a  $\mathcal{B}$ , logo todo par ordenado  $(x, y)$  pertence a um elemento dessa coleção. Agora, seja  $(x, y) \in (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)$ . Como  $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$ , tem-se que a interseção de dois elementos da coleção pertence à base; basta tomar  $B_3$  como sendo essa interseção.

**Teorema 1.1.** Sejam  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  bases que geram as topologias em  $X$  e  $Y$ , respectivamente. O conjunto  $\mathcal{D} = \{B \times C \mid B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}\}$  é uma base para a topologia produto em  $X \times Y$ .

*Demonstração.* Se  $W$  é aberto na topologia produto, então  $(x, y) \in W \implies (x, y) \in U \times V \subset W$  para algum  $U \times V$ . Como  $U$  e  $V$  são abertos, pela definição de base,  $x \in B \subset U$  e  $y \in C \subset V$ , com  $B \in \mathcal{B}$ ,  $C \in \mathcal{C}$ . Daí  $(x, y) \in B \times C \subset W$ . Pelo lema 1.2,  $\mathcal{D}$  é base. ■

Caso pareça estranha a aplicação do lema 2.2, lembre que elementos de  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  são abertos nas topologias geradas por tais bases, portanto as hipóteses para o lema 2.2 são satisfeitas.

**Exemplo 1.7.** Considere  $\mathbb{R}^2$ , em que cada  $\mathbb{R}$  tem a topologia padrão. Pela definição 3.1, a coleção dos produtos  $(a, b) \times (c, d)$  é base para a topologia produto no plano. Os abertos do plano com essa topologia nada mais são do que retângulos abertos.

Para definir uma sub-base para o produto cartesiano  $X \times Y$ , é necessário antes definir o mapa projetivo.

**Definição 1.7.** Sejam  $\pi_1: X \times Y \rightarrow X$  e  $\pi_2: X \times Y \rightarrow Y$ , com  $\pi_1((x, y)) = x$  e  $\pi_2((x, y)) = y$ . Esses mapeamentos são as projeções de  $X \times Y$  sobre seus fatores.

Veja que se  $U$  e  $V$  são abertos respectivamente em  $X$  e em  $Y$ , então  $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$  e  $\pi_2^{-1}(V) = X \times V$  são abertos.

**Teorema 1.2.** A coleção  $\mathcal{S} = \{\pi_1^{-1}(U) \mid U \in \tau_X\} \cup \{\pi_2^{-1}(V) \mid V \in \tau_Y\}$  é uma sub-base para a topologia produto em  $X \times Y$ .

**Exercício 1.9.** Demonstre o teorema anterior.

Vale observar que as ideias apresentadas nesta seção podem ser generalizadas para um produto cartesiano finito de espaços topológicos. Sinta-se à vontade para fazer isso.

## 1.4 Subespaço Topológico

Dado um espaço topológico  $X$ , seria interessante saber definir uma topologia em um conjunto  $Y \subset X$ , pois nem sempre precisamos trabalhar com o espaço topológico inteiro (às vezes, isso não é nem desejável). A título de exemplo, poderíamos querer trabalhar somente com a esfera  $S_1$ , subconjunto do espaço topológico  $\mathbb{R}^2$ . Como definir uma topologia nesse subconjunto? É nesse contexto em que a noção de subespaço topológico entra em cena.

**Definição 1.8.** Seja  $X$  um espaço topológico e  $Y$  um subconjunto de  $X$ . A coleção  $\tau_Y = \{A \cap Y \mid A \in \tau_X\}$  é uma topologia em  $Y$  nomeada topologia do subespaço.

Com efeito,  $X \cap Y = Y$  e  $\emptyset \cap Y = \emptyset$ , então  $Y$  e  $\emptyset$  estão na coleção. Dada família indexada  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  com  $A_\lambda \cap Y \in \tau_Y$  para cada índice, veja que  $(\bigcup A_\lambda \cap Y) = (\bigcup A_\lambda) \cap Y$ . Por fim, dados  $(A_1 \cap Y), \dots, (A_n \cap Y) \in \tau_Y$ , veja que  $\bigcap_{i=1}^n (A_i \cap Y) = (\bigcap_{i=1}^n A_i) \cap Y$ .

Vejamos agora como construir uma base para a topologia do subespaço, partindo do princípio que a topologia em  $X$  advém de uma base.

**Lema 1.3.** *Seja  $X$  um espaço topológico e  $Y$  um subconjunto de  $X$  com a topologia do subespaço. Ainda, seja  $\mathcal{B}_X$  uma base para a topologia em  $X$ . O conjunto  $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}_X\}$  é uma base para a topologia do subespaço.*

*Demonstração.* Seja  $A$  um aberto na topologia do subespaço e  $x \in A$ . Como  $A$  é aberto, então ele é da forma  $O \cap Y$ , em que  $O$  é um aberto da topologia em  $X$ . Como  $x$  está na interseção,  $x \in O$ . Pela hipótese de existir uma base em  $X$ , tem-se que há  $B \in \mathcal{B}_X$  tal que  $x \in B \subset O$ . Logo,  $x \in (B \cap Y) \subset A$ . Pelo lema 1.2,  $\mathcal{B}_Y$  é base. ■

Dado um aberto na topologia do subespaço  $Y$ , seria ele também um aberto na topologia do espaço  $X$ ? A resposta é: não necessariamente. Isso pode ser verificado no próximo exemplo.

**Exemplo 1.8.** *Considere o subconjunto  $Y = [0, 1]$  da reta real (com a topologia padrão). A base para a topologia do subespaço tem como abertos os elementos do tipo  $(a, b) \cap Y$ . Veja que  $[0, b)$  é aberto na topologia do subespaço quando  $b$  pertence a  $Y$ . Esse conjunto, contudo, não é aberto na topologia padrão da reta.*

Um caso especial ocorre quando  $Y$  é um aberto de  $X$ : os abertos de  $Y$  na topologia do subespaço também são abertos em  $X$ . (Verifique!)

**Teorema 1.3.** *Sejam  $A$  um subespaço de  $(X, \tau_X)$  e  $B$  um subespaço de  $(Y, \tau_Y)$ . A topologia produto em  $A \times B$  é a mesma que  $A \times B$  herda como subespaço de  $X \times Y$ .*

*Demonstração.* Primeiro, seja  $Q \times O$  aberto na topologia produto de  $X \times Y$ . Então,  $(Q \times O) \cap (A \times B)$  (elemento da base da topologia do subespaço) é igual a  $(Q \cap A) \times (O \cap B)$  (elemento da base da topologia produto), donde conclui-se que as bases das duas topologias são iguais. Assim, as topologias são iguais. ■

Só para não deixar sem definir: se  $X$  for um conjunto ordenado e  $Y \subset X$ , diz-se que  $Y$  é convexo em  $X$  se, dados  $a < b$  em  $Y$ , tem-se  $(a, b) \subset Y$ .

**Exercício 1.10 (Munkres).** *Se  $(Y, \tau_Y)$  é subespaço topológico de  $(X, \tau_X)$  e  $A$  é um subconjunto de  $Y$ , então a topologia de  $A$  como subespaço de  $Y$  é a mesma que a topologia de  $A$  como subespaço de  $X$ .*

## 1.5 Mais definições

Nesta seção apresentarei alguns conceitos básicos que vão acompanhar você durante a maior parte do seu curso de topologia, ou, que servirão como pré-requisito para definir coisas mais importantes. Alguns dos conceitos: conjuntos fechados, interior de um conjunto, fecho de um conjunto, espaço de Hausdorff, vizinhança.

**Definição 1.9.** *Seja  $F$  um subconjunto do espaço topológico  $X$ .  $F$  é dito fechado se  $X - F$  é aberto.*

**Exemplo 1.9.** Considere o intervalo  $[a, b]$  na reta com a topologia usual. Seu complemento é  $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ , que é a união de dois abertos. Conclui-se que  $[a, b]$  é fechado na reta com a topologia padrão.

**Exemplo 1.10.** Considere o intervalo  $[a, b]$  na reta de Sorgenfrey. Seu complemento é  $(-\infty, a) \cup [b, +\infty)$ . Como  $(-\infty, a) = \bigcup_{x < a} [x, a)$ , tem-se que  $(-\infty, a) \cup [b, +\infty)$  é aberto, de modo que  $[a, b]$  é fechado. Como  $[a, b)$  é elemento da base, ele também é aberto. Esse exemplo ilustra que um subconjunto pode ser ao mesmo tempo aberto e fechado a depender da topologia escolhida.

**Exemplo 1.11.** Considere o intervalo  $[a, b]$  na reta com a topologia usual. Seu complemento é  $(-\infty, a) \cup [b, +\infty)$ . Como o complemento de  $[b, +\infty)$  é  $(-\infty, b)$ , segue que  $[b, +\infty)$  é fechado. Daí, conclui-se que  $[a, b]$  não é nem aberto, nem fechado, pois seu complemento não é nem aberto, nem fechado. Logo, dado um espaço topológico, podem existir conjuntos que não são abertos, nem fechados.

**Exercício 1.11.**  $\mathbb{Z}$  é aberto ou fechado em  $\mathbb{R}$ ?

**Exercício 1.12.** Busque exemplos de conjuntos fechados nas seguintes topologias:

- a)  $\tau_f = \{A \subset X \mid X - A \text{ é finito ou o próprio } X\}$ ;
- b)  $K$ -topologia na reta;
- c)  $\mathbb{Z}$  com a topologia de Furstenberg.

O próximo teorema ilustra que seria possível definir topologias a partir de conjuntos fechados.

**Teorema 1.4.** Seja  $(X, \tau)$  um espaço topológico. Então:

- a)  $\emptyset$  e  $X$  são fechados;
- b) Interseção arbitrária de fechados é um conjunto fechado;
- c) União finita de fechados é um conjunto fechado.

*Demonstração.* Bom:

- a) Como  $X - \emptyset = X$  e  $X$  é aberto, conclui-se que  $\emptyset$  é fechado. Ainda,  $X - X = \emptyset$ , logo  $X$  é fechado.

Para os itens b e c, basta aplicar as leis de De Morgan. ■

O teorema acima mostra que seria possível iniciar estas notas definindo a coleção dos conjuntos que obedecem aos itens a, b e c como sendo a coleção dos conjuntos fechados. Em seguida, bastaria dizer que a topologia é a coleção dos complementares aos conjuntos fechados.

Dado um subespaço topológico, é interessante saber identificar um conjunto fechado neste subespaço sem precisar aplicar a definição 1.9. Esse é o conteúdo do

**Teorema 1.5.** *Seja  $Y$  um subespaço topológico de  $(X, \tau_X)$ . Então  $F$  é fechado em  $Y$  se, e somente se, é interseção de  $Y$  com algum conjunto fechado em  $X$ .*

*Demonstração.* Seja  $F$  fechado em  $Y$ . Então  $Y - F$  é um aberto do subespaço, logo assume a forma  $Y - F = Y \cap A$ , onde  $A$  é um aberto em  $X$ . Como  $Y \cap (X - A) = Y - (Y \cap A) = Y - (Y - F) = F$ , prova-se que  $F$  é interseção de  $Y$  com um fechado de  $X$ .

Dado que  $F = Y \cap C$  em que  $C$  é fechado em  $X$ , segue que  $X - C$  é aberto. Logo,  $Y \cap (X - C) = Y - (Y \cap C) = Y - F \in \tau_Y$ ; daí  $F$  é fechado na topologia do subespaço. ■

**Exercício 1.13.** *Utilizando o teorema 1.5, mostre que, no caso em que  $Y$  é fechado em  $X$ , todo conjunto  $F$  fechado em  $Y$  também é fechado em  $X$ .*

**Definição 1.10.** *Seja  $A$  um subconjunto do espaço topológico  $X$ .*

- a) *A união de todos os abertos contidos em  $A$  é definida como o interior de  $A$ . Em notação, esse conjunto é simbolizado por  $\text{Int } A$ .*
- b) *A interseção de todos os conjuntos fechados que contém  $A$  é definida como o fecho de  $A$ . Em notação, esse conjunto é simbolizado por  $\bar{A}$ .*

Da definição acima, tem-se que  $\text{Int } A \subset A \subset \bar{A}$ . Além disso,  $A$  é aberto quando é igual a  $\text{Int } A$ ; analogamente,  $A$  é fechado quando é igual a  $\bar{A}$ .

**Teorema 1.6.** *Sejam  $(Y, \tau_Y)$  um subespaço topológico de  $(X, \tau_X)$  e  $A$  um subconjunto de  $Y$ . O fecho de  $A$  em relação a  $Y$  é a interseção de  $Y$  com o fecho de  $A$  em relação a  $X$ . Em notação,  $(\bar{A})_Y = (\bar{A})_X \cap Y$ .*

*Demonstração.* Primeiramente, observe que o fecho de qualquer conjunto é fechado (na respectiva topologia), pois é interseção arbitrária de conjuntos fechados. Por conta disso, decorre que  $(\bar{A})_X \cap Y$  é um conjunto fechado no subespaço  $Y$ . Por hipótese  $A \subset Y$  e pela definição de fecho,  $A \subset (\bar{A})_X$ , logo,  $A \subset (\bar{A})_X \cap Y$ . Como o fecho em relação a  $Y$  é a interseção de todos os fechados que contém  $A$ , segue que  $(\bar{A})_Y \subset (\bar{A})_X \cap Y$ .

Para mostrar a outra inclusão, basta ver que  $(\bar{A})_Y = F \cap Y$ , em que  $F$  é um conjunto fechado em  $X$  que contém  $A$ . Como  $(\bar{A})_X \subset F$ , tem-se que  $(\bar{A})_X \cap Y \subset F \cap Y = (\bar{A})_Y$ . ■

Quase em seguida, está um teorema que facilita a identificação de elementos do fecho. Antes de enunciá-lo, contudo, é preciso definir o que significa vizinhança de um ponto.

**Definição 1.11.** *Seja  $U$  um aberto do espaço topológico  $X$  e  $x$  um ponto de  $U$ . Diz-se então que  $U$  é vizinhança do ponto  $x$ .*

É possível que o leitor depare-se com outra definição de vizinhança em outros textos [3], na qual diz-se que um conjunto  $C$  é vizinhança do ponto  $x$  se existir um aberto  $O$  tal que  $x \in O \subset C$ . Sinceramente, não sei quais são as possíveis repercussões de definir vizinhança de um jeito ou de outro.

No próximo teorema, a palavra “intersecta” significa que a interseção é não-vazia.

**Teorema 1.7.** *Seja  $A$  um subconjunto do espaço topológico  $X$ .*

- a)  $x \in \bar{A}$  se, e somente se, toda vizinhança de  $x$  intersecta  $A$ .
- b) Se a topologia em  $X$  é dada por uma base, então  $x \in \bar{A}$  se, e somente se, todo elemento da base (que contém  $x$ ) intersecta  $A$ .

*Demonstração.* Vou provar somente o primeiro item.

- a) Pela contrapositiva, suponha que existe um aberto  $O \in \tau$  com  $x \in O$  e  $O \cap A = \emptyset$ . Assim,  $A \cap (X - O) = A$ , ou seja,  $A \subset (X - O)$ . Pela definição de fecho, segue que  $\bar{A} \subset (X - O)$ , de modo que  $x \notin \bar{A}$ . Se  $x \notin \bar{A}$ , então  $x$  está no aberto  $X - \bar{A}$ . Como  $A$  é subconjunto de seu fecho, então, exceto pelo  $\emptyset$ , nenhum elemento de  $\mathcal{P}(A)$  pode ser subconjunto desse aberto. Assim, tem-se aqui um aberto que contém  $x$  e que não intersecta  $A$ .

■

**Exercício 1.14.** *Termine a demonstração do teorema.*

**Exemplo 1.12.** *Seja  $\mathbb{R}$  a reta com a topologia usual. Qual é o fecho do intervalo  $(0, 1]$ ?*

*Veja que para qualquer vizinhança  $V$  de  $0$ , tem-se que  $(0, 1] \cap V \neq \emptyset$ , enquanto que para qualquer ponto fora do intervalo  $[0, 1]$  existe uma vizinhança que não intersecta  $(0, 1]$ . Logo, o fecho de  $(0, 1]$  é o intervalo  $[0, 1]$ .*

**Exercício 1.15 (Munkres).** *Mostre que se  $O$  é aberto em  $X$  e se  $C$  é fechado em  $X$ , então  $O - C$  é aberto e  $C - O$  é fechado.*

**Definição 1.12.** *Um subconjunto  $A$  de um espaço topológico  $X$  é dito **denso em  $X$**  quando  $\bar{A} = X$ .*

**Definição 1.13.** *Um espaço topológico  $X$  é dito **separável** se existir um conjunto  $A \subseteq X$  que é enumerável e denso em  $X$ .*

**Exercício 1.16.** *Mostre os seguintes resultados:*

- a)  $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$
- b)  $\bar{\mathbb{Z}}_+ = \mathbb{Z}_+$
- c)  $\bar{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$

**Exercício 1.17 (Munkres).** *Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos do espaço topológico  $X$ . Então:*

- a)  $A \subset B \implies \bar{A} \subset \bar{B}$
- b)  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

**Definição 1.14.** *Seja  $B$  um subconjunto de  $X$ . A fronteira de  $B$  é por definição o conjunto  $\partial B := \bar{B} \cap \overline{(X - B)}$*

**Exercício 1.18 (Munkres).** *Seja  $B$  um subconjunto de  $X$ .*

- a) *Mostre que  $\text{Int } B$  e  $\partial B$  são disjuntos e que  $\bar{B} = \text{Int } B \cup \partial B$ ;*
- b)  *$\partial B = \emptyset \iff B$  for aberto e fechado;*
- c)  *$\partial B = \bar{B} - B \iff B$  for aberto.*

**Definição 1.15.** *Sejam  $A$  um subconjunto do espaço topológico  $X$  e  $x$  um ponto deste espaço. Quando toda vizinhança de  $x$  intersecta  $A$  em algum ponto diferente de  $x$ , diz-se que  $x$  é ponto de acumulação de  $A$ .*

**Teorema 1.8.** *Seja  $A$  um subconjunto do espaço topológico  $X$ . Denote o conjunto dos pontos de acumulação de  $A$  por  $A'$ . Então,  $\bar{A} = A \cup A'$ .*

*Demonstração.* Já se sabe que  $A \subset \bar{A}$ . Agora, se  $x \in A'$ , para todo aberto  $O$  que contém  $x$ , tem-se que  $O \cap A \neq \emptyset$ , portanto,  $x \in \bar{A}$ . Com isso,  $A \cup A' \subset \bar{A}$ . Considere que  $x \in \bar{A}$ . Assim, se  $x$  pertence a  $A$ ,  $x$  está em  $A \cup A'$ . Agora, se  $x \notin A$ , então, toda vizinhança  $V$  de  $x$  intersecta  $A$  em algum ponto distinto de  $x$ , logo  $x \in A'$ . Conclui-se que em qualquer caso,  $x \in \bar{A} \implies x \in A \cup A'$ . Juntando as duas inclusões, tem-se que  $\bar{A} = A \cup A'$ . ■

**Corolário 1.8.1.** *Um subconjunto de  $X$  é fechado se, e somente se, ele contém todos seus pontos de acumulação.*

*Demonstração.* Seja  $F$  um conjunto fechado de  $X$ . Então,  $F = \bar{F}$ . Pelo teorema, segue que  $\bar{F} \cup F' = \bar{F}$ , portanto  $F' \subset \bar{F} = F$ . Agora, se  $F' \subset F$ , tem-se que  $F = F \cup F'$ , logo  $F = \bar{F}$ , de modo que  $F$  é fechado. ■

Agora, será introduzida a noção de convergência de uma sequência de pontos de um espaço topológico. Essa noção, juntamente com o exemplo que a segue, servirão como motivadoras para a definição de espaço de Hausdorff.

**Definição 1.16.** *Seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de pontos no espaço topológico  $X$ . Diz-se que essa sequência converge para o ponto  $x \in X$  se para toda vizinhança  $V$  de  $x$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n \in V$  para todo  $n > N$ .*

**Exemplo 1.13.** *Seja  $X = \{a, b, c\}$  e  $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}, X\}$  uma topologia em  $X$ . Nessa topologia, um conjunto unitário não é fechado (diferentemente do caso da reta com a topologia usual). Além, disso, pela definição de convergência, vê-se que a sequência que tem por elementos  $x_n = b; \forall n$  converge tanto para  $b$ , como para  $a$ , como também para  $c$ .*

O exemplo anterior mostra que é necessário ter algum critério para separar espaços topológicos que contém patologias, como convergir para mais de um ponto, daqueles que não tem (ou somente poucas) patologias, pois em geral (e por motivos didáticos) gostaríamos de estudar espaços topológicos "bonitinhos". A definição que segue é um desses critérios.



**Definição 1.17.** Um espaço topológico  $X$  é dito espaço de Hausdorff se para cada par de elementos distintos  $x_1, x_2$  existem dois abertos disjuntos  $V_1, V_2$  tais que  $x_1 \in V_1$  e  $x_2 \in V_2$ .

A condição para que um espaço topológico seja Hausdorff é um dos axiomas de separação. Comumente, denota-se essa condição como sendo o axioma  $T_2$ . Somente por curiosidade, aqui estão outros dois axiomas de separação:

$T_0$ ) Dados dois pontos distintos do espaço topológico  $X$ , pelo menos um deles pertence a um aberto que não contém o outro.

$T_1$ ) Dados dois pontos distintos do espaço topológico  $X$ , cada um deles pertence a um aberto que não contém o outro.

A condição de Hausdorff em um espaço topológico garante dois resultados de interesse:

**Teorema 1.9.** *Todo conjunto finito em um espaço de Hausdorff é fechado.*

*Demonstração.* Sejam  $x$  e  $x_0$  elementos distintos do espaço de Hausdorff  $X$ . Então, existem abertos  $A$  e  $A_0$  distintos, cada qual contendo um desses pontos respectivamente. Assim, como  $A \cap \{x_0\} = \emptyset$ ,  $x$  não pode pertencer ao fecho de  $\{x_0\}$ . Como  $x$  é arbitrário, o resultado vale para qualquer  $x$  distinto de  $x_0$ , de modo que o fecho de  $\{x_0\}$  é ele mesmo e portanto trata-se de um conjunto fechado. Por indução, generaliza-se para o caso com  $n$  elementos. ■

**Exercício 1.19.** *Generalize o resultado para  $n$  elementos.*

**Teorema 1.10.** *Em um espaço de Hausdorff, uma sequência converge para no máximo um ponto.*

*Demonstração.* Suponha que  $x$  e  $x'$  sejam limites distintos da sequência  $(x_n)$  de pontos do espaço  $X$ . Pela condição de Hausdorff,  $x \in O$  e  $x' \in O'$ , sendo  $O$  e  $O'$  ambos abertos. Pela definição de convergência, tem-se que  $x_n \in O$  para  $n$  maior que um certo  $N$ , ou seja,  $x_n \notin O'$  para  $n$  maior que  $N$ . Isso mostra que a sequência não converge para  $x'$ , de modo a contradizer a hipótese. Assim, os pontos tem de ser iguais. ■

**Exercício 1.20.** *Seja  $X$  um espaço topológico que obedece ao axioma  $T_1$ . Dado  $A \subset X$ , tem-se que  $x$  é ponto de acumulação de  $A$  se, e somente se, toda vizinhança de  $x$  contém infinitos pontos de  $A$ . Demonstre essa equivalência.*

**Exercício 1.21.** *Mostre que o produto de dois espaços de Hausdorff continua sendo um espaço de Hausdorff. Ainda, mostre que o subespaço topológico de um espaço de Hausdorff também é Hausdorff.]*

**Definição 1.18.** *Seja  $X$  um espaço topológico e  $p \in X$ . Uma coleção  $\mathcal{B}_p$  de vizinhanças de  $p$  é dita uma base local para  $X$  em  $p$  se toda vizinhança de  $p$  contém algum  $B \in \mathcal{B}_p$ . Diz-se que  $X$  é primeiro-contável (first countable) quando existe uma base local enumerável para cada  $p \in X$ .*

**Definição 1.19.** Um espaço topológico  $X$  é dito segundo-contável (*second countable*) se ele admite uma base enumerável para sua topologia.

**Teorema 1.11.** Seja  $X$  um espaço topológico segundo-contável. Então, valem as seguintes propriedades:

- a)  $X$  é primeiro-contável.
- b)  $X$  contém um subconjunto denso enumerável.
- c) Toda cobertura aberta de  $X$  tem uma subcobertura enumerável.

*Demonstração.*

- a) Seja  $\mathcal{B}$  uma base enumerável de  $X$ . Considere um ponto arbitrário  $p \in X$  e seja  $\mathcal{B}_p$  o conjunto dos elementos de  $\mathcal{B}$  tais que  $p$  pertence a cada um desses elementos. Visto que  $\mathcal{B}_p \subset \mathcal{B}$  e que todo subconjunto de um conjunto enumerável também é enumerável, conclui-se que  $\mathcal{B}_p$  é uma base local enumerável para  $X$  em  $p$ .
- b) Seja  $\mathcal{B}$  uma base enumerável de  $X$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , defina  $x_n \in X$  como sendo um elemento de  $B_n \in \mathcal{B}$ . O conjunto  $\{x_1, x_2, \dots\}$  é denso em  $X$ . Com efeito, dado  $x \in X \setminus \{x_1, x_2, \dots\}$  arbitrário, se  $U$  é uma vizinhança de  $x$ , segue da definição de base que existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $x \in B_k$  e  $B_k \subset U$ . Deste modo,  $x_k \in U$ . A partir disso, facilmente conclui-se que para toda vizinhança  $U$  de um ponto arbitrário  $p \in X$  existe  $x_k \in \{x_1, x_2, \dots\}$  tal que  $x_k \in U$ . Sendo  $p$  arbitrário, isto vale para todo  $p \in X$  e portanto  $\{x_1, x_2, \dots\}$  é um subconjunto denso em  $X$ .
- c) Seja  $\mathcal{B}$  uma base enumerável de  $X$  e seja  $\mathcal{U}$  uma cobertura aberta de  $X$  arbitrária. Defina  $\mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{B} \mid \exists U \in \mathcal{U}, \text{ tal que } B \subset U\}$ . A enumerabilidade da base garante que  $\mathcal{B}'$  é enumerável. A partir disso, para cada  $B \in \mathcal{B}'$ , escolha  $U_B \in \mathcal{U}$  tal que  $B \subset U_B$ . O conjunto  $\mathcal{U}' = \{U_B : B \in \mathcal{B}'\}$  é uma subcobertura enumerável de  $X$ . Com efeito, dado  $p \in X$  arbitrário, existe  $U \in \mathcal{U}$  tal que  $p \in U$ . Pela definição de base, existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $p \in B$  e  $B \subset U$ . Logo,  $B \in \mathcal{B}'$  e portanto existe  $U_B \in \mathcal{U}'$  tal que  $x \in B \subset U_B$ . Rapidamente conclui-se que  $\mathcal{U}'$  é uma subcobertura enumerável de  $X$ .

■

Em outras palavras, o teorema 1.11 diz que todo espaço topológico segundo-contável é separável (item b) e Lindelöf (item c).

## 1.6 Funções Contínuas (incompleto)

A noção de função contínua é comumente introduzida no contexto de Cálculo I para os estudantes, a partir de uma formulação que utiliza de épsilons e deltas.

Diz-se que uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua<sup>2</sup> no ponto  $x_0$  se para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ . Se  $f$  é contínua em todos os pontos, simplesmente diz-se que ela é contínua. Ao formular a continuidade deste modo, veja que existe uma ideia de distância entre pontos, ou seja, tanto no domínio como no contradomínio existem funções que chamam-se métricas. Mais para frente será visto que, dada uma métrica em um conjunto, é possível induzir uma topologia nele. Ocorre, contudo, que nem sempre queremos trabalhar somente com topologias induzidas por métricas. Assim, se tivéssemos um mapeamento entre espaços topológicos quaisquer  $X$  e  $Y$ , como definir continuidade?

**Definição 1.20.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos. Uma aplicação  $f: X \rightarrow Y$  é dita contínua se para todo aberto  $V$  em  $Y$ , tem-se que sua pré-imagem  $f^{-1}(V)$  é um aberto em  $X$ .*

**Exercício 1.22.** *Mostre que se  $f: X \rightarrow Y$  é uma aplicação contínua, então a pré-imagem de todo subconjunto fechado de  $Y$  é um subconjunto fechado de  $X$ .*

Se a topologia em  $Y$  é originada a partir de uma base (pré-base), para mostrar que o mapa é contínuo, basta mostrar que a pré-imagem de cada elemento da base (pré-base) pertence à topologia em  $X$ .

**Exemplo 1.14.** *Vejamos como a nova definição de continuidade nos permite recuperar a definição vista em Cálculo I.*

*Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua (no novo sentido), estando a reta munida com a topologia padrão. Dado  $\epsilon > 0$ , o intervalo  $V = (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$  é um aberto do contradomínio. Por hipótese da continuidade de  $f$ , segue que  $f^{-1}(V)$  é um aberto do domínio, que contém  $x_0$ . Assim, existe um elemento  $(a, b)$  da base, que contém o ponto em questão. Utilizando  $\delta = \min\{a, b\}$ , tem-se que, se  $|x - x_0| < \delta$ , então a imagem de  $x$  está em  $V$ , ou seja,  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ .*

**Teorema 1.12.** *Sejam  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  espaços topológicos. Se  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow Z$  são contínuas, então a composição  $g \circ f: X \rightarrow Z$  é contínua.*

*Demonstração.*

Considere  $A_z$  como um elemento da topologia em  $Z$ . Pela continuidade de  $g$  tem-se que  $g^{-1}(A_z)$  é um aberto na topologia de  $Y$  e, pela continuidade de  $f$ , segue que  $f^{-1}(g^{-1}(A_z)) = (g \circ f)^{-1}(A_z)$  é um aberto em  $X$ . Desta forma, conclui-se que  $g \circ f$  é contínua. ■

**Definição 1.21.** *Uma bijeção contínua  $f: X \rightarrow Y$  cuja inversa  $f^{-1}$  também é contínua chama-se homeomorfismo entre os espaços topológicos  $X$  e  $Y$ .*

*Diz-se que esses espaços homeomorfos quando estabelece-se um homeomorfismo entre eles.*

Uma característica fundamental dos homeomorfismos é o fato de eles preservarem as estruturas topológicas quando deslocamo-nos de um espaço para o outro.

<sup>2</sup>Aqui assume-se  $\mathbb{R}$  com a topologia padrão.

**Proposição 1.1.** *Seja  $f: X \rightarrow Y$  um mapa qualquer.*

- i)  *$f$  é contínua se e somente se  $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$  para todo  $A \subset X$ .*
- ii)  *$f$  é fechada se e somente se  $f(\bar{A}) \supset \overline{f(A)}$  para todo  $A \subset X$ .*

*Demonstração.*

- i) Seja  $A \subset X$  arbitrário. Para mostrar a ida, veja que se  $f$  for contínua, então dado que  $\overline{f(A)}$  é fechado, sua pré-imagem é um conjunto fechado em  $X$  que contém  $A$ . Assim, pela definição de fecho, segue que  $\bar{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ . Consequentemente,  $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ .  
Para a volta, seja  $F \subset Y$  fechado. Então,  $f(\overline{f^{-1}(F)}) \subset \overline{f(f^{-1}(F))} = \overline{F} = F$ . De  $f(\overline{f^{-1}(F)}) \subset F$  decorre que  $\overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}(F)$ . Como um conjunto sempre está contido em seu fecho, conclui-se das duas contenções que  $\overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F)$ . Logo, a pré-imagem de  $F$  é um conjunto fechado em  $X$ .
- ii) Para a ida, assumindo que  $f$  é uma aplicação fechada, então  $f(\bar{A})$  é um conjunto fechado. Como  $A$  é subconjunto de seu fecho, então  $f(A) \subset f(\bar{A})$ . Logo,  $\overline{f(A)} \subset \overline{f(\bar{A})} = f(\bar{A})$ .  
Para a volta, seja  $A$  um conjunto fechado de  $X$ . Por hipótese,  $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$ . Sendo  $A$  um conjunto fechado, então  $f(\bar{A}) = f(A)$ , logo,  $\overline{f(A)} \subset f(A)$ . Como  $f(A) \subset \overline{f(A)}$  para qualquer conjunto, segue das duas inclusões que  $f(A)$  é um conjunto fechado. Assim, facilmente conclui-se que  $f$  é uma aplicação fechada.

■

## 1.7 Topologia Produto (incompleto)

**Definição 1.22 (J-úpla).** *Sejam  $J$  um conjunto de índices e  $X$  um conjunto. Por definição, uma função  $\mathbf{x}: J \rightarrow X$  é uma  $J$ -úpla de elementos de  $X$ . Dado  $\alpha \in J$ , denota-se  $\mathbf{x}(\alpha)$  por  $x_\alpha$  e diz-se que esta é a  $\alpha$ -ésima coordenada de  $\mathbf{x}$ .*

Vale a pena mencionar que a função  $\mathbf{x}$  às vezes é denotada por  $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ .

**Definição 1.23 (Produto Cartesiano).** *Seja  $(A_\alpha)_{\alpha \in J}$  uma família indexada de conjuntos; seja  $X$  a união dos elementos dessa família. O conjunto  $\prod_{\alpha \in J} A_\alpha = \{\mathbf{x}: J \rightarrow X | x_\alpha \in A_\alpha\}$  é chamado de produto cartesiano desta família indexada.*

Se os  $A_\alpha$  forem espaços topológicos, então a coleção de todos os produtos cartesianos  $\prod_{\alpha \in J} U_\alpha$  ( $U_\alpha$  aberto em  $A_\alpha$ ) é uma base que gera a *topologia das caixas* (box topology) em  $\prod_{\alpha \in J} A_\alpha$ .

Considere o mapa projetivo  $\pi_\beta: \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \rightarrow X_\beta$ ,  $\pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha \in J}) = x_\beta$ , onde  $X_\alpha$  é espaço topológico e  $\beta \in J$ . Como o nome sugere, ele associa uma  $J$ -úpla de elementos  $X$  à sua  $\beta$ -ésima coordenada.

**Definição 1.24 (Topologia Produto).** Defina  $\mathcal{S}_\beta = \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) \mid U_\beta \in \tau_\beta\}$ , em que  $\tau_\beta$  é topologia em  $X_\beta$ . A coleção  $\mathcal{S} = \bigcup_{\beta \in J} \mathcal{S}_\beta$  é uma pré-base cuja topologia gerada em  $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$  é chamada de topologia produto.

Como essas duas topologias se comparam? Por qual motivo é preferível escolher a topologia da definição 1.24 como topologia produto?

A resposta para a primeira pergunta depende do seguinte detalhe:

Sejam  $\beta_1, \dots, \beta_n \in J$  distintos dois a dois e  $U_{\beta_i}$  um conjunto aberto em  $X_{\beta_i}$  para  $1 \leq i \leq n$ . Um elemento  $B$  qualquer da base para a topologia produto assume a forma  $B = \pi_{\beta_1}^{-1}(U_{\beta_1}) \cap \dots \cap \pi_{\beta_n}^{-1}(U_{\beta_n})$ , de forma que é possível reescrever  $B = \prod_{\alpha \in J} U_\alpha$  em que  $U_\alpha$  representa  $X_\alpha$  para todos os alfas diferentes de  $\beta_1, \dots, \beta_n$ . A diferença entre as duas topologias reside neste detalhe.

Para responder à segunda pergunta é interessante apresentar o

**Teorema 1.13.** Seja  $f: A \rightarrow \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$  um mapa tal que  $f(a) = (f_\alpha(a))_{\alpha \in J}$ , para cada alfa, com  $f_\alpha: A \rightarrow X_\alpha$ . Considere  $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$  com a topologia produto, então  $f$  é contínua se, e somente se, cada  $f_\alpha$  for contínua.

*Demonstração.* Provar no seminário ■

Se no teorema 1.13 fosse escolhida a topologia das caixas, então o resultado não seria necessariamente verdade. Isso está ilustrado no

**Exemplo 1.15.** Considere  $\mathbb{R}^\omega = \prod_{n \in \mathbb{Z}_+} X_n$ , em que cada  $X_n = \mathbb{R}$ . Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\omega$  com

$$f(t) = (t, t, t, \dots).$$

Bom, a  $n$ -ésima coordenada de  $f$  é  $f_n(t) = t$ , que é contínua. Afirmando, no entanto, que  $f$  não é contínua quando  $\mathbb{R}^\omega$  tem a topologia das caixas.

O produto  $B = (-1, 1) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \times \dots$  é um elemento da base dessa topologia. Se  $f$  fosse contínua, então a pré-imagem  $f^{-1}(B)$  teria de ser um aberto, de modo a conter um intervalo  $(-\delta, \delta)$  em torno do zero. Assim,  $f((-\delta, \delta)) \subset B \implies (-\delta, \delta) \subset (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$  para todo  $n$ , o que é falso.

Antes de começar o próximo exemplo, eis uma possível definição do Axioma da Escolha:

**Definição 1.25.** Dada uma coleção  $\mathcal{A}$  de conjuntos disjuntos não-vazios, existe um conjunto  $C$  contido na união dos elementos da coleção e, para cada  $A \in \mathcal{A}$ ,  $C \cap A$  contém apenas um elemento.

**Exemplo 1.16 (Axioma da Escolha).** É possível mostrar que o Axioma da Escolha (definição 1.25) é equivalente ao seguinte enunciado: “para qualquer família indexada  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$  de conjuntos não-vazios, com  $J$  também não-vazio, o produto cartesiano  $\prod_{\alpha \in J} A_\alpha$  é não-vazio.”

Para mostrar a equivalência mencionada acima, é necessário utilizar o seguinte lema.

**Lema 1.4.** *Dada uma coleção  $\mathcal{B}$  de conjuntos não-vazios, existe uma função  $c: \mathcal{B} \rightarrow \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$  tal que  $c(B) \in B$  para todo  $B$  em  $\mathcal{B}$ .*

A demonstração do lema será omitida, mas pode ser encontrada no capítulo 1 em [4].

**Exemplo 1.17.** *Só como curiosidade, um resultado conhecido que utiliza da noção de topologia produto é o **teorema de Tychonoff**. O teorema enuncia que o produto arbitrário de espaços compactos é compacto com relação à topologia produto.*

## 1.8 Compacidade e Paracompacidade

Em cursos de cálculo, usualmente define-se um conjunto  $K \subset \mathbb{R}^n$  como compacto quando ele é limitado e fechado. Em espaços topológicos mais gerais, esta definição não necessariamente forneceria resultados análogos àqueles vistos para subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^n$ . Em vista disso, outra definição de conjunto compacto é necessária, uma que resgate a noção de compacidade dos cursos de cálculo e que seja útil em espaços topológicos mais gerais.

**Definição 1.26.** *Seja  $\mathcal{U}$  uma coleção de subconjuntos de um espaço topológico  $X$ . Diz-se que  $\mathcal{U}$  é uma **cobertura** de  $X$  se cada ponto  $x$  deste espaço pertence a pelo menos um dos conjuntos de  $\mathcal{U}$ .*

*Uma subcoleção de uma cobertura  $\mathcal{U}$  é dita uma **subcobertura** de  $X$  se ela também cobre  $X$ .  $\mathcal{U}$  é uma (sub)cobertura **aberta** (respec. fechada) de  $X$  se é formada apenas de conjuntos abertos (respec. fechados).*

**Definição 1.27.** *Um espaço topológico  $X$  é dito **compacto** se toda cobertura aberta  $\mathcal{U}$  de  $X$  admite uma subcobertura finita.*

**Exemplo 1.18.** *A reta não é compacta. Um modo de verificar isto é mostrando que a cobertura aberta  $\mathcal{U} = \{(n, n+2): n \in \mathbb{Z}\}$  não admite uma subcobertura finita de  $\mathbb{R}$ .*

O exemplo a seguir mostra que um espaço topológico limitado não é necessariamente compacto.

**Exemplo 1.19.** *Considere o espaço métrico  $(\mathbb{Z}, d)$ , onde  $d: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  é a métrica discreta (exemplo 2.1). Claramente,  $\mathbb{Z}$  é limitado, pois para qualquer  $\alpha > 1$  real,  $d(x, y) < \alpha$ . Além disso, na topologia induzida por esta métrica, todos os conjuntos de  $\mathbb{Z}$  são abertos. Em particular, segue que  $\mathcal{U} = \bigcup_{x \in \mathbb{Z}} \{x\}$  é uma cobertura aberta dos inteiros, mas que não admite subcobertura finita. Logo,  $(\mathbb{Z}, \tau_d)$  é um espaço topológico limitado e fechado, mas que não é compacto.*

**Proposição 1.2.** *Seja  $Y$  um subespaço de um espaço topológico  $X$ .  $Y$  é compacto se e somente se toda cobertura de  $Y$  por abertos de  $X$  admite uma subcobertura finita.*

*Demonstração.*

Para mostrar a ida, considere que  $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in J\}$  é uma cobertura qualquer de  $Y$  formada por abertos de  $X$ . Pela definição de subespaço topológico, segue que  $U_\alpha \cap Y$  é aberto na topologia de  $Y$  para cada  $\alpha \in J$ . Definindo  $V_\alpha := U_\alpha \cap Y$ , a coleção  $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha \in J\}$  é uma cobertura aberta de  $Y$ . Sendo  $Y$  compacto, então existe uma subcoleção  $\mathcal{V}'$  de  $\mathcal{V}$  que cobre  $Y$ . Sendo  $\mathcal{U}$  qualquer formada por abertos de  $X$ , o resultado estende-se para toda cobertura de  $Y$  formada por abertos de  $X$ .

Para demonstrar a volta, seja  $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in J\}$  uma cobertura aberta de  $Y$  qualquer. Pela definição de subespaço, existe ao menos um aberto  $V$  em  $X$  tal que  $U_\alpha = V \cap Y$  para cada  $\alpha$ . Denotando um desses abertos por  $V_\alpha$ , segue que  $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha \in J\}$  é uma cobertura de  $Y$  por abertos de  $X$ . Por hipótese, existe uma subcobertura finita  $\mathcal{V}'$  de  $Y$ . Como,  $\mathcal{U}$  é qualquer uma cobertura aberta qualquer, o resultado estende-se para toda cobertura aberta de  $Y$ . Conclui-se que  $Y$  é compacto. ■

**Teorema 1.14 (Imagem contínua de conjunto compacto).** *Seja  $f: X \rightarrow Y$  um mapa contínuo entre espaços topológicos  $X$  e  $Y$ . Se  $X$  for compacto, então  $f(X) \subset Y$  é um conjunto compacto.*

*Demonstração.*

Seja  $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in J\}$  uma cobertura aberta de  $f(X)$ . Como  $f$  é contínua, então para cada  $\alpha \in J$ , o conjunto  $f^{-1}(U_\alpha)$  é aberto em  $X$ . Daí, segue que  $\bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}(U_\alpha)$  é um conjunto aberto que cobre  $X$ . Como  $X$  é compacto, então existe uma quantidade finita de elementos de  $\mathcal{U}$  tal que  $\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(U_i)$  é uma cobertura de  $X$ . Logo,  $\bigcup_{i=1}^n U_i$  é uma subcobertura finita de  $f(X)$ . Como  $\mathcal{U}$  é uma cobertura aberta qualquer de  $f(X)$ , o resultado estende-se para toda cobertura aberta de  $f(X)$ . ■

**Corolário 1.14.1 (Weierstraß).** *Seja  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua definida em um espaço topológico compacto. Então existem  $a, b \in f(X)$  tais que  $a < b$  e  $a \leq f(x) \leq b$  para todo  $x \in X$ .*

*Demonstração.*

Pelo teorema anterior, segue que  $f(X) \subset \mathbb{R}$  é um conjunto compacto. Na reta, isto equivale a  $f(X)$  ser limitado e fechado. Sendo um subconjunto limitado de  $\mathbb{R}$ , então ele admite supremo  $b \equiv \sup f(X)$  e ínfimo  $a \equiv \inf f(X)$ . Sendo fechado, então  $f(X) = \overline{f(X)}$  e portanto  $a \in f(X)$  e  $b \in f(X)$ . Pela definição de supremo e de ínfimo, conclui-se facilmente que  $a \leq f(x) \leq b$  para todo  $x \in X$ . ■

**Corolário 1.14.2.** *Todo espaço topológico homeomorfo a um espaço topológico compacto também é compacto.*

*Demonstração.*

Com efeito, se  $X$  e  $Y$  são espaços topológicos, com  $X$  compacto, e se  $\phi: X \rightarrow Y$  é um homeomorfismo, então  $f(X) = Y$  é a imagem contínua de um conjunto compacto. Pelo teorema anterior, segue que  $Y$  é compacto. ■

Os lemas a seguir serão úteis para a demonstração das proposições que os seguem.

**Lema 1.5.** *Seja  $X$  um espaço topológico de Hausdorff. Para todos  $A, B \subset X$  disjuntos e compactos existem abertos disjuntos  $U$  e  $V$  tais que  $A \subset U$  e  $B \subset V$ .*

*Demonstração.*

Primeiramente, considere o caso em que  $B = \{q\}$ . Então, para cada  $p \in A$ , existem abertos  $U_p$  e  $V_p$  disjuntos tais que  $p \in U_p$  e  $q \in V_p$ . A coleção  $\{U_p: p \in A\}$  é uma cobertura aberta de  $A$  que admite uma subcobertura finita  $\{U_{p_1}, \dots, U_{p_k}\}$ . Deste modo, os conjuntos

$$U_q = U_{p_1} \cup \dots \cup U_{p_k} \quad V_q = V_{p_1} \cap \dots \cap V_{p_k}$$

são abertos disjuntos que contêm  $A$  e  $B$ , respectivamente.

Pelo que foi visto acima, para cada  $q \in B$  existem abertos disjuntos  $U_q$  e  $V_q$  tais que  $A \subset U_q$  e  $B \subset V_q$ . A coleção  $\{V_p: p \in B\}$  é uma cobertura aberta de  $B$  e portanto admite subcobertura finita  $\{V_{q_1}, \dots, V_{q_n}\}$ . Logo, os conjuntos

$$U = U_{q_1} \cap \dots \cap U_{q_n} \quad V = V_{q_1} \cup \dots \cup V_{q_n}$$

são abertos disjuntos que contêm  $A$  e  $B$ , respectivamente.

Sendo  $A$  e  $B$  subconjuntos compactos quaisquer de  $X$ , o resultado estende-se para todos subconjuntos compactos deste espaço topológico. ■

**Proposição 1.3.** *Todo subconjunto compacto de um espaço de Hausdorff é fechado.*

*Demonstração.*

Seja  $A$  um subconjunto compacto de um espaço de Hausdorff  $X$ . Se  $p \in X \setminus A$  é qualquer, então pela demonstração lema anterior existem abertos disjuntos  $U$  e  $V$  tais que  $A \subset U$  e  $\{p\} \subset V$ . Disto, decorre que  $p$  não é ponto de acumulação de  $A$ . Sendo  $p$  qualquer, então o resultado vale para todo ponto de  $X \setminus A$ . Conclui-se que  $A$  possui todos seus pontos de acumulação e ele portanto é um conjunto fechado. ■

**Lema 1.6 (Lema do tubo).** *Seja  $(X \times Y, \tau)$  um espaço topológico com a topologia produto e assumamos que  $Y$  é compacto. Se  $x_0 \in X$  e  $U \subseteq X \times Y$  é um aberto que contém  $\{x_0\} \times Y$ , então existe uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  tal que  $V \times Y \subseteq U$ .*

*Demonstração.*

Seja  $U$  um aberto de  $X \times Y$  que contém o conjunto  $\{x_0\} \times Y$ . Como a topologia produto é originada pela base  $\{V' \times W'\}$ , onde  $V'$  e  $W'$  são, respectivamente,



abertos de  $X$  e  $Y$ , então pela definição de base, existe  $V \times W \in X \times Y$  tal que  $(x_0, y) \in V \times W$  e  $V \times W \subseteq U$ . A coleção destes elementos é uma cobertura aberta de  $\{x_0\} \times Y$  que admite uma subcobertura finita, pois  $Y$  é compacto e homeomorfo a  $\{x_0\} \times Y^3$ . Denotando esta subcobertura por  $\{V_1 \times W_1, \dots, V_n \times W_n\}$ , então  $(V_1 \cap \dots \cap V_n) \times Y$  é um aberto que contém  $\{x_0\} \times Y$  tal que  $V_1 \cap \dots \cap V_n$  seja uma vizinhança de  $x_0$ . ■

**Proposição 1.4 (Tychonoff — caso finito).** *O produto cartesiano finito de espaços topológicos compactos é um espaço topológico compacto.*

*Demonstração.*

Seja  $\mathcal{U}$  uma cobertura aberta qualquer do espaço topológico  $X \times Y$ , onde  $X$  e  $Y$  são espaços compactos. Para cada  $x \in X$ ,  $\mathcal{U}$  é uma cobertura aberta do compacto  $\{x\} \times Y$ , portanto,  $\{x\} \times Y$  é coberto por  $\{U_1, \dots, U_k\}$ , onde  $U_j \in \mathcal{U}$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Pelo lema 1.6 (lema do tubo), segue que existe uma vizinhança  $V_x \subseteq X$  de  $x$  tal que  $V_x \times Y \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_k$ .

O conjunto  $\{V_x : x \in X\}$  é uma cobertura aberta de  $X$ , e portanto admite uma subcobertura finita  $\{V_{x_1}, \dots, V_{x_n}\}$ , pois  $X$  é compacto. Logo,  $\{V_{x_i} \times Y : i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$  é uma cobertura finita de  $X \times Y$ . Como cada  $V_{x_i} \times Y$  está contido em uma quantidade finita de elementos de  $\mathcal{U}$ , então  $X \times Y$  é coberto por uma quantidade finita de elementos de  $\mathcal{U}$ .

Pela arbitrariedade da cobertura  $\mathcal{U}$ , o resultado estende-se para toda cobertura aberta de  $X \times Y$  e conclui-se que este produto cartesiano é um espaço topológico compacto. Por indução, pode-se mostrar que o produto cartesiano de  $n$  espaços compactos é compacto. ■

**Proposição 1.5.** *Todo subconjunto fechado de um espaço topológico compacto é um subconjunto compacto (na topologia do subespaço).*

*Demonstração.*

Seja  $\mathcal{U}$  uma cobertura finita de  $A \subseteq X$ , onde  $A$  é um subconjunto fechado de um espaço compacto. A coleção  $\mathcal{U}' = \mathcal{U} \cup X \setminus A$  é uma cobertura de  $X$ . Segue diretamente da compacidade de  $X$  que existe uma subcobertura finita de  $\mathcal{U}'$  que cobre  $A$ . Sendo  $\mathcal{U}$  uma cobertura qualquer de  $A$ , conclui-se que  $A$  é compacto. ■

**Lema 1.7 (Aplicação fechada).** *Seja  $F: X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua entre um espaço compacto  $X$  e um espaço de Hausdorff  $Y$ . Então  $F$  é uma aplicação fechada, i.e., a imagem de um conjunto fechado em  $X$  é um conjunto fechado em  $Y$ .*

*Demonstração.*

Seja  $U$  um conjunto fechado qualquer de  $X$ . Pela proposição 1.5, segue que  $U$  é compacto em  $X$ . Pelo teorema 1.14, temos que  $F(U)$  é um subconjunto compacto em  $Y$ . Pela proposição 1.3, conclui-se que  $F(U)$  é fechado. ■

<sup>3</sup>O homeomorfismo é bem simples:  $y \mapsto \varphi(y) = (x_0, y)$  e  $(x_0, y) \mapsto \varphi^{-1}(x_0, y) = y$ .

Uma vez conhecida a definição de espaço topológico compacto, podemos definir compacidade localmente em um espaço topológico. Esta noção será importante para demonstrar que variedades diferenciáveis são espaços paracompactos e deste modo concluir que existem partições da unidade nessas variedades.

**Definição 1.28.** *Um espaço topológico  $X$  é dito **localmente compacto** se para cada ponto  $x \in X$  existe um subconjunto compacto  $K \subseteq X$  que contém alguma vizinhança de  $x$ .*

**Definição 1.29.** *Um subconjunto  $A$  de um espaço topológico  $X$  é dito **pré-compacto em  $X$**  se  $\bar{A}$  for compacto.*

**Proposição 1.6.** *Seja  $X$  um espaço topológico de Hausdorff. São equivalentes:*

- i)  $X$  é localmente compacto.
- ii) Cada ponto de  $X$  possui uma vizinhança pré-compacta.
- iii)  $X$  possui uma base de abertos pré-compactos.

*Demonstração.*

**iii  $\implies$  ii:** se  $\mathcal{B}$  é uma base de abertos pré-compactos, então se  $x \in X$ , temos que  $x \in B$  para algum  $B \in \mathcal{B}$ . Como  $B$  é aberto e pré-compacto, então ele é uma vizinhança pré-compacta de  $x$ . Sendo  $x$  qualquer, o resultado estende-se para todo o  $X$ .

**ii  $\implies$  i:** seja  $x \in X$  qualquer. então  $x$  pertence a um aberto  $A \subset \bar{A}$  pré-compacto por hipótese. Como  $A$  é pré-compacto, então seu fecho é um compacto que contém uma vizinhança de  $x$ . Sendo  $x$  qualquer, o resultado estende-se para todo o  $X$  e portanto ele é um espaço localmente compacto.

**i  $\implies$  iii:** Sejam  $x$  qualquer e  $U$  uma vizinhança de  $x$ . Por hipótese existe  $K$  compacto tal que  $x \in U \subset K$ . Seja  $\mathcal{V}$  a coleção de todas as vizinhanças de  $x$  contidas em  $U$ . Então  $\mathcal{V}$  é uma base local em  $x$ , isto é, toda vizinhança de  $x$  contém um elemento desta coleção. Sendo  $X$  um espaço de Hausdorff, então proposição 1.3 garante que  $K$  é fechado. Logo, para todo  $V \in \mathcal{V}$ , temos que  $\bar{V} \subseteq K$ , pela proposição 1.5 conclui-se que  $V$  é pré-compacto, de modo que  $\mathcal{V}$  é uma base local de pré-compactos.

■

A partir deste ponto, será introduzida a noção de espaço topológico paracompacto. Serão reunidos apenas alguns resultados que serão de grande utilidade para a capítulo 3. Portanto, esta leitura pode ser adiada até o momento em que será preciso mostrar que toda variedade diferenciável é um espaço topológico paracompacto.

**Definição 1.30.** *Uma coleção  $\mathcal{A}$  de subconjuntos de um espaço topológico  $X$  é dita **localmente finita** se cada ponto de  $X$  possui uma vizinhança que intersecta no máximo uma quantidade finita de conjuntos de  $\mathcal{A}$ .*

**Definição 1.31.** *Seja  $\mathcal{A}$  uma cobertura de um espaço topológico  $X$ . Uma cobertura  $\mathcal{B}$  de  $X$  é dita um **refinamento de  $\mathcal{A}$**  se para todo  $B \in \mathcal{B}$  existe  $A \in \mathcal{A}$  tal que  $B \subseteq A$ . Se todos os elementos da coleção  $\mathcal{B}$  forem abertos, então diz-se que ele é um refinamento aberto.*

**Lema 1.8.** *Seja  $\mathcal{A}$  uma coleção de subconjuntos de um espaço topológico  $X$ .  $\mathcal{A}$  é localmente finita se, e somente se, a coleção  $\bar{\mathcal{A}} := \{\bar{A} : A \in \mathcal{A}\}$  for localmente finita.*

*Demonstração.*

Seja  $\mathcal{A}$  for localmente finita. Se  $p \in X$  for arbitrário, então seja  $W$  a vizinhança que intersecta  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ , onde  $A_i \in \mathcal{A}$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Como  $A_i \subset \bar{A}_i$  para cada  $i$ , então  $W$  intersecta no máximo  $n$  elementos  $\bar{A}_i$ , pois  $A_i$  e  $A_j$  podem ter o mesmo fecho para  $i \neq j$ <sup>4</sup>. Sendo  $p$  arbitrário, rapidamente conclui-se que  $\bar{\mathcal{A}}$  é localmente finita.

Para mostrar a volta, seja  $V$  a vizinhança de algum ponto arbitrário em  $X$  tal que ela intersecta  $\{\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n\}$ . Logo,  $V$  é uma vizinhança de algum ponto de acumulação de cada  $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Portanto,  $V$  contém algum ponto de  $A_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . ■

**Lema 1.9.** *Seja  $\mathcal{A}$  uma coleção de subconjuntos de um espaço topológico  $X$ . Se  $\mathcal{A}$  é localmente finita, então*

$$\overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \bar{A}.$$

*Demonstração.*

Primeiramente, como  $A \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$  para todo  $A \in \mathcal{A}$ , então,  $\bar{A} \subseteq \overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A}$  para todo  $A \in \mathcal{A}$ . Segue que

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} \bar{A} \subseteq \overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A}.$$

Pela contrapositiva, seja  $a \in X$ , tal que  $a \notin \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \bar{A}$ . Como a coleção  $\mathcal{A}$  é localmente finita, existe uma vizinhança  $U$  deste ponto que intersecta  $\{A_1, \dots, A_n\}$  e portanto intersecta  $\{\bar{A}_{i_1}, \dots, \bar{A}_{i_k}\}$ , onde  $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ . Desta forma,  $U \setminus \{\bar{A}_{i_1}, \dots, \bar{A}_{i_k}\}$  é uma vizinhança de  $a$  que não intersecta nenhum conjunto de  $\mathcal{A}$ . Conclusão:  $a \notin \overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A}$ . ■

**Definição 1.32.** *Um espaço topológico  $X$  é dito **paracompacto** se toda cobertura aberta de  $X$  admite um refinamento aberto localmente finito.*

Como corolário da definição, temos que todo espaço topológico compacto é também paracompacto: o refinamento aberto localmente finito é a subcobertura finita.

<sup>4</sup>Em  $\mathbb{R}^d$ , se você pensar que  $A_i$  é uma bola aberta e  $A_j$  é a mesma bola aberta unida com uma quantidade enumerável de pontos que não pertencem à bola, então o fecho de ambas é a mesma bola fechada, pois o conjunto enumerável em questão é composto de pontos isolados de  $A_j$ .

**Exercício 1.23.**  $\mathbb{R}^d$  é paracompacto.

*Dica: para cada cobertura aberta, considere uma quantidade finita de conjuntos dela que cobrem a bola  $\bar{B}_m(0)$  e intersecte cada um destes conjuntos com  $\mathbb{R}^d \setminus \bar{B}_{m-1}(0)$ , sendo  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  e  $B_0(0) = \emptyset$ .*

A definição e o lema a seguir serão fundamentais para mostrar que toda variedade diferenciável é paracompacta.

**Definição 1.33.** Seja  $X$  um espaço topológico. Uma sequência  $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de subconjuntos compactos de  $X$  é dita uma **exaustão de  $X$  por conjuntos compactos** valem que  $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$  e  $K_i \subset \text{Int}(K_{i+1}) \forall i \in \mathbb{N}$ .

**Lema 1.10.** Um espaço topológico de Hausdorff, segundo-contável e localmente compacto admite uma exaustão por conjuntos compactos.

*Demonstração.*

Se  $X$  é um espaço topológico que obedece às condições acima, então,  $X$  possui uma base de abertos pré-compactos (proposição 1.6). Sendo segundo-contável,  $X$  é coberto por uma quantidade enumerável desses abertos, digamos,  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Defina  $K_1 := \bar{U}_1$  e assumamos que  $K_1, \dots, K_n$  são compactos que satisfazem  $U_i \subset K_i$  e  $K_i \subset \text{Int}(K_{i+1})$ . Sabendo  $K_n$  compacto, então existe  $k_n$  inteiro tal que  $K_n \subset U_1 \cup \dots \cup U_{k_n}$ <sup>5</sup>. Definindo  $K_{n+1} := \bar{U}_1 \cup \dots \cup \bar{U}_{k_n}$ , segue que  $K_{n+1}$  é um compacto tal que  $K_n \subset \text{Int}(K_{n+1})$ . Escolhendo  $k_n > n + 1$  resulta em  $U_{n+1} \subset K_{n+1}$ . ■

**Teorema 1.15.** Todo espaço topológico de Hausdorff, segundo-contável e localmente compacto é paracompacto.

*Demonstração.*

Seja  $X$  um espaço topológico que obedece às condições acima e seja  $\mathcal{U}$  uma cobertura aberta de  $X$ . A partir do lema 1.10, seja  $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$  uma exaustão de  $X$  por conjuntos compactos. Para cada  $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , defina os seguintes conjuntos:

$$A_j := K_{j+1} \setminus \text{Int}(K_j)$$

$$W_j := \text{Int}(K_{j+2} \setminus K_{j-1}).$$

Como  $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$  é uma exaustão, então  $A_j$  é um compacto contido no aberto  $W_j$ . Para cada  $x \in A_j$ , escolha  $U_x \in \mathcal{U}$  uma vizinhança de  $x$ . Definindo  $V_x = U_x \cap W_j$ , então a coleção dos  $V_x$  é uma cobertura aberta de  $A_j$  para cada  $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Sendo  $A_j$  compacto, então ele é coberto por uma subcobertura finita de conjuntos nesta coleção. A união de todas essas subcoberturas indexada por  $j$  forma um refinamento aberto  $\mathcal{U}$ . Este refinamento é localmente finito, pois  $W_j$  intersecta  $W'_j$  para  $j - 2 \leq j' \leq j + 2$ . ■

<sup>5</sup>Existe uma cobertura finita de  $K_n$ , logo, basta  $k_n$  ser o maior índice dos elementos dessa cobertura

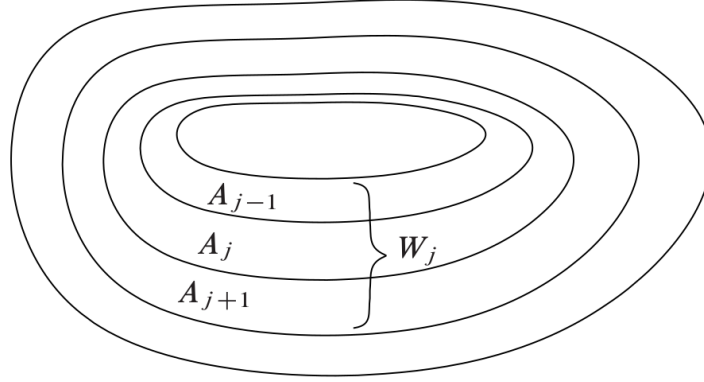


Figura 1.1: Ilustração do teorema 1.15. Imagem retirada de [5].

Caso a demonstração do teorema 1.15 tenha ficado um tanto obscura, a Figura 1.1 pode esclarecer um pouco as ideias utilizadas. Em suma, dado que  $X$  pode ser exaurido por compactos, fatia-se  $X$  em subconjuntos compactos  $A_j$ , sendo que cada uma dessas fatias está contida em uma fatia maior e aberta  $W_j$ . A compacidade dos  $A_j$  garante que eles são finitamente cobertos, sendo  $X$  coberto pela união dessas coberturas. Por fim, para cada ponto de  $X$ , basta tomar alguma  $W_j$  como sua vizinhança<sup>6</sup>, pois sua interseção com os conjuntos que cobrem  $A_{j'}$  é finita para  $j' \in \{j-2, j-1, j, j+1, j+2\}$ .

**Definição 1.34.** Um espaço topológico  $X$  é dito **normal** se for um espaço de Hausdorff e se para quaisquer fechados  $A$  e  $B$  de  $X$  existirem abertos disjuntos  $U$  e  $V$  tais que  $A \subseteq U$  e  $B \subseteq V$ .

**Lema 1.11.** Seja  $X$  um espaço topológico de Hausdorff. Assim,  $X$  é um espaço normal se, e somente se, para todo conjunto fechado  $A$  e para qualquer vizinhança  $U$  deste conjunto existir uma vizinhança  $V$  de  $A$  tal que  $\bar{V} \subseteq U$ .

*Demonstração.*

Para mostrar a ida, dado  $A$  fechado qualquer em  $X$ , seja  $U$  uma vizinhança de  $A$ . Então, sendo  $X$  um espaço normal, existem abertos disjuntos  $V$  e  $W$  tais que  $A \subseteq V$  e  $X \setminus U \subseteq W$ . Desta forma, temos que  $A \subseteq V$  e  $X \setminus W \subseteq U$ . Sendo os abertos disjuntos, então  $V \subset X \setminus W$  e portanto,  $\bar{V} \subseteq X \setminus W$ . Logo,  $V$  é uma vizinhança de  $A$  tal que  $\bar{V} \subseteq U$ .

Para a volta, sejam  $A$  e  $B$  fechados disjuntos em um espaço de Hausdorff. Sendo  $X \setminus B$  uma vizinhança de  $A$ , segue por hipótese que existe um aberto  $V$  tal que  $A \subseteq V$  e  $\bar{V} \subseteq X \setminus B$ . Deste modo, segue que  $A \subseteq V$  e  $B \subseteq X \setminus \bar{V}$ . Visto que  $V \cap (X \setminus \bar{V}) = \emptyset$ , rapidamente conclui-se que  $X$  é um espaço normal. ■

**Exercício 1.24.** Todo espaço de Hausdorff paracompacto é normal.

<sup>6</sup>Veja que isso sempre é possível por conta de  $X$  ser exaurido por uma quantidade enumerável de compactos. Logo, um ponto  $x \in X$  está em todos os compactos da coleção, exceto por uma quantidade finita destes compactos.

A demonstração do próximo lema será omitida, mas encontra-se em [5].

**Lema 1.12 (Lema de Urysohn).** *Suponha que  $X$  é um espaço topológico normal. Se  $A$  e  $B$  são fechados em  $X$  disjuntos, então existe uma função contínua  $f: X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $f|_A \equiv 0$  e  $f|_B \equiv 1$ .*

**Definição 1.35.** *Seja  $X$  um espaço topológico e  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. O **suporte de  $f$** ,  $\text{supp } f$ , é o fecho do conjunto  $\{x \in X: f(x) \neq 0\}$ .*

**Definição 1.36.** *Seja  $X$  um espaço topológico. Se  $A$  é um subconjunto fechado e  $U$  é uma vizinhança de  $A$  de  $X$ , uma função contínua  $f: X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $f|_A \equiv 1$  e  $\text{supp } f \subseteq U$  é chamada de **bump function para  $A$  com suporte em  $U$** .*

**Corolário 1.1** (do lema de Urysohn). *Seja  $X$  um espaço topológico normal. Se  $A$  é um conjunto fechado em  $X$  e  $U$  é uma vizinhança de  $A$ , então existe uma bump function para  $A$  com suporte em  $U$ .*

*Demonstração.*

Seja  $A$  um conjunto fechado e  $U$  uma vizinhança de  $A$ . Sendo  $X$  normal, então existe uma vizinhança  $V$  de  $A$  tal que  $\bar{V} \subseteq U$ . Pelo lema de Urysohn, existe uma função  $f: X \rightarrow [0, 1]$  contínua tal que  $f|_A \equiv 1$  e  $f|_{X \setminus V} \equiv 0$ . Logo,  $f|_A \equiv 1$  e  $\text{supp } f \subseteq \bar{V} \subseteq U$ . ■

Após todos estes resultados, podemos finalmente falar sobre partições da unidade.

**Definição 1.37.** *Se  $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$  é uma cobertura aberta e indexada de um espaço topológico  $X$ , diz-se que uma **partição da unidade subordinada a  $\mathcal{U}$**  é uma família de funções contínuas  $\psi_\alpha: X \rightarrow \mathbb{R}$  também indexada por  $A$ , tal que valham as seguintes propriedades:*

- i)  $0 \leq \psi_\alpha(p) \leq 1$  para todo  $\alpha \in A$  e para todo  $p \in X$ .
- ii)  $\text{supp } \psi_\alpha \subseteq U_\alpha$  para todo  $\alpha \in A$ .
- iii) A família  $\{\text{supp } \psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$  é localmente finita.
- iv)  $\sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha(p) = 1$  para todo  $p \in X$ .

**Lema 1.13.** *Seja  $X$  um espaço topológico de Hausdorff paracompacto. Se  $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$  é uma cobertura aberta e indexada de  $X$ , então  $\mathcal{U}$  admite um refinamento aberto localmente finito  $\mathcal{V} = (V_\alpha)_{\alpha \in A}$  tal que  $\bar{V}_\alpha \subseteq U_\alpha$  para todo  $\alpha \in A$ .*

*Demonstração.*

Sendo  $X$  normal, então cada  $x \in X$  possui uma vizinhança  $Y_x$  tal que  $\bar{Y}_x \subseteq U_\alpha$  para algum  $\alpha \in A$ . A coleção de tais vizinhanças forma uma cobertura aberta de  $X$ . Desta forma, por paracompacidade, existe um refinamento aberto localmente finito  $\mathcal{Z} = \{Z_\beta: \beta \in B\}$  desta cobertura. Para cada  $\beta \in B$ , existem

$x \in X$  e  $\alpha \in A$  tais que  $\bar{Z}_\beta \subseteq \bar{Y}_x \subset U_\alpha$ . Sendo assim, defina o mapa  $f: B \rightarrow A$ ,  $f(\beta) = \alpha$ , tal que  $\bar{Z}_\beta \subseteq U_\alpha$ . Por fim, defina para cada  $\alpha \in A$  o seguinte conjunto aberto:

$$V_\alpha := \bigcup_{\beta: f(\beta)=\alpha} Z_\beta.$$

No caso onde não existe tal  $\beta$ , considere  $V_\alpha = \emptyset$ . Segue que a família dos  $V_\alpha$  é localmente finita e pelo lema 1.9, vale que  $\bar{V}_\alpha \subseteq U_\alpha$ . Conclui-se que  $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$  é o refinamento aberto localmente finito desejado. ■

**Teorema 1.16 (Existência de partições da unidade).** *Seja  $X$  um espaço topológico de Hausdorff paracompacto. Se  $\mathcal{U}$  é uma cobertura aberta e indexada de  $X$ , então existe uma partição da unidade subordinada a  $\mathcal{U}$ .*

*Demonstração.*

Sendo  $X$  um espaço topológico de Hausdorff paracompacto e sendo  $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$  uma cobertura aberta e indexada de  $X$ , aplicando o lema 1.13 duas vezes, obtém-se os refinamentos localmente finitos  $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$  e  $(W_\alpha)_{\alpha \in A}$  tais que  $\bar{W}_\alpha \subseteq V_\alpha$  e  $\bar{V}_\alpha \subseteq U_\alpha$  para cada  $\alpha \in A$ .

Como  $X$  é um espaço normal, então, pelo corolário 1.1, seja  $f_\alpha: X \rightarrow [0, 1]$  uma bump function para  $\bar{W}_\alpha$  com suporte em  $V_\alpha$  para cada  $\alpha \in A$ . Visto que  $\text{supp } f_\alpha \subseteq V_\alpha$  e que  $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$  é uma cobertura aberta localmente finita, então  $(\text{supp } f_\alpha)_{\alpha \in A}$  é localmente finito. Logo, ao definir  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  por  $f(p) = \sum_\alpha f_\alpha(p)$ , tem-se que há uma vizinhança de  $p$  tal que está  $f(p)$  seja uma soma finita. Em particular, segue que  $f$  é contínua para cada  $p$  em  $X$ , portanto ela é contínua. Além disso, para cada  $p \in X$  existe ao menos um  $\alpha$  tal que  $p \in W_\alpha$ , ou seja, tal que  $f_\alpha(p) = 1$ , logo  $f$  sempre é positiva. Definindo  $\psi_\alpha: X \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\psi_\alpha(p) := f_\alpha(p)/f(p)$ , então segue que  $\psi_\alpha$  é contínua para cada  $\alpha$ . Além disso,  $0 \leq \psi_\alpha(p) \leq 1$  para cada  $p \in X$  e para cada  $\alpha \in A$ . Por último, tem-se que  $\sum_\alpha \psi_\alpha(p) = 1$  para cada  $p \in X$ . Conclusão;  $(\psi_\alpha)_{\alpha \in A}$  é a partição da unidade desejada. ■

## 1.9 Topologia Quociente (reescrever)

**Definição 1.38 (Mapa quociente).** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $p: X \rightarrow Y$  uma aplicação sobrejetiva. Se cada  $U \subset Y$  é aberto se, e somente se,  $p^{-1}(U) \subset X$  for aberto, então diz-se que  $p$  é um mapa quociente.*

**Definição 1.39.** *Considere o mesmo mapa sobrejetivo da definição 1.38. Um subconjunto  $C \subset X$  é dito saturado, em relação a este mapa, se contém qualquer pré-imagem  $p^{-1}(\{y\})$  que intersecta.*

A partir da definição acima, pode-se mostrar que a condição de um mapa ser quociente é equivalente à condição dele ser contínuo, sobrejetivo e levar abertos saturados de  $X$  em abertos de  $Y$ .

**Observação:** as definições acima poderiam ser reformuladas utilizando conjuntos fechados.

**Exemplo 1.20.** A projeção  $\pi_1: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $\pi_1(a, b) = a$ , é um mapa quociente.

**Definição 1.40 (Topologia Quociente).** Considere os conjuntos  $X$  e  $A$ , sendo  $X$  um espaço topológico; seja  $p: X \longrightarrow A$  um mapa sobrejetivo. A coleção  $\tau_q = \{U \subset A \mid p^{-1}(U) \in \tau_x\}$  é a topologia em  $A$  que torna  $p$  um mapa quociente. Tal coleção é chamada de topologia quociente induzida por  $p$ .

**Definição 1.41.** Sejam  $X^*$  uma partição de  $X$  e  $p: X \longrightarrow X^*$  um mapa sobrejetivo que leva um elemento  $a$  de  $X$  no elemento de  $X^*$  que contém  $a$ . Se  $X^*$  é espaço topológico com a topologia quociente, então diz-se que  $X^*$  é um espaço quociente de  $X$ . (ilustrar)

**Exemplo 1.21.** Considere  $X = [0, 1]$  como subespaço topológico da reta (com a topologia padrão). A ideia é identificar  $X$  com a esfera  $S^1$ .



## Capítulo 2

# Espaços Métricos

A definição de uma métrica em um conjunto nos permite formalizar e generalizar a definição de distância entre pontos utilizados comumente.

**Definição 2.1.** *Dado um conjunto não-vazio  $X$ , uma métrica neste conjunto é uma função  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  que respeita as seguintes propriedades:*

- a)  $d(x, y) \geq 0$  para todos  $x, y \in X$ ;
- b)  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ;
- c)  $d(x, y) = d(y, x)$  para todos  $x, y \in X$ ;
- d)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  para todos  $x, y, z \in X$ .

Um conjunto  $X$  dotado de uma métrica  $d$  forma o par ordenado  $(X, d)$ , também chamado de **espaço métrico**. Quando a métrica em  $X$  está subentendida, para evitar pedantismo, chamamos somente  $X$  de espaço métrico. Perceba que as propriedades necessárias para que uma função seja uma métrica são totalmente compatíveis com a noção intuitiva de distância.

**Exemplo 2.1.** *Dado um conjunto não-vazio  $X$ , a métrica  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases} \quad (2.1)$$

*é chamada de métrica discreta. Ela sempre pode tornar um conjunto não-vazio em um espaço métrico.*

**Exemplo 2.2.** *A reta  $\mathbb{R}$  é um espaço métrico quando definida a métrica padrão  $d(x, y) = |x - y|$*

Algumas desigualdades serão apresentadas para que alguns exemplos mais interessantes possam ser explorados.

**Teorema 2.1 (Desigualdade de Schwarz).** *Sejam  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  números reais. Então, vale que*

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k^2 \right).$$

*Demonstração.* Considere as somas a seguir indo de 1 até  $n$ .

Veja que  $(\sum (a_k)^2)(\sum (b_k)^2) = (a_1)^2(\sum_j (b_j)^2) + \dots + (a_n)^2(\sum_j (b_j)^2)$ . Separando cada termo em duas partes iguais, segue que:

$$\left( \sum (a_k)^2 \right) \left( \sum (b_k)^2 \right) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (a_i)^2 (b_j)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (b_i)^2 (a_j)^2$$

Daí,

$$\left( \sum (a_k)^2 \right) \left( \sum (b_k)^2 \right) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (a_i)^2 (b_j)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (b_i)^2 (a_j)^2 \pm \left( \sum a_k b_k \right)^2$$

sendo  $(\sum a_k b_k)^2 = \sum_{i,j} a_i b_i a_j b_j$ . Rearranjando os termos, tem-se que:

$$\left( \sum a_k b_k \right)^2 = \left( \sum (a_k)^2 \right) \left( \sum (b_k)^2 \right) - \frac{1}{2} \sum_{i,j} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

A desigualdade de Schwarz segue de imediato. ■

**Exercício 2.1.** *Mostre que  $\mathbb{R}^n$  é um espaço métrico com a métrica euclidiana*

$$d(x, y) = [(\xi_1 - \eta_1)^2 + \dots + (\xi_n - \eta_n)^2]^{\frac{1}{2}},$$

em que  $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  e  $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ .

**Exercício 2.2.** *Sejam  $d_1, d_2: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que*

$$d_1(x, y) = \sum_{k=1}^n |\xi_k - \eta_k|$$

$$d_2(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} \{|\xi_k - \eta_k|\}$$

*Mostre que  $d_1$  e  $d_2$  ambas são métricas em  $\mathbb{R}^n$ .*

**Exemplo 2.3 (Espaço das funções contínuas).** *Seja  $C[a, b]$  o conjunto das funções reais contínuas no intervalo  $[a, b]$ . A função  $d: C[a, b] \times C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $d(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$  torna esse conjunto um espaço métrico.*

*Uma outra métrica em  $C[a, b]$  é definida por  $\tilde{d}(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ .*

Antes do próximo exemplo, vale a pena constatar que é possível obter a **desigualdade de Schwarz para integrais definidas**.

**Teorema 2.2.** *Sejam  $f$  e  $g$  duas funções de quadrado integrável no intervalo  $[a, b]$ . Então vale que*

$$\left( \int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left( \int_a^b f(x)^2 dx \right) \left( \int_a^b g(x)^2 dx \right)$$

*Demonstração.* Seja  $p(t) = \int_a^b [tf(x) - g(x)]^2 dx \geq 0$ .

Pela linearidade da integral, segue que  $p$  é uma função polinomial de grau 2 em  $t$  e que não assume valores negativos, portanto seu discriminante é negativo. Isto é:  $(4 \int_a^b f(x)g(x)dx)^2 - 4(\int_a^b f(x)^2 dx)(\int_a^b g(x)^2 dx) \geq 0$ . A desigualdade segue de imediato. ■

**Exemplo 2.4 (Espaço de funções contínuas com métrica quadrática).** *Seja  $L_{cont}^2[a, b]$  o conjunto das funções contínuas de quadrado integrável no intervalo  $[a, b]$ . Então*

$$d(f, g) = \sqrt{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx}$$

*define uma métrica neste conjunto.*

*Para verificar a desigualdade triangular é necessário utilizar a desigualdade de Schwarz para integrais. Seja  $h \in L_{cont}^2[a, b]$ , então:*

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &= |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \implies \\ |f(x) - g(x)|^2 &\leq |f(x) - h(x)|^2 + |h(x) - g(x)|^2 + 2|f(x) - h(x)||h(x) - g(x)| \implies \\ d(f, g)^2 &\leq d(f, h)^2 + d(h, g)^2 + 2 \int_a^b |f(x) - h(x)||h(x) - g(x)| dx \implies \\ d(f, g)^2 &\leq d(f, h)^2 + d(h, g)^2 + 2 \sqrt{\int_a^b |f(x) - h(x)|^2 dx} \sqrt{\int_a^b |h(x) - g(x)|^2 dx} \implies \\ d(f, g)^2 &\leq d(f, h)^2 + 2d(f, h)d(h, g) + d(h, g)^2 \implies \\ d(f, g) &\leq d(f, h) + d(h, g). \end{aligned}$$

**Exemplo 2.5 (Espaço de seqüências limitadas).** *Seja  $l^\infty$  o conjunto das seqüências limitadas de números complexos, ou seja, cada  $x \in l^\infty$  é da forma  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ , tal que  $|\xi_i| \leq c_x \forall i \in \mathbb{N}$ , sendo  $c_x > 0$ . Uma possível métrica neste conjunto é dada por*

$$d(x, y) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i - \eta_i|,$$

*considerando que  $y = (\eta_1, \eta_2, \dots)$ .*

**Exercício 2.3.** *Mostre que  $l^\infty$  é um espaço métrico com a norma fornecida no exemplo 2.5.*

**Definição 2.2.** *Sejam  $p$  e  $q$  números reais maiores que 1. Diz-se que  $p$  e  $q$  são expoentes conjugados se*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

**Lema 2.1 (Desigualdade de Young para produtos).** *Sejam  $p$  e  $q$  expoentes conjugados. Se  $a, b \geq 0$ , então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

*Demonstração.* Suponha  $a, b > 0$  e considere a função  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = xy - \frac{x^p}{p}, \quad y > 0.$$

e cujas derivadas são

$$f'(x) = y - x^{(p-1)}, \quad f''(x) = -(p-1)x^{(p-2)}. \quad \text{Se } x_0 \text{ é ponto crítico de } f, \text{ então}$$

$$x_0 = y^{(1/(p-1))} = y^{(q-1)}.$$

Este é um ponto de máximo pois a  $f''$  sempre é negativa. Logo:

$$f(x) \leq f(x_0) \implies xy - \frac{x^p}{p} \leq \left(1 - \frac{1}{p}\right)y^q = \frac{y^q}{q}.$$

A desigualdade segue de imediato. Quando  $a$  ou  $b$  é nulo, a desigualdade é óbvia. ■

A próxima desigualdade é uma generalização da desigualdade de Schwarz.

**Teorema 2.3 (Desigualdade de Hölder).** *Sejam  $\{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\}$  reais ou complexos. Se  $p$  e  $q$  são expoentes conjugados, então:*

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Veja que a desigualdade de Schwarz decorre do caso em que  $p = q = 2$ .

*Demonstração.* Suponha  $\sum |a_k|^p$  e  $\sum |b_k|^q$  não nulos. Defina os seguintes números:

$$c_k = \frac{a_k}{(\sum |a_k|^p)^{\frac{1}{p}}}, \quad d_k = \frac{b_k}{(\sum |b_k|^q)^{\frac{1}{q}}}.$$

Então, segue pela desigualdade de Young que

$$\sum |c_k d_k| \leq \sum \left( \frac{|c_k|^p}{p} + \frac{|d_k|^q}{q} \right) = 1.$$

Assim, basta multiplicar ambos os lados por  $(\sum_{k=1}^n |a_k|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^n |b_k|^q)^{\frac{1}{q}}$  e obter a desigualdade desejada. ■

A desigualdade de Hölder serve para demonstrar uma outra desigualdade, que será apresentada a seguir.

**Teorema 2.4 (Desigualdade de Minkowski).** *Sejam  $\{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\}$  números reais ou complexos e  $p \geq 1$ . Então vale que*

$$\left( \sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

*Demonstração.* Para  $p = 1$ , verifica-se rapidamente a igualdade. Agora, seja  $p > 1$ .

$$\sum_k |a_k + b_k|^p = \sum_k |a_k + b_k| |a_k + b_k|^{p-1} \leq \sum_k |a_k| |a_k + b_k|^{p-1} + \sum_k |b_k| |a_k + b_k|^{p-1}.$$

Veja que:

$$\begin{aligned} \sum_k |a_k| |a_k + b_k|^{p-1} &\leq \left( \sum_k |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_k |a_k + b_k|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}}, \\ \sum_k |b_k| |a_k + b_k|^{p-1} &\leq \left( \sum_k |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_k |a_k + b_k|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Desse modo, tem-se que

$$\begin{aligned} \sum_k |a_k + b_k|^p &= \sum_k |a_k + b_k| |a_k + b_k|^{p-1} \leq \left[ \left( \sum_k |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_k |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left( \sum_k |a_k + b_k|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left( \sum_k |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_k |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_k |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Supondo  $\left( \sum_k |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{q}}$  não-nulo e dividindo ambos os lados por este termo, tem-se a desigualdade de Minkowski. ■

Veja que na demonstração acima, caso  $\left( \sum_k |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{q}}$  fosse nulo, a desigualdade seria de fácil verificação.

**Exercício 2.4.** *Mostre que as desigualdades de Hölder e Minkowski podem ser generalizadas para somas infinitas, dado que as séries converjam. Além disso, mostre que:*

- a) *Se  $p$  e  $q$  são expoentes conjugados, com  $|f|^p$  e  $|g|^q$  integráveis no intervalo limitado ou ilimitado  $(a, b)$ , então  $|fg|$  é integrável em  $(a, b)$  e vale que*

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

- b) *Se  $p \geq 1$ , com  $|f|^p$  e  $|g|^p$  integráveis no intervalo limitado ou ilimitado  $(a, b)$ , então  $|f + g|^p$  é integrável em  $(a, b)$  e vale que*

$$\left( \int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

**Exemplo 2.6 (Espaço de seqüências).** *Seja  $l^p$  o conjunto das seqüências de números complexos  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$  tais que a série*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty$$

*para  $p \geq 1$ . Uma possível métrica neste conjunto é dada por*

$$d(x, y) = \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \eta_k|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

*escolhendo  $y = (\eta_1, \eta_2, \dots)$ .*

**Exemplo 2.7.** *Seja  $L^p(a, b)$  o conjunto das funções reais ou complexas definidas em um intervalo limitado ou ilimitado  $(a, b)$  tais que para todo  $f \in L^p(a, b)$  tem-se  $|f|^p$  integrável neste intervalo. Uma métrica neste conjunto é dada por*

$$d(f, g) = \left( \int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

*identificando funções que diferem num conjunto de medida nula (ver apêndice de [3]).*

O caso  $p = 2$  no exemplo acima é de interesse para a mecânica quântica, pois as funções de onda,  $\Psi(x, t)$ , são elementos deste espaço. A importância dessas funções vem da característica de  $\|\Psi(x, t)\|^2$  ser interpretado como uma densidade de probabilidade, de modo que sua integral em um trecho da reta nos informa a probabilidade de uma partícula ser encontrada neste trecho.

**Exemplo 2.8 (Espaço de funções limitadas).** *Seja  $B(A)$  o conjunto das funções limitadas que estão definidas no conjunto  $A$ . Dotando tal conjunto com a métrica*

$$d(f, g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|$$

*obtem-se um espaço métrico.*

**Definição 2.3.** *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico e  $r \in \mathbb{R}_+^*$ . Dado  $x$  pertencente a  $X$ , define-se a bola aberta de raio  $r$  centrada em  $x$  como sendo o seguinte subconjunto de  $X$ :*

$$B(x; r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}.$$

*Analogamente, define-se a bola fechada de raio  $r$  centrada em  $x$  como sendo:*

$$B[x; r] = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}.$$

A coleção das bolas abertas forma uma base para uma topologia no espaço métrico. A topologia gerada por tal base é a **topologia métrica**. Quando a topologia de um espaço topológico  $(X, \tau)$  coincide com a topologia induzida por alguma métrica definida neste espaço, diz-se que o espaço é **metrizável**.

**Definição 2.4.** Um espaço métrico  $(X, d)$  é dito limitado se  $\sup_{x, y \in X} d(x, y) < \infty$ .

**Definição 2.5.** Duas métricas  $d_1$  e  $d_2$  definidas em um conjunto  $X$  são ditas equivalentes se existem números  $a, b > 0$  tais que:

$$ad_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq bd_1(x, y).$$

É de rápida verificação que as topologias induzidas por métricas equivalentes são necessariamente as mesmas.

**Definição 2.6.** Seja  $(x_n)$  uma sequência no espaço métrico  $X$ . Diz-se que  $(x_n)$  converge para o ponto  $x \in X$  se e somente se  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ .

**Teorema 2.5.** Todo espaço métrico é um espaço de Hausdorff.

*Demonstração.* Sejam  $x$  e  $y$  elementos de um espaço métrico  $X$ , tal que  $r = d(x, y) > 0$ . Basta provar então que  $B(x; \frac{r}{2})$  e  $B(y; \frac{r}{2})$  são disjuntas. Com efeito, seja  $z \in B(x; \frac{r}{2}) \cap B(y; \frac{r}{2})$ . Pela desigualdade triangular tem-se que  $r = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$ . Por absurdo, segue que não existe elemento na interseção. Conclui-se que, para dois elementos distintos de um espaço métrico, é possível escolher 2 abertos da topologia métrica tais que a condição de Hausdorff é satisfeita. ■

**Parte II**

**Análise em Variedades**



## Capítulo 3

# Variedades Diferenciáveis

Uma das razões para estudar este tópico é sua aplicação em algumas áreas da física: variedades diferenciáveis são empregadas nas formulações teóricas da mecânica clássica (formalismo Hamiltoniano) e da relatividade geral; grupos de Lie, que também são variedades diferenciáveis, são utilizados em física de partículas e mecânica quântica. Em vista disto, uma breve exposição a este assunto será feita nesta seção. Para uma apresentação onde há intuição física para algumas definições, recomendo que assista [6]. Para uma exposição mais aprofundada dos temas a seguir, recomendo que leia [5, 7, 8, 9].

**Definição 3.1.** *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^d$  um conjunto aberto,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $k$  um inteiro não-negativo. Diz-se que  $f$  é diferenciável de classe  $C^k$  em  $U$ , ou simplesmente  $f \in C^k(U)$ , se as derivadas parciais  $\partial^\alpha f / \partial r^\alpha$  existem e são contínuas em  $U$ . Em particular, se  $k = 0$ , diz-se que  $f$  é contínua.*

*No caso em que  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , diz-se que  $f \in C^k(U)$  quando as funções coordenadas,  $f_i := \pi_i \circ f$ , são de classe  $C^k$  em  $U$ .*

Na definição acima, utilizou-se a notação do multi-índice para expressar as derivadas parciais. Vale a pena recordar que o multi-índice  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$  é uma d-úpla de inteiros não negativos em que define-se:

$$[\alpha] := \sum_i^d \alpha_i$$

$$\alpha! := \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_d!$$

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial r^\alpha} := \frac{\partial^{[\alpha]}}{\partial \alpha_1^{\alpha_1} \partial \alpha_2^{\alpha_2} \dots \partial \alpha_d^{\alpha_d}}.$$

**Definição 3.2.** *Um espaço topológico  $\mathcal{M}$  é localmente euclidiano de dimensão  $d$ , se cada  $p \in \mathcal{M}$  possui uma vizinhança  $U$  tal que exista um homeomorfismo  $\varphi$  de  $U$  num subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^d$ . Neste caso, diz-se que  $\varphi$  é um mapa de coordenadas<sup>1</sup>,  $U$  é uma vizinhança coordenada e  $(U, \varphi)$  é uma carta ou um*

---

<sup>1</sup>Tradução direta de *coordinate map*.

sistema de coordenadas. Quando  $\varphi(p) = 0$ , diz-se que a carta é centrada em  $p$ .

**Definição 3.3.** Uma variedade topológica  $d$ -dimensional  $\mathcal{M}$  é um espaço topológico Hausdorff, segundo-contável e localmente euclidiano de dimensão  $d$ .

Pelo teorema 1.11 conclui-se que toda variedade topológica  $d$ -dimensional é primeiro-contável, separável e Lindelöf.

Se  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  são duas cartas em uma variedade topológica  $n$ -dimensional  $\mathcal{M}$ , então as imagens  $\varphi(U \cap V)$  e  $\psi(U \cap V)$  são conjuntos abertos de  $\mathbb{R}^d$ , pois  $\varphi$  e  $\psi$  são homeomorfismos. Sendo assim, diz-se que essas cartas são  $C^\infty$ -compatíveis quando os mapas

$$\varphi \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V), \quad \psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

são  $C^\infty(U \cap V)$ . Os mapas  $\varphi \circ \psi^{-1}$  e  $\psi \circ \varphi^{-1}$  são chamados de mapas de transição.

**Definição 3.4.** Um atlas  $C^\infty$  em uma variedade topológica  $d$ -dimensional  $\mathcal{M}$  é uma coleção  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  de cartas duas a duas  $(C^\infty)$ -compatíveis que cobrem  $\mathcal{M}$ .

**Definição 3.5.** Uma estrutura diferenciável de classe  $C^\infty$   $\mathcal{A}$  é um atlas  $C^\infty$  maximal, isto é, se  $(U, \varphi)$  for uma carta tal que  $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$  e  $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$  são  $C^\infty$ -compatíveis para todo  $\alpha$  no conjunto de índices, então  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ .

**Definição 3.6 (Variedade diferenciável).** Uma variedade diferenciável  $d$ -dimensional de classe  $C^\infty$  é uma variedade topológica  $\mathcal{M}$  junto de um atlas maximal  $\mathcal{A}$ . É comum chamar este atlas de uma “estrutura diferenciável em  $\mathcal{M}$ ”.

Nesta definição omitiu-se que o atlas é  $C^\infty$ . A menos que seja dito o contrário, considere que todo atlas é  $C^\infty$  de agora em diante.

**Lema 3.1.** Seja  $\mathcal{A}_0$  um atlas para uma variedade diferenciável  $\mathcal{M}$ . Então existe um único atlas maximal que contém  $\mathcal{A}_0$ .

*Demonstração.*

A demonstração se resume a mostrar que o conjunto  $\mathcal{A} := \{(V, \psi): \psi \circ \varphi_\alpha^{-1} \in C^\infty \text{ e } \varphi_\alpha \circ \psi^{-1} \in C^\infty \forall (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}_0\}$  é este atlas maximal. ■

Por comodidade, será empregado o termo “variedade” para se referir a uma variedade diferenciável  $d$ -dimensional de classe  $C^\infty$ . A partir deste ponto,  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{N}$  irão representar variedades, a menos que mencione-se o contrário. Por último, quando necessário,  $\mathcal{M}^d$  pode ser utilizado para simbolizar uma variedade  $d$ -dimensional.

Até o momento, as definições podem parecer bastante abstratas. Talvez, uma forma de tornar as ideias mais palpáveis seja pensar que a variedade  $\mathcal{M}$  é uma região do planeta Terra. Não faz muito sentido (por ora) falar sobre operações como diferenciação e integração nesta região, pois tais operações são definidas

em subconjuntos de  $\mathbb{R}^d$ . Por exemplo, se um objeto desloca-se no mundo real, para calcular sua velocidade em algum ponto  $p$  de sua trajetória, o que implicitamente fazemos é mapear por meio de uma aplicação  $\varphi$  uma região  $U \subset \mathcal{M}$ , que contém a trajetória do objeto, em algum subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^d$  e a partir disso calcular a velocidade do objeto no ponto  $\varphi(p)$  utilizando nossos conhecimentos usuais de cálculo.

Ainda na linha de raciocínio acima, podemos imaginar que as cartas são mapeamentos de regiões da Terra. Assim, dizer que duas cartas são compatíveis seria algo parecido como saber transicionar entre dois mapeamentos diferentes de uma mesma região. Um atlas seria então o conjunto destes tipos de mapas, tais que eles consigam cobrir todas as áreas da Terra.

**Exemplo 3.1.** *Seja  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^d$  com a topologia usual. O mapa  $\text{id}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  é claramente um homeomorfismo. Logo, se  $\mathcal{A}_0 = \{(\text{id}, \mathbb{R}^d)\}$ , sabemos que ele está contido em um atlas maximal único (lema 3.1) e portanto  $\mathbb{R}^d$  torna-se uma variedade com este atlas maximal.*

**Exemplo 3.2.** *Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita  $d$  sobre  $\mathbb{R}$ . Para qualquer base  $\{e_i\}$  de  $V$ , considere a base dual  $\{\pi_i\}$ . A existência de  $\{e_i\}$  garante que para todo  $v \in V$  existem  $d$  números reais  $\alpha_i$  tais que  $v = \sum \alpha_i e_i$ . Se  $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^d$  é o mapa definido por  $\varphi(v) = (\pi_1 \circ v, \dots, \pi_d \circ v)$ , então ele é um isomorfismo e portanto será um homeomorfismo na topologia estabelecida em  $V$ , pois a linearidade de  $\varphi$  garante que ele é contínuo. Ao garantir que  $V$  é um espaço topológico<sup>2</sup> que obedece às condições de Hausdorff e segundo-contabilidade, segue que o atlas maximal que contém o atlas  $\{(V, \varphi)\}$  define torna  $V$  uma variedade diferenciável.*

**Exemplo 3.3.** *Qualquer aberto  $\mathcal{O}$  de uma variedade diferenciável é também uma variedade diferenciável quando consideramos  $\mathcal{O}$  como subespaço topológico de  $\mathcal{M}$ . A estrutura diferenciável neste caso é o conjunto*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{O}} = \{(\mathcal{O} \cap U_{\alpha}, \varphi_{\alpha}|_{\mathcal{O} \cap U_{\alpha}}): (U_{\alpha}, \varphi_{\alpha}) \in \mathcal{A}\}.$$

**Exemplo 3.4.** *O grupo  $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}): \det(A) \neq 0\}$ . Visto que  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  é aberto e que a função determinante é contínua, então  $GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  é um aberto de  $\mathbb{R}^{n^2}$ . Pelo exemplo anterior, conclui-se que  $GL(n, \mathbb{R})$  é uma variedade diferenciável.*

**Exemplo 3.5.** *A esfera  $S^1$  definida por  $x^2 + y^2 = 1$  é uma variedade. Assumindo ela como subespaço topológico de  $\mathbb{R}^2$ , podemos cobri-la com 4 abertos  $U_i, i = 1, 2, 3, 4$  que representam os semicírculos superior, inferior, direito e esquerdo, respectivamente. Para  $i = 1, 2$ , basta usar as cartas  $(U_i, \pi_i)$ , onde  $\pi_i(x, y) = x$ . Já para  $i = 3, 4$ , basta usar as cartas  $(U_i, \pi_2)$ . Podemos verificar a compatibilidade entre as cartas  $(U_1, \pi_1)$  e  $(U_3, \pi_2)$ :*

<sup>2</sup>Naturalmente, a topologia que me vem à cabeça em um espaço vetorial seria aquela induzida pela presença de uma norma. Isso tornaria ele um espaço métrico e portanto a condição de Hausdorff já é garantida. Resta saber quais condições garantem que ele seja um espaço separável, pois em espaços métricos a separabilidade implica nele ser segundo-contável.

$$\pi_2 \circ \pi_1^{-1}(x) = \pi_2(x, \sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\pi_1 \circ \pi_2^{-1}(y) = \pi_2(\sqrt{1-y^2}, y) = \sqrt{1-y^2}.$$

Como  $x, y \in (0, 1)$ , segue que os mapas de transição são  $C^\infty$  nas interseções não-vazias. A compatibilidade das demais cartas fica como exercício.

A partir do atlas maximal que contém as cartas  $(U_1, \pi_1)$ ,  $(U_2, \pi_1)$ ,  $(U_3, \pi_2)$ ,  $(U_4, \pi_2)$ , conclui-se que  $S^1$  é uma variedade.

**Exemplo 3.6 (Variedade produto).** Se  $(\mathcal{M}^{d_1}, \mathcal{A}_1)$  e  $(\mathcal{N}^{d_2}, \mathcal{A}_2)$  são variedades, então  $\mathcal{M}^{d_1} \times \mathcal{N}^{d_2}$  é uma variedade quando a estrutura diferenciável de dimensão  $d_1 + d_2$  contém o atlas

$$\mathcal{A} = \{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta) : (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}_1, (V_\beta, \psi_\beta) \in \mathcal{A}_2\}.$$

**Exercício 3.1.** Mostre que o conjunto  $\mathcal{A}$  do exemplo exemplo 3.6 é um atlas.

**Definição 3.7.** Diz-se que uma função  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  é  $C^\infty$  ou suave em  $U \subset \mathcal{M}$  se para toda carta  $(V, \psi)$  em  $\mathcal{M}$ , a função  $f \circ \psi^{-1}$  é  $C^\infty$ .

**Proposição 3.1.** Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade e  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. São equivalentes

- i)  $f$  é suave em  $\mathcal{M}$ .
- ii) Para todo ponto  $p \in \mathcal{M}$  existe uma carta  $(U, \varphi)$  tal que  $f \circ \varphi^{-1}$  é suave.
- iii) A variedade possui um atlas tal que para cada carta  $(U, \psi)$  neste atlas a composição  $f \circ \psi^{-1}$  é suave.

*Demonstração.*

iii)  $\implies$  ii): seja  $p \in \mathcal{M}$  arbitrário. Como a variedade é localmente euclidiana por definição, segue que existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  que é homeomorfa a algum aberto do  $\mathbb{R}^d$ . Sendo o atlas da variedade maximal contendo o atlas em iii), segue que  $f \circ \psi^{-1}$  é  $C^\infty$  em  $\psi(p)$ . Sendo  $p$  arbitrário, o resultado estende-se para toda a variedade.

ii)  $\implies$  i): seja  $(V, \xi)$  uma carta arbitrária e considere  $p \in V$  qualquer. Ainda, seja  $(U, \varphi)$  a carta tal que  $p \in U$  e  $f \circ \varphi^{-1}$  seja suave. Veja que:

$$f \circ \xi^{-1} = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \xi^{-1}).$$

Como os mapas de transição são suaves e como  $f \circ \varphi^{-1}$  é suave por hipótese, segue que  $f \circ \xi^{-1}$  é suave em  $\xi(p)$ . Como  $p$  é arbitrário o resultado vale para todo  $p$ . Sendo  $(V, \xi)$  qualquer, o resultado entende-se para toda carta na variedade.

i)  $\implies$  iii): basta escolher como atlas algum subconjunto da estrutura diferenciável tal que as cartas cubram  $\mathcal{M}$ . ■

No que segue, considere  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{N}$  variedades de dimensões  $m$  e  $n$  respectivamente.

**Definição 3.8.** *Seja  $F: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$  um mapa contínuo. Diz-se que  $F$  é  $C^\infty$  em um ponto  $p \in \mathcal{N}$  quando existem cartas  $(V, \psi)$  em torno de  $F(p)$  e  $(U, \varphi)$  em torno de  $p$  tais que o mapa  $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}: \varphi(F^{-1}(V) \cap U) \rightarrow \mathbb{R}^m$  seja  $C^\infty$  em  $\varphi(p)$ . Quando  $F$  é suave em todos os pontos, simplesmente diz-se que  $F$  é suave em  $\mathcal{N}$ .*

Um diagrama da definição 3.8 encontra-se abaixo<sup>3</sup>.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{N} \supset U & \xrightarrow{F} & V \subset \mathcal{M} \\
 \uparrow \varphi^{-1} & & \downarrow \psi \\
 \mathbb{R}^n \supset \varphi(U) & \xrightarrow{\psi \circ F \circ \varphi^{-1}} & \psi(V) \subset \mathbb{R}^m
 \end{array}$$

Figura 3.1: Diagrama comutativo das aplicações na definição 3.8.

**Exercício 3.2.** *Seja  $F: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$  suave no ponto  $p \in \mathcal{N}$ . Se  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  são respectivamente cartas quaisquer em torno de  $p$  e  $F(p)$ , então  $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$  é suave em  $\varphi(p)$ .*

Este exercício mostra que a definição 3.8 independe das cartas.

**Proposição 3.2.** *Sejam  $\mathcal{N}$  e  $\mathcal{M}$  variedades e seja  $F: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$  contínuo. São equivalentes:*

- i)  $F$  é suave em  $\mathcal{N}$ .
- ii) *Existem atlas  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{N}$  e  $\mathcal{B}$  em  $\mathcal{M}$  tais que para quaisquer cartas  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$  e  $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ , o mapa*

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}: \varphi(F^{-1}(V) \cap U) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

*é suave.*

- iii) *Para todas cartas  $(U, \varphi)$  em  $\mathcal{N}$  e  $(V, \psi)$  em  $\mathcal{M}$ , o mapa*

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}: \varphi(F^{-1}(V) \cap U) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

*é suave.*

*Demonstração.*

A demonstração é similar à demonstração da proposição 3.1. Fica como exercício. ■

**Proposição 3.3.** *Sejam  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{P}$  variedades e sejam  $F: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$  e  $G: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{P}$  mapas  $C^\infty$ . Então, a composição  $G \circ F: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}$  é  $C^\infty$ .*

<sup>3</sup>O diagrama estaria totalmente correto se  $\varphi(F^{-1}(V) \cap U)$ ,  $F^{-1}(V) \cap U$ ,  $V \cap F(U)$  e  $\psi(V \cap F(U))$  substituíssem  $\varphi(U)$ ,  $U$ ,  $V$  e  $\psi(V)$ , respectivamente.

*Demonstração.*

Sejam  $(U, \varphi)$ ,  $(V, \psi)$  e  $(W, \xi)$  cartas em  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{P}$ , respectivamente. Veja que:

$$\xi \circ (G \circ F) \circ \varphi^{-1} = (\xi \circ G \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}).$$

Como  $F$  e  $G$  são suaves, então as composições  $(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})$  e  $(\xi \circ G \circ \psi^{-1})$  são suaves, portanto a composição no lado direito da equação acima também é suave. Como as cartas escolhidas foram quaisquer, então o resultado estende-se para todas as cartas em cada variedade. Pela proposição 3.2 conclui-se que  $G \circ F$  é  $C^\infty$ . ■

**Exercício 3.3.** *Sejam  $\mathcal{N}$  uma variedade e  $F: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}^d$  uma função vetorial. São equivalentes*

- i)  $F: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}^d$  é suave em  $\mathcal{N}$ .
- ii) A variedade  $\mathcal{N}$  possui um atlas tal que para cada carta  $(U, \varphi)$  neste atlas a composição  $F \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^d$  é suave.
- iii) Para toda carta  $(U, \varphi)$  em  $\mathcal{N}$ , a composição  $F \circ \varphi^{-1}$  é suave.

**Exercício 3.4.** *Sejam  $\mathcal{N}$  uma variedade. Uma função vetorial  $F: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}^d$  é  $C^\infty$  em  $\mathcal{N}$  se e somente se cada uma de suas componentes for  $C^\infty$  em  $\mathcal{N}$ .*

**Definição 3.9 (Derivadas parciais).** *Seja  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave em  $\mathcal{M}$ . Seja  $(U, \varphi)$  uma carta em torno de um ponto  $p \in \mathcal{M}$ . Definindo as funções coordenadas  $x^i: U \rightarrow \mathbb{R}$  como  $x^i := r^i \circ \varphi$ , onde  $r^i$  é a  $i$ -ésima função coordenada em  $\mathbb{R}^n$ , define-se a derivada parcial  $\partial f / \partial x^i$  de  $f$  com respeito a  $x^i$  no ponto  $p$  como sendo*

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p f := \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}(\varphi(p)) := \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1}).$$

Segue da definição 3.9 que  $\partial f / \partial x^i$  é suave em seu domínio.

**Proposição 3.4.** *Seja  $(U, x^1, \dots, x^d)$  uma carta em uma variedade. Então  $\partial x^i / \partial x^j = \delta_j^i$ , onde  $\delta_j^i$  é o delta de Kronecker.*

*Demonstração.*

Seja  $p$  um ponto arbitrário da variedade e  $(U, \mathbf{x})$  uma carta qualquer em torno de  $p$ , onde  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^d)$ . Então:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j}(p) := \frac{\partial (x^i \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial r^j}(\mathbf{x}(p)) = \frac{\partial (r^i \circ (\mathbf{x} \circ \mathbf{x}^{-1}))}{\partial r^j}(\mathbf{x}(p)) = \frac{\partial r^i}{\partial r^j}(\mathbf{x}(p)) = \delta_j^i.$$

Como a carta escolhida é qualquer em torno de  $p$ , o resultado estende-se para todas as cartas em torno de  $p$ . Sendo  $p$  arbitrário, o resultado estende-se para todo ponto da variedade. ■

**Definição 3.10 (Matriz Jacobiana).** *Seja  $F: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$  um mapa suave entre variedades. Sejam  $(U, \varphi) = (U, x^1, \dots, x^n)$  e  $(V, \psi) = (V, y^1, \dots, y^m)$  cartas respectivamente em  $\mathcal{N}$  e  $\mathcal{M}$  tais que  $F(U) \subset V$ . Definindo a  $i$ -ésima componente de  $F$  (na carta  $(V, \psi)$ ) como sendo*

$$F^i := y^i \circ F: U \rightarrow \mathbb{R},$$

*então a matriz  $[\partial F^i / \partial x^j]$  é chamada de matriz jacobiana de  $F$  relativa às cartas  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$ .*

*No caso em que  $m = n$ , o determinante desta matriz é chamado denominado como o jacobiano de  $F$  relativo às cartas  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$ .*

A seguir, encontram-se alguns resultados que serão úteis para mostrar que uma variedade diferenciável sempre é um espaço topológico paracompacto. Essa característica é de grande relevância para mostrar a existência de partições da unidade subordinadas a coberturas abertas da variedade. Isto em especial será importante para a parte de integração de funções em variedades diferenciáveis. Os resultados a seguir podem ser omitidos em uma primeira leitura desta seção, pois eles só vão ser utilizados muito depois. Os principais teoremas desta parte decorrem de resultados da parte sobre paracompacidade na seção 1.8, então a leitura de tal seção é crucial.

**Definição 3.11.** *Uma **bola coordenada**  $B \subset \mathcal{M}$  é uma vizinhança coordenada de um ponto  $p$  que é homeomorfa a uma bola em  $\mathbb{R}^d$ .*

*Se  $B$  é uma bola coordenada tal que existam uma vizinhança  $B'$  de  $\bar{B}$  e um homeomorfismo  $\varphi: B' \rightarrow B'_r(x) \subset \mathbb{R}^d$  que leva  $B$  em  $B_r(x)$  e  $\bar{B}$  em  $\bar{B}_r(x)$  para alguns  $0 < r < r'$  e  $x \in \mathbb{R}^d$ , então diz-se que  $B$  é uma **bola coordenada regular**.*

**Exercício 3.5.** *Mostre que todo ponto em uma variedade  $\mathcal{M}$  está contido em uma bola coordenada.*

**Lema 3.2.** *Sejam  $B' \subset \mathcal{M}$  uma bola coordenada e  $\varphi: B' \rightarrow B'_r(x) \subset \mathbb{R}^d$  um homeomorfismo, então  $\varphi^{-1}(B_r(x))$  é uma bola coordenada regular para  $0 < r < r'$ .*

*Demonstração.*

Seja  $0 < r < r'$ . A restrição de  $\varphi$  em  $B = \varphi^{-1}(B_r(x))$  é um homeomorfismo entre  $B$  e  $B_r(x)$ . Resta mostrar que  $\varphi(\bar{B}) = \bar{B}_r(x)$ .

Como  $\bar{B}_r(x)$  é fechado e limitado, então é compacto. Restringindo  $\varphi^{-1}$  à  $\bar{B}_r(x)$ , pelo lema 1.7 (aplicação fechada), segue que  $\varphi^{-1}(\bar{B}_r(x)) \subset \mathcal{M}$  é fechado. Como  $\varphi^{-1}$  é fechada (em sua restrição) e contínua, então  $\varphi^{-1}(\bar{B}_r(x)) = \overline{\varphi^{-1}(B_r(x))} = \bar{B}$ . Logo,  $\varphi(\bar{B}) = \bar{B}_r(x)$ , como desejado. ■

**Proposição 3.5.** *Toda variedade possui uma base enumerável de bolas coordenadas regulares.*

*Demonstração.*

Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade. Por ela ser localmente euclidiana, cada ponto  $p \in \mathcal{M}$  possui uma vizinhança  $U_p$  homeomorfa a algum subconjunto de  $\mathbb{R}^d$ . A

coleção destas vizinhanças é uma cobertura aberta e pelo teorema 1.11 segue que  $\{U_i: i \in \mathbb{N}\}$  é uma subcobertura enumerável de  $\mathcal{M}$ . Seja  $\varphi_i: U_i \rightarrow \widehat{U}_i \subset \mathbb{R}^d$  um homeomorfismo para cada  $i \in \mathbb{N}$ . Sendo  $\widehat{U}_i$  aberto, então para cada  $x$  neste conjunto existe um número real  $r(x)$  positivo tal que  $B_{r(x)}(x) \subseteq \widehat{U}_i$ . Como  $\mathbb{Q}^d$  é denso em  $\mathbb{R}^d$ , podemos escolher  $r \in \mathbb{Q}$  tal que  $0 < r < r(x)$  e  $B_r(x) \subset B_{r(x)}(x)$  para cada  $x \in \widehat{U}_i \cap \mathbb{Q}^d$ . Assim, aplicando lema 3.2 à restrição de  $\varphi_i$  ao conjunto  $\varphi_i^{-1}(B_{r(x)}(x))$ , obtém-se que  $\varphi_i^{-1}(B_r(x))$  é uma bola coordenada regular. O conjunto  $\mathcal{B}$  dos  $\varphi_i^{-1}(B_r(x)) \subset \mathcal{M}$  é enumerável, pois o conjunto dos homeomorfismos e das bolas é enumerável. Afirimo que  $\mathcal{B}$  é uma base.

Com efeito, sendo  $\{U_i: i \in \mathbb{N}\}$  uma subcobertura de  $\mathcal{M}$ , segue que ela também é uma subcobertura aberta de qualquer aberto  $A$  da variedade. Veja que  $\{A \cap U_i: i \in \mathbb{N}\} = A$  e, além disso,  $\varphi_i|_{A \cap U_i}$  é um homeomorfismo para cada  $i \in \mathbb{N}$ . Pelas ideias do parágrafo anterior, segue que cada ponto de  $A$  está contido em alguma bola coordenada regular  $\varphi_i^{-1}(B_r(x))$ , de modo que  $A$  é subconjunto da união dessas bolas coordenadas. Além disso, todo elemento desta união está em  $A$ , pois sua imagem por  $\varphi_i|_{A \cap U_i}$  é a bola  $B_r(x) \subset f(A) \cap \widehat{U}_i$ . Desta forma, conclui-se que  $A$  é união de elementos de  $\mathcal{B}$ . Claramente  $\mathcal{B}$  é uma coleção de abertos de  $\mathcal{M}$ . Conclusão:  $\mathcal{B}$  é base para a topologia em  $\mathcal{M}$ . ■

**Lema 3.3.** *Toda variedade é localmente compacta.*

*Demonstração.*

Pela proposição 3.5, tem-se que uma variedade  $\mathcal{M}$  possui uma base de bolas coordenadas regulares. Como o fecho de cada bola coordenada regular é homeomorfo a algum conjunto compacto  $\overline{B_r(x)} \subset \mathbb{R}^d$ , então, a bola coordenada regular é pré-compacta. Logo,  $\mathcal{M}$  possui uma base de abertos pré-compactos. Como toda variedade é um espaço de Hausdorff, então a existência desta base equivale a  $\mathcal{M}$  ser localmente compacta (proposição 1.6). ■

**Teorema 3.1.** *Toda variedade diferenciável é um espaço topológico paracompacto.*

*Demonstração.*

Pelo lema 3.3, tem-se que toda variedade diferenciável é um espaço topológico localmente compacto. Pelo teorema 1.15, conclui-se que toda variedade diferenciável é um espaço topológico paracompacto. ■

**Teorema 3.2.** *Toda variedade diferenciável admite partição da unidade.*

*Demonstração.*

Aplicação direta do teorema 1.16. ■

Uma aplicação do teorema 1.16 é a possibilidade de estender funções suaves definidas em conjuntos fechados.



**Lema 3.4 (Lema da extensão para funções suaves).** *Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade diferenciável e seja  $A \subseteq \mathcal{M}$  um conjunto fechado. Se  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^d$  é uma função suave, então para toda vizinhança  $U$  de  $A$  existe uma função suave  $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^d$  tal que  $\tilde{f}|_A \equiv f$  e  $\text{supp } \tilde{f} \subseteq U$ .*

*Demonstração.*

A demonstração deste lema pode ser encontrada em [8]. ■

### Variedades com bordo

**Definição 3.12.** *O semi-espço superior fechado  $n$ -dimensional é o subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  definido por*

$$\mathbb{H}^n := \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n: x^n \geq 0\}.$$

No caso em que  $n > 0$ , temos que

$$\begin{aligned} \text{Int } \mathbb{H}^n &= \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n: x^n > 0\} \\ \partial \mathbb{H}^n &= \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n: x^n = 0\}. \end{aligned}$$

Se  $n = 0$ , então  $\mathbb{H}^0 = \mathbb{R}^0 = \text{Int } \mathbb{H}^n = \{0\}$  e  $\partial \mathbb{H}^n = \emptyset$ .

**Definição 3.13.** *Uma variedade topológica  $n$ -dimensional com bordo é um espaço topológico de Hausdorff segundo-contável  $\mathcal{M}$  no qual cada ponto  $p \in \mathcal{M}$  possui uma vizinhança  $U$  homeomorfa a um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  ou de  $\mathbb{H}^n$ .*

**Definição 3.14.** *Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade topológica  $n$ -dimensional com bordo. Uma carta  $(U, \varphi)$  em  $\mathcal{M}$  é dita interior se  $\varphi(U)$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  ou um subconjunto aberto de  $\mathbb{H}^n$  que não intersecta  $\partial \mathbb{H}^n$ . No caso em que  $\varphi(U) \cap \partial \mathbb{H}^n \neq \emptyset$ , a carta  $(U, \varphi)$  é dita de bordo.*

**Definição 3.15.** *Uma carta de bordo  $(U, \varphi)$  tal que  $\varphi(U)$  é da forma  $B_r(x) \cap \mathbb{H}^n$  para algum  $x \in \partial \mathbb{H}^n$  e algum  $r > 0$  é dita uma semi-bola coordenada.*

**Definição 3.16.** *Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade topológica  $n$ -dimensional com bordo. Um ponto  $p \in \mathcal{M}$  é dito interior se pertence ao domínio de uma carta interior. O conjunto de tais pontos é denominado **interior de  $\mathcal{M}$**  e denota-se ele por  $\text{Int } \mathcal{M}$ .*

**Definição 3.17.** *Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade topológica  $n$ -dimensional com bordo. Um ponto  $p \in \mathcal{M}$  é dito de bordo se pertence ao domínio de uma carta de bordo  $(U, \varphi)$  tal que  $\varphi(p) \in \partial \mathbb{H}^n$ . O conjunto de tais pontos é denominado **bordo de  $\mathcal{M}$**  e denota-se ele por  $\partial \mathcal{M}$ .*

**Teorema 3.3 (Invariância topológica do bordo).** *Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade topológica  $n$ -dimensional com bordo.  $\mathcal{M} = \text{Int } \mathcal{M} \cup \partial \mathcal{M}$  e  $\text{Int } \mathcal{M} \cap \partial \mathcal{M} = \emptyset$ .*

A demonstração do teorema acima exige conhecimentos de homologia e portanto foge do escopo desta seção. O que importa de fato é que todo ponto de uma variedade topológica com bordo pertence ou ao interior de  $\mathcal{M}$  ou ao bordo de  $\mathcal{M}$ .

**Exemplo 3.7.** *Todo intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  é uma variedade topológica 1-dimensional com bordo. Se  $I = (a, b)$ , onde  $a < b$ , então o bordo de  $I$  é  $\partial I = \emptyset$ . Por outro lado, a fronteira (no sentido topológico) de  $I$  é o conjunto  $\{a, b\}$ . Se  $I$  for da forma  $[a, b]$ ,  $[a, b)$  ou  $(a, b]$ , então seu bordo é formado pelos extremos que pertencem a  $I$ .*

Pelo exemplo acima, fica claro que nem toda variedade topológica com bordo é uma variedade topológica:  $[a, b)$  é uma variedade topológica com bordo cujo bordo é  $\{a\}$ , mas  $a$  não possui nenhuma vizinhança localmente euclidiana. Mais claro ainda é que a fronteira topológica nem sempre equivale ao bordo.

**Proposição 3.6.** *Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade topológica  $n$ -dimensional com bordo.*

- a)  *$\text{Int } \mathcal{M}$  é um subconjunto aberto de  $\mathcal{M}$  e é uma variedade topológica  $n$ -dimensional.*
- b)  *$\partial \mathcal{M}$  é um subconjunto fechado de  $\mathcal{M}$  e é uma variedade topológica  $(n-1)$ -dimensional.*
- c)  *$\mathcal{M}$  é uma variedade topológica  $n$ -dimensional se e somente se  $\partial \mathcal{M} = \emptyset$ .*
- d) *Se  $n = 0$ , então  $\partial \mathcal{M} = \emptyset$  e  $\mathcal{M}$  é uma variedade topológica 0-dimensional.*

*Demonstração.*

- a) Seja  $p \in \text{Int } \mathcal{M}$ . Então, existe uma vizinhança  $U_p$  de  $p$  homeomorfa a  $\varphi_p(U)$ , onde  $\varphi_p(U)$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{H}^n$  e  $\partial \mathbb{H}^n \cap \varphi_p(U) = \emptyset$ . Se  $\varphi_p(U)$  for aberto de  $\mathbb{R}^n$ , não há nada a ser feito. Se  $\varphi_p(U)$  é aberto de  $\mathbb{H}^n$ , então existe um aberto  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\varphi_p(U) = V \cap \mathbb{H}^n$ . Claramente,  $\mathbb{H}^n$  é uma variedade topológica  $n$ -dimensional com bordo e portanto  $\mathbb{H}^n = \text{Int } \mathbb{H}^n \cup \partial \mathbb{H}^n$ . Visto que  $\varphi_p(U) \cap \partial \mathbb{H}^n = \emptyset$ , segue que  $\varphi_p(U) = V \cap \text{Int } \mathbb{H}^n$  e portanto é também um aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Daí, segue que  $p$  possui uma vizinhança localmente euclidiana. Sendo  $p$  qualquer, conclui-se facilmente que  $\text{Int } \mathcal{M}$  é uma variedade topológica  $n$ -dimensional.

Para verificar que  $\text{Int } \mathcal{M}$  é aberto, veja que dados  $p \in \text{Int } \mathcal{M}$  e uma carta (interior)  $(U, \varphi_p)$ , todo  $x \in U_p$  também é ponto interior de  $\mathcal{M}$ . Desta forma, é fácil concluir que

$$\text{Int } \mathcal{M} = \bigcup_{p \in \text{Int } \mathcal{M}} U_p$$

e portanto  $\text{Int } \mathcal{M}$  é aberto.

- b) Como  $\partial \mathcal{M}$  é o complemento de  $\text{Int } \mathcal{M}$ , pelo item anterior é evidente que  $\partial \mathcal{M}$  é fechado. Para verificar que trata-se de uma variedade topológica  $(n-1)$ -dimensional, veja que  $\partial \mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$  e portanto é homeomorfo a

$\mathbb{R}^{n-1}$ . Disto, conclui-se facilmente que todo  $p \in \partial\mathcal{M}$  possui uma vizinhança homeomorfa a  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

- c) Se  $\partial\mathcal{M} = \emptyset$ , então  $\mathcal{M} = \text{Int } \mathcal{M}$  e portanto todo ponto  $p \in \mathcal{M}$  possui uma vizinhança localmente euclidiana, donde conclui-se que  $\mathcal{M}$  é uma variedade topológica.

Para mostrar a ida, pela contrapositiva suponha que  $\partial\mathcal{M} \neq \emptyset$ . Desta forma, todo ponto de  $\partial\mathcal{M}$  possui uma vizinhança homeomorfa a  $\mathbb{R}^{n-1}$  enquanto que todo ponto de  $\text{Int } \mathcal{M}$  possui uma vizinhança homeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ . Daí, segue que  $\mathcal{M}$  não é uma variedade topológica  $n$ -dimensional.

- d) Por absurdo, suponha que  $n = 0$  e  $\partial\mathcal{M} \neq \emptyset$ , então dado  $p \in \partial\mathcal{M}$ , se  $(U, \varphi)$  é uma carta de bordo, segue que  $\varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n \neq \emptyset$ . Por outro lado, como  $n = 0$ , então  $\partial\mathbb{H}^n = \emptyset$  e portanto  $\varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n = \emptyset$ . Como  $\varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n \neq \emptyset$  e  $\varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n = \emptyset$  é uma contradição, então  $\partial\mathcal{M} = \emptyset$ .

Sendo o bordo de  $\mathcal{M}$  vazio, segue do item **a** e do teorema de invariância do bordo que  $\mathcal{M}$  é uma variedade topológica 0-dimensional.

■

Além dos resultados da proposição acima, vale que toda variedade topológica com bordo possui uma base contável de bolas e semi-bolas coordenadas pré-compactas, é localmente compacta e paracompacta.

Tornemos agora à construção de estruturas diferenciáveis em variedades topológicas com bordo. Primeiramente, dado um subconjunto arbitrário  $A \subset \mathbb{R}^n$ , define-se que uma função  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^n$  é suave neste conjunto se para cada  $x \in A$  existe uma vizinhança  $\tilde{U}$  e uma função suave  $\tilde{F}: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\tilde{F}|_{A \cap \tilde{U}} = F$ . Em vista disso, podemos definir que uma estrutura diferenciável numa variedade topológica  $n$ -dimensional com bordo é um atlas maximal cujos mapas de transição são suaves no sentido apresentado nas linhas anteriores. Daí, uma **variedade diferenciável  $n$ -dimensional com bordo** é justamente uma variedade topológica com bordo junto deste atlas maximal.

A partir da noção de variedade diferenciável com bordo, podemos demonstrar um similar, porém mais fraco, ao teorema da invariância topológica do bordo.

**Proposição 3.7 (Invariância suave do bordo).** *Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade  $n$ -dimensional com bordo. Fixado  $p \in \mathcal{M}$  arbitrário, se existe uma carta  $(U, \varphi)$  tal que  $\varphi(U) \subset \mathbb{H}^n$  e  $\varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^n$ , então o mesmo vale para toda carta cujo domínio contém  $p$ .*

*Demonstração.*

■

## Capítulo 4

# Espaços e Fibrados Tangentes

Antes de ser apresentada a definição de espaços tangentes em variedades mais abstratas, inicialmente vale a pena apresentar espaços tangentes geométricos em  $\mathbb{R}^d$ , cujos elementos podem ser geometricamente interpretados como setas. Como o que interessa em variedades são funções suaves, a característica marcante dos espaços tangentes geométricos que permitirá a transição para espaços tangentes mais gerais é como seus elementos atuam nas funções suaves. Veremos que esses vetores ao agirem sobre tais funções podem ser interpretados não como setas, mas sim como derivadas direcionais e isto é a característica marcante mencionada anteriormente.

### 4.1 Espaços Tangentes

**Definição 4.1.** *Seja  $a \in \mathbb{R}^d$  fixado. O espaço tangente geométrico a  $\mathbb{R}^d$  no ponto  $a$ , denotado por  $\mathbb{R}_a^d$ , é o conjunto  $a \times \mathbb{R}^d = \{(a, v): v \in \mathbb{R}^d\}$ . Seus elementos são chamados de **vetores tangentes geométricos** e por simplicidade eles são denotados por  $v_a$  ou  $v|_a$ , a depender do que for mais conveniente. Geometricamente, cada  $v_a$  pode ser entendido como uma seta com origem em  $a$ .*

Claramente  $\mathbb{R}_a^d$  torna-se um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  quando munido como as operações usuais de soma e multiplicação que atuam na segunda componente de seus elementos. Isto é:

$$v_a + w_a := (v + w)_a, \quad c(v_a) := (cv)_a.$$

Além do mais, a aplicação  $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_a^d$  definida por  $\varphi(v) := v_a$  é claramente um isomorfismo entre estes espaços vetoriais. Segue que  $\dim \mathbb{R}_a^d = \dim \mathbb{R}^d$ .

Dado um vetor  $v_a \in \mathbb{R}_a^d$ , podemos associar o mapa  $D_{v|_a}: C^\infty(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$  que atua

em uma função suave em  $\mathbb{R}^d$  devolvendo sua derivada direcional na direção de  $v$  calculada no ponto  $a$ :

$$D_{v|_a}f := D_vf(a) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(a + tv).$$

Como visto em qualquer curso de cálculo, segue que  $D_{v|_a}$  é linear. Além disso, este mapa obedece à regra de Leibniz:

$$D_{v|_a}(fg) = f(a)D_{v|_a}g + g(a)D_{v|_a}f.$$

Empregando a notação de Einstein, se  $v = v^i e_i|_a$ , onde  $\{e_i|_a\}_i$  é a base canônica, segue que

$$D_{v|_a}f = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(a).$$

A partir de tudo isso, podemos dar um passo na direção da definição de espaço tangente.

**Definição 4.2.** *Seja  $a \in \mathbb{R}^d$  fixado. Um mapa linear  $w: C^\infty(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$  é chamado de **derivação em no ponto  $a$**  se obedece à regra de Leibniz, isto é, se vale que*

$$w(fg) = f(a)w(g) + g(a)w(f).$$

O conjunto de todas as derivações em  $a \in \mathbb{R}^d$ , denotado por  $T_a\mathbb{R}^d$ , facilmente torna-se um espaço vetorial quando equipado com as operações

$$(w_1 + w_2)f := w_1f + w_2f, \quad (cw)f := c(wf).$$

**Lema 4.1.** *Seja  $a \in \mathbb{R}^d$  fixado. Para toda derivação  $w \in T_a\mathbb{R}^d$  e para todas funções  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ , vale que:*

- i) *Se  $f$  é constante, então  $wf = 0$ .*
- ii) *Se  $f(a) = g(a) = 0$ , então  $w(fg) = 0$ .*

*Demonstração.*

Para mostrar o item i), veja que se  $f_1 \equiv 1$ , então para  $f \equiv c$ , onde  $c$  é uma constante qualquer, vale  $w(f) = w(f_1c) = cw(f_1)$ . Além disso,  $w(f_1) = w(f_1f_1) = 2w(f_1)$ , portanto  $w(f_1) = 0$ . Conclusão:  $w(f) = 0$ .

Para mostrar o item ii), basta computar  $w(fg)$  e usar a hipótese. ■

**Proposição 4.1.** *Seja  $a \in \mathbb{R}^d$  fixado.*

- i) *Para cada  $v_a \in \mathbb{R}_a^d$ , o mapa  $D_{v|_a}: C^\infty(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma derivação.*
- ii) *O mapa  $v_a \mapsto D_{v|_a}$  é um isomorfismo entre  $\mathbb{R}_a^d$  e  $T_a\mathbb{R}^d$ .*

*Demonstração.*

A demonstração de *i*) é imediata.

Para provar *ii*), primeiramente veja que  $v_a \mapsto D_{v|_a}$  é linear. Denotando este mapa por  $\psi$ , temos que:

$$\psi(\lambda v_a + w_a) := D_{\lambda v|_a + w|_a} = D_{\lambda v|_a} + D_{w|_a} = \lambda D_{v|_a} + D_{w|_a} = \lambda \psi(v_a) + \psi(w_a).$$

Para mostrar a injetividade, basta mostrar que  $\ker \psi = \{0\}$ , onde 0 é o vetor nulo em  $\mathbb{R}^d$ . Com efeito, seja  $v_a \in \mathbb{R}_a^d$  tal que  $D_{v|_a} \equiv 0$ , onde 0 é a aplicação nula. Então, na base canônica, temos que

$$D_{v|_a}(x^j) = v^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = v^j = 0.$$

Rapidamente, conclui-se que  $v_a = 0$ .

Para mostrar a sobrejetividade, considere  $w \in T_a \mathbb{R}^d$  qualquer. Afirimo que  $w$  é imagem de  $v_a = w(x^i)e_i$ . Com efeito, sendo  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ , então pelo teorema de Taylor, temos que

$$\begin{aligned} f(x) = & f(a) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)(x^i - a^i) \\ & + \sum_{i,j=1}^d (x^i - a^i)(x^j - a^j) \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(a + t(x-a)) dt. \end{aligned}$$

Sendo assim, pelo lema 4.1, segue que

$$\begin{aligned} w(f) = & 0 + \sum_{i=1}^d w \left( \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)(x^i - a^i) \right) + 0 \\ = & \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) w(x^i - a^i) \\ = & \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) v^i = D_{v|_a} f. \end{aligned}$$

■

**Corolário 4.1.** *Seja  $a \in \mathbb{R}^d$  fixado. O conjunto  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_a : i = 1, 2, \dots, d \right\}$  é uma base para  $T_a \mathbb{R}^d$ .*

*Demonstração.*

Seja  $\psi$  o isomorfismo da proposição 4.1. Então  $\{D_{e_i|_a} : i = 1, 2, \dots, d\}$  é uma base em  $T_a \mathbb{R}^d$ . Visto que  $D_{e_i|_a} = \partial/\partial x^i|_a$ , tem-se que o conjunto do enunciado de fato é uma base em  $T_a \mathbb{R}^d$ . ■

**Definição 4.3 (Derivação em variedade).** *Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade diferenciável e seja  $p \in \mathcal{M}$  fixado. Um mapa linear  $v: C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de **derivação em  $p$**  se satisfaz a seguinte propriedade:*

$$v(fg) = f(p)vg + g(p)vf$$

para todas  $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$ .

O conjunto de todas as derivações em  $p$  é chamado de **espaço tangente a  $\mathcal{M}$  em  $p$**  e é denotado por  $T_p\mathcal{M}$ . Um elemento de  $T_p\mathcal{M}$  é chamado de **vetor tangente em  $p$** .

É de fácil verificação que  $T_p\mathcal{M}$  torna-se um espaço vetorial quando munido das operações  $+$  e  $\cdot$  definidas da forma seguir:

$$(v + w)f := vf + wf, \quad (c \cdot v)f := c(vf),$$

onde a soma e o produto dos lados direitos das igualdades são entendidas como somas em  $\mathbb{R}$ .

**Lema 4.2.** *Sejam  $\mathcal{M}$  uma variedade,  $p \in \mathcal{M}$  fixado,  $v \in T_p\mathcal{M}$  e  $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$ . Vale que:*

- i) *Se  $f$  é constante, então  $vf = 0$ .*
- ii) *Se  $f(p) = g(p) = 0$ , então  $v(fg) = 0$ .*

*Demonstração.*

A ideia é exatamente a mesma apresentada na demonstração do lema 4.1. ■

**Definição 4.4.** *Seja  $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  um mapa  $C^\infty$ . Para cada  $p \in \mathcal{M}$ , defina o mapa  $dF_p: T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{F(p)}\mathcal{N}$  da seguinte forma:*

$$dF_p(v)(f) := v(f \circ F), \quad \forall v \in T_p\mathcal{M}, \quad \forall f \in C^\infty(\mathcal{N}).$$

Este mapa é denominado como o **diferencial de  $F$  em  $p$** .

**Definição 4.5.** *Um mapa  $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  é chamado de **difeomorfismo** quando for  $C^\infty(\mathcal{M})$ , bijetivo e possuir inversa  $F^{-1}$  que é  $C^\infty(\mathcal{N})$ .*

**Lema 4.3.** *Para toda carta  $(U, \varphi)$  em uma variedade  $\mathcal{M}$ , o mapa  $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$  é um difeomorfismo.*

*Demonstração.*

Seja  $(U, \varphi)$  uma carta em  $\mathcal{M}$ . Como todo aberto de  $\mathcal{M}$  é também uma variedade, seja  $\{(U, \varphi)\}$  um atlas para  $U$  e seja  $\{(\varphi(U), Id_{\varphi(U)})\}$  um atlas para  $\varphi(U)$ . Então, o mapa  $Id_{\varphi(U)} \circ \varphi \circ \varphi^{-1}$  é  $C^\infty$  por ser composição de mapas suaves e portanto  $\varphi$  é suave (proposição 3.2). Além disso,  $\varphi$  é bijeção por tratar-se de um homeomorfismo.

Ainda considerando os atlas anteriores, veja que  $\varphi \circ \varphi^{-1} \circ Id_{\varphi(U)}$  também é  $C^\infty$  e portanto  $\varphi^{-1}$  é suave. Conclusão:  $\varphi$  é um difeomorfismo. ■

**Proposição 4.2.** *Sejam  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{N}$  e  $\mathcal{P}$  variedades diferenciáveis. Sejam  $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  e  $G: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}$  mapas suaves e seja  $p \in \mathcal{M}$ . Valem as seguintes propriedades:*

- a)  $dF_p: T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{F(p)}\mathcal{N}$  é linear.
- b)  $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p: T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{G(F(p))}\mathcal{P}$  (**regra da cadeia**).
- c)  $d(\mathbb{1}_{\mathcal{M}}) = \mathbb{1}_{T_p\mathcal{M}}: T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M}$ .
- d) Se  $F$  é um difeomorfismo, então  $dF_p: T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{F(p)}\mathcal{N}$  é um isomorfismo e  $(dF_p)^{-1} = dF_{F(p)}^{-1}$ .

*Demonstração.*

- a) Sejam  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $f \in C^\infty(\mathcal{N})$ ,  $v \in T_p\mathcal{M}$  e  $w \in T_p\mathcal{M}$  arbitrários. Então:

$$dF_p(\lambda v + w)f := (\lambda v + w)(f \circ F).$$

Como  $T_p\mathcal{M}$  é espaço vetorial, segue que

$$dF_p(\lambda v + w)f = \lambda v(f \circ F) + w(f \circ F) := \lambda dF_p(v)f + dF_p(w)f.$$

Logo, sendo  $\lambda$ ,  $v$ ,  $w$  e  $f$  quaisquer, conclui-se que o diferencial de  $F$  em  $p$  é linear.

- b) Sejam  $v \in T_p\mathcal{M}$  e  $f \in C^\infty(\mathcal{P})$  quaisquer. Então:

$$d(G \circ F)_p(v)f := v(f \circ (G \circ F)) = dF_p(v)(f \circ G).$$

Como  $dF_p(v) \in T_{F(p)}\mathcal{N}$ , então pela definição de diferencial tem-se que

$$d(G \circ F)_p(v)f = (dG_{F(p)} \circ dF_p)(v)f.$$

Sendo  $v$  e  $f$  quaisquer, segue que  $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$ .

- c)  $d(\mathbb{1}_{\mathcal{M}})_p(v)f := v(f \circ \mathbb{1}_{\mathcal{M}}) = vf = \mathbb{1}_{\mathcal{M}}(v)f$ .

- d) Sendo  $F$  um difeomorfismo, então existe a inversa  $F^{-1}$ . Logo, temos que

$$d(F^{-1} \circ F)_p = dF_{F(p)}^{-1} \circ dF_p = \mathbb{1}_{T_p\mathcal{M}}$$

$$d(F \circ F^{-1})_p = dF_p \circ dF_{F(p)}^{-1} = \mathbb{1}_{T_{F(p)}\mathcal{N}}.$$

Disto, conclui-se que  $dF_{F(p)}^{-1}$  é uma inversa à esquerda e à direita de  $dF_p$ . Portanto,  $dF_p$  é uma bijeção. Como  $dF_p$  é linear, destas duas características conclui-se que  $dF_p$  é um isomorfismo entre  $T_p\mathcal{M}$  e  $T_{F(p)}\mathcal{N}$ . Além disso,  $(dF_p)^{-1} = dF_{F(p)}^{-1}$ .

■

A proposição a seguir mostra que vetores tangentes atuam localmente.



**Proposição 4.3.** *Sejam  $\mathcal{M}$  uma variedade diferenciável,  $p \in \mathcal{M}$  e  $v \in T_p\mathcal{M}$ . Se  $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$  são idênticas em alguma vizinhança de  $p$ , então  $vf = vg$ .*

*Demonstração.*

Seja  $h := f - g$ . Desta forma,  $h$  é uma função suave que é identicamente nula em uma vizinhança de  $p$ . Seja  $\varphi$  uma bump function para  $\text{supp } h$  suportada em  $\mathcal{M} \setminus \{p\}$ , isto é, tal que  $\varphi$  se anule em  $p$ . Como  $\varphi \equiv 1$  nos pontos onde  $h$  não é zero, então  $\varphi h = h$ . Visto que  $\varphi(p) = h(p) = 0$ , segue do lema 4.2 que  $vh = v(\varphi h) = 0$ . Disto, conclui-se que  $vf = vg$ . ■

A próxima proposição será útil para mostrar que a dimensão do espaço tangente a um ponto é igual à dimensão da variedade.

**Proposição 4.4.** *Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade e seja  $U \subseteq \mathcal{M}$  um conjunto aberto. Para cada ponto  $p \in U$ , o mapa inclusão  $\iota: U \hookrightarrow \mathcal{M}$  induz o isomorfismo  $d\iota_p: T_pU \rightarrow T_p\mathcal{M}$ .*

*Demonstração.*

Seja  $v \in T_pU$  tal que  $d\iota_p(v) = 0$ . Sendo  $\mathcal{M}$  um espaço normal, pelo lema 1.11 existe uma vizinhança  $B$  de  $U$  tal que  $p \in \bar{B} \subseteq U$ . Dada  $f \in C^\infty(U)$ , pelo lema 3.4, existe  $\tilde{f} \in C^\infty(\mathcal{M})$  tal que  $\tilde{f}|_{\bar{B}} \equiv f$ . Pela proposição 4.3, segue que

$$vf = v\tilde{f}|_U = v(\tilde{f} \circ \iota) := d\iota_p(v)\tilde{f} = 0.$$

Como o resultado acima independe de  $f$ , então  $v = 0$  e portanto  $\ker d\iota_p = \{0\}$ . Logo, o diferencial da aplicação inclusão é injetivo.

Para mostrar a sobrejetividade, suponha que  $w \in T_p\mathcal{M}$  seja arbitrário. A aplicação  $v: C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $vf := w\tilde{f}$ , onde  $\tilde{f}$  é qualquer função suave que seja idêntica a  $f$  em  $\bar{B}$ , é uma derivação. Logo, dada  $g \in C^\infty(\mathcal{M})$ , segue que:

$$d\iota_p(v)g := v(g \circ \iota) = w(g \circ \iota) = wg,$$

pois  $g \circ \iota$ ,  $g \circ \iota$  e  $g$  são idênticas em  $B$ . Logo,  $d\iota_p = w$ . ■

Por conta da proposição acima, temos que o espaço tangente à uma vizinhança  $U$  de  $p$  é essencialmente igual ao espaço tangente a  $\mathcal{M}$  em  $p$ . Desta forma, vetores tangentes em  $T_p\mathcal{M}$  podem ser aplicados em funções definidas nessas vizinhanças sem maiores problemas.

**Teorema 4.1 (Dimensão do espaço tangente).** *Seja  $\mathcal{M}^d$  uma variedade diferenciável. Para cada  $p \in \mathcal{M}^d$  tem-se que  $\dim T_p\mathcal{M} = d$ .*

*Demonstração.*

Seja  $p \in \mathcal{M}$  qualquer e seja  $(U, \varphi)$  uma carta onde  $U$  é vizinhança coordenada de  $p$ . Pela proposição 4.4, sabe-se que  $\dim T_p\mathcal{M} = \dim T_pU$ . Pela proposição 4.2, sabe-se que  $\dim T_pU = \dim T_{\varphi(p)}\varphi(U)$ , pois  $U$  é difeomorfo a  $\varphi(U)$ . Pela proposição 4.4, temos que  $\dim T_{\varphi(p)}\varphi(U) = \dim T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^d$ . Por transitividade, conclui-se que  $\dim T_p\mathcal{M} = \dim T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^d = d$ . ■

Se  $U$  é uma vizinhança coordenada qualquer de um ponto  $p \in \mathcal{M}$ , então  $T_p\mathcal{M}$  é isomorfo a  $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^d$ . Pelo corolário 4.1, segue que  $\partial/\partial r^1|_{\varphi(p)}, \dots, \partial/\partial r^d|_{\varphi(p)}$  é uma base em  $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^d$ . Sabendo disso, as pré-imagens destes elementos por meio do isomorfismo  $d\varphi_p$  entre os espaços tangentes formam uma base em  $T_p\mathcal{M}$ . Denotando estas pré-imagens por  $\partial/\partial x^i|_p$ , temos que

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)} \left( \frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_{\varphi(p)} \right). \quad (4.1)$$

Com isso, obtém-se que a derivada parcial de qualquer função  $f \in C^\infty(U)$  no ponto  $p$  é:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p f = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}\Big|_{\varphi(p)},$$

o que está de acordo com a definição já vista de derivada parcial de uma função suave. Em vista disso, podemos chamar cada  $\partial/\partial x^i|_p$  de vetor coordenada em  $p$  associado à carta  $(U, \varphi)$ . O conjunto de tais vetores coordenada é chamado de **base coordenada para  $T_p\mathcal{M}$**  e sendo uma base, para cada  $v \in T_p\mathcal{M}$ , temos que

$$v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p.$$

Em vista das constatações acima, podemos computar o diferencial de um mapa suave  $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ . Primeiramente, vamos analisar o caso em que  $F$  é um mapa suave entre abertos  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $V \subseteq \mathbb{R}^m$ . Dado  $p \in U$ , pela regra da cadeia, temos que

$$\begin{aligned} dF_p \left( \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \right) f &:= \frac{\partial(f \circ F)}{\partial x^i}\Big|_p = \frac{\partial f}{\partial y^j}(F(p)) \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) \\ &= \left( \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{F(p)} \right) f. \end{aligned}$$

Como este resultado independe de  $f$ , segue que a diferencial  $dF_p$  pode ser escrita como a seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial F^m}{\partial x^n}(p) \end{pmatrix}$$

Em outras palavras, o diferencial de  $F$  é representado pela matriz jacobiana de  $F$  e pode ser entendido como a derivada desta aplicação.

Agora, voltemo-nos para o caso onde  $F$  é um mapa suave entre variedades mais abstratas do que  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$ . Dadas duas cartas  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  contendo

respectivamente  $p$  e  $F(p)$ , por simplicidade de notação, defina  $\hat{F} \equiv \psi \circ F \circ \varphi^{-1}: \varphi(F^{-1}(V) \cap U) \rightarrow \psi(V)$  e  $\hat{p} = \varphi(p)$ . Desta forma, temos que

$$dF_p \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = d(F \circ \varphi^{-1})_{\hat{p}} \left( \frac{\partial}{\partial r^i} \Big|_{\hat{p}} \right) = d(\psi^{-1} \circ \hat{F})_{\hat{p}} \left( \frac{\partial}{\partial r^i} \Big|_{\hat{p}} \right).$$

Como  $\hat{F}$  é uma aplicação entre  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$ , pelo que foi visto há pouco, segue que

$$dF_p \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = d\psi_{F(\hat{p})}^{-1} \left( \frac{\partial \hat{F}^j}{\partial r^i}(\hat{p}) \frac{\partial}{\partial s^j} \Big|_{\hat{F}(\hat{p})} \right) = \frac{\partial \hat{F}^j}{\partial r^i}(\hat{p}) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{F(p)}.$$

Logo, na base coordenada em  $T_{F(p)}\mathcal{N}$ , os coeficientes que caracterizam  $dF_p$  são justamente as entradas da matriz jacobiana da aplicação  $F$  relativa às cartas empregadas<sup>1</sup>. Devido à característica de “empurrar” vetores tangentes à variedade  $\mathcal{M}$  para vetores tangentes à variedade  $\mathcal{N}$ , comumente diz-se que o diferencial é um *pushforward pontual*.

**Exemplo 4.1 (Mudança de coordenadas).** *Suponha que  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  são duas cartas em uma variedade  $\mathcal{M}$  tais que  $U \cap V \neq \emptyset$ . Dado  $p \in U \cap V$ , cada uma dessas cartas dá origem a uma base em  $T_p\mathcal{M}$ . Digamos que  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\}$  e  $\left\{ \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p \right\}$  são as bases associadas às cartas  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$ , respectivamente. Se  $v \in T_p\mathcal{M}$ , na base relativa a  $(U, \varphi)$  temos que*

$$v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p.$$

Utilizando a Equação (4.1), podemos reescrever cada elemento da base da seguinte forma

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = d(\psi^{-1})_{\psi(p)} \circ d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \left( \frac{\partial}{\partial r^i} \Big|_{\varphi(p)} \right).$$

Como  $\psi \circ \varphi^{-1}$  é uma aplicação de  $\varphi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^m$ , já sabemos que seu diferencial é dado pela matriz jacobiana desta aplicação. Sendo assim:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = d(\psi^{-1})_{\psi(p)} \left( \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})^j}{\partial r^i}(\hat{p}) \frac{\partial}{\partial s^j} \Big|_{\hat{F}(\hat{p})} \right).$$

Pela linearidade de  $d(\psi^{-1})_{\psi(p)}$ , consequentemente cada elemento da base relativa a  $(U, \varphi)$  pode ser reescrito como

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})^j}{\partial r^i}(\hat{p}) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p. \quad (4.2)$$

<sup>1</sup>Caso a penúltima igualdade pareça estranha por conta do  $s^j$ , veja que ele é apenas uma notação para as coordenadas em  $\mathbb{R}^m$ :  $y^j = s^j \circ \psi$ .

A partir disso, se  $\tilde{v}^j$  é a coordenada de  $v$  na base relativa a  $(V, \psi)$ , conclui-se que

$$\tilde{v}^j = \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})^j}{\partial r^i}(\hat{p})v^i.$$

Como as componentes “novas” do vetor  $v$  são expressas a partir multiplicação das componentes “antigas” por elementos da matriz jacobiana, costuma-se dizer que vetores tangentes são **vetores contravariantes**. Um pouco mais a frente, a noção de vetor covariante também irá aparecer.

**Exemplo 4.2.** O mapa de transição entre coordenadas polares e coordenadas cartesianas é dado por  $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ . Seja  $p$  um ponto de  $\mathbb{R}^2$  cuja representação em coordenadas polares é  $(r, \theta) = (2, \pi/2)$ . Suponha que  $v \in T_p \mathbb{R}^2$  seja escrito como

$$v = 3 \left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_p - \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \right|_p.$$

Como a eq. (4.2) é independente do sistema de coordenadas<sup>2</sup> escolhido<sup>3</sup>, então tem-se que

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_p = \frac{\partial x}{\partial r}(2, \pi/2) \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_p + \frac{\partial y}{\partial r}(2, \pi/2) \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_p.$$

Logo

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_p = \cos(\pi/2) \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_p + \sin(\pi/2) \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_p = \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_p.$$

Pelo mesmo raciocínio, conclui-se que

$$\left. \frac{\partial}{\partial \theta} \right|_p = -2 \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_p.$$

Desta forma, em um sistema de coordenadas cartesianas,  $v$  é representado como

$$v = 2 \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_p + 3 \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_p.$$

A noção de vetor velocidade, corriqueiramente vista em cursos de cálculo, estende-se a variedades diferenciáveis no contexto de espaços tangentes.

**Definição 4.6.** Seja  $J \subset \mathbb{R}$  um intervalo. Se  $\mathcal{M}$  é uma variedade diferenciável, diz-se que o mapa contínuo  $\gamma: J \rightarrow \mathcal{M}$  é uma curva em  $\mathcal{M}$ .

Visto que o vetor velocidade de uma curva suave em  $\mathbb{R}^n$  pode ser entendido como um elemento de um espaço tangente em  $\mathbb{R}^n$ , podemos utilizar isto como mote para estender esta ideia para variedades mais abstratas.

<sup>2</sup>Linguaajar de físico.

<sup>3</sup>Essa talvez seja uma das grandes vantagens de estudar análise em variedades: os resultados obtidos podem ser aplicados a qualquer sistema de coordenadas, seja ele cartesiano, polar, cilíndrico ou esférico.

Dado  $t_0 \in J$ , o **vetor velocidade** de uma curva suave  $\gamma$  no ponto  $t_0$  é definido por

$$\gamma'(t_0) \equiv \dot{\gamma}(t_0) := d\gamma \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \right) \in T_{\gamma(t_0)}\mathcal{M}.$$

**Proposição 4.5.** *Seja  $p \in \mathcal{M}$  onde  $\mathcal{M}$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ . Todo elemento de  $T_p\mathcal{M}$  é o vetor velocidade de alguma curva suave  $\gamma$ .*

*Demonstração.*

Seja  $v \in T_p\mathcal{M}$ . Dada uma carta  $(U, \varphi)$  em torno de  $p$ , segue que

$$v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p.$$

Sejam  $J \subset \mathbb{R}$  um intervalo t.q.  $0 \in J$  e  $\alpha: J \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$  uma curva t.q.  $\alpha(0) = \varphi(p)$  e  $\alpha(t) = (v^1 t, \dots, v^n t)$ . Claramente,  $\alpha$  é suave, pois cada uma de suas funções coordenadas é um polinômio em  $t$  de grau 1. Afirimo que a curva  $\gamma: \varphi^{-1} \circ \alpha: J \rightarrow \mathcal{M}$  é uma curva suave que tem  $v$  como um vetor velocidade em  $t = 0$ . Com efeito, temos que  $\gamma$  é suave por ser composição de mapas suaves. Além disso, temos que

$$d\gamma \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \right) x^i = \frac{d(x^i \circ \gamma)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d(x^i \circ \varphi^{-1} \circ \alpha)}{dt} \Big|_{t=0}.$$

Visto que  $x^i = r^i \circ \varphi$ , então

$$d\gamma \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \right) x^i = \frac{d(r^i \circ \alpha)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d(v^i t)}{dt} \Big|_{t=0} = v^i.$$

Portanto, os coeficientes que definem o vetor velocidade  $\gamma'(0)$  na carta  $(U, \varphi)$  são os mesmos que definem  $v$  e desta forma segue que  $\gamma'(0) = v$ . ■

Na proposição a seguir,  $J$  é um intervalo.

**Proposição 4.6.** *Sejam  $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  um mapa suave e  $\gamma: J \rightarrow \mathcal{M}$  uma curva suave. Para qualquer  $t_0 \in J$ , o vetor velocidade da composição  $F \circ \gamma: J \rightarrow \mathcal{N}$  é*

$$(F \circ \gamma)'(t_0) = dF(\gamma'(t_0))$$

**Corolário 4.2.** *Suponha que  $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  seja um mapa suave. Fixado  $p \in \mathcal{M}$ , dado  $v \in T_p\mathcal{M}$  temos que*

$$dF_p(v) = (F \circ \gamma)'(0)$$

para qualquer curva suave  $\gamma: J \rightarrow \mathcal{M}$  tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = v$ .

**Exercício 4.1.** *Demonstre a proposição 4.6 e seu corolário.*

O corolário acima apresenta um método para calcular o diferencial de uma aplicação suave sem o uso de cartas em  $\mathcal{M}$  e em  $\mathcal{N}$ .

## 4.2 Fibrados Tangentes

Como já visto, para cada ponto  $p \in \mathcal{M}$  temos um espaço vetorial simbolizado por  $T_p\mathcal{M}$ . Naturalmente, podemos definir a união de todos esses espaços como sendo o conjunto

$$T\mathcal{M} := \bigsqcup_{p \in \mathcal{M}} T_p\mathcal{M} \equiv \bigcup_{p \in \mathcal{M}} (\{p\} \times T_p\mathcal{M}). \quad (4.3)$$

O símbolo  $\bigsqcup$  é utilizado quando lidamos com uma união disjunta de uma coleção de conjuntos. Visto que para  $p \neq q$  temos  $T_p\mathcal{M} \neq T_q\mathcal{M}$ , não importa tanto se utilizamos  $\bigsqcup$  ou  $\bigcup$  e portanto o uso de um ou de outro será feito de acordo com o que for mais conveniente no momento. Ao conjunto em eq. (4.3), dá-se o nome de **fibrado tangente** de  $\mathcal{M}$ .

Existe um mapa natural<sup>4</sup>  $\pi: T\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  definido por  $\pi(p, v) := p$ , onde  $v \in T_p\mathcal{M}$ . Por vezes, é útil pensar em  $v \in T_p\mathcal{M}$  como um elemento de  $T\mathcal{M}$  no lugar do par ordenado  $(p, v)$ .

Por ora, o fibrado tangente é apenas um conjunto sem muita coisa especial. Ocorre que a partir da topologia e da estrutura diferenciável de  $\mathcal{M}$ , podemos tornar  $T\mathcal{M}$  numa variedade diferenciável, como veremos a seguir.

Seja  $(U, \varphi) = (U, x^1, \dots, x^n)$  uma carta em  $\mathcal{M}$ . Temos que

$$TU = \bigsqcup_{p \in U} T_p\mathcal{M}.$$

Como esta carta define uma base em  $T_p\mathcal{M}$  para cada  $p \in U$ , podemos definir o mapa  $\tilde{\varphi}: TU \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$  da seguinte forma:

$$\left( p, v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) \mapsto (x^1(p), \dots, x^n(p), v^1, \dots, v^n) \in \varphi(U) \times \mathbb{R}^n.$$

Temos que  $\tilde{\varphi}$  é uma bijeção sobre sua imagem. Ademais, a partir deste mapa podemos definir uma topologia em  $TU$ , impondo que  $A \subset TU$  é aberto se, e somente se,  $\tilde{\varphi}(A) \times \mathbb{R}^n$  for aberto. Desta forma, segue que o mapa  $\tilde{\varphi}$  automaticamente torna-se num homeomorfismo<sup>5</sup>. Utilizando agora a estrutura diferenciável de  $\mathcal{M}$ , sabendo quem são os abertos em  $TU_\alpha$ , podemos estabelecer em  $T\mathcal{M}$  a topologia gerada pela seguinte base

$$\mathcal{B} = \{A \mid A \text{ aberto em } TU_\alpha \text{ e } U_\alpha \text{ vizinhança coordenada em } \mathcal{M}\}.$$

A verificação de que este conjunto é uma base encontra-se no

**Lema 4.4.** *Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade diferenciável.*

a)  *$T\mathcal{M}$  é a união de todos os elementos do conjunto  $\mathcal{B}$ .*

<sup>4</sup>Isto significa que ele não depende de nenhuma escolha anterior.

<sup>5</sup>Implicitamente está assumindo-se a topologia usual em  $\mathbb{R}^{2n}$ .

- b) Para todas vizinhanças coordenadas  $U$  e  $V$  em  $\mathcal{M}$ , se  $A$  é aberto em  $TU$  e se  $B$  é aberto em  $TV$ , então  $A \cap B$  é aberto em  $T(U \cap V)$ .

*Demonstração.*

Como cada  $A$  é subconjunto de  $TU_\alpha \subset T\mathcal{M}$  para algum  $\alpha$ , segue que  $\bigcup_{A \in \mathcal{B}} A \subset T\mathcal{M}$ . Para verificar a outra contenção, basta notar que o fibrado é a união de todos os  $TU_\alpha$ .

Temos que  $A \cap T(U \cap V)$  é aberto de  $T(U \cap V)$  e que  $B \cap T(U \cap V)$  é aberto de  $T(U \cap V)$ , considerando sempre a topologia do subespaço. Daí:

$$A \cap B \cap T(U \cap V) = (A \cap T(U \cap V)) \cap (B \cap T(U \cap V))$$

é aberto em  $T(U \cap V)$ , pois  $A \cap B \subset TU \cap TV = T(U \cap V)$ . ■

**Lema 4.5.** *O fibrado tangente  $T\mathcal{M}$  de uma variedade  $\mathcal{M}$  é um espaço topológico segundo-contável.*

*Demonstração.*

Dada uma base enumerável  $\{U_i\}_{i=1}^\infty$  de vizinhanças coordenadas em  $\mathcal{M}$ , temos que cada  $TU_i$  é segundo-contável pois é homeomorfo a  $\varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n$ <sup>6</sup>. Em vista disso, para cada  $i \in \mathbb{N}$ , seja  $\{B_{ij}\}_{j=1}^\infty$  uma base enumerável de  $TU_i$ . Então o conjunto  $\{B_{ij}\}_{i,j=1}^\infty$  é uma base enumerável para  $T\mathcal{M}$ . ■

**Lema 4.6.** *O fibrado tangente  $T\mathcal{M}$  de uma variedade  $\mathcal{M}$  é um espaço topológico que obedece à condição de Hausdorff.*

*Demonstração.*

Sejam  $(p, v), (q, w) \in T\mathcal{M}$ . No caso em que  $p = q$ , temos que, dada qualquer carta  $(U, \varphi)$  em torno de  $p$ ,  $(p, v), (p, w) \in TU$ . Como  $TU$  é homeomorfo a  $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ , segue que  $TU$  é Hausdorff e portanto existem abertos disjuntos que contêm  $(p, v)$  e  $(p, w)$ .

Se  $p \neq q$ , dado que  $\mathcal{M}$  é Hausdorff, existem vizinhanças coordenadas  $U$  e  $V$  de  $p$  e  $q$ , respectivamente, tais que  $U \cap V = \emptyset$ . Daí, concluímos que  $(p, v) \in TU$  e  $(q, w) \in TV$ . Visto  $TU$  e  $TV$  são abertos disjuntos, está terminada a demonstração. ■

A partir destes lemas, verifica-se que  $T\mathcal{M}$  torna-se uma variedade topológica. Para torná-la uma variedade diferenciável, precisamos ainda construir um atlas e depois estendê-lo ao atlas maximal.

Primeiramente, se  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  é o atlas maximal em  $\mathcal{M}$ , já vimos que  $T\mathcal{M} \subset \bigcup_\alpha TU_\alpha$ . Resta mostrar que  $\tilde{\varphi}_\alpha$  e  $\tilde{\varphi}_\beta$  são  $C^\infty$ -compatíveis em  $TU_\alpha \cap TU_\beta$  para quaisquer  $\alpha$  e  $\beta$ , pois assim concluiremos que  $\{(TU_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha)\}$  é um atlas no fibrado tangente. Para tanto, sejam  $(U_\alpha, \varphi_\alpha) = (U, x^1, \dots, x^n)$  e  $(U_\beta, \varphi_\beta) = (U_\beta, y^1, \dots, y^n)$  cartas em torno do  $p \in \mathcal{M}$ . Já sabemos que essas cartas induzem

<sup>6</sup>Todo subespaço topológico de  $\mathbb{R}^{2n}$  é segundo-contável, bastando tomar bolar com raios e centros cujas coordenadas são racionais.

bases no espaço tangente em  $p$  e portanto um vetor  $v \in T_p\mathcal{M}$  qualquer pode ser descrito como

$$v = a^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p = b^j \left. \frac{\partial}{\partial y^j} \right|_p.$$

Como os vetores tangentes são contravariantes, sabemos que os coeficientes  $b^j$  e  $a^i$  estão relacionados pela seguinte expressão:

$$b^j = a^i \frac{\partial(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^j}{\partial x^i}(\varphi_\alpha(p)).$$

Sendo assim, denotando  $W \equiv U_\alpha \cap U_\beta$ , temos que a aplicação  $\tilde{\varphi}_\beta \circ \tilde{\varphi}_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(W) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi_\beta(W) \times \mathbb{R}^n$  é definida por

$$(\varphi_\alpha(p), a^1, \dots, a^n) \mapsto \left( p, a^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right) \mapsto ((\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha(p)), b^1, \dots, b^n),$$

onde os  $b^j$  são da forma acima. Disto, concluímos que  $\tilde{\varphi}_\beta \circ \tilde{\varphi}_\alpha^{-1}$  é  $C^\infty$  pois cada uma de funções coordenadas é  $C^\infty$ . A verificação de que  $\tilde{\varphi}_\alpha \circ \tilde{\varphi}_\beta^{-1}$  também é suave é totalmente análoga.

Estendendo  $\{(TU_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha)\}$  ao atlas maximal  $\mathcal{A}'$ , temos que  $(TM, \mathcal{A}')$  é uma variedade diferenciável.

**Exemplo 4.3 (Mecânica clássica).** *Suponha que uma partícula desloca-se numa variedade tridimensional, por simplicidade, pensaremos em  $\mathbb{R}^3$ . Chamamos de **espaço de configurações** o conjunto de todas as possíveis posições desta partícula. No caso da partícula livre, temos que o espaço de configurações é o próprio  $\mathbb{R}^3$ . No caso em que há algum tipo de vínculo que restrinja a partícula a alguma superfície, então o espaço de configurações é algum conjunto  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ . Analogamente, para um conjunto de  $N$  partículas, o espaço de configurações seria um subconjunto de  $\mathbb{R}^{3N}$ .*

*Em um problema de mecânica clássica, buscamos sempre descrever o sistema estudado a partir de um conjunto de coordenadas. A depender da situação, nem sempre é vantajoso trabalhar com as coordenadas de  $\mathbb{R}^{3N}$ , isto é, trabalhar com as coordenadas ditas “cartesianas”. A título de exemplo, em um pêndulo duplo é melhor trabalharmos apenas com os ângulos que as hastes fazem com o eixo vertical. Por imposição, o conjunto de tais coordenadas deve ser tal que o espaço de configurações,  $\mathcal{C}$ , torne-se uma variedade diferenciável. Chamamos essas coordenadas de **coordenadas generalizadas**.*

*Visto que  $\mathcal{C}$  é uma variedade diferenciável, para cada ponto  $q \in \mathcal{C}$ , temos que existe o espaço tangente  $T_q\mathcal{C}$ . Interpretando  $T_q\mathcal{C}$  como sendo o espaço dos vetores velocidade de todas as curvas que passam por  $q$ , podemos pensar  $v \in T_q\mathcal{C}$  de duas maneiras diferentes: a primeira e mais natural é como a velocidade com a qual o sistema se desloca naquele ponto; a segunda maneira é pensar em  $v$  como sendo um **deslocamento virtual**, ou seja, como uma possível direção na qual a configuração  $q$  se deslocaria numa curva  $\gamma: J \rightarrow \mathcal{C}$  “virtual”, i.e., que não representa a real evolução temporal do sistema.*



Em vista da segunda interpretação do espaço tangente, naturalmente podemos pensar no fibrado tangente do espaço de configurações,  $TC$ , como sendo o conjunto de todos os pares  $(q, \dot{q})$ , onde  $q$  é uma possível configuração do sistema e  $\dot{q}$  é uma possível direção para onde o sistema pode ir. No caso do pêndulo duplo, o fibrado tangente seria formado por elementos da forma  $(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$ . No fibrado, podemos definir uma função  $L: TC \rightarrow \mathbb{R}$  chamada de **Lagrangiana do sistema**. Várias informações a respeito do sistema estudado acabam sendo armazenadas na lagrangiana, visto que é possível mostrar que ela obedece à equação diferencial

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q},$$

também conhecida como **equação de Euler-Lagrange**.

A seguir veremos uma generalização do fibrado tangente, conhecida como fibrado vetorial.

**Definição 4.7.** Sejam  $\mathcal{M}$  e  $E$  variedades diferenciáveis e  $\pi: E \rightarrow \mathcal{M}$  um mapa qualquer. Se  $p \in \mathcal{M}$ , dizemos que  $E_p := \pi^{-1}(p)$  é a fibra em  $p$ . Além disso, se  $\pi': E' \rightarrow \mathcal{M}$  é outro mapa, diz-se que um mapa  $\Phi: E \rightarrow E'$  é preservador de fibras se  $\Phi(E_p) \subset E'_p$  para todo  $p \in \mathcal{M}$ .

Podemos verificar que um mapa  $\Phi: E \rightarrow E'$  é preservador de fibras se e somente se o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Phi} & E' \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi' \\ & \mathcal{M} & \end{array}$$

**Definição 4.8.** Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade diferenciável. Um **fibrado vetorial  $C^\infty$  real de rank  $k$  sobre  $\mathcal{M}$**  é uma tripla ordenada  $(E, \mathcal{M}, \pi)$  onde  $E$  é uma variedade diferenciável e  $\pi: E \rightarrow \mathcal{M}$  é um mapa suave e sobrejetivo que satisfaz as seguintes condições:

- Para todo  $p \in \mathcal{M}$  o conjunto  $E_p$  possui a estrutura de um espaço vetorial real  $k$ -dimensional.
- Para todo  $p \in \mathcal{M}$  existem uma vizinhança  $U$  e um difeomorfismo preservador de fibras  $\Phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$  tal que para todo  $q \in U$  a restrição

$$\Phi|_{E_q}: E_q \rightarrow \{q\} \times \mathbb{R}^k$$

é um isomorfismo entre espaços vetoriais. Neste caso, diz-se que  $U$  é um aberto trivializante para  $E$  e  $\Phi$  é uma trivialização de  $E$  sobre  $U$ .

Na definição acima, diz-se que  $E$  é o **espaço total**,  $\mathcal{M}$  é o **espaço base** e  $\pi$  é a **projeção de  $E$  sobre  $\mathcal{M}$** . Além disso, a coleção  $\{(U, \Phi)\}$ , onde  $\{U\}$  é cobertura aberta de  $\mathcal{M}$ , é chamada de trivialização local para  $E$  e  $\{U\}$  é chamada de cobertura aberta trivializante de  $E$ . Por abuso de linguagem, é comum dizer que  $E$  é o fibrado vetorial.

**Exemplo 4.4 (Fibrado produto).** *Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade diferenciável  $n$ -dimensional e  $\pi: \mathcal{M} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathcal{M}$  a projeção na primeira coordenada. Então  $\mathcal{M} \times \mathbb{R}^k$  é um fibrado vetorial ( $C^\infty$ ) de rank  $k$  sobre  $\mathcal{M}$ , comumente chamado por fibrado produto sobre  $\mathcal{M}$ . A fibra  $E_p = \{p\} \times \mathbb{R}^k$  possui uma estrutura óbvia de espaço vetorial. Uma possível trivialização em  $\mathcal{M} \times \mathbb{R}^k$  é o mapa identidade, pois é uma trivialização global.*

*Como ilustração, podemos pensar em  $\mathcal{M} = S^1$  e considerar  $k = 1$ , logo o espaço total trata-se de um cilindro e as fibras seriam os espaços tangentes em cada ponto do círculo unitário.*

Vale mencionar que se  $(U, \psi)$  é uma carta em  $\mathcal{M}$  e se

$$\Phi: E_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^k, \quad \Phi(e) := (\pi(e), c^1(e), \dots, c^k(e)),$$

é uma trivialização de  $E$  sobre  $U$ , então o mapa

$$(\psi \times \mathbb{1}) \circ \Phi = (x^1, \dots, x^n, c^1, \dots, c^k): E_U \rightarrow \psi(U) \times \mathbb{R}^k$$

é um difeomorfismo e portanto  $(E_U, (\psi \times \mathbb{1}) \circ \Phi)$  é uma carta em  $E$  devido à maximalidade do atlas.

**Definição 4.9.** *Uma **seção** de um fibrado vetorial  $E$  é um mapa contínuo  $s: \mathcal{M} \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ s = \mathbb{1}_{\mathcal{M}}$ . Entende-se que uma seção é suave quando for um mapa suave entre variedades.*

É possível relaxar a definição acima e pedir que uma seção seja apenas um mapa que seja inversa à direita de  $\pi$ . Neste caso, diz-se que a seção é *áspera*. No que segue, todas as seções são entendidas como contínuas, exceto caso faça-se menção do contrário.

**Definição 4.10.** *Chama-se por **campo vetorial em uma variedade  $\mathcal{M}$**  uma seção do fibrado tangente, ou seja, um mapa contínuo  $X: \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$  tal que  $\pi \circ X = \mathbb{1}_{\mathcal{M}}$ .*

**Proposição 4.7.** *Sejam  $s$  e  $t$  seções suaves de um fibrado vetorial  $C^\infty$   $E$  e considere  $f$  como sendo uma função suave definida em  $\mathcal{M}$ . Então*

- a) *A soma  $s + t: \mathcal{M} \rightarrow E$ , definida da forma usual, é uma seção suave.*
- b) *O produto  $fs: \mathcal{M} \rightarrow E$ , definido da forma usual, é uma seção suave.*

**Exercício 4.2.** *Demonstre a proposição acima.*

O conjunto de todas as seções de  $E$  é denotado por  $\Gamma(E)$ . Pela proposição anterior, temos que a tripla  $(\Gamma(E), +, \cdot)$  possui a estrutura de um espaço vetorial sobre  $C^\infty(\mathcal{M})$ . Visto que este conjunto é um anel comutativo com unidade, diz-se que tal tripla é um **módulo**  $C^\infty(\mathcal{M})$ . Esta noção se estende, claro, para qualquer aberto  $U \subset \mathcal{M}$  que seja um subconjunto próprio.

**Definição 4.11.** Um **frame**<sup>7</sup> para um fibrado vetorial  $E$  sobre um aberto  $U \subset \mathcal{M}$  é uma coleção de seções,  $s_1, \dots, s_k$  tais que para cada  $p \in U$  a coleção  $s_1(p), \dots, s_k(p)$  é uma base na fibra  $E_p$ . Um frame é dito suave quando todas as seções que o compõem forem suaves.

**Exemplo 4.5.** Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade e considere  $e_1, \dots, e_n$  como sendo a base canônica do  $\mathbb{R}^n$ . Então a coleção de seções  $\bar{e}_i: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \times \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{e}_i(p) := (p, e_i)$  é um frame suave para o fibrado produto.

**Exemplo 4.6 (Frame de trivialização).** Seja  $E$  um fibrado vetorial e seja  $\Phi: E_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$  uma trivialização de  $E$  sobre  $U$ . Então  $\Phi^{-1}$  leva o frame suave  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k$  de  $U \times \mathbb{R}^k$  no frame suave  $t_1, \dots, t_k$  de  $E$  sobre  $U$ :

$$t_i(p) := \Phi^{-1}(\bar{e}_i(p)).$$

Este é chamado de **frame suave sobre  $U$  pela trivialização  $\Phi$** .

**Lema 4.7.** Seja  $\Phi: E_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$  uma trivialização do fibrado  $E$  sobre  $U$  e seja  $t_1, \dots, t_k$  o frame suave sobre  $U$  pela trivialização  $\Phi$ . Então a seção  $s := \sum_i^k b^i t_i$  de  $E$  sobre  $U$  é suave se e somente se os coeficientes  $b^i$  forem suaves.

*Demonstração.*

A volta é imediata devido á proposição 4.7.

Para averiguar que vale a ida, basta avaliar a composição  $\Phi \circ s$  em um ponto  $p$ . Como esta composição é suave, então suas funções coordenadas são suaves e portanto os  $b^i$  são suaves. ■

**Proposição 4.8 (Caracterização de seções suaves).** Seja  $E$  um fibrado vetorial e  $U$  um aberto de  $\mathcal{M}$ . Se  $s_1, \dots, s_k$  é um frame suave para  $E$  sobre  $U$ , então a seção  $s := \sum_i^k c^i s_i$  é suave se e somente se cada  $c^i$  for uma função  $C^\infty(U)$ .

*Demonstração.*

Novamente, por conta da proposição 4.7, a volta é imediata. ■

<sup>7</sup>Resolvi não traduzir está palavra.

## Capítulo 5

# Subvariedades Diferenciáveis (incompleto)

### 5.1 Imersões e Mergulhos

A partir da noção do diferencial de uma aplicação suave entre variedades diferenciáveis, podemos definir quando uma aplicação trata-se de um *mergulho* no contexto de topologia diferencial, um conceito essencial para a definição de subvariedade diferenciável.

**Definição 5.1.** *Seja  $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  um mapa suave entre variedades diferenciáveis. Para cada  $p \in \mathcal{M}$ , o **posto de  $F$  em  $p$**  é o posto da transformação linear  $dF_p: T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{F(p)}\mathcal{N}$ . Se  $F$  tem o mesmo posto para todo  $p \in \mathcal{M}$ , diz-se que  $F$  tem posto constante  $r$ .*

**Definição 5.2.** *Seja  $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  um mapa suave entre variedades diferenciáveis cujas respectivas dimensões são  $m$  e  $n$ . Para cada  $p \in \mathcal{M}$ , diz-se que  **$F$  tem posto completo em  $p$**  se seu posto é igual a  $\min\{m, n\}$ . Se  $F$  tem posto completo em  $p$  para todo  $p \in \mathcal{M}$ , simplesmente diz-se que  $F$  tem posto completo.*

**Definição 5.3.** *Seja  $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  um mapa suave entre variedades diferenciáveis que tem posto completo. Se o posto de  $F$  é igual a  $\dim \mathcal{N}$ , diz-se que  $F$  é uma **submersão suave**. Se o posto de  $F$  é igual a  $\dim \mathcal{M}$ , diz-se que  $F$  é uma **imersão suave**.*

Pelo teorema do núcleo e da imagem, é imediato que se  $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  for uma submersão suave, então  $dF_p: T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{F(p)}\mathcal{N}$  é sobrejetivo para cada  $p \in \mathcal{M}$ . Analogamente, se  $F$  for uma imersão suave,  $dF_p: T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{F(p)}\mathcal{N}$  é injetor para cada  $p \in \mathcal{M}$ .

**Proposição 5.1.** *Seja  $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  um mapa suave entre variedades diferenciáveis. Fixado  $p \in \mathcal{M}$ , se  $dF_p: T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{F(p)}\mathcal{N}$  é sobrejetor, então existe uma vizinhança  $U$  de  $p$ , tal que  $F_U$  é uma submersão suave. Analogamente, se*

$dF_p$  é injetor, então existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  tal que  $F_U$  é uma imersão suave.

*Demonstração.*

■

## Capítulo 6

# Campos Vetoriais (incompleto)

### 6.1 Campos Vetoriais em Variedades

Como visto anteriormente, um campo vetorial numa variedade diferenciável  $\mathcal{M}$  é um mapa contínuo  $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$  e, por costume, denota-se por  $X(p) \in T_p\mathcal{M}$  por  $X_p$ . No caso em que  $X$  não é um mapa contínuo, mas ainda satisfaz  $\pi \circ X = \mathbb{1}_{\mathcal{M}}$ , diz-se que  $X$  é um **campo de vetores áspero** (*rough vector field*).

Localmente numa carta qualquer  $(U, \varphi)$  em  $\mathcal{M}$ , o conjunto  $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$  é um frame suave. Logo, pela caracterização de seções suaves, um campo vetorial  $X: \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$  é suave se e somente se as funções componentes  $X^i: U \rightarrow \mathbb{R}$  são suaves para toda carta  $(U, \varphi)$ .

**Lema 6.1 (Lema da extensão para campos vetoriais).** *Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade diferenciável com ou sem bordo e seja  $A \subset \mathcal{M}$  um conjunto fechado. Supondo que  $X: A \rightarrow T\mathcal{M}$  é um campo vetorial em  $A$ , então para toda vizinhança  $U$  de  $A$  existe um campo vetorial suave  $\tilde{X}: \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$  tal que  $\tilde{X}|_A = X$  e  $\text{supp } \tilde{X} \subseteq U$ .*

A demonstração do lema fica como exercício (tem que usar argumentos de partição de unidade).

**Proposição 6.1.** *Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade diferenciável com ou sem bordo. Dado  $p \in \mathcal{M}$  e  $v \in T_p\mathcal{M}$ , existe um campo vetorial suave  $X: \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$  tal que  $X_p = v$ .*

*Demonstração.*

Visto que  $p \mapsto v$  é um campo vetorial em  $\{p\}$ , então basta aplicar o lema da extensão para campos vetoriais, já que  $\{p\}$  é um conjunto fechado por  $\mathcal{M}$  ser um espaço de Hausdorff. ■

O conjunto dos campos vetoriais suaves em  $\mathcal{M}$  é denotado por  $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$  e, como visto anteriormente, possui tanto a estrutura de um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  como também a estrutura de um módulo sobre  $C^\infty(\mathcal{M})$ .

Campos vetoriais também podem ser vistos como derivações em  $C^\infty(\mathcal{M})$ . Se  $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  e  $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ , dado um aberto  $U \subseteq \mathcal{M}$ , podemos definir a função  $Xf: U \rightarrow \mathbb{R}$  caracterizada por

$$(Xf)(p) := X_p f.$$

Claramente, esse mapa é linear e satisfaz à regra do produto, ou seja, dadas  $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$ :

$$X(fg) = f(Xg) + g(Xf).$$

Portanto, um campo vetorial pode ser interpretado como um mapa  $X: C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$  que satisfaz as propriedades acima. No mais vale a

**Proposição 6.2.** *Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade diferenciável com ou sem bordo. Se  $X: \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$  é um campo vetorial áspero, então são equivalentes*

- a)  $X$  é suave.
- b) Para cada função  $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ , a função  $Xf$  é suave em  $\mathcal{M}$ .
- c) Para cada aberto  $U \subset \mathcal{M}$  e cada função  $f \in C^\infty(U)$ , a função  $Xf$  é suave em  $U$ .

*Demonstração.*

$a \implies b$ . Suponha que  $X$  é suave e que  $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ . Para cada  $p \in \mathcal{M}$ , numa vizinhança qualquer  $U$  de  $p$  vale localmente que

$$Xf(q) = X^i(q) \frac{\partial f}{\partial x^i}(q),$$

onde  $q \in U$  é qualquer. Como  $X$  é suave, então cada  $X^i$  é suave em  $U$  e portanto  $Xf$  é suave em  $U$ . Sendo  $U$  e  $p$  quaisquer, segue que  $Xf$  é suave em  $\mathcal{M}$ .

$b \implies c$ . Seja  $U \subset \mathcal{M}$  aberto e  $f \in C^\infty(U)$ . Para qualquer  $p \in U$ , seja  $\varphi$  uma bump function suave que vale 1 numa vizinhança de  $p$  e com suporte em  $U$ . A função  $\varphi f$  pode ser estendida a zero em  $\mathcal{M} \setminus \text{supp } \varphi$ . Daí, o campo vetorial suave  $X(\varphi f)$  é igual a  $Xf$  nessa vizinhança. Daí,  $Xf$  é suave numa vizinhança de cada ponto de  $U$ .

$c \implies a$ . Se  $Xf$  é suave para cada aberto de  $\mathcal{M}$ , então se  $U \subseteq \mathcal{M}$  for aberto e se  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$  for um mapa de coordenadas em  $U$ , então por hipótese  $Xx^i$  é suave. Visto que  $Xx^i = X^i$ , segue que  $X$  tem funções componentes suaves. Sendo  $U$  qualquer, conclui-se que  $X$  é suave. ■

**Proposição 6.3.** *Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade diferenciável com ou sem bordo. Um mapa  $D: C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$  é uma derivação se e somente se existe  $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  tal que  $Df = Xf$  para toda função  $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ .*

A demonstração da proposição fica como exercício.

Dada um mapa  $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  entre variedades diferenciáveis com ou sem bordo, sua diferencial nos permite obter vetores tangentes a  $\mathcal{N}$  a partir de vetores tangentes a  $\mathcal{M}$ . Essa característica, no entanto, não define um campo vetorial em  $\mathcal{N}$ , visto que  $F$  pode não ser bijetora. No lugar de usar a diferencial para tentar definir um campo vetorial em  $\mathcal{N}$ , introduz-se a noção de campos  $F$ -relacionados.

**Definição 6.1.** *Seja  $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  um mapa suave entre variedades diferenciáveis com ou sem bordo. Se  $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  e  $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{N})$  são campos vetoriais tais que  $dF_p(X_p) = Y_{F(p)}$  para todo  $p \in \mathcal{M}$ , diz-se que  $X$  e  $Y$  são **campos  $F$ -relacionados**.*

**Proposição 6.4.** *Sejam  $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  um mapa suave entre variedades diferenciáveis com ou sem bordo,  $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  e  $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{N})$ .  $X$  e  $Y$  são  $F$ -relacionados se e somente se para toda função suave  $f$  definida em um aberto de  $\mathcal{N}$  vale que*

$$X(f \circ F) = (Yf) \circ F.$$

*Demonstração.*

Seja  $p \in \mathcal{M}$  qualquer e  $f$  uma função suave em um aberto de  $\mathcal{N}$ . Por um lado, temos que

$$dF_p(X_p)f = X_p(f \circ F) = X(f \circ F)(p).$$

Por outro lado

$$((Yf) \circ F)(p) = (Yf)(F(p)) = Y_{F(p)}f.$$

Logo, é evidente que  $X$  e  $Y$  são  $F$ -correlacionados se e somente se  $X(f \circ F) = (Yf) \circ F$ . ■

No caso em que  $F$  é um difeomorfismo e  $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ , então existe um único campo vetorial  $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{N})$  que é  $F$ -correlacionado a  $X$ . A este campo, dá-se o nome de *pushforward de  $X$  por  $F$*  e denota-se  $Y$  por  $F_*X$ .

## 6.2 Bracket de Lie

Dados dois campos vetoriais suaves  $X, Y \in C^\infty(\mathcal{M})$ , **bracket de Lie** é uma operação que associa estes campos ao campo vetorial  $[X, Y]$ , denominado como bracket de Lie de  $X$  e  $Y$ . Este campo é definido por sua ação em funções suaves da seguinte maneira:

$$[X, Y]f := X(Yf) - Y(Xf).$$

**Proposição 6.5.** *Sejam  $X$  e  $Y$  campos vetoriais suaves numa variedade diferenciável com ou sem bordo  $\mathcal{M}$ . O campo vetorial  $[X, Y]$  é suave.*

*Demonstração.*

Basta verificar que  $[X, Y]$  é uma derivação em  $C^\infty(\mathcal{M})$  e aplicar a proposição 6.3. ■



É evidente que se  $X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$  e  $Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}|_p$  são expressões locais de  $X$  e  $Y$  respectivamente, então localmente o bracket desses campos é dado por

$$[X, Y] = \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

De forma sucinta, podemos reescrever a igualdade acima como

$$[X, Y] = (XY^j - YX^j) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Da expressão acima, segue que  $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$  para  $1 \leq i, j \leq n$ .

**Proposição 6.6.** *Seja  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ , onde  $\mathcal{M}$  é uma variedade diferenciável com ou sem bordo. O bracket de Lie satisfaz às seguintes propriedades:*

1. Para todos  $a, b \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} [aX + bY, Z] &= a[X, Z] + b[Y, Z] \\ [Z, aX + bY] &= a[Z, X] + b[Z, Y]. \end{aligned}$$

2.  $[X, Y] = -[Y, X]$ .

3.  $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$ .

4. Para todas  $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$ :

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + (fXg)Y - (gYf)X.$$

A demonstração fica como exercício. A propriedade 3 é comumente chamada de *identidade de Jacobi*.

**Proposição 6.7.** *Seja  $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  um mapa suave entre variedades diferenciáveis com ou sem bordo. Suponha que  $(X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  e  $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(\mathcal{N})$  são tais que  $X_i$  é  $F$ -relacionado a  $Y_i$  para  $i = 1, 2$ . Então  $[X_1, X_2]$  é  $F$ -relacionado a  $[Y_1, Y_2]$ .*

*Demonstração.*

Se  $X_i$  é  $F$ -relacionado a  $Y_i$ , então para qualquer função suave  $f$  definida num aberto de  $\mathcal{N}$ :

$$\begin{aligned} X_1 X_2 (f \circ F) &= X_1 ((Y_2 f) \circ F) = (Y_1 (Y_2 f)) \circ F, \\ X_2 X_1 (f \circ F) &= X_2 ((Y_1 f) \circ F) = (Y_2 (Y_1 f)) \circ F. \end{aligned}$$

Daí, pela definição do bracket de Lie:

$$\begin{aligned} [X_1, X_2](f \circ F) &= X_1 X_2 (f \circ F) - X_2 X_1 (f \circ F) \\ &= (Y_1 (Y_2 f)) \circ F - (Y_2 (Y_1 f)) \circ F \\ &= (Y_1 (Y_2 f) - Y_2 (Y_1 f)) \circ F \\ &= ([Y_1, Y_2]f) \circ F. \end{aligned}$$

Pela proposição 6.4, conclui-se que  $[X_1, X_2]$  e  $[Y_1, Y_2]$  são  $F$ -relacionados. ■

**Corolário 6.1.** Se  $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  é um difeomorfismo, então  $F_*[X_1, X_2] = [F_*X_1, F_*X_2]$  para quais quer  $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ .

Vejam agora como os brackets de Lie aparecem no contexto de grupos de Lie.

**Definição 6.2.** Seja  $G$  um grupo de Lie e  $X \in \mathfrak{X}(G)$ .  $X$  é dito **invariante à esquerda em  $G$**  se para cada  $g \in G$   $X$  for  $L_g$ -relacionado a si mesmo, onde  $L_g: G \rightarrow G$  é o mapa  $h \mapsto gh$ . Em outras palavras:

$$(dL_g)_{g'}(X_{g'}) = X_{gg'}.$$

Visto que translações à esquerda  $L_g$  são difeomorfismos,  $X$  ser invariante à esquerda significa que  $(L_g)_*X = X$ . Claramente, o conjunto dos campos invariantes à esquerda num grupo de Lie é um subespaço vetorial de  $\mathfrak{X}(G)$ . No mais vale a

**Proposição 6.8.** Seja  $G$  um grupo de Lie e sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$  campos vetoriais invariantes à esquerda em  $G$ .  $[X, Y]$  é invariante à esquerda em  $G$ .

*Demonstração.*

Para cada  $g \in G$ ,  $L_g: G \rightarrow G$  é um difeomorfismo. Consequentemente, pelo corolário 6.1 e pela invariância à esquerda de  $X$  e  $Y$  temos que:

$$(L_g)_*[X, Y] = [(L_g)_*X, (L_g)_*Y] = [X, Y].$$

■

**Definição 6.3.** Uma **álgebra de Lie real** é um espaço vetorial  $\mathfrak{g}$  sobre  $\mathbb{R}$  munido com um produto bilinear, anti-simétrico e que satisfaz à identidade de Jacobi  $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ . A tal produto, dá-se o nome de **bracket**.

Naturalmente, uma **subálgebra de Lie real** é um subespaço vetorial  $\mathfrak{h}$  de uma álgebra de Lie (real)  $\mathfrak{g}$  que é fechado com relação ao bracket.

**Definição 6.4.** Sejam  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{h}$  álgebras de Lie. Um mapa linear  $A: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  é um **homomorfismo de álgebras de Lie** se preserva o bracket, isto é, para todos  $X, Y \in \mathfrak{g}$  vale que  $A[X, Y] = [AX, AY]$ .

Da definição acima, é usual definir que um **isomorfismo de álgebras de Lie** é um homomorfismo bijetor de álgebras de Lie. É trivial mostrar que se  $A: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  for um homomorfismo de álgebras de Lie, então  $\ker A$  e  $\mathcal{Im}(A)$  são subálgebras de Lie.

No caso em que  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{h}$  são álgebras de Lie de dimensão finita, então um mapa linear  $A: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  é um homomorfismo de álgebras de Lie se somente se para qualquer (e portanto para toda) base  $\{E_1, \dots, E_n\} \subset \mathfrak{g}$  vale que  $A[E_i, E_j] = [AE_i, AE_j]$ .

Em vista da definição definição 6.3,  $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$  é uma álgebra de Lie. Se  $G$  for um grupo de Lie, então o conjunto de todos campos vetoriais invariantes à esquerda é a subálgebra de Lie de  $\mathfrak{X}(G)$  chamada de **álgebra de Lie de  $G$**  e denotada por  $Lie(G)$ .

**Exemplo 6.1.** O conjunto das matrizes reais  $n \times n$ ,  $M(n, \mathbb{R})$ , é uma álgebra de Lie  $n^2$ -dimensional quando definimos o **comutador** como sendo o bracket a seguir:

$$[A, B] = AB - BA.$$

Quando  $M(n, \mathbb{R})$  torna-se uma álgebra de Lie, é comum denotá-lo por  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ .

Similarmente,  $M(n, \mathbb{C})$  é uma álgebra de Lie  $2n^2$ -dimensional quando introduzimos o comutador e denotamos essa álgebra de Lie por  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ .

**Exemplo 6.2.**  $\mathbb{R}^3$  com o produto vetorial é uma álgebra de Lie.

**Teorema 6.1.** Seja  $G$  um grupo de Lie. O mapa  $\varepsilon: \text{Lie}(G) \rightarrow T_e G$  definido por  $\varepsilon(X) = X_e$  é um isomorfismo entre espaços vetoriais.

*Demonstração.*

A linearidade de  $\varepsilon$  é evidente. Resta mostrar que é uma aplicação bijetora.

Suponha que  $X \in \text{Lie}(G)$  pertence a  $\ker \varepsilon$ . Por definição do núcleo de um mapa linear, temos que  $\varepsilon(X) = 0 \in T_e G$ . Como  $\varepsilon(X) = X_e$ , segue que  $X_e = 0$ . Como  $X$  é invariante à esquerda, para qualquer  $g \in G$  segue que  $d(L_g)_e X_e = X_g = 0$ . Disto, fica evidente que  $\ker \varepsilon = \{0\}$  e portanto  $\varepsilon$  é injetora.

Seja  $v \in T_e G$  qualquer. Defina o seguinte campo de vetores áspero em  $G$ :

$$v^L|_g := d(L_g)_e(v).$$

Afirmo que  $v^L$  é suave e que ele pertence a  $\text{Lie}(G)$ . Com efeito, seja  $f \in C^\infty(G)$  qualquer. Se  $\gamma: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathcal{M}$  é uma curva suave tal que  $\gamma(0) = e$  e  $\gamma'(0) = v$ , então:

$$v^L f(g) = d(L_g)_e v(f) = v^L|_g(f \circ L_g) = \gamma'(0)(f \circ L_g).$$

Daí:

$$v^L f(g) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ L_g \circ \gamma)(t).$$

O mapa  $\xi: (-\delta, \delta) \times G \rightarrow \mathbb{R}$  definido por  $\xi(t, g) := (f \circ L_g \circ \gamma)(t) = f(g\gamma(t))$  é suave e vale que

$$v^L f(g) = \frac{\partial \xi}{\partial t}(0, g).$$

Daí,  $v^L f$  depende suavemente de  $g$  e portanto é suave. Disto, segue que  $v^L$  é suave.

Para mostrar invariância à esquerda, sejam  $g, h \in G$  quaisquer. Tem-se que

$$d(L_h)_g(v^L|_g) = d(L_h)_{L_g(e)}(d(L_g)_e(v)) = d(L_h \circ L_g)_e(v) = v^L|_{hg}.$$

Portanto,  $v^L \in \text{Lie}(G)$ . No mais, como  $L_e$  é o mapa identidade em  $G$ , consequentemente  $\varepsilon(v^L) = v^L|_e = v$  e portanto  $\varepsilon$  é sobrejetivo. ■

**Corolário 6.2.** Seja  $G$  um grupo de Lie. Todo campo vetorial áspero invariante à esquerda em  $G$  é suave.

*Demonstração.*

Se  $X$  é um campo vetorial áspero invariante à esquerda e se  $v = X_e$ , então  $X = v^L$  e portanto é um campo suave. ■

**Corolário 6.3.** *Todo grupo de Lie admite um frame global suave invariante à esquerda.*

*Demonstração.*

Qualquer base de  $Lie(G)$  é um frame global suave invariante à esquerda, já que  $Lie(G) \simeq T_e G$ . ■

**Exemplo 6.3.** *A adição usual em  $\mathbb{R}^n$  torna-o um grupo de Lie. Dado  $b \in \mathbb{R}^n$ , uma translação à esquerda por  $b$  é o mapa  $x \mapsto b + x$ . Em coordenadas usuais, o diferencial deste mapa é simplesmente a matriz identidade e portanto um campo vetorial é invariante à esquerda em  $\mathbb{R}^n$  se suas funções coordenadas forem constantes. Como o bracket de Lie de campos vetoriais constantes é zero, segue que  $Lie(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n$ , considerando o bracket  $[x, y] = (x + y) - (y + x)$  em  $\mathbb{R}^n$ .*

**Teorema 6.2.** *Existe um isomorfismo de álgebras de Lie entre  $Lie(GL(n, \mathbb{R}))$  e  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ .*

*Demonstração.*

■

# Capítulo 7

## Tensores

### 7.1 Álgebra Multilinear

Esta subseção serve como uma curtíssima introdução à álgebra multilinear, que é um requisito indispensável para operações envolvendo tensores. A subseção é totalmente dispensável para aqueles já familiarizados com o tema.

**Definição 7.1.** *Sejam  $V_1, \dots, V_k$  e  $W$  espaços vetoriais<sup>1</sup> sobre  $\mathbb{R}$ <sup>2</sup>. Um mapa  $F: V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W$  é dito **multilinear** quando for linear em cada uma de suas entradas quando as demais estão fixadas. Em outras palavras, para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ , para todos  $v_i, v'_i \in V_i$  e para todos  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  vale que*

$$F(v_1, \dots, \alpha v_i + \beta v'_i, \dots, v_k) = \alpha F(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + \beta F(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_k).$$

O conjunto de todas os mapas multilineares de  $V_1 \times \dots \times V_k$  em  $W$  é denotado por  $L(V_1, \dots, V_k; W)$ . Tal conjunto torna-se um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  quando definidas a soma pontual usual e a multiplicação por escalar usual:

$$(F + F')(v_1, \dots, v_k) := F(v_1, \dots, v_k) + F'(v_1, \dots, v_k),$$

$$(\alpha F)(v_1, \dots, v_k) := \alpha F(v_1, \dots, v_k).$$

Alguns exemplos banais de formas multilineares:

- a) Qualquer produto interno definido a partir de um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ .
- b) O determinante de um operador linear  $A: V \rightarrow V$ , onde  $V$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ .
- c) O bracket que caracteriza uma álgebra de Lie.
- d) O produto vetorial em  $\mathbb{R}^3$ .

---

<sup>1</sup>Por tudo que é sagrado, suponha que eles sempre são espaços vetoriais de dimensão finita!

<sup>2</sup>Se quiser, pode substituir  $\mathbb{R}$  por qualquer outro corpo  $\mathbb{F}$ .

A seguir encontra-se um exemplo de um protótipo do que virá a ser um produto tensorial.

**Exemplo 7.1.** *Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  e considere  $\omega, \eta \in V^*$ , onde  $V^*$  é o dual algébrico de  $V$ . Defina uma função  $\omega \otimes \eta: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  por*

$$\omega \otimes \eta(v_1, v_2) := \omega(v_1)\eta(v_2).$$

*Como  $\omega$  e  $\eta$  são funcionais lineares, facilmente mostra-se que  $\omega \otimes \eta$  é uma forma bilinear e portanto  $\omega \otimes \eta \in L(V, V; \mathbb{R})$ .*

**Exemplo 7.2.** *Generalizando o exemplo anterior, suponha que  $V_1, \dots, V_k$  e  $W_1, \dots, W_l$  são espaços vetoriais sobre  $\mathbb{R}$ . Se  $F \in L(V_1, \dots, V_k; \mathbb{R})$  e  $G \in L(W_1, \dots, W_l; \mathbb{R})$ , então a função  $F \otimes G: V_1 \times \dots \times V_k \times W_1 \times \dots \times W_l \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$F \otimes G(v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_l) := F(v_1, \dots, v_k)G(w_1, \dots, w_l)$$

*é um elemento de  $L(V_1, \dots, V_k, W_1, \dots, W_l; \mathbb{R})$  e chama-se  $F \otimes G$  de **produto tensorial de  $F$  e  $G$** .*

**Proposição 7.1 (Base para o espaço de funções multilineares).** *Sejam  $V_1, \dots, V_k$  espaços vetoriais sobre  $\mathbb{R}$ . Para cada  $j \in \{1, \dots, k\}$ , suponha que  $\{E_1^{(j)}, \dots, E_{n_j}^{(j)}\}$  é uma base para  $V_j$  e seja  $\{\varepsilon_{(j)}^1, \dots, \varepsilon_{(j)}^{n_j}\}$  a base dual para  $V_j^*$ . Então o conjunto*

$$\mathcal{B} := \{\varepsilon_{(1)}^{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon_{(k)}^{i_k} : 1 \leq i_1 \leq n_1, \dots, 1 \leq i_k \leq n_k\}$$

*é uma base para  $L(V_1, \dots, V_k; \mathbb{R})$ .*

*Demonstração.*

Primeiramente, vamos mostrar que  $\mathcal{B}$  é um conjunto linearmente independente. Para tanto, usando a notação de Einstein, suponha que para cada  $k$ -úpla ordenada  $(i_1, \dots, i_k)$ ,  $1 \leq i_j \leq n_j$ , exista  $\alpha_{i_1 \dots i_k} \in \mathbb{R}$  tal que

$$\alpha_{i_1 \dots i_k} \varepsilon_{(1)}^{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon_{(k)}^{i_k} = 0.$$

Dada uma  $k$ -úpla arbitrária de elementos das bases,  $(E_{j_1}^{(1)}, \dots, E_{j_k}^{(k)}) \in V_1 \times \dots \times V_k$ , temos que

$$\alpha_{i_1 \dots i_k} \varepsilon_{(1)}^{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon_{(k)}^{i_k} (E_{j_1}^{(1)}, \dots, E_{j_k}^{(k)}) = \alpha_{i_1 \dots i_k} \delta_{(1)}^{i_1 j_1} \dots \delta_{(k)}^{i_k j_k} = \alpha_{j_1 \dots j_k} = 0.$$

Como  $(E_{j_1}^{(1)}, \dots, E_{j_k}^{(k)})$  é qualquer, rapidamente conclui-se que para toda  $k$ -úpla ordenada  $i_1, \dots, i_k$ ,  $\alpha_{i_1 \dots i_k} = 0$  e portanto  $\mathcal{B}$  é linearmente independente.

Para mostrar que  $\text{span}(\mathcal{B}) = L(V_1, \dots, V_k; \mathbb{R})$ , considere uma função  $F \in L(V_1, \dots, V_k; \mathbb{R})$  qualquer. Por conveniência, para cada  $k$ -úpla ordenada  $(i_1, \dots, i_k)$ , defina

$$F_{i_1 \dots i_k} := F(E_{i_1}^{(1)}, \dots, E_{i_k}^{(k)}).$$

Dada  $(v_1, \dots, v_k) \in V_1 \times \dots \times V_k$  qualquer, temos que

$$F(v_1, \dots, v_k) = F(v^{i_1} E_{i_1}^{(1)}, \dots, v^{i_k} E_{i_k}^{(k)}).$$

Como  $F$  é multilinear, segue que

$$F(v_1, \dots, v_k) = F(E_{i_1}^{(1)}, \dots, E_{i_k}^{(k)}) v^{i_1} \dots v^{i_k}.$$

Como  $v^{i_j} = \varepsilon_{(j)}^{i_j}(v_j)$ , conclui-se que]

$$F(v_1, \dots, v_k) = F_{i_1 \dots i_k} \varepsilon_{(1)}^{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon_{(k)}^{i_k}(v_1, \dots, v_k).$$

Como a  $k$ -úpla é qualquer, então podemos escrever  $F$  como

$$F = F_{i_1 \dots i_k} \varepsilon_{(1)}^{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon_{(k)}^{i_k}.$$

■

**Corolário 7.1.**  $\dim L(V_1, \dots, V_k; \mathbb{R}) = \prod_{l=1}^k n_l.$

## 7.2 Produto Tensorial de Espaços Vetoriais

A noção de produto tensorial apresentada anteriormente pode ser generalizada para espaços vetoriais. Essa generalização pode ser um tanto confusa ou até mesmo abstrata demais, então vale a pena esclarecer de antemão o que será feito a seguir. Grosso modo, a partir de um conjunto de espaços vetoriais  $V_1, \dots, V_k$ , queremos construir um novo espaço vetorial, simbolizado por  $V_1 \otimes \dots \otimes V_k$ , cuja dimensão é o produto das dimensões dos espaços vetoriais utilizados. Um elemento desse novo espaço é um determinado tipo de combinação linear de objetos  $v_1 \otimes \dots \otimes v_k$ , onde  $v_j \in V_j$ , que por sua vez dependem linearmente dos  $v_j$  por construção. Sugiro a leitura de [10] para um melhor entendimento das motivações que levam à definição abstrata do produto tensorial.

O primeiro passo a ser feito é esclarecer qual é o “determinado tipo de combinação linear” mencionado acima. Trata-se de uma **combinação linear formal**. Dado um conjunto  $S$ , diz-se que uma expressão da forma  $\sum_{i=1}^m a_i x_i$ , onde  $a_i \in \mathbb{R}$  e  $x_i \in S$ , é uma combinação linear formal de elementos de  $S$ . A priori,  $S$  não possui nenhuma estrutura algébrica; o ponto aqui é ter uma expressão caracterizada inteiramente por certos elementos de  $S$  juntamente dos coeficientes ligados a estes elementos. Se quisermos, podemos ser um pouco mais rigorosos e definir o seguinte

**Definição 7.2.** *Seja  $S$  um conjunto. Uma **combinação linear formal de elementos de  $S$**  é uma função  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\{x \in S: f(x) \neq 0\}$  é um conjunto finito.*

**Definição 7.3.** *Seja  $S$  um conjunto. O **espaço vetorial livre sobre  $S$** ,  $\mathcal{F}(S)$ , é por definição o conjunto de todas as combinações lineares formais de elementos de  $S$ .*

Introduzindo a soma pontual usual e a multiplicação por escalar usual neste conjunto, facilmente verifica-se que  $\mathcal{F}(S)$  torna-se um espaço vetorial.

De certa maneira, podemos entender  $S$  como um subconjunto de  $\mathcal{F}(S)$ , a partir do mapa  $S \ni x \mapsto \delta_x \in \mathcal{F}(S)$ , onde  $\delta_x$  é a função característica do conjunto  $\{x\}$ . Como esse mapa é injetivo, abusando um pouco a notação, podemos entender  $\delta_x$  como o próprio  $x$  e portanto pensar em  $S$  como um subconjunto do espaço (vetorial) livre. Neste contexto, podemos ver que  $S$  é uma base para  $\mathcal{F}(S)$ , pois como cada elemento deste espaço é uma função que não se anula apenas para um conjunto finito de pontos, podemos escrever  $f$  como

$$f = \sum_{i=1}^m a_i x_i,$$

onde  $a_i = f(x_i)$  e  $x_i$  é o ponto onde  $f$  não se anula<sup>3</sup>.

**Proposição 7.2.** *Sejam  $S$  um conjunto e  $W$  um espaço vetorial. Qualquer mapa  $A: S \rightarrow W$  admite uma única extensão linear  $A': \mathcal{F}(S) \rightarrow W$ .*

*Demonstração.*

Primeiramente, vamos mostrar que  $A: S \rightarrow W$  admite uma extensão linear. Para tanto, considere  $f \in \mathcal{F}(S)$  e sejam  $x_1, \dots, x_m \in S$  os pontos onde  $f$  não se anula. Afirimo que o mapa  $A': \mathcal{F}(S) \rightarrow W$  definido por

$$A'(f) := \sum_{i=1}^m a_i A(x_i)$$

é uma extensão linear de  $A$ . Com efeito, sejam  $g \in \mathcal{F}(S)$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  quaisquer. Sendo  $\mathcal{F}(S)$  um espaço vetorial, então a função  $\alpha f + g$  está bem definida e

$$A'(\alpha f + g) := \sum_{k=1}^p c_k A(z_k)$$

onde  $c_k = \alpha f(z_k) + g(z_k)$ . Logo, segue que

$$A'(\alpha f + g) = \alpha \sum_{k=1}^p f(z_k) A(z_k) + \sum_{k=1}^p g(z_k) A(z_k).$$

Veja que se  $z_k \in S$  é tal que  $f(z_k) = 0$  ou  $g(z_k) = 0$ , então os somatórios acima podem ser reescritos como  $\alpha A'(f)$  e  $A'(g)$ . Portanto,  $A'$  de fato é uma extensão linear.

Para mostrar unicidade, assuma que  $B': \mathcal{F}(S) \rightarrow W$  seja uma outra extensão linear do mapa  $A: S \rightarrow W$ . Dada  $f \in \mathcal{F}(S)$  qualquer, por linearidade de  $B'$ , segue que

$$B'(f) = \sum_{i=1}^m a_i B'(x_i) = \sum_{i=1}^m a_i A(x_i) = A'(f).$$

---

<sup>3</sup>Está subentendido que  $x_i$  está representando a função  $\delta_{x_i}$ . Ademais, a soma na verdade é indexada em  $S$ , mas como  $f$  se anula nos demais elementos, podemos escrever a soma da forma como foi feita.



Sendo a segunda igualdade obtida observando que  $B'|_S = A$ . Sendo  $f$  qualquer, conclui-se que  $B' = A'$ . ■

Sejam  $V_1, \dots, V_k$  espaços vetoriais. Considere o espaço vetorial  $\mathcal{F}(V_1 \times \dots \times V_k)$  e seja  $\mathcal{R}$  o subespaço vetorial formado pelo span de elementos da forma

$$(v_1, \dots, av_i, \dots, v_k) - a(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k),$$

$$(v_1, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_k) - (v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) - (v_1, \dots, v'_i, \dots, v_k).$$

Sendo  $v_j, v'_j \in V_j$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$  e  $a \in \mathbb{R}$ .

O **produto tensorial dos espaços**  $V_1, \dots, V_k$ , simbolizado por  $V_1 \otimes \dots \otimes V_k$  é o conjunto

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_k := \mathcal{F}(V_1 \times \dots \times V_k) / \mathcal{R}.$$

Seja  $\Pi: \mathcal{F}(V_1 \times \dots \times V_k) \rightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_k$  a projeção natural, então

$$\Pi(v_1, \dots, v_k) = v_1 \otimes \dots \otimes v_k \quad (7.1)$$

para todo  $(v_1, \dots, v_k) \in \mathcal{F}(V_1 \times \dots \times V_k)$ .

Segue da definição que

$$v_1 \otimes \dots \otimes av_i \otimes \dots \otimes v_k = a(v_1 \otimes \dots \otimes v_k)$$

$$v_1 \otimes \dots \otimes (v_i + v'_i) \otimes \dots \otimes v_k = v_1 \otimes \dots \otimes v_i \otimes \dots \otimes v_k + v_1 \otimes \dots \otimes v'_i \otimes \dots \otimes v_k.$$

**Proposição 7.3 (Propriedade universal do produto tensorial).** *Sejam  $V_1, \dots, V_k$  espaços vetoriais (de dimensão finita) sobre  $\mathbb{R}$ . Se  $A: V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow X$  é um mapa multilinear em um espaço vetorial  $X$ , então existe um único mapa linear  $\tilde{A}: V_1 \otimes \dots \otimes V_k \rightarrow X$  tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times \dots \times V_k & \xrightarrow{A} & X \\ \downarrow \pi & \nearrow \tilde{A} & \\ V_1 \otimes \dots \otimes V_k & & \end{array}$$

sendo  $\pi$  o mapa definido por  $\pi(v_1, \dots, v_k) = v_1 \otimes \dots \otimes v_k$ .

*Demonstração.*

Pela Proposição 7.2,  $A$  possui uma única extensão linear  $A': \mathcal{F}(V_1 \times \dots \times V_k) \rightarrow X$ . Facilmente verifica-se que  $\mathcal{R} \subseteq \ker A'$  e portanto  $V_1 \otimes \dots \otimes V_k \subseteq \mathcal{F}(V_1 \times \dots \times V_k) / \ker A'$ . Temos que  $A'$  é um homomorfismo por conta da linearidade. Ademais,  $\ker A'$  e  $\text{Im}(A')$  são subespaços vetoriais, o que significa que em particular são subgrupos abelianos do espaço vetorial livre e de  $X$ , respectivamente. Pelo primeiro teorema de isomorfismos, existe um único mapa  $\psi: \mathcal{F}(V_1 \times \dots \times V_k) / \ker A' \rightarrow \text{Im}(A')$  tal que  $\mathcal{F}(V_1 \times \dots \times V_k) / \ker A' \simeq \text{Im}(A')$ , definido por  $\psi([x]) := A'(x)$ . Logo, basta definir  $\tilde{A} := \psi|_{V_1 \otimes \dots \otimes V_k}$  para obter o mapa desejado, pois  $\tilde{A} \circ \pi = A$ . ■

**Proposição 7.4 (Base para  $V_1 \otimes \dots \otimes V_k$ ).** *Suponha que  $V_1, \dots, V_k$  são espaços vetoriais sobre  $\mathbb{R}$  tal que  $\dim V_j = n_j$ , para  $j = 1, \dots, k$ . Além disso, para cada  $j$ , seja  $\{E_1^{(j)}, \dots, E_{n_j}^{(j)}\}$  uma base para  $V_j$ . Então o conjunto*

$$\mathcal{C} = \left\{ E_{i_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes E_{i_k}^{(k)} : 1 \leq i_1 \leq n_1, \dots, 1 \leq i_k \leq n_k \right\}$$

*é uma base para  $V_1 \otimes \dots \otimes V_k$ .*

*Demonstração.*

Segue da definição de  $V_1 \otimes \dots \otimes V_k$  que este espaço é o span de elementos da forma  $v_1 \otimes \dots \otimes v_k$ , onde  $v_j \in V_j$ . Escrevendo cada  $v_j$  em termos dos elementos da base de seu respectivo espaço, segue que  $\text{span}(\mathcal{C}) = V_1 \otimes \dots \otimes V_k$ . Resta que o conjunto é L.I.. Para tanto, suponha que

$$\alpha^{i_1 \dots i_k} E_{i_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes E_{i_k}^{(k)} = 0.$$

Para cada  $k$ -úpla  $m_1, \dots, m_k$  de índices, seja  $\tau^{m_1 \dots m_k}: V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow \mathbb{R}$  o mapa definido por

$$\tau^{m_1 \dots m_k}(v_1, \dots, v_k) := \varepsilon_{(1)}^{m_1}(v_1) \dots \varepsilon_{(k)}^{m_k}(v_k).$$

Claramente este é um mapa multilinear, portanto, pela Proposição 7.3(propriedade universal), existe o mapa linear  $\tilde{\tau}^{m_1 \dots m_k}: V_1 \otimes \dots \otimes V_k \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}^{m_1 \dots m_k} \left( \alpha^{i_1 \dots i_k} E_{i_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes E_{i_k}^{(k)} \right) &= \alpha^{i_1 \dots i_k} \tau^{m_1 \dots m_k} \left( E_{i_1}^{(1)}, \dots, E_{i_k}^{(k)} \right) \\ &= \alpha^{m_1 \dots m_k} = 0. \end{aligned}$$

■

**Corolário 7.2.**  $\dim(V_1 \otimes \dots \otimes V_k) = \prod_{j=1}^k n_j$ .

Pelo corolário acima, podemos ver que o produto tensorial de espaços vetoriais  $V_1, \dots, V_k$  é bem maior que o produto cartesiano destes espaços. Uma evidência disto é que nem todo elemento do produto tensorial dos espaços acima é da forma  $v_1 \otimes \dots \otimes v_k$ ; existem elementos que são combinações lineares de objetos da forma anterior. Quando um tensor pode ser descrito apenas por  $v_1 \otimes \dots \otimes v_k$ , diz-se que ele é puro/decomponível. Parece que noção pode ser estendida à mecânica quântica no contexto de entrelaçamento quântico. Talvez valha a pena dar uma pesquisada.

**Proposição 7.5.** *Sejam  $V_1, V_2$  e  $V_3$  espaços vetoriais de dimensão finita sobre  $\mathbb{R}$ . Então existem isomorfismos únicos*

$$V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \simeq V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \simeq (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3,$$

*com  $v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)$ ,  $v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$  e  $(v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$  sendo correspondentes dois a dois.*

*Demonstração.*

Seja  $A: V_1 \times V_2 \times V_3 \rightarrow (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$  definido por

$$A(v_1, v_2, v_3) := (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3.$$

Sendo  $A$  multilinear, então pela propriedade universal, segue que existe o mapa linear  $\tilde{A}: V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \rightarrow (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$  definido por

$$\tilde{A}(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3.$$

Claramente  $\tilde{A}$  é sobrejetivo. Logo, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, segue que  $\dim \ker(\tilde{A}) = 0$ . Donde conclui-se, da linearidade de  $\tilde{A}$ , que  $\ker(\tilde{A}) = \{0\}$  e portanto esta aplicação é um isomorfismo. Como qualquer outro isomorfismo teria de concordar com  $\tilde{A}$  nos elementos  $v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$ , está garantida a unicidade do isomorfismo. ■

**Proposição 7.6 (Produto tensorial abstrato versus produto tensorial de covetores).** *Sejam  $V_1, \dots, V_k$  espaços vetoriais de dimensão finita. Então existe um isomorfismo canônico*

$$V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^* \simeq L(V_1, \dots, V_k; \mathbb{R}), \quad (7.2)$$

tal que cada  $(v_1 \otimes \dots \otimes v_k)$  corresponde ao produto tensorial de covetores<sup>4</sup>  $\omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^k$ .

*Demonstração.*

Seja  $\psi: V_1^* \times \dots \times V_k^* \rightarrow L(V_1, \dots, V_k; \mathbb{R})$  definido pontualmente por

$$\psi(\omega^1, \dots, \omega^k)(v_1, \dots, v_k) := \omega^1(v_1) \dots \omega^k(v_k).$$

Como  $\psi$  é um mapa multilinear e pela propriedade universal do produto tensorial, conclui-se que existe um único mapa linear  $\tilde{\psi}: V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^* \rightarrow L(V_1, \dots, V_k; \mathbb{R})$ . Definindo bases em cada um dos  $V_j$ , visto que  $\tilde{\psi}$  leva a base de  $V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^*$  na base (induzida) de  $L(V_1, \dots, V_k; \mathbb{R})$ , conclui-se que  $\tilde{\psi}$  é um isomorfismo. ■

Como os espaços na Proposição 7.6 são de dimensão finita, existe o isomorfismo canônico entre  $V_j^{**}$  e  $V_j$  para cada  $j$  e portanto, pela mesma proposição, temos também que

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_k \simeq L(V_1^*, \dots, V_k^*; \mathbb{R}). \quad (7.3)$$

Doravante, podemos entender um tensor tanto como uma classe de equivalência em quocientes à la  $\mathcal{F}(V_1 \times \dots \times V_k)/\mathcal{R}$  como uma função multilinear em conjuntos à la  $L(V_1^*, \dots, V_k^*; \mathbb{R})$ .

<sup>4</sup>Funcionais lineares, elementos do dual algébrico de cada  $V_j$ .

### 7.3 Tensores covariantes, contravariantes, simétricos e alternantes

**Definição 7.4.** *Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  de dimensão finita. Se  $k$  é um inteiro positivo, então um **tensor covariante do tipo  $k$  sobre  $V$**  é um elemento de  $V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^*$ , onde  $V_j = V$  para todo  $j$ . Pela proposição 7.6, este elemento pode ser visto como uma função  $k$ -linear*

$$\alpha: V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}.$$

O número  $k$  é chamado de **rank de  $\alpha$** .

Por convenção, um tensor covariante de tipo 0 é um número real. O espaço vetorial dos tensores covariantes do tipo  $k$  sobre  $V$  também é denotado por

$$T^k(V^*) \equiv V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^*.$$

**Exemplo 7.3.** *Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita. Então*

- a) *Qualquer funcional linear  $\omega: V \rightarrow \mathbb{R}$  é um elemento de  $T^1(V^*)$ .*
- b) *Todo produto interno  $\langle \cdot | \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  é um tensor covariante do tipo 2, comumente chamado de **forma bilinear**.*
- c) *O determinante de um operador linear  $A: V \rightarrow V$  é um elemento de  $T^n(V^*)$  quando  $\dim V = n$ .*

**Definição 7.5.** *Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  de dimensão finita. O espaço dos **tensores contravariantes de rank  $k$  sobre  $V$**  é o espaço vetorial*

$$T^k(V) \equiv V_1 \otimes \dots \otimes V_k,$$

onde  $V_j = V$  para todo  $j$ .

Por convenção, assume-se que  $T^0(V) = \mathbb{R}$  e pela definição acima, temos que  $T^1(V) = V$ .

Pela proposição 7.6, temos que cada vetor contravariante de rank  $k$  é uma função multilinear definida no produto cartesiano de  $k$  cópias de  $V^*$ .

**Definição 7.6.** *Sejam  $k$  e  $l$  inteiros não negativos. O espaço dos **tensores mistos do tipo  $(k, l)$  sobre  $V$**  é definido como*

$$T^{(k, l)}(V) \equiv V_1 \otimes \dots \otimes V_k \otimes V_1^* \otimes \dots \otimes V_l^*,$$

onde  $V_j = V$ ,  $j = 1, \dots, k$  e  $V_i^* = V^*$ ,  $i = 1, \dots, l$ .

Observe que

$$T^{(0,0)} = T^0(V) = T^0(V^*) = \mathbb{R}$$

$$T^{(0,1)} = T^1(V^*) = V^*$$

$$T^{(1,0)} = T^1(V) = V$$

$$T^{(0,k)} = T^k(V^*)$$

$$T^{(k,0)} = T^k(V)$$

**Observação:** as igualdades acima só valem devido à forma como definimos  $T^{(k,l)}(V)$ . Existem textos que invertem os papéis de  $k$  e  $l$ . Outra notação possível para os tensores mistos conforme definidos aqui é  $T_k^l(V)$ .

**Corolário 7.3.** *Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  tal que  $\dim V = n \in \mathbb{N}_0$ . Suponha que a coleção  $\{E_i\}$  é uma base para  $V$  e que  $\{\varepsilon^j\}$  seja a base dual. Então, vale que os conjuntos:*

$$\{\varepsilon^{i_1} \dots \otimes \dots \otimes \varepsilon^{i_k} : 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n\},$$

$$\{E_{i_1} \dots \otimes \dots \otimes E_{i_k} : 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n\},$$

$$\{E_{i_1} \dots \otimes \dots \otimes E_{i_k} \otimes \varepsilon^{j_1} \dots \otimes \dots \otimes \varepsilon^{j_l} : 1 \leq i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l \leq n\}$$

são bases para  $T^k(V^*)$ ,  $T^k(V)$  e  $T^{(k,l)}(V)$ , respectivamente.

**Definição 7.7.** *Seja  $V$  um espaço vetorial real de dimensão finita. Um tensor  $k$ -covariante  $\alpha$  em  $V$  é dito **simétrico** quando seu valor é inalterado por trocas de posição dois a dois de seus argumentos, ou seja:*

$$\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = \alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$$

para  $1 \leq i < j \leq k$ .

**Proposição 7.7.** *Seja  $\alpha$  um tensor  $k$ -covariante sobre  $V$ . As afirmações a seguir são equivalentes:*

- a)  $\alpha$  é simétrico.
- b) Para quaisquer  $v_1, \dots, v_k \in V$ , o valor de  $\alpha(v_1, \dots, v_k)$  é inalterado por qualquer troca de posição de seus argumentos.
- c) Para qualquer base fixada em  $V$ , as componentes de  $\alpha$  permanecem inalteradas por qualquer permutação da ordem dos índices.

*Demonstração.*

a  $\implies$  b) Seja  $\sigma: \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$  uma permutação. Defina

$$(\sigma\alpha)(v_1, \dots, v_k) := \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}).$$

Podemos escrever  $\sigma$  como o produto de  $r$  transposições<sup>5</sup>  $\tau_l$ ,  $l = 1, \dots, r$ . Pela simetria de  $\alpha$ , segue que  $\tau_l\alpha = \alpha$  para todo  $l$ . Desta forma,  $\sigma\alpha = (\tau_1 \circ \dots \circ \tau_r)\alpha = \alpha$ . Apesar de a representação de  $\sigma$  como produto de transposições não ser única, este resultado independe deste fato, pois se escrevermos  $\sigma$  como produto de  $s \neq r$  transposições, basta aplicar o mesmo raciocínio.

b  $\implies$  c) Seja  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base qualquer em  $V$ . Fixando-a, sabemos que

$$\alpha(e_{l_1}, \dots, e_{l_k}) = \alpha_{l_1 \dots l_k}, \quad 1 \leq l_1, \dots, l_k \leq n.$$

Por hipótese, se  $\sigma$  é uma permutação de  $\{1, \dots, k\}$ , temos que

$$\alpha(e_{l_1}, \dots, e_{l_k}) = \alpha(e_{\sigma(l_1)}, \dots, e_{\sigma(l_k)}).$$

Logo,  $\alpha_{l_1 \dots l_k} = \alpha_{\sigma(l_1) \dots \sigma(l_k)}$ .

c  $\implies$  a) Seja  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base qualquer em  $V$  fixada.

Sejam  $v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k \in V$ , com  $i < j$ . Usando a notação de Einstein, sabemos que

$$\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = \alpha(v_1^{l_1} e_{l_1}, \dots, v_i^{l_i} e_{l_i}, \dots, v_j^{l_j} e_{l_j}, \dots, v_k^{l_k} e_{l_k}).$$

Pela multilinearidade de  $\alpha$ , segue que

$$\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = v_1^{l_1} \dots v_i^{l_i} \dots v_j^{l_j} \dots v_k^{l_k} \alpha(e_{l_1}, \dots, e_{l_i}, \dots, e_{l_j}, \dots, e_{l_k}).$$

Portanto

$$\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = v_1^{l_1} \dots v_i^{l_i} \dots v_j^{l_j} \dots v_k^{l_k} \alpha_{l_1 \dots l_i \dots l_j \dots l_k}.$$

Por hipótese, as componentes de  $\alpha$  não se alteram por quaisquer permutações dos índices, portanto  $\alpha_{l_1 \dots l_i \dots l_j \dots l_k} = \alpha_{l_1 \dots l_j \dots l_i \dots l_k}$ . Além disso, como os  $v_m^{l_m}$  são números reais, por comutatividade do produto, concluímos que

$$\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = \alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k).$$

Logo,  $\alpha$  é simétrico. ■

O espaço dos tensores  $k$ -contravariantes simétricos é um subespaço linear de  $T^k(V^*)$ . Denotando-o por  $\Sigma^k(V^*)$ , define-se a projeção  $Sim: T^k(V^*) \rightarrow \Sigma^k(V^*)$ , chamada de **simetrização**, que a cada tensor  $\alpha \in T^k(V^*)$  associa o tensor

$$Sim \alpha := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \sigma\alpha,$$

onde  $\sigma$  é um elemento do grupo de permutações  $S_k$ .

<sup>5</sup>Permutações de apenas dois elementos de  $\{1, \dots, k\}$ .

**Exercício 7.1 (Propriedades da simetrização.).** *Seja  $\alpha$  um tensor contravariante de rank  $k$ . Então*

- a) *Sim  $\alpha$  é simétrico.*
- b) *Sim  $\alpha = \alpha \iff \alpha \in \Sigma^k(V^*)$ .*

**Exercício 7.2.** *Se  $\alpha$  e  $\beta$  são respectivamente tensores simétricos contravariantes de ranks  $k$  e  $l$ , não necessariamente  $\alpha \otimes \beta$  é um tensor simétrico. Apesar disso, usando a simetrização, podemos definir uma operação chamada **produto simétrico** que associa ao par ordenado  $(\alpha, \beta)$  um tensor simétrico de rank  $k+l$ . Definimos esse novo tensor como sendo*

$$\alpha\beta := \text{Sim}(\alpha \otimes \beta).$$

*Explicitamente, temos que*

$$\alpha\beta(v_1, \dots, v_{k+l}) = \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}).$$

*Mostre que o produto simétrico satisfaz às seguintes propriedades:*

- a) *O produto simétrico é bilinear.*
- b) *Se  $\alpha$  e  $\beta$  são covetores, i.e.,  $k = 1$ , então*

$$\alpha\beta = \frac{1}{2}(\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha).$$

**Definição 7.8.** *Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita. Um tensor  $k$ -covariante em  $V$  é dito **alternante**<sup>6</sup> quando qualquer mudança de posição entre dois argumentos provoca uma alteração de sinal, ou seja:*

$$\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k),$$

*para  $1 \leq i < j \leq k$ .*

Outros nomes possíveis para estes tensores são  $k$ -covetores, multi-covetores e formas exteriores. O conjunto dos tensores  $k$ -covariantes alternantes é um subespaço vetorial de  $T^k(V^*)$  simbolizado por  $\Lambda^k(V^*)$ .

O exercício a seguir é análogo à proposição 7.7.

**Exercício 7.3.** *Seja  $\alpha$  um tensor  $k$ -covariante sobre  $V$ . As afirmações a seguir são equivalentes:*

- a)  *$\alpha$  é anti-simétrico.*

---

<sup>6</sup>Às vezes chamado de anti-simétrico.

b) Para quaisquer  $v_1, \dots, v_k \in V$  e qualquer permutação  $\sigma \in S_k$ :

$$\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = (\text{sgn } \sigma) \alpha(v_1, \dots, v_k).$$

Lembrando que o sinal de uma permutação é  $\text{sgn } \sigma = (-1)^m$ , onde  $m$  é o número de transposições em que  $\sigma$  foi decomposta.

c) Para qualquer base fixada em  $V$ , as componentes de  $\alpha$  mudam de sinal para qualquer transposição de índices.

Algumas observações simplórias sobre tensores covariantes: todo tensor de rank 0 é simétrico e alternante, pois são números reais; todo tensor de rank 1 também é simétrico e alternante, pois existem 0 transposições a serem feitas; todo tensor de rank 2  $\beta$  é combinação linear de tensores simétricos e alternantes, pois

$$\beta(v, w) = \frac{1}{2}(\beta(v, w) - \beta(w, v)) + \frac{1}{2}(\beta(v, w) + \beta(w, v)) = \alpha(v, w) + \eta(v, w),$$

onde  $\alpha$  é alternante e  $\eta$  é simétrico.

## 7.4 Tensores e Campos Tensoriais em Variedades

Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade diferenciável. Definimos o **fibrado de tensores k-covariantes em  $\mathcal{M}$**  como sendo o seguinte conjunto:

$$T^k T^* \mathcal{M} := \bigsqcup_{p \in \mathcal{M}} T^k(T_p^* \mathcal{M}).$$

De forma inteiramente análoga, podemos definir o **fibrado de tensores k-contravariantes** e o **fibrado de tensores mistos do tipo (k,l)** como sendo respectivamente

$$T^k T \mathcal{M} := \bigsqcup_{p \in \mathcal{M}} T^k(T_p \mathcal{M}),$$

$$T^{(k,l)} T \mathcal{M} := \bigsqcup_{p \in \mathcal{M}} T^{(k,l)}(T_p \mathcal{M}).$$

Todos esses fibrados são ditos fibrados tensoriais sobre  $\mathcal{M}$ . Eis algumas



identificações:

$$T^{(0,0)}T\mathcal{M} = T^0T\mathcal{M} = T^0T^*\mathcal{M} = \mathcal{M} \times \mathbb{R},$$

$$T^{(0,1)}T\mathcal{M} = T^1T^*\mathcal{M} = T^*\mathcal{M},$$

$$T^{(1,0)}T\mathcal{M} = T^1T\mathcal{M} = T\mathcal{M},$$

$$T^{(0,k)}T\mathcal{M} = T^kT^*\mathcal{M},$$

$$T^{(1,0)}T\mathcal{M} = T^kT\mathcal{M}.$$

Uma seção de um fibrado tensorial é o que chamamos de um **campo tensorial em  $\mathcal{M}$** . Pode-se mostrar que eles possuem estrutura de um fibrado vetorial sobre a variedade. Um campo tensorial suave nada mais é do que uma seção suave de um fibrado tensorial. Da mesma forma como o fibrado tangente é uma forma de pensarmos em uma associação de cada ponto na variedade a um vetor tangente, o fibrado tensorial é uma forma de pensarmos em uma associação de cada ponto na variedade a um tensor (covariante, contravariante ou misto).

O conjunto de todos os campos tensoriais da forma  $\Gamma(T^kT^*\mathcal{M})$ <sup>7</sup> é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ . Quando trocamos o corpo  $\mathbb{R}$  pelo anel comutativo  $C^\infty(\mathcal{M})$ , mas ainda mantendo a mesma estrutura de espaço vetorial, dizemos que o conjunto se torna um **módulo** sobre  $C^\infty(\mathcal{M})$ .

Em termos de coordenadas locais  $(x^i)$ , os campos tensoriais podem ser escritos como

$$A = \begin{cases} A_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}, & A \in \Gamma(T^kT^*\mathcal{M}); \\ A^{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}, & A \in \Gamma(T^kT\mathcal{M}); \\ A_{j_1, \dots, j_l}^{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}} \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}, & A \in \Gamma(T^{(k,l)}T\mathcal{M}). \end{cases}$$

As funções  $A_{i_1, \dots, i_k}$ ,  $A^{i_1, \dots, i_k}$  e  $A_{j_1, \dots, j_l}^{i_1, \dots, i_k}$  são chamadas de funções componentes de  $A$  nas coordenadas adotadas. A seguir, encontra-se uma proposição bem intuitiva cuja demonstração fica como exercício.

**Proposição 7.8.** *Sejam  $\mathcal{M}$  uma variedade diferenciável e  $A: \mathcal{M} \rightarrow T^kT^*\mathcal{M}$  uma seção áspera, i.e., não necessariamente contínua. As seguintes afirmações são equivalentes*

- $A$  é suave.*
- Em qualquer carta, as funções componentes de  $A$  são suaves.*
- Todo ponto de  $M$  está contido em uma vizinhança coordenada em que  $A$  tem componentes suaves.*

<sup>7</sup>Igualmente para  $\Gamma(T^kT\mathcal{M})$  ou  $\Gamma(T^{(k,l)}T\mathcal{M})$ .

Um **campo tensorial simétrico** em uma variedade é simplesmente um campo tensorial covariante que a cada  $p \in \mathcal{M}$  associa um tensor simétrico. Campos tensoriais alternantes são chamados de **formas diferenciais**.

**Exemplo 7.4 (Métrica Riemanniana).** *Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade diferenciável. Uma **métrica Riemanniana em  $\mathcal{M}$**  é um campo tensorial covariante suave de tipo  $(0,2)$  que é definido positivo em cada ponto de  $\mathcal{M}$ . Uma **variedade Riemanniana** é um par ordenado  $(\mathcal{M}, g)$ , onde  $\mathcal{M}$  é uma variedade diferenciável e  $g$  é uma métrica Riemanniana.*

Como já visto, tensores do tipo  $(0,2)$  são formas bilineares, logo para cada  $p$ , o tensor  $g_p$  é um produto interno em  $T_p\mathcal{M}$ . Costumeiramente denota-se  $g_p(v, w)$  por  $\langle v|w \rangle_p$ . Em coordenadas locais podemos escrever a métrica como sendo

$$g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j.$$

Em termos do produto simétrico temos que

$$g = g_{ij}dx^i dx^j.$$

**Exemplo 7.5.** *Um exemplo de métrica Riemanniana é a **métrica Euclidiana**,  $\bar{g}$ , em  $\mathbb{R}^n$ . Em coordenadas locais, temos que*

$$\bar{g} = \delta_{ij}dx^i dx^j.$$

Abreviando o produto simétrico  $dx^i dx^i$  por  $(dx^i)^2$ , temos que

$$\bar{g} = (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2.$$

Logo, se  $(v, w) \in T_p\mathbb{R}^n$ , temos que

$$\bar{g}_p(v, w) = \delta_{ij}v^i w^j = v \cdot w.$$

**Exemplo 7.6 (Espaço-tempo).** *Um **espaço-tempo**  $\mathcal{M}$  é uma variedade diferenciável 4-dimensional conexa com um campo tensorial  $g$  que é covariante, suave, simétrico, do tipo  $(0,2)$ , não-degenerado e Lorentziano. Por não-degenerado queremos dizer que para todo  $p \in \mathcal{M}$ , se  $v \in T_p\mathcal{M}$  é não nulo, então existe  $w \in T_p\mathcal{M}$  tal que  $g_p(v, w) \neq 0$ . Por Lorentziano queremos dizer que para todo  $p \in \mathcal{M}$  existe uma base em  $T_p\mathcal{M}$  tal que  $g_p$  tem diagonal  $(-1, 1, 1, 1)$ .*

Dado  $p \in \mathcal{M}$ , um elemento de  $v \in T_p\mathcal{M}$  é dito do tipo tempo, do tipo espaço ou do tipo luz se  $g_p(v, v) = (g_p)_{ij}v^i v^j$  é menor, maior ou igual a zero, respectivamente. O **cone de luz em  $p$**  é o conjunto de todos os vetores tangentes do tipo luz em  $T_p\mathcal{M}$ .

### Pullback de Campos Tensoriais

A construção a seguir só é válida para tensores covariantes e em vista disso este termo será omitido, pois estará subentendido qual é o tipo de tensor com o qual estamos lidando.

**Definição 7.9.** Suponha que  $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  é um mapa  $C^\infty$  entre variedades. Para qualquer  $p \in \mathcal{M}$  e qualquer  $\alpha \in T^k(T_{F(p)}^*\mathcal{N})$ , define-se o tensor  $dF_p^*(\alpha) \in T^k(T_p^*\mathcal{M})$ , chamado de **pullback pontual de  $\alpha$  por  $F$  em  $p$** , por

$$dF_p^*(\alpha)(v_1, \dots, v_k) := \alpha(dF_p(v_1), \dots, dF_p(v_k)),$$

para quaisquer  $v_1, \dots, v_k \in T_p\mathcal{M}$ .

Se  $A$  é um campo de tensores  $k$ -covariantes em  $\mathcal{N}$ , pode-se definir um campo tensorial áspero  $F^*A$  em  $\mathcal{M}$ , chamado de **pullback de  $A$  por  $F$** , por

$$(F^*A)_p = dF_p^*(A_{F(p)}).$$

O tensor  $(F^*A)_p$  atua da seguinte forma:

$$(F^*A)_p(v_1, \dots, v_k) = A_{F(p)}(dF_p(v_1), \dots, dF_p(v_k))$$

**Proposição 7.9 (Propriedades do Pullback tensorial).** Sejam  $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  e  $G: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}$  mapas  $C^\infty$  entre variedades. Suponha que  $A$  e  $B$  são campos tensoriais covariantes em  $\mathcal{N}$  e que  $f$  é uma função definida em  $\mathcal{N}$ . Então:

- a)  $F^*(fB) = (f \circ F)F^*B$ .
- b)  $F^*(A \otimes B) = F^*A \otimes F^*B$ .
- c)  $F^*(A + B) = F^*A + F^*B$ .
- d)  $F^*B$  é contínuo, além disso, ele é suave se  $B$  for suave.
- e)  $(G \circ F)^*B = F^*(G^*B)$ .
- f)  $\mathbb{1}_{\mathcal{N}}^*B = B$ .

**Exercício 7.4.** Prove a proposição 7.9.

**Corolário 7.4.** Se  $p \in \mathcal{M}$  e  $(y^i)$  são mapas coordenadas em  $\mathcal{N}$  numa vizinhança de  $F(p)$  então  $F^*B$  pode ser escrito como

$$F^*(B_{i_1 \dots i_k} dy^{i_1} \otimes \dots \otimes dy^{i_k}) = (B_{i_1 \dots i_k} \circ F) d(y^{i_1} \circ F) \otimes \dots \otimes d(y^{i_k} \circ F),$$

onde  $dy^{i_1}$  é elemento da base dual originada pela base induzida  $T_{F(p)}\mathcal{N}$ .

**Exemplo 7.7.** Sejam  $\mathcal{M} = \{(r, \theta): r > 0, |\theta| < \pi/2\}$  e  $\mathcal{N} = \{(x, y): x > 0\}$  e suponha que  $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$  é o mapa suave  $F(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ . O pullback do campo tensorial  $A = x^{-2} dy \otimes dy$  por  $F$  é facilmente computado a partir do corolário anterior. Temos que

$$F^*A = (r \cos \theta)^{-2} d(r \sin \theta) \otimes d(r \sin \theta).$$

Utilizando as propriedades básicas do diferencial e dos tensores, conclui-se que

$$F^*A = r^{-2} \tan^2 \theta dr \otimes dr + r^{-1} \tan \theta (d\theta \otimes dr + dr \otimes d\theta + d\theta \otimes d\theta).$$

### Isomorfismos Musicais

Numa variedade Riemanniana ou num espaço-tempo  $(\mathcal{M}, g)$ , o tensor métrico induz um isomorfismo de fibrados  $\hat{g}: T\mathcal{M} \rightarrow T^*\mathcal{M}$  ubíquo em relatividade geral: o abaixamento de índice. Exclusivamente nessa parte, as palavras campo de (co)vetores e (co)vetores talvez sejam utilizadas intercambiavelmente e campos de (co)vetores podem ser confundidos com vetores. Para maior clareza do que será feito a seguir, é necessário apresentar as definições e os lemas a seguir:

**Definição 7.10.** *Sejam  $\pi: E \rightarrow \mathcal{M}$  e  $\pi': E' \rightarrow \mathcal{M}'$  fibrados vetoriais suaves. Um mapa contínuo  $F: E \rightarrow E'$  é um **homomorfismo de fibrados** se existe um mapa  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & E' \\ \pi \uparrow & & \downarrow \pi' \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{f} & \mathcal{M}' \end{array}$$

e se para cada  $p \in \mathcal{M}$  a restrição  $F|_{E_p}: E_p \rightarrow E_{f(p)}$  é linear.

No caso em que  $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$ ,  $f$  é o mapa identidade e diz-se que  $F$  é um homomorfismo de fibrados sobre  $\mathcal{M}$ .

**Definição 7.11.** *Sejam  $\pi: E \rightarrow \mathcal{M}$  e  $\pi': E' \rightarrow \mathcal{M}'$  fibrados vetoriais suaves. Um **isomorfismo suave de fibrados** é um homomorfismo de fibrados  $F: E \rightarrow E'$  bijetor e tal que  $F$  seja um difeomorfismo. No caso em que  $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$ , diz-se que  $F$  é um isomorfismo suave de fibrados sobre  $\mathcal{M}$ .*

**Lema 7.1.** *Um mapa  $A: \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$  é induzido por um campo tensorial covariante  $A \in \Gamma(T^{(0,k)}T\mathcal{M})$  se e somente se for  $C^\infty$ -multilinear.*

Para a volta do lema acima, basta definir  $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_k) := A(X_1, \dots, X_k)$ .

**Lema 7.2.** *Sejam  $\pi: E \rightarrow \mathcal{M}$  e  $\pi': E' \rightarrow \mathcal{M}$  fibrados vetoriais suaves. Um mapa  $\mathcal{F}: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E')$  é  $C^\infty$ -linear se e somente se existe um homomorfismo suave de fibrados  $F: E \rightarrow E'$  tal que  $\mathcal{F}(\sigma) = F\sigma$  para todo  $\sigma \in \Gamma(E)$ .*

A volta do lema acima é trivial: se  $F: E \rightarrow E'$  for um homomorfismo suave de fibrados, então basta definir  $\mathcal{F}(\sigma)(p) = F(\sigma(p))$ .

**Lema 7.3.** *Sejam  $\pi: E \rightarrow \mathcal{M}$  e  $\pi': E' \rightarrow \mathcal{M}$  fibrados vetoriais suaves. Se  $F: E \rightarrow E'$  for um homomorfismo suave de fibrados bijetor, então  $F$  é um isomorfismo suave de fibrados.*

Dada uma variedade Riemanniana (ou um espaço-tempo), podemos usar o tensor métrico  $g$  para definir o mapa  $\hat{g}: T\mathcal{M} \rightarrow T^*\mathcal{M}$  que a cada  $p \in \mathcal{M}$  e  $v \in T_p\mathcal{M}$  associa o funcional linear  $\hat{g}(v) \in T_p^*\mathcal{M}$  dado por

$$g(v)(w) := g_p(v, w) \quad \forall w \in T_p\mathcal{M}.$$

Para verificar que este mapa é de fato um isomorfismo suave de fibrados sobre  $\mathcal{M}$  veja que  $\hat{g}$  atua em campos vetoriais  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  da seguinte forma:

$$\hat{g}(X)(Y) = g(X, Y).$$

Para cada  $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ ,  $\hat{g}(X)$  é  $C^\infty$ -linear em  $Y$  e portanto define um campo de covetores  $\hat{g}(X) \in \mathfrak{X}^*(\mathcal{M})$  (lema 7.1), onde  $\mathfrak{X}^*(\mathcal{M}) = \Gamma(T^*\mathcal{M})$ . Este campo é dado por  $\hat{g}(X)(p) = \hat{g}(X_p)$ , onde  $\hat{g}(X_p)w = g_p(X_p, w)$  para todo  $p \in \mathcal{M}$  e para todo  $w \in T_p\mathcal{M}$ .

O mapa  $\hat{g}: \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}^*(\mathcal{M})$  definido por  $X \mapsto \hat{g}(X)$ , onde  $\hat{g}(X) = \hat{g}(X)$  é  $C^\infty$ -linear em  $X$  por conta da bilinearidade do tensor métrico. Em vista disso,  $\hat{g}$  é um homomorfismo suave de fibrados sobre  $\mathcal{M}$  devido ao lema 7.2.

Por último, para verificar que  $\hat{g}$  é um isomorfismo suave de fibrados sobre  $\mathcal{M}$ , suponha que  $v \in T_p\mathcal{M}$  é tal que  $\hat{g}(v) = 0$ . Então,  $\hat{g}(v)(v) = g_p(v, v) = 0$ . Como  $g_p$  é positivo definido numa variedade Riemanniana, segue que  $v = 0$ . Pelo teorema do núcleo e da imagem, segue que  $v \mapsto g_p(v, \cdot)$  é um isomorfismo entre  $T_p\mathcal{M}$  e  $T_p^*\mathcal{M}$ . Daí, é fácil concluir que  $\hat{g}$  é bijetor e portanto é um isomorfismo suave de fibrados sobre  $\mathcal{M}$  devido ao lema 7.3. Para mostrar o mesmo resultado num espaço-tempo, basta utilizar que o tensor métrico é não-degenerado a cada ponto.

A importância de  $\hat{g}$  ser um isomorfismo é garantir a existência de  $\hat{g}^{-1}$  que será definido como o levantamento de índice.

A partir da definição de  $\hat{g}$  e usando a indexação costumeira na Física, localmente temos que

$$g(X, Y) = g_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu$$

para campos vetoriais suaves  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  quaisquer. Daí,  $\hat{g}(X)$  é o seguinte campo de covetores

$$\hat{g}(X) = g_{\mu\nu} X^\mu dx^\nu = X_\nu dx^\nu.$$

Pela unicidade dos coeficientes, obtém-se a relação conhecida como *abaixamento de índice*:

$$X_\nu = g_{\mu\nu} X^\mu.$$

Por vezes, é comum denotar  $\hat{g}(X)$  por  $X^\flat$  onde  $\flat$  é um símbolo em teoria musical (bemol) para representar que um tom foi abaixado. Interpretando  $\hat{g}$  como um mapa entre o espaço tangente e seu dual algébrico, vemos que a matriz de  $\hat{g}$  é representada localmente pela mesma matriz do tensor métrico. Ainda sob esse ponto de vista, a aplicação inversa  $\hat{g}^{-1}$  é localmente representada por uma matriz  $g^{\mu\nu}$  tal que

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = g_{\lambda\nu} g^{\nu\mu} = \delta_\lambda^\mu.$$

Dado um covetor  $\omega = \omega_\nu dx^\nu$ , temos que

$$\hat{g}^{-1}(\omega) = g^{\mu\nu} \omega_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \omega^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

Desta forma, concluímos que

$$\omega^\mu = g^{\mu\nu} \omega_\nu.$$

Essa é a operação conhecida como *levantamento de índice* e é comum denotar  $\hat{g}^{-1}(\omega)$  por  $\omega^\sharp$ , onde  $\sharp$  é o símbolo musical (sustenido) para representar que uma elevação no tom. Adaptando para a notação mais próxima à da Física, temos que o levantamento de índice de um covetor representado localmente por  $X = X_\nu dx^\nu$  é o vetor localmente representado por

$$X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad X^\mu = g^{\mu\nu} X_\nu.$$

A noção de levantamento e abaixamento de índices pode ser generalizada para campos tensoriais quaisquer, como veremos a seguir.

Se  $(M, g)$  é uma variedade Riemanniana (ou um espaço-tempo). Se  $\Gamma(T^{(k,0)}T\mathcal{M})$  é o conjunto dos campos de tensores  $k$ -contravariantes em  $\mathcal{M}$ , o tensor métrico induz  $k$  isomorfismos suaves de fibrados,  $\hat{g}_r: \Gamma(T^{(k,0)}T\mathcal{M}) \rightarrow \Gamma(T^{(k-1,1)}T\mathcal{M})$ , que representam o abaixamento do  $r$ -ésimo índice de um tensor  $A \in \Gamma(T^{(k,0)}T\mathcal{M})$ . Para cada  $1 \leq r \leq k$ , basta que  $A \mapsto \hat{g}_r(A)$  seja definido como

$$\hat{g}_r(A)(\omega^1, \dots, \omega^{r-1}, \omega^{r+1}, \dots, \omega^k, X_r) := A(\omega^1, \dots, \omega^{r-1}, \hat{g}(X_r), \omega^{r+1}, \dots, \omega^k),$$

onde  $\hat{g}(X_r) = X_r^\flat$ . Claramente, este é um mapa  $C^\infty$ -multilinear para cada  $A \in \Gamma(T^{(k,0)}T\mathcal{M})$  e  $\hat{g}_r$  é  $C^\infty$ -linear em  $A$ . Além disso,  $\hat{g}_r(A) = 0$  implica em  $A = 0$ . Daí, basta usar os lemas anteriores para mostrar que  $\hat{g}_r$  é um isomorfismo. Em vista disso, fica fácil ver que localmente:

$$A^{\mu_1 \dots \lambda \dots \mu_k} = g_{\lambda\nu} A^{\mu_1 \dots \nu \dots \mu_k},$$

onde  $\lambda$  encontra-se na posição do  $r$ -ésimo índice das componentes do tensor  $A$ .

De forma similar, podemos levantar um índice de um tensor  $A \in \Gamma(T^{(0,k)}T\mathcal{M})$  utilizando  $\hat{g}_r^{-1}$ . Localmente esta levantamento é dado por:

$$A_{\mu_1 \dots \lambda \dots \mu_k} = g^{\lambda\nu} A_{\mu_1 \dots \nu \dots \mu_k}.$$

Por fim, podemos abaixar  $s$  índices distintos de um tensor do tipo  $(k, 0)$  ou levantar  $s$  índices distintos de um tensor do tipo  $(0, k)$  por meio de composições dos isomorfismos induzidos pelo tensor métrico<sup>8</sup>. No caso geral, podemos brincar de abaixar ou levantar os índices de um tensor do tipo  $(k, l)$  por meio dessas composições. A título de exemplo, um tensor do tipo  $(2, 0)$  pode ser transformado em um tensor do tipo  $(0, 2)$  a partir de duas composições. Se localmente vale que  $A$  tem componentes  $A^{\mu\nu}$ , então

$$A_\beta^\mu = g_{\beta\nu} A^{\mu\nu}.$$

Abaixando mais um índice, segue que

$$A_{\alpha\beta} = g_{\alpha\mu} A_\beta^\mu = g^{\alpha\mu} g_{\beta\nu} A^{\mu\nu}.$$

<sup>8</sup>Esses isomorfismos mudam a cada vez que se abaixa/levanta um índice: primeiramente podemos ir de um tensor do tipo  $(k, 0)$  para um do tipo  $(k-1, 1)$  e em seguida induzir um novo isomorfismo que nos leva a um tensor do tipo  $(k-2, 2)$ . Esse novo isomorfismo consiste em abaixar/levantar um índice distinto daquele já abaixado/levantado.

## Capítulo 8

# Formas Diferenciais

Formas diferenciais encontram-se no coração da integração em variedades, pois elas são os objetos a serem integrados. Além disso, a partir delas é possível encontrar uma operação, a *derivada exterior*, que generaliza as noções de diferencial de uma função e dos operadores gradiente, divergente e rotacional tão conhecidos dos cursos de cálculo de várias variáveis. Uma exposição sucinta sobre formas diferenciais encontra-se em [11], enquanto que [7, 8] tratam o assunto com um pouco mais de detalhe.

### 8.1 Álgebra de Tensores Alternantes

Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita sobre  $\mathbb{R}$ . Como visto anteriormente, tensores  $k$ -covariantes alternantes são chamados por diferentes nomes, como **formas exteriores**, multi-covetores ou  $k$ -covetores. O espaço vetorial de todos  $k$ -covetores definidos em  $V$  é simbolizado por  $\Lambda^k(V^*)$ . Para reconhecer um  $k$ -covetor podemos utilizar o

**Lema 8.1.** *Seja  $\alpha$  um tensor  $k$ -covariante em um espaço vetorial de dimensão finita  $V$ . Então são equivalentes:*

- a)  $\alpha$  é alternante.
- b)  $\alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$  se a  $k$ -úpla  $(v_1, \dots, v_k)$  é linearmente dependente (L.D.).
- c)  $\alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$  se dois elementos de  $(v_1, \dots, v_k)$  forem iguais.

*Demonstração.*

$a \implies c$ ) Se  $\alpha$  é alternante, então dada uma  $k$ -úpla  $(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k)$  de elementos de  $V$  onde  $v_i = v_j$  para  $1 \leq i < j \leq k$ , temos que

$$\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k).$$

Logo, é imediato que  $\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = 0$ .

$b \implies c$  ) Imediato.

$c \implies a$  ) Veja que

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_k) \\ &= \alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_k) + \alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) \\ &\quad + \alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) + \alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_j, \dots, v_k) \\ &= \alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) + \alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k). \end{aligned}$$

Daí, segue que  $\alpha$  é alternante.

$c \implies b$  ) Assuma que  $(v_1, \dots, v_k)$  é L.D. e sem perda de generalidade, assuma que  $v_1$  é combinação linear dos demais  $v_i$ . Então, temos que

$$\alpha(v_1, \dots, v_k) = \sum_{i=2}^k a^i \alpha(v_i, \dots, v_k).$$

Como cada termo  $k$ -úpla da soma acima possui dois elementos iguais, conclui-se que  $\alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$ .

■

Da mesma forma como foi possível definir um tensor simétrico a partir da operação simetrização, podemos obter um tensor alternante a partir de uma operação  $Alt: T^k(V^*) \rightarrow \Lambda^k(V^*)$ , chamada **anti-simetrização** e que é definida por

$$Alt \alpha := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (sgn \sigma)(\sigma \alpha),$$

onde  $S_k$  e  $sgn \sigma$  são os mesmos da definição da simetrização. Explicitamente, temos que

$$(Alt \alpha)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (sgn \sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}).$$

Claramente, se  $\alpha$  é um tensor de rank 2, então

$$(Alt \alpha)(v, w) = \frac{1}{2}(\alpha(v, w) - \alpha(w, v)).$$

**Proposição 8.1.** *Seja  $\alpha$  um tensor covariante sobre um espaço vetorial de dimensão finita  $V$ . Então:*

a)  $Alt \alpha$  é anti-simétrico.

b)  $Alt \alpha = \alpha \iff \alpha \in \Lambda^k(V^*)$ .

*Demonstração.*



- a) Seja  $\tau \in S_k$  uma transposição. Então, sabemos que  $\text{sgn } \tau = -1$ . Se  $\alpha$  é um tensor  $k$ -covariante, temos que:

$$\tau \text{Alt } \alpha = -\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (-\text{sgn } \sigma)(\tau\sigma)\alpha = -\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \eta)\eta\alpha,$$

onde  $\eta \equiv \tau\sigma$ . Logo,  $\tau \text{Alt } \alpha = -\text{Alt } \alpha$ . Como  $\tau$  é qualquer, então o resultado vale para toda transposição. Logo,  $\text{Alt } \alpha$  é anti-simétrico.

- b) Se  $\text{Alt } \alpha = \alpha$  então  $\alpha$  é anti-simétrico, pois  $\text{Alt } \alpha \in \Lambda^k(V^*)$ .

Se  $\alpha \in \Lambda^k(V^*)$ , temos que  $\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = (\text{sgn } \sigma)\alpha(v_1, \dots, v_k)$ . Daí,

$$\text{Alt } \alpha(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma)(\text{sgn } \sigma)\alpha(v_1, \dots, v_k).$$

Como  $(\text{sgn } \sigma)^2 = 1$  para toda permutação e como existem  $k!$  permutações em  $S_k$ , facilmente conclui-se que  $\text{Alt } \alpha = \alpha$ .

■

## Tensores Alternantes Elementares

Para facilitar as operações com formas exteriores, dado um inteiro positivo  $k$ , define-se o **multi-índice de comprimento  $k$**  como sendo a  $k$ -úpla ordenada  $(i_1, \dots, i_k)$  de inteiros positivos. Se  $\sigma \in S_k$ , então denotamos  $I_\sigma$  por

$$I_\sigma := (i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(k)}).$$

Seja  $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$  uma base em  $V^*$ , onde  $V$  é um espaço vetorial real de dimensão finita. Para cada multi-índice de comprimento  $k$ ,  $I$ , defina o tensor  $k$ -covariante  $\varepsilon^I$  da forma a seguir:

$$\varepsilon^I(v_1, \dots, v_k) := \det \begin{pmatrix} \varepsilon^{i_1}(v_1) & \dots & \varepsilon^{i_1}(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon^{i_k}(v_1) & \dots & \varepsilon^{i_k}(v_k) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1^{i_1} & \dots & v_k^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{i_k} & \dots & v_k^{i_k} \end{pmatrix}.$$

Como o determinante é um tensor alternante, então  $\varepsilon^I$  também é alternante. Este tensor é chamado de **tensor alternante elementar**.

**Exemplo 8.1.** Se  $I$  e  $J$  são multi-índices de comprimento  $k$ , podemos definir o **delta de Kronecker generalizado** como sendo

$$\delta_J^I := \det \begin{pmatrix} \delta_{j_1}^{i_1} & \dots & \delta_{j_k}^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{j_1}^{i_k} & \dots & \delta_{j_k}^{i_k} \end{pmatrix}.$$

Veja que

$$\delta_J^I = \begin{cases} \text{sgn } \sigma, & \text{se nem } I \text{ nem } J \text{ tem índices repetidos e } J = I_\sigma, \sigma \in S_k. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Essa propriedade é facilmente verificada quando escrevemos o determinante da seguinte forma

$$\delta_J^I = \sum_{\eta \in S_k} (\text{sgn } \eta) \delta_{j_{\eta(1)}}^{i_1} \cdots \delta_{j_{\eta(k)}}^{i_k}.$$

**Proposição 8.2 (Propriedades dos k-covetores elementares).** Considere  $\{E_i\}_{i=1}^n$  como uma base para  $V$ . Se  $\{\varepsilon^i\}_{i=1}^n$  é a base dual, então, para quaisquer multi-índices de comprimento  $k$ ,  $I$  e  $J$ :

- a) Se  $I$  tem índices repetidos, então  $\varepsilon^I = 0$ .
- b) Se  $J = I_\sigma$  para alguma permutação  $\sigma \in S_k$ , então  $\varepsilon^J = (\text{sgn } \sigma) \varepsilon^I$ .
- c) Para uma  $k$ -úpla de elementos da base, temos que

$$\varepsilon^I(E_{j_1}, \dots, E_{j_k}) = \delta_J^I.$$

**Exercício 8.1.** Demonstre a proposição 8.2.

**Proposição 8.3.** Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita. Se  $\{\varepsilon^i\}_{i=1}^n$  é qualquer base para  $V^*$ , então para todo inteiro positivo  $k \leq \dim V = n$  temos que

$$\mathcal{E} = \{\varepsilon^I : i_1 < \dots < i_k\}$$

é uma base para  $\Lambda^k(V^*)$  e portanto

$$\dim \Lambda^k(V^*) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

*Demonstração.*

Se  $k > n$ , então pelo item b do lema 8.1, segue que  $\mathcal{E} = \{0\}$ , pois qualquer  $k$ -úpla será L.D. neste caso. Seja  $\{E_i\}_{i=1}^n$  a base dual a  $\{\varepsilon^i\}_{i=1}^n$ . Se  $\alpha \in \Lambda^k(V^*)$  e  $I = (i_1, \dots, i_k)$ , defina o número

$$\alpha_I := \alpha(E_{i_1}, \dots, E_{i_k}).$$

Agora, para qualquer multi-índice  $J$  de comprimento  $k$ , temos

$$\sum_I' a_I \varepsilon^I(E_{j_1}, \dots, E_{j_k}) := \sum_{\{I: i_1 < \dots < i_k\}} a_I \varepsilon^I(E_{j_1}, \dots, E_{j_k}) = a_J.$$

Logo  $\sum_I' \alpha_I = \alpha$ , pois estes coincidem em qualquer  $k$ -úpla de vetores da base de  $V$ . Daí, conclui-se que  $\Lambda^k(V^*) = \text{span } \mathcal{E}$ . Para averiguar que  $\mathcal{E}$  é L.I., assumamos que existem coeficientes  $\beta_I$  tais que

$$\sum_I' \beta_I \varepsilon^I = 0.$$

Se  $J$  é qualquer multi-índice crescente de comprimento  $k$ , então

$$\sum_I' \beta_I \varepsilon^I(E_{j_1}, \dots, E_{j_k}) = \beta_J = 0.$$

■

**Proposição 8.4.** *Suponha que  $V$  é um espaço vetorial  $n$ -dimensional e que  $\omega \in \Lambda^n(V^*)$ . Então, para qualquer operador linear  $T: V \rightarrow V$  e qualquer  $k$ -úpla  $(v_1, \dots, v_n)$  vale que*

$$\omega(T(v_1), \dots, T(v_n)) = (\det T) \omega(v_1, \dots, v_n).$$

*Demonstração.*

Seja  $\{V_i\}_{i=1}^n$  uma base para  $V$  e seja  $\{\varepsilon^i\}_{i=1}^n$  a base dual. Ademais, seja  $(T_j^i)$  é a matriz de  $T$  com relação à base  $\{V_i\}$ . Para verificar a igualdade, por conta da multilinearidade e anti-simetria de  $\omega$  basta verificar o caso em que  $v_1, \dots, v_n = (E_1, \dots, E_n)$ .

Visto que  $\dim \Lambda^n(V^*) = 1$ , então  $\omega = a \varepsilon^{1 \dots n}$  para algum  $a \in \mathbb{R}$ . Com relação ao lado direito da igualdade, temos que

$$(\det T) a \varepsilon^{1 \dots n}(E_1, \dots, E_n) = a(\det T).$$

Com relação ao lado esquerdo:

$$a \varepsilon^{1 \dots n}(T(E_1), \dots, T(E_n)) = a \det(\varepsilon^j T(E_i)) = a \det T.$$

■

## Produto Exterior

O produto exterior é uma operação binária similar ao produto simétrico, o que significa que a ideia básica detrás dela é, a partir de duas formas exteriores de ranks  $k$  e  $l$ , obter uma forma exterior de rank  $k + l$ . De forma mais precisa, suponha que  $\omega \in \Lambda^k(V^*)$  e  $\eta \in \Lambda^l(V^*)$ , o produto exterior dessas formas é denotado e definido por

$$\omega \wedge \eta := \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta). \quad (8.1)$$

A razão para os coeficientes que precedem  $\text{Alt}(\omega \wedge \eta)$  é justificada pelo

**Lema 8.2.** *Seja  $V$  um espaço vetorial  $n$ -dimensional e seja  $\{\varepsilon^i\}_{i=1}^n$  uma base no espaço dual. Para quaisquer multi-índices  $I$  e  $J$  vale que*

$$\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J = \varepsilon^{IJ}, \quad (8.2)$$

sendo  $IJ = (i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l)$ .

*Demonstração.*

Seja  $\{E_i\}_{i=1}^n$  uma base em  $V$ . Seja  $P = (p_1, \dots, p_{k+l})$ . Por multilinearidade, é suficiente analisar como  $\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J$  atua em  $(E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+l}})$ .

Caso I) Se  $P$  possui índices repetidos, então pelo lema 8.1, segue que  $\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J(E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+l}}) = \varepsilon^{IJ}(E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+l}}) = 0$ .

Caso II) Se  $P$  contém um índice que não aparece em  $I$  ou  $J$ , então

$$\varepsilon^{IJ}(E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+l}}) = 0,$$

pois  $P$  não é permutação de  $IJ$ . O mesmo se aplica para  $\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J$ .

Caso III)  $P = IJ$  e não há índices repetidos. Nesta situação, segue que  $\varepsilon^{IJ}(E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+l}}) = 1$ . Quanto ao produto exterior, temos que

$$\begin{aligned} \varepsilon^I \wedge \varepsilon^J(E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+l}}) &= \\ \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\varepsilon^I \otimes \varepsilon^J)(E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+l}}) &= \\ \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\text{sgn } \sigma) \varepsilon^I(E_{p_{\sigma(1)}}, \dots, E_{p_{\sigma(k)}}) \varepsilon^J(E_{p_{\sigma(k+1)}}, \dots, E_{p_{\sigma(k+l)}}) &= 1. \end{aligned}$$

Caso IV) Se  $P$  é permutação de  $IJ$  e possui índices repetidos. Nesse caso, basta aplicar a permutação inversa e utilizar o caso III, visto que a aplicação dessa permutação multiplica ambos os lados de eq. (8.2) pelo sinal da permutação.

■

**Proposição 8.5 (Propriedades do produto exterior).** *Suponha que  $\omega$ ,  $\omega'$ ,  $\eta$ ,  $\eta'$  e  $\xi$  sejam formas exteriores. Então vale que*

a) Para todos  $a, a' \in \mathbb{R}$ :

$$(a\omega + a'\omega') \wedge \eta = a(\omega \wedge \eta) + a'(\omega' \wedge \eta)$$

$$\eta \wedge (a\omega + a'\omega') = a(\eta \wedge \omega) + a'(\eta \wedge \omega').$$

b)  $\omega \wedge (\eta \wedge \xi) = (\omega \wedge \eta) \wedge \xi$ .

c) Se  $\omega \in \Lambda^k(V^*)$  e  $\eta \in \Lambda^l(V^*)$  então

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega.$$

d) Se  $\{\varepsilon^i\}_{i=1}^n$  é base para  $V^*$  e  $I$  é multi-índice de comprimento  $k$ , então

$$\varepsilon^{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{i_k} = \varepsilon^I.$$

e) Se  $\omega^1, \dots, \omega^k \in V^*$  e  $v_1, \dots, v_k \in V$ , então

$$\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k(v_1, \dots, v_k) = \det(\omega^i(v_j)).$$

*Demonstração.*

- a) Segue da bilinearidade do produto tensorial e da linearidade de *Alt*.  
 b) Basta verificar o caso para os tensores alternantes elementares, pois o caso geral segue da bilinearidade do produto exterior. Desta forma, sejam  $I, J$  e  $K$  multi-índices. Temos que

$$(\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J) \wedge \varepsilon^K = \varepsilon^{IJ} \wedge \varepsilon^K = \varepsilon^{IJK} = \varepsilon^I \wedge \varepsilon^{JK} = \varepsilon^I \wedge (\varepsilon^J \wedge \varepsilon^K).$$

- c) Igual ao item anterior, é suficiente verificar o caso para tensores elementares. Sendo assim, seja  $\tau$  a permutação que leva  $IJ$  em  $JI$ . Então:

$$\varepsilon^{IJ} = (\text{sgn } \tau) \varepsilon^{JI} = (\text{sgn } \tau) \varepsilon^J \wedge \varepsilon^I.$$

Veja que para obter  $JI$  a partir de  $\tau$ , realizamos  $k$  transposições para deslocar  $j_1$  até a posição ocupada por  $i_1$ . Repetindo o processo para os demais elementos de  $J$ , obtemos um total de  $kl$  transposições e portanto  $\text{sgn } \tau = (-1)^{kl}$ .

- d) Corolário do lema 8.2, sendo demonstrado por indução.  
 e) Basta escrever cada  $\omega^i$  como combinação dos tensores  $\varepsilon^j$  e utilizar o item acima.

■

As primeiras três propriedades da proposição 8.5 informam que o produto exterior é bilinear, associativo e anti-comutativo. Quando uma forma exterior  $\eta$  pode ser expressa como no item e, então diz-se que ela é **decomponível**. Da mesma forma que tensores mais gerais, nem toda forma exterior é decomponível, mas todas são combinações lineares de formas decomponíveis. Além do mais, visto que  $V$  tem dimensão finita, podemos definir o seguinte espaço vetorial

$$\Lambda(V^*) = \bigoplus_{k=1}^n \Lambda^k(V^*).$$

Pela proposição 8.5, o produto exterior torna este espaço vetorial em uma **álgebra associativa** conhecida como **álgebra exterior** (ou **álgebra de Grassmann**). Além disso, ela é uma álgebra **graduada**, no sentido que ela é uma álgebra cuja decomposição é da forma acima e que satisfaz  $\Lambda^k(V^*) \cdot \Lambda^l(V^*) \subseteq \Lambda^{k+l}(V^*)$ , onde  $\cdot$  representa o produto da álgebra.

A exposição do tema até o momento está sendo bastante abstrata. Talvez as coisas fiquem mais claras quando consideramos  $V = \mathbb{R}^n$ , como no exemplo a seguir.

**Exemplo 8.2.** Sejam  $\omega = x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3 + x_4 dx_4$  e  $\varphi = x_1 dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_3$ , onde  $x_i$  é função componente para cada  $i$  e  $dx_i$  é um funcional linear. Pela definição do produto exterior, temos que

$$\omega \wedge \varphi = (x_1 x_3 - x_2) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

No geral, o produto exterior de um covetor com um 2-covetor assume o seguinte aspecto:

$$\omega \wedge \varphi = (a_1 b_{23} - a_2 b_{13} + a_3 b_{12}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

**Exercício 8.2.** Dada uma forma exterior  $\omega$ , mostre que  $\omega \wedge \omega = 0$  sempre que  $k$  for ímpar.

### Produto Interior

Se  $V$  é um espaço vetorial  $n$ -dimensional e  $v \in V$ , podemos definir um mapa  $i_v: \Lambda^k(V^*) \rightarrow \Lambda^{k-1}(V^*)$ , chamado de **produto interior por  $v$** , da maneira a seguir

$$i_v \omega(w_1, \dots, w_{k-1}) := \omega(v, w_1, \dots, w_{k-1}).$$

Outros nomes possíveis para este mapa são **multiplicação interior** ou **contração**. Um outro jeito de simbolizá-lo é por  $v \lrcorner \omega$ . Por convenção, adota-se que  $i_v \omega = 0$  quando  $k = 0$ .

**Lema 8.3.** Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita e considere  $v \in V$ . Então:

- a)  $i_v \circ i_v = 0$
- b) Se  $\omega \in \Lambda^k(V^*)$  e  $\eta \in \Lambda^l(V^*)$ , então

$$i_v(\omega \wedge \eta) = (i_v \omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (i_v \eta).$$

*Demonstração.*

■

## 8.2 Formas Diferenciais em Variedades

Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade diferenciável  $n$ -dimensional. O fibrado tensorial dos tensores alternantes é subconjunto de  $T^k T^* \mathcal{M}$  denotado por  $\Lambda^k T^* \mathcal{M}$ . Em termos da união disjunta, temos que

$$\Lambda^k T^* \mathcal{M} := \bigsqcup_{p \in \mathcal{M}} \Lambda^k(T_p^* \mathcal{M}).$$

Uma  **$k$ -forma diferencial**, ou simplesmente uma  **$k$ -forma**, é um campo tensorial deste fibrado, onde  $k$  é dito o grau da forma. Em outras palavras, trata-se

de uma aplicação (contínua)  $\mathcal{M} \ni p \mapsto \omega_p \in \Lambda^k(T_p^*\mathcal{M})$ . Apenas para introduzir mais notação, o espaço vetorial das k-formas diferenciais suaves é denotado por

$$\Omega^k(\mathcal{M}) = \Gamma(\Lambda^k T^*\mathcal{M}).$$

O produto externo é definido pontualmente, ou seja,  $(\omega \wedge \eta)_p = \omega_p \wedge \eta_p$ . No caso em que  $f$  é uma 0-forma e  $\eta$  é uma k-forma, interpreta-se  $f \wedge \eta$  como sendo o produto ordinário  $f\eta$ . Pelo o que vimos antes, segue que o espaço vetorial

$$\Omega^*(\mathcal{M}) = \bigoplus_{k=1}^n \Omega^k(\mathcal{M})$$

torna-se uma álgebra associativa anti-comutativa e graduada, uma vez que estabelecemos o produto exterior.

Em termos de coordenadas locais, temos que uma k-forma pode ser escrita como

$$\omega = \sum_I' \omega_I dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_l} = \sum_I' \omega_I dx^I,$$

onde o apóstrofo indica que a soma está sendo considerada apenas nos multi-índices crescentes de comprimento k. Os coeficientes  $\omega_I$  são funções contínuas definidas no domínio de coordenadas. Para caracterizar a suavidade de uma forma, podemos utilizar os lemas a seguir.

**Lema 8.4.** *Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade diferenciável n-dimensional e seja  $\omega$  uma 1-forma. Se  $(U, \varphi)$  é uma carta em  $\mathcal{M}$ , então  $\omega$  é suave em  $U$  se e somente se suas funções componentes são suaves.*

*Demonstração.*

Se  $(U, \varphi)$  é uma carta em  $\mathcal{M}$ , então  $\tilde{\varphi}: T^*U \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$  é um difeomorfismo. Claramente,  $\omega$  é suave se e somente se  $\tilde{\varphi} \circ \omega$  for suave. Veja que

$$(\tilde{\varphi} \circ \omega)(p) = \tilde{\varphi}(\omega_p) = (x^1(p), \dots, x^n(p), w_1(p), \dots, w_n(p)),$$

onde  $w_i$  são as funções componentes de  $\omega$ . Como as funções  $x^i$  são suaves, então  $\tilde{\varphi} \circ \omega$  é suave se e somente se as  $w_i$  forem suaves. ■

**Lema 8.5.** *Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade diferenciável n-dimensional e seja  $\omega$  uma k-forma. Se  $(U, \varphi)$  é uma carta em  $\mathcal{M}$ , então  $\omega$  é suave em  $U$  se e somente se suas funções componentes são suaves.*

A demonstração deste último lema é essencialmente igual à do lema 8.4. Além do mais, podemos usar a proposição 7.8 e concluir que uma k-forma  $\omega$  é suave se e somente se valem algum dos itens dessa proposição.

Sob o ponto de vista de formas diferenciais, temos que o item c da proposição 8.2 assume a forma

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \left( \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}} \right) = \delta_J^I.$$

Daí, as funções componentes de  $\omega$  são dadas por

$$\omega_I = \omega \left( \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \right).$$

Ainda no contexto de formas, temos que o pullback de uma  $k$ -forma é dado por

$$(F^*\omega)_p(v_1, \dots, v_k) := \omega_p(dF_p(v_1), \dots, dF_p(v_k)).$$

Nenhuma novidade com relação a isso, afinal o pullback de campos tensoriais covariantes já foi apresentado. Uma característica interessante do pullback é que ele distribui com o produto exterior.

**Lema 8.6.** *Suponha que  $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  é suave.*

- a)  $F^*: \Omega^k(\mathcal{N}) \rightarrow \Omega^k(\mathcal{M})$  é linear sobre  $\mathbb{R}$ .
- b)  $F^*(\omega \wedge \eta) = (F^*\omega) \wedge (F^*\eta)$ .
- c) Em qualquer vizinhança coordenada vale que

$$F^* \left( \sum_I' \omega_I dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k} \right) = \sum_I' (\omega_I \circ F) d(y^{i_1} \circ F) \wedge \dots \wedge d(y^{i_k} \circ F).$$

**Exercício 8.3.** *Prove o lema 8.6.*

**Exemplo 8.3.** *O item c do lema 8.6 assemelha-se bastante ao corolário da proposição 7.9 e, igual ao dito corolário, fornece um jeito prático de descrever uma  $k$ -forma. Por exemplo, seja  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por  $F(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$  e seja  $\omega$  a 2-forma  $ydx \wedge dz + xdy + dz$  em  $\mathbb{R}^3$ . Pelo lema 8.6, o pullback  $F^*\omega$  é dado por:*

$$\begin{aligned} F^*(ydx \wedge dz + xdy + dz) &= vdu \wedge d(u^2 - v^2) + u dv \wedge d(u^2 - v^2) \\ &= vdu \wedge (2udu - 2v dv) + u dv \wedge (2udu - 2v dv) \\ &= -2v^2 du \wedge dv + 2u dv \wedge du. \end{aligned}$$

Como  $dv \wedge du = -du \wedge dv$ , segue que

$$F^*\omega = -2(u^2 + v^2)du \wedge dv.$$

**Exemplo 8.4.** *Se  $\omega = dx \wedge dy$  é uma 2-forma em  $\mathbb{R}^2$ , então o pullback dela a partir de uma transformação por coordenada polares é*

$$dx \wedge dy = d(r \cos \theta) \wedge d(r \sin \theta) = r dr \wedge d\theta.$$

O exemplo acima é um caso particular da



**Proposição 8.6.** *Seja  $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  um mapa suave entre variedades de dimensão  $n$ . Se  $(x^i)$  e  $(y^j)$  são mapas de coordenadas em subconjuntos  $U \subseteq \mathcal{M}$  e  $V \subseteq \mathcal{N}$  e  $u$  é uma função contínua em  $V$ , então na interseção  $U \cap F^{-1}(V)$  vale que*

$$F^*(udy^1 \wedge \dots \wedge dy^n) = (u \circ F) \det(DF) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

onde  $DF$  é a matriz jacobiana de  $F$  com relação às cartas em  $\mathcal{M}$  e em  $\mathcal{N}$ .

*Demonstração.*

Como  $k = n$ , então cada fibra de  $\Lambda^k T^* \mathcal{M}$  tem dimensão 1 e portanto em cada ponto temos que  $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  é uma base. Veja que

$$(u \circ F) \det(DF) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) = (u \circ F) \det(DF),$$

pois  $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) = 1$ . Por outro lado, temos que

$$F^*(udy^1 \wedge \dots \wedge dy^n) = (u \circ F) dF^1 \wedge \dots \wedge dF^n,$$

onde  $F^i = y^i \circ F$ . Consequentemente

$$\begin{aligned} F^*(udy^1 \wedge \dots \wedge dy^n) & \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \\ &= (u \circ F) dF^1 \wedge \dots \wedge dF^n \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \\ &= (u \circ F) \det(DF) \text{ (proposição 8.5)}. \end{aligned}$$

Como  $F^*(udy^1 \wedge \dots \wedge dy^n)$  e  $(u \circ F) \det(DF) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  coincidem quando aplicados à  $n$ -úpla dos vetores da base de cada espaço tangente, então eles são iguais. ■

**Corolário 8.1.** *Se  $(U, x^i)$  e  $(\tilde{U}, \tilde{x}^i)$  são cartas sobrepostas ( $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ ), então na interseção vale que*

$$d\tilde{x}^1 \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^n = \det \left( \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

*Demonstração.*

Considere  $F$  como sendo a identidade em  $U \cap \tilde{U}$  e aplique a proposição considerando  $U$  como domínio e  $\tilde{U}$  como contradomínio. ■

## Derivada Exterior

A derivada exterior é um operador definido por levar  $k$ -formas em  $(k+1)$ -formas e que visa generalizar o conceito de diferencial de uma função para dimensões maiores.

Num espaço euclidiano  $n$ -dimensional, a derivada exterior é um operador  $d: \Omega^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n)$  definido da seguinte forma: seja  $\omega = \sum_J' \omega_J dx^J$  uma  $k$ -forma. Então sua derivada exterior é definida como sendo

$$d\omega := \sum_J' d\omega_J \wedge dx^J, \quad (8.3)$$

onde  $d\omega_J$  é o diferencial da função  $\omega_J$ . Vale recordar que o diferencial de uma função suave  $f$  é dado por  $df_p(v) = vf$ . Disso, concluímos que

$$d\omega = \sum_J' \sum_i \frac{\partial \omega_J}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

**Proposição 8.7 (Propriedades da derivada exterior em  $\mathbb{R}^n$ ).** *Com relação à derivação exterior num espaço euclidiano, valem:*

- a)  $d$  é linear sobre  $\mathbb{R}$ .
- b) Se  $\omega$  é uma  $k$ -forma e  $\eta$  é uma  $l$ -forma, ambas em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , então

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

- c)  $d \circ d \equiv 0$ .
- d)  $d$  comuta com o pullback.

*Demonstração.*

Em ordem:

- a) Consequência imediata da definição da derivada exterior, afinal, o diferencial da soma das funções componentes é a soma dos diferenciais.
- b) Por linearidade, é suficiente demonstrar para o caso em que  $\omega = u dx^I$  e  $\eta = v dx^J$ , onde  $I = (i_1, \dots, i_k)$  e  $J = (j_1, \dots, j_l)$  são índices crescentes.

Primeiramente, veja que a igualdade  $d(udx^S) = du \wedge dx^S$  é satisfeita para qualquer multi-índice  $S$ . Portanto

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d(uv dx^I \wedge dx^J) \\ &= d(uv dx^I \wedge dx^J) \\ &= (udv + vdu) \wedge (dx^I \wedge dx^J) \\ &= (du \wedge dx^I) \wedge (v dx^J) + (dv \wedge (u dx^I)) \wedge dx^J \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k (u dx^I) \wedge (dv \wedge dx^J) \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \end{aligned}$$

- c) Primeiramente, verifica-se a validade para quando  $k = 0$ , ou seja,  $\omega$  é uma função  $f$  suave.

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{i < j} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} \right) dx^i \wedge dx^j = 0. \end{aligned}$$

Para o caso geral:

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= d\left(\sum_J' d\omega_J \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}\right) \\ &= \sum_J' d(d\omega_J) \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \\ &\quad + \sum_J' \sum_{i=1}^k (-1)^k d\omega_J \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_i} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}. \end{aligned}$$

Como  $d(d\omega) = 0$ , o primeiro somatório é nulo. Além disso,  $d\omega_J = \frac{\partial \omega_J}{\partial x^l} dx^l$  e portanto  $dx^l \wedge dx^J$  sempre possui índices repetidos. Logo, o último somatório também é zero, donde conclui-se que  $d(d\omega) = 0$ .

- d) Por linearidade, é suficiente mostrar o resultado para o caso em que  $\omega = u dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ . Sendo assim, veja que:

$$F^*(d\omega) = d(u \circ F) \wedge d(x^{i_1} \circ F) \wedge \dots \wedge d(x^{i_k} \circ F).$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} d(F^*\omega) &= d((u \circ F) d(x^{i_1} \circ F) \wedge \dots \wedge d(x^{i_k} \circ F)) \\ &= d(u \circ F) \wedge d(x^{i_1} \circ F) \wedge \dots \wedge d(x^{i_k} \circ F). \end{aligned}$$

Logo, as operações comutam. ■

Antes de enunciar o resultado mais importante desta seção, vale a pena ter em mente o

**Lema 8.7 (da extensão para formas diferenciais).** *Suponha que  $\omega$  seja uma  $k$ -forma diferencial suave definida em uma vizinhança  $U$  de um ponto  $p \in \mathcal{M}$ . Existem uma  $k$ -forma suave  $\tilde{\omega}$  definida em  $\mathcal{M}$  e uma vizinhança  $V$  de  $p$  tais que  $\tilde{\omega}|_V = \omega$ .*

*Demonstração.*

Seja  $p \in \mathcal{M}$  e  $\omega_p \in \Lambda^k(T_p^*\mathcal{M})$ . Se  $U$  é uma vizinhança de  $p$ , podemos estabelecer uma *bump function* suave<sup>1</sup>  $f: \mathcal{M} \rightarrow [0, 1]$  com suporte  $U$  para uma vizinhança  $V$  de  $p$ . Daí, basta definir a  $k$ -forma  $\tilde{\omega}$  como sendo

$$\tilde{\omega}_p = \begin{cases} f(p)\omega_p, & \text{se } p \in U; \\ 0, & \text{se } p \notin U. \end{cases}$$

■

**Teorema 8.1 (Existência e unicidade da derivada exterior).** *Suponha que  $\mathcal{M}$  é uma variedade diferenciável. Para cada  $k \in \mathbb{N}$  existe um único operador  $d: \Omega^k(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{k+1}(\mathcal{M})$ , chamado de **derivada exterior**, que satisfaz às seguintes propriedades:*

- a)  $d$  é linear sobre  $\mathbb{R}$ .
- b) Se  $\omega \in \Omega^k(\mathcal{M})$  e  $\eta \in \Omega^l(\mathcal{M})$ , então

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

- c)  $d \circ d \equiv 0$ .
- d) Se  $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ ,  $df$  é o diferencial de  $f$ , dado por  $df(X) = Xf$ , onde  $X$  é um campo de vetores em  $\mathcal{M}$ .

*Demonstração.*

Primeiro, será demonstrada a existência. Suponha que  $\omega \in \Omega^k(\mathcal{M})$  e seja  $(U, \varphi)$  uma carta em  $\mathcal{M}$ . Visto que  $\varphi^{-1*}\omega$  é uma  $k$ -forma em  $\mathbb{R}^n$ , podemos definir a derivada exterior como sendo

$$d\omega = \varphi^* d(\varphi^{-1*}\omega),$$

pois desta forma  $d\omega$  assume precisamente a forma presente na eq. (8.3) para cada carta  $(U, \varphi)$ . Para mostrar que a derivada exterior está bem definida, suponha que  $(V, \psi)$  seja outra carta em  $\mathcal{M}$  tal que  $U \cap V \neq \emptyset$ . Como  $\varphi \circ \psi^{-1}$  é um difeomorfismo, segue que

$$(\varphi \circ \psi^{-1})^* d(\psi^{-1*}\omega) = d((\varphi \circ \psi^{-1})^* \varphi^{-1*}\omega).$$

Visto que  $(\varphi \circ \psi^{-1})^* = \psi^{-1*} \circ \varphi^*$ , conclui-se rapidamente que  $\psi^* d(\psi^{-1*}\omega) = \varphi^* d(\varphi^{-1*}\omega)$ . As propriedades listadas no enunciado do teorema seguem da proposição 8.7.

Resta demonstrar a unicidade. Para tanto, seja que  $d: \Omega^k(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{k+1}(\mathcal{M})$  seja um operador qualquer satisfazendo as propriedades listadas. Seja  $U \subseteq \mathcal{M}$  um aberto tal que  $\omega_1 = \omega_2$  nesta região, onde  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são  $k$ -formas. Considere  $p \in \mathcal{M}$  arbitrário e  $\psi \in C^\infty(\mathcal{M})$  como sendo uma *bump function* com suporte

<sup>1</sup>A construção de *bump functions* suaves não está feita nestas notas, mas pode ser encontrada em [7].

em  $U$  e que seja igual a 1 numa vizinhança de  $p$ . Definindo  $\eta \equiv \omega_1 - \omega_2$ , temos que  $\psi\eta \equiv 0$  e portanto:

$$0 = d(\psi\eta) = d\psi \wedge \eta + \psi d\eta.$$

Avaliando a expressão acima no ponto  $p$ , conclui-se que  $d\eta = d\omega_1|_p = d\omega_2|_p$ . Como  $p$  é qualquer, temos que  $d\omega_1 = d\omega_2$  em  $U$ . Disto, conclui-se que se duas  $k$ -formas são iguais em algum aberto da variedade, então a ação do operador  $d$  preserva a equidade.

Agora, considere  $\omega \in \Omega^k(\mathcal{M})$  qualquer e seja  $(U, \varphi)$  uma carta em  $\mathcal{M}$ . Pelo lema 8.7, para cada  $p \in U$  podemos construir funções suaves globais  $\tilde{\omega}_I$  e  $\tilde{x}^i$  em  $\mathcal{M}$  que sejam respectivamente idênticas a  $\omega_I$  e a  $x^i$  numa vizinhança de  $p$ . Pela observação do parágrafo anterior e por  $d$  satisfazer as propriedades listadas, então a eq. (8.3) é válida para cada  $p$ , ou seja, o operador arbitrário  $d$  e a derivada exterior são iguais em  $p$ . Como  $p$  é qualquer, conclui-se que  $d$  é de fato a derivada exterior. ■

**Proposição 8.8.** *Se  $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  é um mapa suave entre variedades, então o pullback  $F^*: \Omega^k(\mathcal{N}) \rightarrow \Omega^k(\mathcal{M})$  comuta com a derivada exterior para cada  $\omega \in \Omega^k(\mathcal{N})$  e para cada  $k \in \mathbb{N}$ .*

**Exercício 8.4.** *Demonstre a proposição acima.*

Apenas por questões psicológicas, diz-se que uma  $k$ -forma  $\omega$  é **fechada** quando  $d\omega = 0$ . Quando existe uma  $(k-1)$ -forma  $\eta$ , tal que  $\omega = d\eta$ , diz-se que a  $k$ -forma é **exata**. No caso particular em que  $k = 1$ , na literatura da Física uma 1-forma exata é justamente aquela que deriva de uma função potencial. Sendo assim, classicamente a representação do campo elétrico  $\mathbf{E}$  numa região do espaço pode ser re-interpretada não como um vetor do  $\mathbb{R}^3$ , mas sim como um funcional linear

$$\mathcal{E}(x, y, z) = \mathcal{E}_x(x, y, z)dx + \mathcal{E}_y(x, y, z)dy + \mathcal{E}_z(x, y, z)dz.$$

Uma exposição sobre eletromagnetismo do ponto de vista de formas diferenciais encontra-se em [12].

**Exemplo 8.5 (2-forma do campo eletromagnético).** *Em física, define-se o 4-potencial eletromagnético<sup>2</sup> como sendo a quádrupla  $(\phi/c, \mathbf{A})$ , onde  $\phi$  é o potencial elétrico e  $\mathbf{A}$  é o potencial vetor — que é uma aplicação com três funções coordenadas, todas elas definidas em  $\mathbb{R}^3$  ou em algum subconjunto desta variedade.*

*Por simplicidade, consideremos o nosso espaço-tempo como sendo  $\mathbb{R}^4$ <sup>3</sup>. De forma análoga ao que foi feito com o campo elétrico, podemos reinterpretar o*

<sup>2</sup>Lê-se “quadripotencial eletromagnético”.

<sup>3</sup>Em outras palavras, estamos lidando com espaços de Minkowski, apesar de que o exemplo pode ser estendido para um espaço-tempo  $\mathcal{M}$  mais geral. De qualquer modo, o que importa é como o campo se transforma localmente, o que significa que nosso espaço-tempo geral  $\mathcal{M}$  aproxima-se de um espaço-tempo de Minkowski.

4-potencial como sendo uma 1-forma

$$\mathcal{A} = -\frac{\phi}{c}dct + A_x dx + A_y dy + A_z dz.$$

Do ponto de vista de formas diferenciais, o famigerado tensor eletromagnético nada mais é do que a derivada exterior do 4-potencial escrito como uma 1-forma, isto é

$$\mathcal{F} := d\mathcal{A}.$$

Denotando  $A_0 \equiv -\phi$ ,  $A_1 \equiv A_x$ ,  $A_2 \equiv A_y$  e  $A_3 \equiv A_z$ , temos que

$$\mathcal{F} = \sum_{\nu < \mu} (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) dx^\nu \wedge dx^\mu,$$

onde  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$  e  $\partial_\nu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\nu}$ . Além do mais, consideramos  $\partial_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$ , provavelmente por questões dimensionais.

Lembrando que podemos escrever  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  em termos dos potenciais como

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

então, concluímos que a 2-forma do campo eletromagnético é

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & -\frac{E_x}{c}dct \wedge dx - \frac{E_y}{c}dct \wedge dy - \frac{E_z}{c}dct \wedge dz \\ & + B_z dx \wedge dy - B_y dx \wedge dz + B_x dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Como  $\mathcal{F}$  trata-se de uma 2-forma, ele é claramente anti-simétrico. Ademais, visto que  $dx^\nu \wedge dx^\mu = dx^\nu \otimes dx^\mu - dx^\mu \otimes dx^\nu$  também fica claro que o tensor eletromagnético possui apenas 6 componentes independentes — que são justamente as que aparecem na expressão acima. Em termos matriciais, a forma covariante deste tensor é dada por

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos obter a forma contravariante do tensor ao “subirmos” os índices  $\mu$  e  $\nu$  ao aplicarmos duas vezes o tensor métrico  $\eta^{\alpha\beta}$  em  $F_{\mu\nu}$ , isto meramente troca os sinais das componentes do campo elétrico. Daí, conclui-se que

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

é a forma contravariante do tensor do campo eletromagnético.

*O boost de Lorentz na direção do eixo  $x$  é dado pela matriz*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*Em termos de álgebra linear, as transformações de Lorentz representam uma mudança de base que preserva o tensor métrico. Na linguagem dos físicos, elas são as transformações que preservam o intervalo  $ds^2$ . Enfim, como o eletromagnetismo é uma teoria Lorentz-invariante, segue que as transformações dos campos elétrico e magnético são dadas por*

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta}.$$

## Capítulo 9

# Orientação (incompleto)



## Capítulo 10

# Conexões Afins

O texto desta seção é baseado em [13].

### 10.1 Derivada Covariante e Transporte Paralelo

**Definição 10.1.** *Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade diferenciável. Uma **conexão afim** em  $\mathcal{M}$  é um mapa  $\nabla: \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  que designa cada par ordenado  $(X, Y)$  ao campo vetorial  $C^\infty$   $\nabla_X Y$  que possui as seguintes propriedades:*

- a)  $\nabla_X Y$  é  $\mathbb{R}$ -linear em  $X$  e  $Y$ ;
- b) Se  $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ , então:

$$\nabla_{fX} Y := f \nabla_X Y;$$

$$\nabla_X(fY) := f \nabla_X Y + XfY.$$

O campo  $\nabla_X Y$  é chamado de **derivada covariante de  $Y$  ao longo de  $X$** .

**Lema 10.1.** *Seja  $\nabla$  uma conexão (afim) em uma variedade diferenciável  $\mathcal{M}$  e seja  $U \subset \mathcal{M}$  aberto. Se  $X$  ou  $Y$  anulam-se em  $U$ , então  $\nabla_X Y$  também anula-se em  $U$ .*

*Demonstração.*

Suponha que  $Y$  anule-se em  $U$  e seja  $p \in U$ . Visto que  $\mathcal{M} \setminus U$  é fechado, seja  $V$  uma vizinhança de  $\mathcal{M} \setminus U$  que não contém  $p$ . Escolhendo uma bump function  $h: \mathcal{M} \rightarrow [0, 1]$  com suporte em  $V$  tal que  $h(p) = 0$ , temos que  $h|_{\mathcal{M} \setminus U} \equiv \mathbb{1}_{\mathcal{M} \setminus U}$  e  $\text{supp } h \subset V$ . Daí,  $hY = Y$  e portanto  $\nabla_X(hY) = h \nabla_X Y + (Xh)Y$  anula-se em  $p$ . O procedimento para  $X$  é similar. ■

Segue do lema que se existem  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  tais que  $X = \tilde{X}$  e  $Y = \tilde{Y}$  numa vizinhança de  $p$ , então  $\nabla_X Y = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}$  nesta vizinhança.

**Lema 10.2.** *Sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ . Se  $X$  anula-se em  $p \in \mathcal{M}$ , então  $\nabla_X Y$  anula-se em  $p$ .*

*Demonstração.*

Seja  $(U, x^1, \dots, x^n)$  uma carta em  $p$ . Assim, vale localmente que

$$(\nabla_X Y)_p = (\nabla_{a^i \frac{\partial}{\partial x^i}} Y)_p = a^i(p) (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} Y)_p.$$

Como  $X$  anula-se em  $p$ , segue que  $a^i(p) = 0$  para  $i = 1, \dots, n$ , donde conclui-se que a derivada covariante anula-se em  $p$ . ■

**Definição 10.2.** *Seja  $(U, x^1, \dots, x^n)$  uma carta em  $\mathcal{M}$ . Os **símbolos de Christoffel**, também chamados de **coeficientes da conexão**, relativos a esta carta são as  $n^3$  funções  $\Gamma_{ij}^k: U \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) := \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (10.1)$$

Em outras palavras, eles são os coeficientes da derivada covariante da  $j$ -ésima seção do frame  $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$  ao longo da  $i$ -ésima seção do mesmo frame.

Utilizando a definição acima, suponha que  $(V, \bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$  seja outra carta em  $\mathcal{M}$  tal que  $U \cap V \neq \emptyset$ . Na interseção, temos que:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{x}^a}} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{x}^b} \right) = \bar{\Gamma}_{ab}^c \frac{\partial}{\partial \bar{x}^c} = \bar{\Gamma}_{ab}^c \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^c} \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (10.2)$$

Por outro lado, usando as propriedades da derivada covariante, segue que

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{x}^a}} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{x}^b} \right) &= \nabla_{\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a} \frac{\partial}{\partial x^i}} \left( \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a} \left[ \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} \right] \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^a \partial \bar{x}^b} \frac{\partial}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

Comparando com a eq. (10.2), temos que

$$\bar{\Gamma}_{ab}^c \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^c} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b} \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^a \partial \bar{x}^b}, \quad (10.3)$$

Ou

$$\bar{\Gamma}_{ab}^c = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b} \frac{\partial \bar{x}^c}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^a \partial \bar{x}^b} \frac{\partial \bar{x}^c}{\partial x^k}. \quad (10.4)$$

Fica como exercício mostrar que se para toda carta existe um conjunto de  $n^3$  funções  $\Gamma_{ij}^k$  que se transformam conforme a eq. (10.4), então existe uma única conexão em  $\mathcal{M}$  que satisfaz a eq. (10.1).

Se  $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  e  $\nabla$  é uma conexão em  $\mathcal{M}$ , então podemos definir um campo tensorial  $\nabla Y \in \Gamma(T^{(1,1)}T\mathcal{M})$  definido por

$$\nabla Y(\omega, X) := \omega(\nabla_X Y).$$

Neste caso, estamos pensando neste tensor como um mapa de  $\Omega^1(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  em  $C^\infty(\mathcal{M})$ , o que é viável por conta do seguinte lema:

**Lema 10.3.** *Um mapa*

$$\mathcal{F}: \underbrace{\Omega^1(\mathcal{M}) \times \dots \times \Omega^1(\mathcal{M})}_{k \text{ vezes}} \times \underbrace{\mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \dots \times \mathfrak{X}(\mathcal{M})}_{l \text{ vezes}} \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$$

é induzido por um campo tensorial suave  $F \in \Gamma(T^{(k,l)}T\mathcal{M})$  se e somente se for  $C^\infty(\mathcal{M})$ -multilinear.

Por vezes,  $\nabla Y$  é chamado de **derivada covariante total de  $Y$** .

Em uma carta  $(U, x^1, \dots, x^n)$ , seja  $Y^k \frac{\partial}{\partial x^k}$  é a representação de  $Y$ . Como  $\nabla Y$  é um tensor misto do tipo  $(1,1)$ , temos localmente que

$$\nabla Y = Y^i_{;j} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j,$$

onde cada coeficiente  $Y^i_{;j}$  é obtido da forma a seguir.

Por um lado:

$$\nabla Y \left( dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = Y^i_{;j} \frac{\partial}{\partial x^r} \otimes dx^s \left( dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = Y^i_{;j}.$$

Por outro lado, usando a definição de  $\nabla Y(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j})$  juntamente das propriedades da derivada covariante, segue que

$$\begin{aligned} \nabla Y \left( dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) &= dx^i \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} Y^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\ &= dx^i \left( Y^k \Gamma^l_{jk} \frac{\partial}{\partial x^l} + \frac{\partial}{\partial x^j} Y^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\ &= Y^k \Gamma^i_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} Y^i. \end{aligned}$$

Igualando ambos os lados, conclui-se que

$$Y^i_{;j} = Y^k \Gamma^i_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} Y^i.$$

**Definição 10.3.** *Uma conexão  $\nabla$  é dita **simétrica** quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

**Proposição 10.1.** *Uma conexão  $\nabla$  em  $\mathcal{M}$  é simétrica se e somente se para toda carta em  $\mathcal{M}$  vale que  $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$  para todos  $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ .*

*Demonstração.*

Seja  $(U, \varphi)$  uma carta qualquer em  $\mathcal{M}$ . Localmente, facilmente averigua-se que

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X^i Y^j (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}) + XY^k - YX^k] \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Sendo  $(XY^k - YX^k) \frac{\partial}{\partial x^k}$  a forma local de  $[X, Y]$ , conclui-se rapidamente que

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \iff \Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}.$$

Sendo  $(U, \varphi)$  qualquer, o resultado estende-se para toda carta em  $\mathcal{M}$ . ■

### Derivada covariante de campos tensoriais

**Lema 10.4.** *Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita. Então  $T^{(k+1,l)}(V) \simeq L(\underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{k \text{ vezes}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{l \text{ vezes}}; V)$ .*

*Demonstração.*

Basta definir o mapa  $\Phi: L(\underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{k \text{ vezes}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{l \text{ vezes}}; V) \rightarrow T^{(k+1,l)}(V)$  como sendo aquele em que:

$$\Phi(A)(\omega^1, \dots, \omega^{k+1}, v_1, \dots, v_l) := \omega^{k+1}(A(\omega^1, \dots, \omega^k, v_1, \dots, v_l)).$$

■

A partir do lema 10.4, podemos definir uma operação chamada de **traço** – sendo **contração** um nome alternativo –, que serve para abaixar o rank de um tensor.

Para o par  $(1, 1)$ , o traço é uma operação  $\text{Tr}: T^{(1,1)}(V) \rightarrow \mathbb{R}$  que mapeia um tensor  $F$  no seu traço no sentido de um operador linear, ou seja, na soma dos elementos da diagonal principal de uma representação matricial do operador  $F$ . No caso geral, o traço de um tensor do tipo  $(k+1, l+1)$  é o operador  $\text{Tr}: T^{(k+1,l+1)}(V) \rightarrow T^{(k,l)}(V)$  definido por

$$(\text{Tr } F)(\omega^1, \dots, \omega^k, v_1, \dots, v_l) := \text{Tr}(F(\omega^1, \dots, \omega^k, \cdot, v_1, \dots, v_l, \cdot)),$$

onde  $F(\omega^1, \dots, \omega^k, \cdot, v_1, \dots, v_l, \cdot)$  é um tensor do tipo  $(1, 1)$ .

Localmente, as componentes de  $\text{Tr } F$  são:

$$(\text{Tr } F)^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l} = F^{i_1 \dots i_k m}_{j_1 \dots j_l m}.$$

**Proposição 10.2.** *Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade e  $\nabla$  uma conexão em  $T\mathcal{M}$ . Então, para cada  $(k, l) \in \mathbb{N}_0^2$  existe uma única conexão em  $T^{(k,l)}T\mathcal{M}$ , também denotada por  $\nabla$ , tal que*

1. Em  $T^{(1,0)}\mathcal{M} = T\mathcal{M}$  a conexão no fibrado tensorial é idêntica à conexão no fibrado tangente.
2. Em  $T^{(0,0)}\mathcal{M} = \mathcal{M} \times \mathbb{R}$ , vale  $\nabla_X f = Xf$  para todos  $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ ,  $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ .
3.  $\nabla_X(F \otimes G) = (\nabla_X F) \otimes G + F \otimes (\nabla_X G)$ .
4.  $\nabla_X(\text{Tr } F) = \text{Tr}(\nabla_X F)$ .

Além disso,  $\nabla$  satisfaz

- a) *Seja  $\langle \omega, Y \rangle \equiv \omega Y$ . Então,*

$$\nabla_X \langle \omega, Y \rangle = \langle \nabla_X \omega, Y \rangle + \langle \omega, \nabla_X Y \rangle.$$

b) Para todos  $F \in \Gamma(T^{(k,l)}T\mathcal{M})$ ,  $\omega^1, \dots, \omega^k \in \Omega^1(\mathcal{M})$ ,  $Y_1, \dots, Y_l \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ :

$$\begin{aligned} \nabla_X F(\omega^1, \dots, \omega^k, Y_1, \dots, Y_l) = & X(F(\omega^1, \dots, \omega^k, Y_1, \dots, Y_l)) \\ & - \sum_{i=1}^k F(\omega^1, \dots, \nabla_X \omega^i, \dots, \omega^k, Y_1, \dots, Y_l) \\ & - \sum_{j=1}^l F(\omega^1, \dots, \omega^k, Y_1, \dots, \nabla_X Y_j, \dots, Y_l). \end{aligned}$$

*Demonstração.*

Consulte o capítulo 4 de [14]. A demonstração não é difícil, mas é um pouquinho longa. ■

**Corolário 10.1.** *Seja  $\nabla$  uma conexão em  $T^{(k,l)}T\mathcal{M}$ . Então:*

a) No caso em que  $F = \omega$ , sendo que  $\omega \in \Omega^1$ , então

$$(\nabla_X \omega)(Y) = X(\omega Y) - \omega(\nabla_X Y).$$

*Localmente:*

$$\nabla_X \omega = (X(\omega_k) - X^j \omega_i \Gamma_{jk}^i) dx^k.$$

b) Se  $F \in \Gamma(T^{(k,l)}T\mathcal{M})$ , localmente temos que

$$\begin{aligned} \nabla_X F = & \left( X(F_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k}) + \sum_{s=1}^k X^m F_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots p \dots i_k} \Gamma_{mp}^{i_s} - \sum_{s=1}^l X^m F_{j_1 \dots p \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} \Gamma_{mj_s}^p \right) \times \\ & \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_l}. \end{aligned}$$

Podemos também estender a noção de derivada covariante total para campos tensoriais conforme o

**Lema 10.5.** *Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade diferenciável e  $\nabla$  uma conexão em  $T\mathcal{M}$ . Para cada campo tensorial  $F \in \Gamma(T^{(k,l)}T\mathcal{M})$ , o mapa*

$$\nabla F: \underbrace{\Omega^1(\mathcal{M}) \times \dots \times \Omega^1(\mathcal{M})}_{k \text{ vezes}} \times \underbrace{\mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \dots \times \mathfrak{X}(\mathcal{M})}_{k+1 \text{ vezes}} \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$$

dado por

$$\nabla F(\omega^1, \dots, \omega^k, Y_1, \dots, Y_l, X) := \nabla_X F((\omega^1, \dots, \omega^k, Y_1, \dots, Y_l))$$

define um campo tensorial suave do tipo  $(k, l+1)$  em  $\mathcal{M}$  chamado de **derivada covariante total de  $F$** .

*Demonstração.*

Aplicação direta do lema 10.3. ■

## Transporte Paralelo

**Definição 10.4.** *Dados uma curva suave em  $\mathcal{M}$ ,  $\gamma: \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathcal{M}$  e seu campo de velocidades  $\dot{\gamma}$ , seja  $X \in \mathfrak{X}(U)$  um campo vetorial suave definido numa vizinhança  $U$  de  $\gamma(I)$ . Então,  $X$  é **paralelo** – ou **paralelamente transportado** – **ao longo de  $\gamma$**  se*

$$\nabla_{\dot{\gamma}} X = 0$$

em  $\gamma$ . Outras notações possíveis para  $\nabla_{\dot{\gamma}} X$  são  $\frac{DX}{dt}$  e  $\frac{\nabla X}{dt}$ ; qualquer que seja a notação, este campo vetorial é chamado de derivada covariante de  $X$  ao longo de  $\gamma$ .

Localmente, é fácil verificar que as componentes da derivada covariante ao longo de uma curva assumem a forma

$$X^i{}_{;j} = \dot{\gamma}^i X^j \Gamma_{ij}^k + \frac{dX^k}{dt}.$$

Daí, um campo vetorial é paralelamente transportado ao longo de uma curva  $\gamma$  se e somente se vale localmente que

$$\dot{\gamma}^i X^j \Gamma_{ij}^k + \frac{dX^k}{dt} = 0.$$

**Proposição 10.3.** *Sejam  $\gamma: I \rightarrow \mathcal{M}$  uma curva suave e  $\mathfrak{X}(\gamma)$  o conjunto dos campos vetoriais  $C^\infty$  ao longo de  $\gamma$ . Então, existe um único mapa  $X \in \mathfrak{X}(\gamma) \mapsto \frac{DX}{dt} \in \mathfrak{X}(\gamma)$  que satisfaz às seguintes propriedades:*

1.  $\frac{D(\alpha X_1 + \beta X_2)}{dt} = \alpha \frac{DX_1}{dt} + \beta \frac{DX_2}{dt}$ , para todos  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
2.  $\frac{D(fX)}{dt} = \frac{df}{dt} X + f \frac{DX}{dt}$  para todo  $f \in C^\infty(I)$ .
3. Para  $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  e  $\bar{X} = X|_\gamma$ , vale

$$\frac{D\bar{X}}{dt} = \nabla_{\dot{\gamma}} X.$$

**Exercício 10.1.** *Demonstre a proposição acima.*

Parte III

Medida e Integração

## Capítulo 11

# Espaços e Funções Mensuráveis

Pelo o que parece, estudar teoria da medida é interessante, no sentido que ela permite generalizar a integral de Riemann à uma nova integral, chamada de integral de Lebesgue. Associados a esta nova integral, estão alguns teoremas de convergência que virão a calhar durante um possível estudo formal de mecânica quântica (teoremas da convergência monótona e dominada, por exemplo), além disso, ela permite uma caracterização mais detalhada dos espaços de Hilbert onde as funções de onda residem.

Durante esta toda parte trabalharemos com a **reta real estendida**,  $\bar{\mathbb{R}}$ , que é o conjunto  $\mathbb{R}$  juntamente dos símbolos  $-\infty$  e  $+\infty$ . Estes símbolos não são números reais. Bem, devem existir outras razões para que a adoção deste conjunto seja usual em livros de medida e integração, mas uma delas é que os teoremas de convergência que temos por objetivo entender não fariam sentido sem o uso de  $\bar{\mathbb{R}}$ <sup>1</sup>.

Dados os símbolos  $\pm\infty$  e um número  $x \in \mathbb{R}$ , definimos que:

- 1)  $(\pm\infty) + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty$ ;
- 2)  $(\pm\infty)(\pm\infty) = \infty$  e  $(\pm\infty)(\mp\infty) = -\infty$ ;
- 3)  $x(\pm\infty) = (\pm\infty)x = \begin{cases} \pm\infty, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ \mp\infty, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

---

<sup>1</sup>Provavelmente, algo relacionado ao supremo e ao ínfimo do conjunto vazio :p.



Também é útil definir os limites superior e inferior de uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de números reais:

$$\limsup x_n := \inf_m (\sup_{n \geq m} x_n)$$

$$\liminf x_n := \sup_m (\inf_{n \geq m} x_n)$$

Quando  $\limsup x_n$  e  $\liminf x_n$  são iguais, dizemos que este é o limite da sequência.

**Definição 11.1** ( $\sigma$ -álgebra). *Seja  $X$  um conjunto. Uma família  $\Sigma$  de subconjuntos de  $X$  é uma  $\sigma$ -álgebra (lê-se sigma álgebra) em  $X$  se satisfaz as seguintes propriedades:*

- 1)  $\emptyset \in \Sigma$  e  $X \in \Sigma$ ;
- 2) Para todo  $A \in \Sigma$ , temos que  $X \setminus A \equiv A^c \in \Sigma$ ;
- 3) Seja  $(A_n)$  uma sequência de elementos de  $\Sigma$ , então  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$ <sup>2</sup>.

**Exemplo 11.1.** *Seja  $X = \mathbb{N}$ . Definindo  $A = \{2n: n \in \mathbb{N}\}$  e  $B = \{2n+1: n \in \mathbb{N}\}$ , temos que  $\Sigma = \{\emptyset, A, B, \mathbb{N}\}$  é uma  $\sigma$ -álgebra em  $\mathbb{N}$ .*

**Definição 11.2** (Espaço mensurável). *Seja  $X$  um conjunto e  $\Sigma$  uma  $\sigma$ -álgebra em  $X$ . O par ordenado  $(X, \Sigma)$  é chamado de um espaço mensurável. Ainda, diz-se que todo  $A \in \Sigma$  é um conjunto  $\Sigma$ -mensurável.*

Quando uma  $\sigma$ -álgebra está subentendida em  $X$ , então, para não carregar a notação, iremos dizer que  $X$  é um espaço mensurável e que  $A \in \Sigma$  é mensurável.

**Exercício 11.1.** *Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos de um conjunto  $X$ . Mostre que  $A \setminus B = A \cap B^c$ .*

**Proposição 11.1.** *Seja  $(X, \Sigma)$  um espaço mensurável. Então:*

- a) Para todos  $A \in \Sigma$  e  $B \in \Sigma$  temos que  $A \setminus B \in \Sigma$ , onde  $A \setminus B := \{x \in X: x \in A \text{ e } x \notin B\}$ .
- b) Dada uma sequência  $(A_n)$  de elementos de  $\Sigma$ , então  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$ .

*Demonstração.*

- a) Seja  $X$  um conjunto e sejam  $A \in \Sigma$  e  $B \in \Sigma$  quaisquer, onde  $\Sigma$  é uma  $\sigma$ -álgebra em  $X$ . Como  $A$  é  $\Sigma$ -mensurável, então  $A^c$  também o é. Logo, o conjunto  $A^c \cup B$  é  $\Sigma$ -mensurável, pois é união enumerável de elementos de  $\Sigma$ . Disto, segue que  $(A^c \cup B)^c = A \cap B^c \in \Sigma$ . Pelo exercício 11.1, conclui-se que  $A \setminus B \in \Sigma$ . Como  $A$  e  $B$  são  $\Sigma$ -mensuráveis quaisquer, temos que  $\forall A, B \in \Sigma$  vale que  $A \setminus B \in \Sigma$ .

<sup>2</sup>Na verdade, o conjunto de índices não precisa ser  $\mathbb{N}$ , basta que ele seja algum conjunto enumerável  $J$ .

- b) Seja  $(A_n)$  uma sequência arbitrária de conjuntos  $\Sigma$ -mensuráveis em um espaço mensurável  $(X, \Sigma)$ . Como para cada  $n \in \mathbb{N}$  o conjunto  $A_n$  é  $\Sigma$ -mensurável, então  $A_n^c \in \Sigma$ . Segue que  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \Sigma$ . Pela definição de  $\sigma$ -álgebra, temos que  $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$ . Como  $(A_n)$  é qualquer, então o resultado vale para toda sequência  $(A_n)$  de elementos de  $\Sigma$ . ■

**Exercício 11.2.** *Seja  $(X, \Sigma_1)$  e  $(X, \Sigma_2)$  espaços mensuráveis. Defina  $\Sigma_3 := \{A: A \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2\}$ . Mostre que  $\Sigma_3$  é uma  $\sigma$ -álgebra em  $X$ .*

**Exercício 11.3.** *Seja  $\mathcal{A}$  uma coleção de índices, tal que, dado um conjunto  $X$ ,  $\forall \alpha \in \mathcal{A}$  temos que  $\Sigma_\alpha$  é um  $\sigma$ -álgebra em  $X$ . Mostre que  $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} \Sigma_\alpha$  é uma  $\sigma$ -álgebra em  $X$ .*

**Exercício 11.4.** *Seja  $\mathcal{F}$  uma família não-vazia de subconjuntos de  $X$ . Mostre que a interseção de todas as  $\sigma$ -álgebras em  $X$  que contêm  $\mathcal{F}$  é uma  $\sigma$ -álgebra em  $X$ . Além disto, mostre que esta é a menor  $\sigma$ -álgebra que contém  $\mathcal{F}$ . Denota-se esta  $\sigma$ -álgebra por  $\sigma(\mathcal{F})$  e diz-se que ela é a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\mathcal{F}$ .*

**Exemplo 11.2** (Álgebra de Borel). *Seja  $(X, \tau)$  um espaço topológico. Então  $\sigma(\tau)$  é uma  $\sigma$ -álgebra em  $X$ , denominada **álgebra de Borel**. Costuma-se denotá-la por  $\mathcal{B}$  e seus elementos são chamados de conjuntos borelianos. Um exemplo de álgebra de Borel é  $(\mathbb{R}, \tau)$ , onde  $\tau$  é a topologia usual da reta.*

**Exemplo 11.3.** *Seja  $X = \bar{\mathbb{R}}$  e seja  $\mathcal{B}$  uma álgebra de Borel em  $\mathbb{R}$ . Para cada  $E \in \mathcal{B}$ , defina os conjuntos a seguir:*

$$E_1 = E \cup \{+\infty\}, \quad E_2 = E \cup \{-\infty\}, \quad E_3 = E \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

*Então, o conjunto  $\bar{\mathcal{B}}$  dos  $E$ ,  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_3$  tal que  $E \in \mathcal{B}$  é uma  $\sigma$ -álgebra em  $\bar{\mathbb{R}}$ , chamada de álgebra de Borel estendida.*

**Definição 11.3.** *Seja  $(X, \Sigma)$  um espaço mensurável e seja  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Diz-se que  $f$  é  $\Sigma$ -mensurável quando para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , o conjunto*

$$\{x \in X: f(x) > \alpha\}$$

*for  $\Sigma$ -mensurável.*

**Lema 11.1.** *Seja  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $X$  é um espaço mensurável. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- a)  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, A_\alpha = \{x \in X: f(x) > \alpha\}$  é mensurável.
- b)  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, B_\alpha = \{x \in X: f(x) \leq \alpha\}$  é mensurável.
- c)  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, C_\alpha = \{x \in X: f(x) \geq \alpha\}$  é mensurável.

d)  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, D_\alpha = \{x \in X: f(x) < \alpha\}$  é mensurável.

*Demonstração.*

Claramente,  $A_\alpha^c = B_\alpha$ , portanto, **a)**  $\iff$  **b)** é verdade. Um raciocínio análogo pode ser aplicado entre **c)** e **d)**. Resta mostrar que **a)**  $\iff$  **c)**.

Assumindo **a)**, então, temos que  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  e  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $A_{\alpha-1/n}$  é mensurável.

Logo, pela proposição 11.1, segue que  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha-1/n}$  é mensurável. Agora, dado

$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha-1/n}$  qualquer, temos que  $f(x) > \alpha - 1/n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , portanto,

$f(x)$  é cota superior desta interseção e concluímos que ela é um subconjunto não-vazio e limitado de  $\mathbb{R}$ , isto é, possui supremo em  $\mathbb{R}$ . Como  $\alpha = \sup \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha-1/n}$ ,

então necessariamente  $f(x) \geq \alpha$ , pois  $\alpha$  é a menor cota superior desta interseção. Segue que  $x \in C_\alpha$ . É fácil concluir que  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha-1/n} \subseteq C_\alpha$ . A outra inclusão é imediata, pois se  $x \in C_\alpha$ , então  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f(x) \geq \alpha > \alpha - 1/n$ .

Conclusão:  $C_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha-1/n}$ , logo  $C_\alpha$  é mensurável, i.e., **a)**  $\implies$  **c)**.

Assumindo **c)**, veja que  $A_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha+1/n}$ . Como  $C_{\alpha+1/n}$  é mensurável para cada  $n \in \mathbb{N}$ , então a união deles também será mensurável. Conclusão:  $A_\alpha$  é mensurável. ■

**Exercício 11.5.** Mostre que  $A_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha+1/n}$ .

A seguir temos alguns exemplos de funções mensuráveis (em cada exemplo, assuma que  $X$  é um espaço mensurável, por tudo que é sagrado).

**Exemplo 11.4.** Dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , seja  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \alpha$  para todo  $x \in X$ . Então,  $A_\beta = \emptyset$  para todo  $\beta \geq \alpha$  e  $A_\beta = X$  para todo  $\beta < \alpha$ .

**Exemplo 11.5.** A função característica de um subconjunto  $E \subseteq X$ ,  $\chi_E: X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in E \\ 0, & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

é mensurável. Com efeito, dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , se  $\alpha < 0$ , então,  $A_\alpha = X$ ; se  $0 \leq \alpha < 1$ , então  $A_\alpha = E$  e por fim, se  $\alpha \geq 1$ , então  $A_\alpha = \emptyset$ .

**Exemplo 11.6.** Seja  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  um espaço mensurável, onde  $\mathcal{B} = \sigma(\tau)$ , sendo  $\tau$  a topologia usual da reta. Então, qualquer função contínua  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é  $(\mathcal{B}-)$ mensurável. Com efeito, dado que  $f$  é contínua, então para qualquer  $\alpha$  real temos que  $A_\alpha$  é um conjunto aberto e portanto um elemento de  $\mathcal{B}$ . De agora em diante,  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  denotará a álgebra de Borel gerada pela topologia usual da reta.

**Exercício 11.6.** Considere a álgebra de Borel  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  na reta. Mostre que toda função monótona  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é mensurável.

**Lema 11.2.** Seja  $X$  um espaço mensurável e sejam  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$  mensuráveis. Então segue que as seguintes funções também são mensuráveis:

i)  $cf$ , para todo  $c \in \mathbb{R}$ .

ii)  $f^2$ .

iii)  $f + g$ .

iv)  $fg$ .

v)  $|f|$ .

*Demonstração.*

- i) Se  $c = 0$ , então  $cf$  é constante, portanto ela é mensurável. No caso em que  $c > 0$ , visto que  $f$  é mensurável, temos que  $\{x \in X: f(x) > \alpha/c\}$  é mensurável para qualquer  $\alpha \in \mathbb{R}$ . O caso para  $c$  negativo é análogo.
- ii) Para qualquer  $\alpha < 0$ , temos que  $\{x \in X: f^2(x) > \alpha\} = X$ . Para  $\alpha \geq 0$ , temos que  $\{x \in X: f^2(x) > \alpha\} = \{x \in X: f(x) > \sqrt{\alpha}\}$ . Facilmente conclui-se que  $f^2$  é mensurável.
- iii) Veja que  $f(x) + g(x) < \alpha \iff \exists r \in \mathbb{Q} \text{ tal que } f(x) < r < \alpha - g(x)$ . Logo, o conjunto

$$S_r := \{x \in X: f(x) < r\} \cap \{x \in X: g(x) < \alpha - r\}$$

é mensurável para cada racional. Fixado  $\alpha$ , segue que  $\{x \in X: (f+g)(x) < \alpha\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} S_r$ , isto é, o conjunto é uma união enumerável de conjuntos mensuráveis. Logo, para cada  $\alpha$  fixado,  $\{x \in X: (f+g)(x) < \alpha\}$  é mensurável. Conclusão:  $f+g$  é mensurável.

- iv) Visto que  $fg \equiv \frac{1}{2}(f+g)^2 - \frac{1}{2}(f^2 + g^2)$ , utilizando os itens anteriores, conclui-se que  $fg$  é mensurável.
- v) Para qualquer  $\alpha < 0$ , temos que  $\{x \in X: |f(x)| > \alpha\} = X$ . Quando  $\alpha \geq 0$ , segue que  $\{x \in X: |f(x)| > \alpha\} = \{x \in X: f(x) > \alpha\} \cup \{x \in X: f(x) < -\alpha\}$ . Logo, no caso positivo,  $\{A_\alpha\}$  é uma união enumerável de conjuntos mensuráveis e portanto é mensurável. Conclui-se que  $|f|$  é mensurável.

■

**Definição 11.4.** Seja  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida em um espaço mensurável. As **partes positiva e negativa de  $f$** , denotadas respectivamente por  $f^+$  e  $f^-$ , são as funções não-negativas definidas por

$$f^+(x) := \sup\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) := \sup\{-f(x), 0\}.$$

**Exercício 11.7.** *Mostre que, para qualquer função  $f$  definida em um conjunto  $X$ , vale que  $f = f^+ - f^-$  e  $|f| = f^+ + f^-$ . Como corolário, mostre que  $f^+ = \frac{1}{2}(f + |f|)$  e  $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$ .*

**Definição 11.5.** *Uma  $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  é dita  $\Sigma$ -mensurável quando  $\{x \in X: f(x) > \alpha\}$  é um elemento de  $\Sigma$  para todo  $\alpha$  real. O conjunto todas estas funções é denotado por  $M(X, \Sigma)$ .*

Temos que

$$\begin{aligned} \{x \in X: f(x) = +\infty\} &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X: f(x) > n\} \\ \{x \in X: f(x) = -\infty\} &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X: f(x) \leq -n\}. \end{aligned}$$

Daí, quando  $f \in M(X, \Sigma)$ , estes conjuntos são mensuráveis.

Uma forma mais conveniente de identificar funções  $f \in M(X, \Sigma)$  encontra-se no

**Lema 11.3.** *Seja  $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ . Então  $f \in M(X, \Sigma)$  se e somente se os conjuntos*

$$A = \{x \in X: f(x) = +\infty\} \quad \text{e} \quad B = \{x \in X: f(x) = -\infty\}$$

*são mensuráveis e se a função  $f_1: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  definida por*

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \notin A \cup B \\ 0, & x \in A \cup B \end{cases}$$

*for mensurável.*

*Demonstração.*

Para mostrar a ida, assuma que  $f \in M(X, \Sigma)$ . Já sabemos que  $A$  e  $B$  são mensuráveis. Além disso, seja  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Se  $\alpha \geq 0$ , então:

$$\{x \in X: f_1(x) > \alpha\} = \{x \in X: f(x) > \alpha\} \setminus A$$

é um conjunto mensurável. No caso em que  $\alpha < 0$ , temos que

$$\{x \in X: f_1(x) > \alpha\} = \{x \in X: f(x) > \alpha\} \cup B$$

também é mensurável.

Daí, conclui-se que  $f_1 \in M(X, \Sigma)$ .

Para mostrar a volta, basta ver que

$$\{x \in X: f(x) > \alpha\} = \{x \in X: f_1(x) > \alpha\} \cup A;$$

$$\{x \in X: f(x) > \alpha\} = \{x \in X: f_1(x) > \alpha\} \setminus B$$

quando  $\alpha \geq 0$  e  $\alpha < 0$ , respectivamente. Daí, conclui-se que  $f \in M(X, \Sigma)$ . ■

**Corolário 11.1.** *Se  $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \in M(X, \Sigma)$ , então  $cf$ ,  $f^2$ ,  $|f|$ ,  $f^+$  e  $f^-$  são mensuráveis.*

**Corolário 11.2.** *Sejam  $f, g: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  mensuráveis e defina os conjuntos*

$$E_1 = \{x \in X: f(x) = \infty \text{ e } g(x) = -\infty\}$$

$$E_2 = \{x \in X: f(x) = -\infty \text{ e } g(x) = +\infty\}.$$

*Se  $f + g$  é definida do modo usual em  $X \setminus (E_1 \cup E_2)$  e se é definido que  $(f + g)(E_1 \cup E_2) = \{0\}$ , então  $f + g$  é mensurável.*

Para definir a mensurabilidade do produto  $fg$ , faremos uso do

**Lema 11.4.** *Seja  $(f_n)$  uma sequência em  $M(X, \Sigma)$ . Sejam*

$$\begin{aligned} f(x) &= \inf f_n(x), & F(x) &= \sup f_n(x) \\ f^*(x) &= \liminf f_n(x), & F^*(x) &= \limsup f_n(x). \end{aligned}$$

*Então  $f$ ,  $F$ ,  $f^*$  e  $F^*$  são mensuráveis.*

*Demonstração.*

Usando a definição de ínfimo, temos que para cada  $x \in X$  e para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$\inf f_n(x) \geq \alpha \iff f_n(x) \geq \alpha.$$

Daí, conclui-se que

$$C_\alpha \equiv \{x \in X: f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X: f_n(x) \geq \alpha\}.$$

Como cada  $\{x \in X: f_n(x) \geq \alpha\}$  é mensurável, então  $C_\alpha$  é mensurável, pois  $\Sigma$  é fechada com relação a interseções enumeráveis.

De forma análoga ao caso acima, temos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \{x \in X: F(x) > \alpha\} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X: f_n(x) > \alpha\}, \\ \{x \in X: f^*(x) > \alpha\} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( \bigcap_{m=n}^{\infty} \{x \in X: f_m(x) \geq \alpha\} \right), \\ \{x \in X: F^*(x) > \alpha\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left( \bigcup_{m=n}^{\infty} \{x \in X: f_m(x) > \alpha\} \right). \end{aligned}$$

Daí,  $F$ ,  $f^*$  e  $F^*$  são mensuráveis. ■

**Corolário 11.3.** *Seja  $(f_n)$  uma sequência em  $M(X, \Sigma)$  que converge para  $f$ . Então  $f \in M(X, \Sigma)$ .*

*Demonstração.*

$(f_n)$  convergir pontualmente para  $f$  significa que  $f(x) = \liminf f_n(x)$ . Visto que  $\liminf f_n(x) = f^*(x)$ , segue que  $f$  é mensurável. ■

Para caracterizar a mensurabilidade do produto  $fg$  quando  $f, g \in M(X, \Sigma)$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$  defina o **truncamento de  $f$**  como sendo

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } |f(x)| \leq n \\ n, & \text{se } f(x) > n \\ -n, & \text{se } f(x) < -n \end{cases}$$

O truncamento é uma função mensurável, pois podemos escrevê-lo como

$$f_n(x) = f(x)\chi_{\{|f(x)| \leq n\}} + n\chi_{\{f(x) > n\}} - n\chi_{\{f(x) < -n\}}.$$

Além disso,  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  pontualmente: se  $f(x) \in \mathbb{R}$ , como a reta é arquimediana, então existe  $n_0$  tal que  $f(x) < n_0$ ; no caso em que  $f(x) = \pm\infty$ , temos que  $f_n(x) = \pm n$  e  $\lim f_n(x) = \pm\infty$ .

Se  $g_m$  é o truncamento de  $g \in M(X, \Sigma)$ , então pelo lema 11.2, segue que para cada  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n g_m$  é mensurável. Daí, pelo corolário anterior, temos que

$$f(x)g_m(x) = \lim_n f_n(x)g_m(x)$$

é mensurável para cada  $m$ . Novamente, pelo lema 11.2, o produto  $fg_m$ . Invocando novamente o corolário anterior, concluímos que

$$(fg)(x) = \lim_m f(x)g_m(x)$$

é mensurável.

**Lema 11.5.** *Se  $f \in M(X, \Sigma)$  é não-negativa, então existe uma sequência  $(\varphi_n)$  em  $M(X, \Sigma)$  tal que*

- a)  $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$  para todos  $x \in X$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- b)  $(\varphi_n)$  converge pontualmente para  $f$ .
- c) Cada  $\varphi_n$  tem um número finito de valores reais.

*Demonstração.*

Fixado  $n \in \mathbb{N}$ , para  $k = 0, 1, \dots, n2^n - 1$  defina o conjunto

$$E_{kn} := \left\{ x \in X : \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \right\}$$

e se  $k = n2^n$ , definida  $E_{kn} = \{x \in X : f(x) \geq n\}$ . Ainda mantendo  $n$  fixado, temos que a coleção  $\{E_{kn}\}$  é uma cobertura disjunta de  $X$ . Desta forma, defina  $\varphi_n: X \rightarrow \mathbb{R}$  como sendo

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n2^n} \frac{k}{2^n} \chi_{E_{kn}}(x).$$

Como cada  $\chi_{E_{k_n}}$  é mensurável, então  $\varphi_n$  é mensurável para cada  $n$ . Além disso, por construção, vale que  $\varphi_n$  tem um número finito de valores reais.

Para mostrar que  $(\varphi_n)$  é não-decrescente e que converge pontualmente, uma vez fixado  $x \in X$  qualquer e escolhido  $n \in \mathbb{N}$  arbitrário, temos que:

$$\begin{aligned} x \in E_{k_n} &\iff \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \\ &\iff \frac{2k}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k+1}{2^{n+1}} \text{ ou } \frac{2k+1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{(2k+1)+1}{2^{n+1}} \\ &\iff x \in E_{2k(n+1)} \cup E_{(2k+1)(n+1)}. \end{aligned}$$

Daí, segue que  $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ . Sendo  $x$  e  $n$  quaisquer, então o resultado vale para todo  $x \in X$  e para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Visto que  $\varphi_{n+1}(x) \leq f(x)$ , conclui-se que  $(\varphi_n)$  é uma sequência não-decrescente e limitada que converge pontualmente para  $f(x)$ . ■



## Capítulo 12

# Espaços de Medida

### 12.1 Medida

**Definição 12.1.** *Seja  $(X, \Sigma)$  um espaço mensurável. Uma **medida** é uma função  $\mu: \Sigma \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  que satisfaz as seguintes propriedades:*

- a)  $\mu(\emptyset) = 0$ .
- b)  $\mu(E) \geq 0$  para todo  $E \in \Sigma$ .
- c) Para qualquer coleção  $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$  de elementos de  $\Sigma$  disjuntos dois a dois, vale que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

À tripla  $(X, \Sigma, \mu)$  dá-se o nome **espaço de medida**.

Quando  $\mu(E) \neq \infty$  para qualquer  $E \in \Sigma$ , diz-se que  $\mu$  é uma medida finita. Se existe uma coleção  $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$  tal que  $\Sigma = \bigcup_n E_n$  e  $\mu(E_n) < \infty$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , diz-se que  $\mu$  é uma medida  $\sigma$ -finita.

Nos exemplos a seguir, considere  $(X, \Sigma)$  como um espaço mensurável.

**Exemplo 12.1.** *Uma vez fixado  $x \in X$ , define-se a **medida de Dirac**,  $\delta_x: \Sigma \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , por*

$$\delta_x(E) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in E \\ 0, & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

**Exemplo 12.2.** *Fixado  $D \subset X$ , para cada  $E \in \Sigma$  considere  $\nu(E)$  como sendo o número de elementos de  $E \cap D$ . Define-se então*

$$\nu(E) = \begin{cases} |E \cap D|, & \text{se } E \cap D \text{ é finito} \\ \infty, & \text{se } E \cap D \text{ é infinito} \end{cases}$$

onde  $|E \cap D|$  é a cardinalidade da interseção. Na situação em que  $D$  é um conjunto enumerável, temos que

$$\nu(E) = \sum_{x \in D} \delta_x(E).$$

**Exemplo 12.3.** Sejam  $D \subset X$  um conjunto enumerável e  $m: D \rightarrow (0, \infty)$ . Podemos tornar  $X$  num espaço de medida ao definirmos  $\mu: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\mu(E) = \sum_{x \in D} m(x) \delta_x(E).$$

Medidas deste tipo são chamadas de **medidas discretas**. Se  $m(x)$  representa a massa do ponto  $x$ , então  $\mu(E)$  seria uma forma de definir a massa do conjunto  $E$ .

**Exemplo 12.4.** Considere  $X = \mathbb{R}$  e  $\Sigma = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Existe uma única medida  $\lambda$  definida em  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  que coincide com o comprimento dos intervalos abertos e limitados  $E = (a, b)$ , ou seja, tal que  $\lambda(E) = b - a$ . Esta é a **medida de Lebesgue**.

**Exemplo 12.5.** Considere  $X = \mathbb{R}$  e  $\Sigma = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua crescente, então existe uma única medida  $\lambda_f$  definida na álgebra de Borel da reta tal que  $\lambda(E) = f(b) - f(a)$  quando  $E = (a, b)$ . Esta é a **medida de Borel-Stieltjes gerada por  $f$** .

**Exemplo 12.6.** Se  $\mu: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  é uma medida tal que  $\mu(E) \in [0, 1]$  para todo  $E \in \Sigma$  e  $\mu(X) = 1$ , então a tripla  $(X, \Sigma, \mu)$  é chamada de **espaço de probabilidade**. No caso em que  $X$  é enumerável, se impormos que  $\Sigma$  é o conjunto das partes de  $X$  e que a medida  $\mu$  é dada por

$$\mu(E) = \sum_{\omega \in E} p(\omega)$$

onde  $p: X \rightarrow [0, 1]$  é uma função que satisfaça  $\sum_{\omega \in X} p(\omega) = 1$ , diz-se que o espaço de probabilidade é **discreto**. No caso finito, para que todos eventos sejam equiprováveis, basta definir  $p(\omega) = 1/\#X$ , onde  $\#X$  é a cardinalidade do espaço de medida.

**Lema 12.1.** Seja  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida. Então

- a) Se  $E, F \in \Sigma$  e  $E \subseteq F$ , então  $\mu(E) \leq \mu(F)$ .
- b) Se  $E, F \in \Sigma$ ,  $E \subseteq F$  e  $\mu(E) < \infty$ , então  $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$ .
- c) Se  $(E_n)$  é uma sequência crescente em  $\Sigma$ , então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim \mu(E_n).$$

- d) Se  $(F_n)$  é uma sequência decrescente em  $\Sigma$  e  $\mu(F_n) < \infty$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim \mu(F_n).$$

*Demonstração.*

- a) Basta escrever  $F$  como sendo a união disjunta  $(F \setminus E) \cup E$ . Daí, pela positividade de  $\mu$  e  $\sigma$ -aditividade conclui-se que

$$\mu(E) \leq \mu(E) + \mu(F \setminus E) = \mu(F).$$

- b) Como  $\mu(E) < \infty$ , podemos subtraí-la de ambos os lados da igualdade  $\mu(F) = \mu(F \setminus E) + \mu(E)$  e obter a igualdade desejada.

- c) No caso em que  $\mu(E_n) = \infty$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ , a igualdade é imediata.

Suponha agora que  $\mu(E_n) < \infty$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Defina  $G_n := E_n \setminus E_{n-1}$  e por consistência, defina  $E_0 = \emptyset$ . Claramente  $G_{n+1} \cap G_n = \emptyset$  e  $\bigcup_n G_n = \bigcup_n E_n$ . Logo, por  $\sigma$ -aditividade temos que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(G_k).$$

Agora, dado  $n \in \mathbb{N}$ , temos que  $\sum_{k=1}^n \mu(G_k)$  é uma soma telescópica, ou seja,

$$\sum_{k=1}^n \mu(G_k) = \mu(E_n) - \mu(E_0).$$

Como a medida de  $E_0$  é zero, segue que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(G_k) = \lim \sum_{k=1}^n \mu(G_k) = \lim \mu(E_n).$$

- d) Observe que

$$\mu(F_n) < \infty \text{ e } \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq F_n \implies \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) < \infty.$$

Além disso, da finitude de  $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n)$  e por  $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n) \subseteq F_1$ , temos que

$$\mu\left(F_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \mu(F_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right). \quad (12.1)$$

Pelas leis de De Morgan, vale que

$$F_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_1 \setminus F_n).$$

Veja que  $(F_1 \setminus F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência crescente de conjuntos mensuráveis. Daí, pelo item anterior concluímos que

$$\mu \left( F_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \right) = \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_1 \setminus F_n) \right) = \lim \mu(F_1 \setminus F_n).$$

Usando o item b, temos que

$$\mu \left( F_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \right) = \mu(F_1) - \lim \mu(F_n). \quad (12.2)$$

Como  $(F_n)$  é uma sequência decrescente, temos que  $0 \leq \mu(F_{n+1}) \leq \mu(F_n) \leq \mu(F_1) < \infty$ , ou seja, a sequência das medidas é uma sequência não-crescente e limitada de números reais e portanto é convergente.

Usando as eq. (12.1) e eq. (12.2), conclui-se que

$$\lim \mu(F_n) = \mu \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \right).$$

■

**Definição 12.2.** *Sejam  $P$  uma proposição e  $X$  um espaço de medida. Diz-se que  $P$  vale em quase toda parte pela medida  $\mu$ , abreviadamente q.t.p. $[\mu]$ , se existe um conjunto  $N \in \Sigma$  tal que  $\mu(N) = 0$  e  $P$  vale no complementar de  $N$ . Quando a medida  $\mu$  está subentendida, simplesmente diz-se que a  $P$  vale em quase toda parte — abreviadamente q.t.p..*

Se  $(f_n)$  é uma sequência num espaço de medida, então ela converge em q.t.p. $[\mu]$  se existe  $N \in \Sigma$  tal que  $\mu(N) = 0$  e  $\lim f_n(x) = f(x)$  para todo  $x \notin N$ . Isto é denotado por

$$f = \lim f_n, \text{ q.t.p.}[\mu].$$

Por vezes pode ser útil relaxar alguns dos axiomas que definem uma medida, como por exemplo na

**Definição 12.3.** *Seja  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida. Uma **carga** é uma função  $\lambda: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  que é  $\sigma$ -aditiva e tal que  $\lambda(\emptyset) = 0$ .*

**Exercício 12.1.** *Mostre que a combinação linear de cargas também é uma carga.*

## 12.2 Integração

Para iniciar o estudo de integração no contexto de teoria da medida, trabalharemos primeiro com um caso mais simples, que mais para a frente permitirá a definição da *integral de Lebesgue*.

Antes de prosseguirmos, é pertinente apresentar a notação a seguir: se  $(X, \Sigma, \mu)$  for um espaço de medida, o conjunto de todas as funções mensuráveis não-negativas definidas neste espaço é denotado por  $M^+(X, \Sigma)$ . Além do mais, nesta subseção trabalharemos com um espaço de medida (arbitrário)  $(X, \Sigma, \mu)$  fixado.

**Definição 12.4.** Uma função  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$  é dita **simples** se admite apenas um número finito de valores.

Seja  $\{E_j\}_{j=1}^n$  uma partição de  $X$  tal que uma função simples e mensurável  $\varphi$  assume apenas um valor  $a_j$  em cada  $E_j$ , sendo que  $i \neq j \implies a_i \neq a_j$ . Podemos representar tal função unicamente como

$$\varphi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j},$$

onde  $a_j \in \mathbb{R}$  é o valor de  $\varphi$  em  $E_j$ . Essa representação de  $\varphi$  é única e será chamada de *representação padrão* de  $\varphi$ .

**Definição 12.5.** Seja  $\varphi \in M^+(X, \Sigma)$  uma função simples. Na representação padrão, a integral de  $\varphi$  relativa à medida  $\mu$  é o valor

$$\int \varphi d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j).$$

**Lema 12.2.** Seja  $\varphi \in M^+(X, \Sigma)$  uma função simples. A integral  $\int \varphi d\mu$  independe da representação de  $\varphi$ .

*Demonstração.*

Seja

$$\varphi = \sum_{k=1}^m b_k \mu(F_k)$$

uma representação de  $\varphi$ , onde  $\{F_k\}_{k=1}^m$  é outra partição de  $X$  e os coeficientes  $c_k \in [0, +\infty)$  não são todos distintos. Observe que o conjunto das interseções não-vazias  $\{E_j \cap F_k\}$  forma uma partição de  $X$ , logo se  $x \in X$  pertence a um elemento arbitrário deste conjunto, digamos  $E_{j_0} \cap F_{k_0}$ , então  $a_{j_0} = \varphi(x) = b_{k_0}$ . Daí, segue que:

$$\int \varphi d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m a_j \mu(E_j \cap F_k).$$

A soma acima percorre todos os índices, pois nas interseções vazias temos  $\mu(E_j \cap F_k) = 0$ . Pela observação acima, segue que

$$\int \varphi d\mu = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n b_k \mu(E_j \cap F_k) = \sum_{k=1}^m b_k \mu(F_k),$$

sendo a última igualdade obtida pelo fato de  $\{E_j \cap F_k\}$  ser uma partição de  $X$ . ■

Com consequência da definição 12.5, temos o

**Lema 12.3.** a) *Sejam  $\varphi, \psi \in M^+(X, \Sigma)$  funções simples e  $c \geq 0$ . Então*

$$\int c\varphi d\mu = c \int \varphi d\mu,$$

$$\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu.$$

b) *Se  $\lambda: \Sigma \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  for definida para cada  $E \in \Sigma$  por*

$$\lambda(E) := \int \varphi \chi_E d\mu,$$

*então  $\lambda$  é uma medida em  $X$ .*

*Demonstração.*

a) Considere o caso em que  $c = 0$ . Então,  $c\varphi$  é identicamente zero e portanto  $\int c\varphi d\mu = 0$ . Além disso, sendo  $\int \varphi d\mu$  ser finita ou não, temos que  $0 \int \varphi d\mu = 0$ , logo vale a igualdade do lema.

Suponha agora que  $c > 0$ . Neste caso, a representação padrão de  $c\varphi$  é

$$c\varphi = \sum_{j=1}^n ca_j \chi_{E_j},$$

donde conclui-se que sua integral é

$$\int c\varphi d\mu = \sum_{j=1}^n ca_j \mu(E_j) = c \sum_{j=1}^n ca_j \mu(E_j) = c \int \varphi d\mu.$$

Seja  $\psi = \sum_{k=1}^m b_k \chi_{F_k}$  a representação padrão de  $\psi$ . Sendo  $\{F_k\}_{k=1}^m$  também uma partição de  $X$ , facilmente vemos que

$$\int \varphi d\mu + \int \psi d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu \left( \bigcup_{k=1}^m E_j \cap F_k \right) + \sum_{k=1}^m b_k \mu \left( \bigcup_{j=1}^n E_j \cap F_k \right).$$

Visto que  $\{E_j \cap F_k\}$  forma uma partição de  $X$ , pela  $\sigma$ -aditividade de  $\mu$  temos que

$$\int \varphi d\mu + \int \psi d\mu = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k)$$

O lado direito da igualdade acima é uma representação não-padrão de  $\varphi + \psi$ . Como a integral de uma função simples não-negativa independe de sua representação (lema 12.2), obtemos a igualdade desejada.

- b) Basta mostrar que  $\lambda$  obedece às propriedades listadas na definição 12.1. Veja que

$$\varphi \chi_E = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j \cap E}.$$

Daí:

$$\lambda(E) = \sum_{j=1}^n a_j \int \chi_{E_j \cap E} d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E \cap E_j).$$

Para cada  $E_j$ , o mapa  $E \in \Sigma \mapsto \mu(E_j \cap E)$  é uma medida. Com efeito, se  $E = \emptyset$ , então  $E_j \cap \emptyset = \emptyset$  e portanto  $\mu(E \cap \emptyset) = 0$ . Como este mapa é a restrição de  $\mu$  ao conjunto  $\{E_j \cap E: E \in \Sigma\} \subset \Sigma$ , a não-negatividade é imediata. Por último, se  $\{F\}_{k=1}^\infty$  é uma coleção disjunta de conjuntos mensuráveis, temos que

$$\mu\left(E_j \cap \bigcup_{k=1}^\infty F_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^\infty (E_j \cap F_k)\right).$$

Como essas interseções são disjuntas, vale a  $\sigma$ -aditividade.

Como a multiplicação usual de uma medida por um número não-negativo ainda é uma medida e a soma usual de medidas também é uma medida, conclui-se que  $\lambda$  satisfaz a definição 12.1. ■

**Definição 12.6.** Se  $f \in M^+(X, \Sigma)$ , a *integral de  $f$  com respeito à medida  $\mu$*  é definida como

$$\int f d\mu := \sup_{\varphi \leq f} \int \varphi d\mu,$$

onde o supremo é tomado no conjunto das funções simples não-negativas mensuráveis.

No caso em que  $E$  é um conjunto mensurável, define-se a integral de  $f$  em  $E$  com respeito à medida  $\mu$  como

$$\int_E f d\mu := \sup_{\varphi \leq f} \int \varphi \chi_E d\mu.$$

As integrais da definição 12.6 estão bem definidas pois todo subconjunto da reta estendida admite supremo (convença-se disso, ou seja, demonstre esse fato). Além disso, a monotonicidade destas integrais é assegurada pelo

**Lema 12.4.** a) Sejam  $f, g \in M^+(X, \Sigma)$  tais que  $f(x) \leq g(x) \forall x \in X$ . Então

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

b) Sejam  $E$  e  $F$  conjuntos mensuráveis tais que  $E \subseteq F$ . Então

$$\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu.$$

*Demonstração.*

- a) Sejam  $\Phi_f^+ = \{\varphi \in M^+(X, \Sigma): \varphi \text{ é simples e } 0 \leq \varphi \leq f\}$  e  $\Phi_g^+$  o conjunto análogo para a função  $g$ . Como  $f \leq g$ , então  $\Phi_f^+ \subseteq \Phi_g^+$ . Disto, rapidamente verifica-se que vale a desigualdade desejada.
- b) Como  $f\chi_E \leq f\chi_F$ , ao aplicarmos o item *a* obtemos a desigualdade desejada. ■

A partir da definição 12.6 e do lema 12.4, podemos enunciar um dos teoremas essenciais de convergência na teoria de integração de Lebesgue:

**Teorema 12.1 (convergência dominada).** *Seja  $(f_n)$  uma sequência não-decrescente de funções em  $M^+(X, \Sigma)$  que converge para uma função  $f$ , então*

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

*Demonstração.*

Pelo corolário 11.3, temos que  $f$  é mensurável. Além disso, pelo lema 12.4, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , valem as seguintes desigualdades:

$$\int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu \leq \int f d\mu,$$

donde conclui-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu. \quad \blacksquare$$



# Parte IV

## Aplicações

## Capítulo 13

# Formalismo Lagrangiano

### 13.1 Vínculos e Espaço de Configurações

Considere um sistema formado por  $N$  partículas<sup>1</sup> se deslocando em um espaço tridimensional, que por simplicidade, consideremos como  $\mathbb{R}^3$ <sup>2</sup>. **Vínculos** são fatores de caráter geométrico, oriundos de agentes externos ao sistema estudado, e que restringem as possíveis posições e velocidades das partículas que compõem o sistema.

**Exemplo 13.1.** *Se a trajetória de uma partícula restringe-se a uma esfera de raio  $R$ , temos que as coordenadas desta partícula respeitam a seguinte relação:*

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0. \quad (13.1)$$

A Equação (13.1) é o que chamamos de equação de vínculo.

Podemos generalizar a Equação (13.1) para o sistema de  $N$  partículas citado anteriormente. Se considerarmos este conjunto de objetos como sendo um subconjunto de  $\mathbb{R}^{3N+1}$ , mais geralmente, equações de vínculo seriam funções suaves que relacionariam as coordenadas das partículas da seguinte forma:

$$f_I(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) = 0, \quad I = 1, \dots, K < 3N, \quad (13.2)$$

onde  $\mathbf{x}_k$  é posição da  $k$ -ésima partícula,  $t$  representa um instante de tempo e  $K$  representa a quantidade de vínculos aos quais o sistema obedece. O fator  $t$  foi levado em consideração, pois, podemos pensar que o sistema restringe-se a uma região que pode mudar com o tempo<sup>3</sup>. As funções dadas pela Equação (13.2) caracterizam o que se chama de **vínculo holonômico**. Na situação em que

---

<sup>1</sup>Objetos pontuais com uma massa específica e sujeitos a interações físicas no sentido mais intuitivo possível.

<sup>2</sup>Em geral, poderia tratar-se de qualquer espaço euclidiano  $\mathbb{E}^n$ , i.e., um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno.

<sup>3</sup>Pense por exemplo que as partículas encontram-se sobre uma superfície que oscila com o tempo.

ocorrem dependências com as velocidades das partículas na eq. (13.2), temos que

$$f_I(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \dot{\mathbf{x}}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_n, t) = 0. \quad (13.3)$$

No caso da Equação (13.3), diz-se que o vínculo é **não-holonômico**. Se pudermos integrar uma equação do tipo 13.3 de modo a torná-la da forma em 13.2, ainda dizemos que o vínculo é holonômico.

**Exemplo 13.2.** Na situação em que um disco de raio  $R$  rola sem deslizar sob uma superfície horizontal, temos que a equação que garante esta condição é

$$\dot{x} = R\dot{\phi},$$

onde  $x$  é a posição do centro de massa e  $\phi$  é o ângulo de rotação com relação ao eixo que passa pelo centro de massa, perpendicular ao plano de rotação. Como esta equação pode ser integrada para assumir o aspecto  $x - R\phi = 0$ , temos que o vínculo nesta situação é holonômico.

**Definição 13.1.** Um sistema mecânico é dito **holonômico** quando todos os vínculos deste sistema são holonômicos.

## Relação entre Vínculos e Trabalho

No caso simples, onde  $N = K = 1$ , se  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$  é a força conhecida que atua sobre a partícula (*e.g.*, força gravitacional) e  $\mathbf{C}$  é a força devido ao vínculo (*e.g.*, força de atrito com a superfície), temos que, pela equação do vínculo e pela 2ª lei de Newton,

$$f(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (13.4)$$

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} + \mathbf{C}. \quad (13.5)$$

Com isso, temos 4 equações (13.4 e cada componente de 13.5), mas 6 incógnitas (as componentes de  $\mathbf{x}$  e de  $\mathbf{C}$ ). A princípio, o que justifica desconhecermos as componentes de  $\mathbf{C}$  é o fato de existir mais uma força compatível com vínculo geométrico<sup>4</sup>. Para poder diminuir a quantidade de incógnitas e conseguirmos obter  $\mathbf{x}(t)$ , impomos que  $\mathbf{C}$  é necessariamente perpendicular à superfície. Os detalhes desta imposição serão descritos a seguir.

Se  $f(\mathbf{x}, t) = c$  é a equação para uma superfície qualquer, providenciado que  $\nabla f \neq 0$ <sup>5</sup>, sabemos que o gradiente será perpendicular à superfície no ponto  $(\mathbf{x}, t)$ . Desta forma, podemos escrever a força de vínculo como sendo

$$\mathbf{C} = \lambda \nabla f(\mathbf{x}, t), \quad (13.6)$$

onde  $\lambda \in \mathbb{R}$  é um parâmetro que pode depender de  $t$ . Com isso, reduzimos nosso número de incógnitas para 4:  $\lambda$  e as componentes de  $\mathbf{x}$ . A partir de certa

<sup>4</sup>Por exemplo, se impomos que a partícula se restringe a uma superfície, então a ação de qualquer força paralela a esta no ponto onde a partícula se encontra ainda resulta em uma força compatível com o vínculo.

<sup>5</sup>Para  $K, N > 1$ , é necessário que a matriz de entradas  $\frac{\partial f_I}{\partial x^\alpha}$  tenha pelo menos posto  $K$ .

condição, a interpretação física da Equação (13.6) é de que a força de vínculo não realiza trabalho. Isto pode ser verificado assumindo que  $\mathbf{F}$  é conservativa. Sob estas hipóteses, temos que ao tomar o produto escalar de 13.5 com  $\dot{\mathbf{x}}$ :

$$m\ddot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) = -\nabla V \cdot \dot{\mathbf{x}} + \lambda \nabla f \cdot \dot{\mathbf{x}}.$$

Visto que

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \nabla V \cdot \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial t}, \\ \frac{df}{dt} &= \nabla f \cdot \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial t}, \end{aligned}$$

temos que

$$\frac{dE}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V \right) = \frac{\partial V}{\partial t} - \lambda \frac{\partial f}{\partial t},$$

pois  $\frac{df}{dt} = 0$  por conta de a partícula permanecer na superfície. Supondo que o potencial não varie com o tempo, então a variação de energia da partícula daria-se exclusivamente por conta da dependência temporal de  $f$  e isso implica que  $\mathbf{C}$  realiza trabalho sobre a partícula. Para verificar que isto é verdade, pense no caso em que não há dependência temporal de  $f$ ; como  $\mathbf{C}$  é perpendicular à superfície, então  $\mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0$ . Agora, se existe alguma dependência temporal, não necessariamente temos que  $\mathbf{C}$  é perpendicular à velocidade da partícula e portanto há trabalho sendo realizado.

## Coordenadas Generalizadas

Para um sistema de  $N$  partículas com  $K$  vínculos holonômicos independentes, sabemos que a equação de movimento para a  $i$ -ésima partícula é dada por

$$m_i \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_i + \mathbf{C}_i, \quad (13.7)$$

onde  $\mathbf{C}_i$  é a força de vínculo atuando sobre a partícula. Por superposição, temos que para cada partícula, essa força é dada por

$$\mathbf{C}_i = \sum_{I=1}^K \lambda_I \nabla_i f_I, \quad (13.8)$$

onde  $\nabla_i$  é o gradiente com respeito às coordenadas do vetor  $\mathbf{x}_i$ <sup>6</sup>.

A partir de um raciocínio análogo ao de antes, se  $V(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t)$  representa a energia potencial total do sistema, então a variação da energia total do sistema é dada por

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{x}_i^2}{2} + V \right).$$

---

<sup>6</sup>Lembre que agora cada  $f_I$  é uma função definida em algum subconjunto de  $\mathbb{R}^{3N}$ .

Se todas as forças derivam deste potencial, então, tomando o produto escalar de ambos os lados da eq. (13.7) com  $\dot{\mathbf{x}}_i$  e somando em  $i$ , segue que

$$\sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{x}_i^2}{2} = - \sum_{i=1}^N \nabla_i V \cdot \dot{\mathbf{x}}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{I=1}^K \lambda_I \nabla_i f_I \cdot \dot{\mathbf{x}}_i. \quad (13.9)$$

Veja que

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \sum_{i=1}^N \nabla_i V \cdot \dot{\mathbf{x}}_i + \frac{\partial V}{\partial t}, \\ \frac{df_I}{dt} &= \sum_{i=1}^N \nabla_i f_I \cdot \dot{\mathbf{x}}_i + \frac{\partial f_I}{\partial t}. \end{aligned}$$

Substituindo estes resultados na eq. (13.9), e assumindo que  $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ , como  $f_I(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = 0$  para cada  $I$ , concluímos que

$$\frac{dE}{dt} = - \sum_{I=1}^K \lambda_I \frac{\partial f_I}{\partial t}.$$

Desta forma, se nenhum dos vínculos possui alguma dependência temporal, a energia do sistema permanece constante.

Agora, para  $i \in \{1, \dots, N\}$ , seja  $\boldsymbol{\tau}_i$  um vetor tal que

$$\sum_{i=1}^N \boldsymbol{\tau}_i \cdot \nabla_i f_I = 0, \quad I = 1, \dots, K. \quad (13.10)$$

Como o posto da matriz de entradas  $\partial f_I / \partial x^\alpha$  é  $K$ , então a eq. (13.10) determina  $K$  coordenadas do vetor  $\boldsymbol{\tau} := (\boldsymbol{\tau}_1, \dots, \boldsymbol{\tau}_N)$ , de forma que apenas  $3N - K$  dessas coordenadas são independentes. Desta forma, tomando o produto escalar de eq. (13.7) com  $\boldsymbol{\tau}_i$  e somando em  $i$ , conclui-se facilmente que

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{x}}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \boldsymbol{\tau}_i = 0. \quad (13.11)$$

A eq. (13.11) é conhecida como **princípio de d'Alembert**. Podemos interpretar os vetores  $\boldsymbol{\tau}_i$  como possíveis deslocamentos “infinitesimais” da  $i$ -ésima partícula, contanto que estes respeitem os vínculos do sistema, e chamamos eles de **deslocamentos virtuais**. As  $3N - K$  relações obtidas somadas com as  $K$  relações independentes dadas pelos vínculos nos fornecem as  $3N$  relações necessárias para definir as componentes de  $\mathbf{x} := (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ .

Do que foi visto acima, uma vez escolhidos  $N$  vetores,  $\boldsymbol{\tau}_i$  apropriados, podemos definir as trajetórias das partículas que compõem nosso sistema. Perceba que os vínculos na eq. (13.2) definem em conjunto uma hiper-superfície de  $\mathbb{R}^{3N}$ <sup>7</sup>

<sup>7</sup>Analogamente,  $\mathbb{E}^{3N}$ .

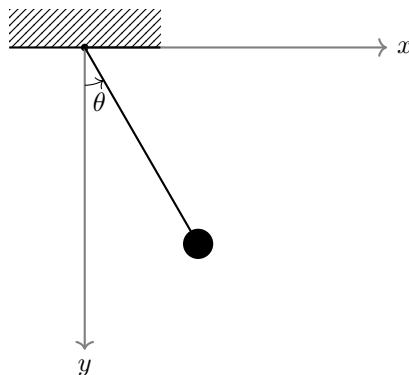


Figura 13.1: Representação do pêndulo simples.

e uma vez escolhidos os vetores que satisfazem 13.10, o vetor  $\tau$  definido há pouco é tangencial a esta hiper-superfície. De agora em diante, a hiper-superfície definida pelos vínculos holonômicos será denotada por  $Q$  e chamaremos ela de **variedade de configurações**.

Vejamos a seguir alguns exemplos de variedades de configuração.

**Exemplo 13.3.** *Um caso simples de variedade de configuração é um plano. No caso de apenas uma partícula temos  $N = 1$  e  $K = 1$ . Daí, segue que  $n = 2$ . O vínculo é simplesmente a equação que restringe a partícula ao plano.*

**Exemplo 13.4.** *A esfera  $S^1$ . Como visto em qualquer livro introdutório de geometria diferencial, essa esfera trata-se de uma variedade diferenciável de dimensão 1. Ela é o espaço de configuração do pêndulo planar simples (fig. 13.1), sendo  $\theta$  a coordenada generalizada que representa o ângulo entre o eixo vertical e a haste do pêndulo. Explicitamente, as equações de vínculo são*

$$f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

$$f_2(x, y, z) = z = 0.$$

**Exemplo 13.5.** *No caso do pêndulo planar duplo, o espaço de configurações é o produto  $S^1 \times S^1$ , o que é intuitivo uma vez que sabemos o espaço de configurações para o pêndulo do exemplo anterior. As coordenadas generalizadas são os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  entre as hastes e o eixo vertical.*

Outros dois exemplos seriam o pêndulo esférico e o pêndulo esférico duplo, mas acredito que a ideia para encontrar o espaço de configurações deles já tenha ficado evidente em vista dos dois exemplos sobre pêndulos acima.

## 13.2 Equações de Lagrange

Como cada ponto  $\mathbf{x}_i \in Q$  pode ser escrito em função das coordenadas generalizadas  $q^\alpha$ , então o vetor tangente ao ponto  $\mathbf{x}_i$  com relação a uma curva

parametrizada pela  $\gamma$ -ésima coordenada generalizada é dado simplesmente por  $\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\gamma}$ . Como existem  $n$  coordenadas generalizadas, isto nos permite concluir que um vetor tangente ao ponto  $\mathbf{x}_i$  é da forma

$$\boldsymbol{\tau}_i = \epsilon^\alpha \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha},$$

onde implicitamente está sendo feita uma soma de 1 até  $n$  indexada por  $\alpha$ . Daí, pela eq. (13.11) (princípio de d'Alembert), obtemos  $n$  equações da forma

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{x}}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (13.12)$$

Assumindo que as forças conhecidas  $\mathbf{F}_i$  derivem de um potencial  $V$ , facilmente conclui-se que

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial q^\alpha}.$$

Com relação ao produto  $\ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha}$ , utilizando a regra do produto temos que

$$\ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} = \frac{d}{dt} \left[ \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} \right] - \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha}. \quad (13.13)$$

No entanto,

$$\mathbf{v}_i \equiv \dot{\mathbf{x}}_i = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \implies \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha}.$$

Daí

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial q^\beta \partial q^\alpha} \dot{q}^\beta + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\beta} \dot{q}^\beta + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q^\alpha}.$$

Se para cada  $i$  na eq. (13.13) multiplicarmos o termo por  $m_i$  e utilizarmos o resultado acima, segue que

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \left( m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q^\alpha} \right].$$

Pela linearidade da derivação, sendo a energia cinética do sistema  $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$ , segue que:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha}.$$

Aplicando a igualdade acima juntamente com aquela obtida assumindo que as forças são conservativas, conclui-se que o princípio de d'Alembert assume a forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q^\alpha} = 0.$$

Como os  $\mathbf{x}_i$  são funções apenas dos  $q^\alpha$ , então o potencial também será função apenas dos  $q^\alpha$ , de forma que  $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}^\alpha} = 0$ . Em vista disso, podemos definir uma função denominada **Lagrangiana** da forma a seguir:

$$L = T - V,$$

e com isso concluir que para cada  $\alpha$  vale que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0. \quad (13.14)$$

As 13.14 são conhecidas como **equações de Lagrange**. A partir do processo para obter as equações de Lagrange, podemos concluir que em um sistema onde todas as forças derivam de uma função escalar  $V$  e onde os vínculos são suaves, as equações de Lagrange são equivalentes à segunda lei de Newton e, mais do que isso, representam uma forma simplificada de lidar com problemas envolvendo vínculos, pois basta encontrar as expressões para  $T$  e  $V$  em função das coordenadas generalizadas e resolver as equações de Lagrange.

**Exemplo 13.6.** *Em uma região onde existe um campo gravitacional uniforme, uma conta de massa  $m$  desliza ao longo de um aro circular de raio  $R$ . Assumindo que o aro gira em torno de um eixo radial com velocidade angular constante  $\Omega$ , escreva as equações de Lagrange para o sistema.*

*Primeiramente, observamos que o espaço de configurações do sistema é a esfera  $S^1$ , pois em coordenadas esféricas temos os vínculos  $r = R$  e  $\varphi = \Omega t$ , de forma que para este sistema de uma partícula,  $3N - K = 1$ . Logo, nossa variedade de configurações tem uma dimensão e dada a restrição imposta à partícula, é natural imaginar que  $Q = S^1$  e  $q = \theta$ . Desta forma, a lagrangiana do sistema é*

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{m}{2} (R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \Omega^2 \sin^2 \theta) + mgR \cos \theta,$$

*onde o segundo termo na expressão para  $T$  advém da rotação do aro. Com isso, segue que a equação de Lagrange assume a forma*

$$\ddot{\theta} = \Omega^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{g}{R} \sin \theta.$$

*Se estivéssemos interessados em analisar pontos de equilíbrio do sistema, bastaria avaliar os pontos em que  $\ddot{\theta}$  se anula, pois a aceleração da partícula na direção  $\hat{\varphi}$  é nula (para verificar isso, basta abrir a expressão para aceleração em coordenadas esféricas) e a aceleração radial não afeta o módulo da velocidade.*

**Exercício 13.1.** *Encontre as equações de movimento para o pêndulo planar duplo.*

### Invariância por mudança de coordenadas

Uma vez estabelecidas as coordenadas generalizadas  $q^\alpha$ , suponha que existam novas coordenadas  $g^\beta = g^\beta(q^1, \dots, q^n, t)$  que sejam funções suaves das antigas



coordenadas generalizadas. Como o sistema a se estudado pode ser descrito tanto pelas  $q^\alpha$  como pelas  $g^\beta$ , é necessário que possamos também escrever as  $q^\alpha$  como funções suaves das novas coordenadas. Desta forma, temos que

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial q^\alpha}{\partial g^\beta} \dot{g}^\beta + \frac{\partial q^\alpha}{\partial t} \implies \frac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial \dot{g}^\beta} = \frac{\partial q^\alpha}{\partial g^\beta}.$$

Escrevendo cada termo das equações de Lagrange em função das novas coordenadas temos que

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{g}^\beta} = \sum_{\alpha=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \frac{\partial q^\alpha}{\partial \dot{g}^\beta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial \dot{g}^\beta} \right) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial q^\alpha}{\partial g^\beta},$$

pois  $q^\alpha$  não têm dependência com relação a  $\dot{g}^\beta$ . Consequentemente, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{g}^\beta} \right) &= \sum_{\alpha=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \frac{\partial q^\alpha}{\partial g^\beta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial q^\alpha}{\partial g^\beta} \right) \right] \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \frac{\partial q^\alpha}{\partial g^\beta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial g^\beta} \right]. \end{aligned}$$

Visto que

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial g^\beta} = \sum_{\alpha=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \frac{\partial q^\alpha}{\partial g^\beta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial g^\beta} \right),$$

concluimos que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{g}^\beta} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial g^\beta} = \sum_{\alpha=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \right] \frac{\partial q^\alpha}{\partial g^\beta} = 0.$$

**Definição 13.2 (Lagrangianas equivalentes).** *Se as lagrangianas  $L_1$  e  $L_2$  dão origem às mesmas equações de movimento para o mesmo sistema, diz-se que elas são equivalentes.*

**Proposição 13.1.** *Seja  $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ , uma função suave e seja  $L_1$  a lagrangiana de um sistema mecânico sujeito a vínculos holonômicos. Se  $L_2: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por*

$$L_2 = L_1 + \frac{dF}{dt},$$

*então  $L_1$  e  $L_2$  são equivalentes.*

Para a demonstração desta proposição, faremos uso do

**Lema 13.1.** *Seja  $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(q^1, \dots, q^n, t)$ , uma função suave. Então, para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$ , vale que*

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} \left( \frac{dF}{dt} \right) = \frac{\partial F}{\partial q^j},$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial q^j} \right) = \frac{\partial}{\partial q^j} \left( \frac{dF}{dt} \right).$$

*Demonstração do Lema 13.1 .*

Seja  $j \in \{1, \dots, n\}$  e  $F(q^1, \dots, q^n, t)$  suave. Então:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} \left( \frac{dF}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial F}{\partial t} \right) = \frac{\partial F}{\partial q^j},$$

pois nem  $F$  nem suas derivadas parciais dependem de  $\dot{q}^j$ .

Para mostrar a segunda igualdade, basta usar a suavidade de  $F$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{q}^j} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial \dot{q}^j} \dot{q}^i + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \dot{q}^j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial q^j \partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial^2 F}{\partial q^j \partial t} = \frac{\partial}{\partial q^j} \left( \frac{dF}{dt} \right).$$

■

*Demonstração da Proposição 13.1.*

Seja  $\alpha \in \{1, \dots, n\}$ . Segue da definição de  $L_2$  que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha} \left( \frac{dF}{dt} \right) \right).$$

Sendo  $L_1$  solução das equações de Lagrange e aplicando o lema 13.1 segue que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \left( L_1 + \frac{dF}{dt} \right) = \frac{\partial L_2}{\partial q^\alpha}.$$

■

### Conservação de energia

Uma vez fornecida uma lagrangiana<sup>8</sup>  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T - V$  para um determinado sistema mecânico sujeito a vínculos holonômicos, como obter uma expressão para a energia? Dadas certas condições, é possível obter a expressão para a energia do sistema do seguinte modo<sup>9</sup>:

$$E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{\gamma} \dot{q}^{\gamma} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\gamma}} - L. \quad (13.15)$$

Apesar de a expressão parecer um tanto arbitrária, seu lado direito é o que se chama por **transformada de Legendre** da função Lagrangiana; as definições mais formais da transformada serão apresentadas em algum ponto mais adiante. Por ora é suficiente ver que hipóteses precisam ser feitas sobre  $L$  para que a eq. (13.15) de fato seja a energia do sistema.

<sup>8</sup>O uso da palavra “uma” se dá justamente por conta da proposição 13.1, já que não há uma única lagrangiana que nos forneça as informações de interesse para o sistema estudado.

<sup>9</sup>Por clareza, a convenção de Einstein será omitida no que segue.

Se cada uma das partículas é uma função das coordenadas generalizadas e (possivelmente) do tempo, então temos que a velocidade da  $i$ -ésima partícula é dada por

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \equiv \mathbf{v}_i = \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^{\alpha}} \dot{q}^{\alpha} + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}.$$

Desta forma, a expressão para a energia cinética do sistema em função das velocidades generalizadas é:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^{\alpha}} \dot{q}^{\alpha} + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \right) \cdot \left( \sum_{\beta} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^{\beta}} \dot{q}^{\beta} + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \right).$$

Se utilizarmos a expressão acima na lagrangiana, então a eq. (13.15) assume a forma a seguir:

$$\sum_{\gamma} \dot{q}^{\gamma} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\gamma}} - L = \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha, \gamma} m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^{\alpha}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^{\gamma}} \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\gamma} + \sum_{i=1}^N \sum_{\gamma} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \dot{q}^{\gamma} - T + V,$$

pois o potencial independe de  $\dot{q}^{\gamma}$ . Claramente, a igualdade acima não equivale à energia do sistema, contudo, se supormos que os vínculos não possuem dependências temporais explícitas, então obtemos o que desejamos. Com efeito, se  $\partial_t \mathbf{x}_i = 0$  para todo  $t$ , então a energia cinética torna-se uma forma quadrática nas velocidades generalizadas, i.e.,  $T = \sum A_{\alpha\gamma} \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\gamma}$ . Consequentemente, temos que

$$E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{\gamma} \dot{q}^{\gamma} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\gamma}} - L = 2T - T + V = T + V.$$

Derivando a eq. (13.15) com relação ao tempo, verifica-se que

$$\frac{dE}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Portanto, é preciso que a lagrangiana do sistema não possua dependências temporais para que a quantidade definida pela eq. (13.15) seja conservada.

Em conclusão, em um sistema mecânico sujeito a vínculos holonômicos, se a energia cinética é uma forma quadrática nas velocidades generalizadas e se a energia potencial depende exclusivamente das coordenadas generalizadas, a transformada de Legendre de  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  é a energia do sistema. Para que a energia seja conservada, então é necessário que  $L$  não dependa explicitamente do tempo.

**Exercício 13.2.** Aplique a eq. (13.15) na lagrangiana obtida no Exemplo 13.6 e verifique se esta grandeza equivale à energia e se ela é conservada.

### 13.3 Aspectos Geométricos e Princípio de Hamilton

A partir das subseções anteriores, sabemos que um sistema mecânico sujeito a vínculos holonômicos pode ser visto como uma hiper-superfície  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{3N}$  que pode ser localmente mapeada em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n < 3N$ , por meio de um conjunto  $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n)$  de funções suaves definidas num conjunto  $U \subset \mathcal{M}$ . Além disso, se  $\mathbf{q}'$  é outro conjunto de funções suaves, definidas numa região  $V \subset \mathcal{M}$  tal que  $U \cap V \neq \emptyset$ , as equações de Lagrange permanecem invariantes na região onde é possível descrever cada  $q^\alpha$  como função de  $\mathbf{q}'$  e as funções  $\mathbf{q} \circ \mathbf{q}'^{-1}$  e  $\mathbf{q}' \circ \mathbf{q}^{-1}$  são suaves<sup>10</sup>.

As características acima servem como motivadoras para a

**Definição 13.3.** Um *sistema mecânico* é uma tripla  $(\mathcal{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{F})$ , onde

- a)  $(\mathcal{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  é uma variedade Riemanniana cuja métrica induz o mapa  $\mu: T\mathcal{M} \rightarrow T^*\mathcal{M}$ :

$$\mu(p, v) \cdot (p, w) := \langle v, w \rangle_p, \quad \forall (p, v) \forall (p, w) \in T\mathcal{M},$$

denominado **operador massa**;

- b)  $\mathcal{F}: T\mathcal{M} \rightarrow T^*\mathcal{M}$  é um mapa diferenciável que satisfaz  $\mathcal{F}(T_p\mathcal{M}) \subset T_p^*\mathcal{M}$  para todo  $p \in \mathcal{M}$ , denominado **força externa**.

Por costume, chama-se a variedade  $\mathcal{M}$  de **espaço de configurações**<sup>11</sup>.

Se  $I \subset \mathbb{R}$  é um intervalo, então uma curva  $c: I \rightarrow \mathcal{M}$  que seja solução da equação de Newton

$$\mu \left( \frac{D\dot{c}}{dt} \right) = \mathcal{F}(\dot{c})$$

é chamada de **trajetória do sistema mecânico**.

**Definição 13.4.** Dado um sistema mecânico, temos que a força externa  $\mathcal{F}$  é:

1. **Posicional** se  $\mathcal{F}(p, v)$  depende apenas de  $\pi(v)$  para todo  $(p, v) \in T\mathcal{M}$ .
2. **Conservativa** se existe  $U: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\mathcal{F}(p, v) = -dU_{\pi(v)}$  para todo  $(p, v) \in T\mathcal{M}$ . A função  $U$  é a **energia potencial**.

**Definição 13.5.** Seja  $(\mathcal{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{F})$  um sistema mecânico. A **energia cinética** do sistema é a função  $K: T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$K(p, v) := \frac{1}{2} \langle v, v \rangle_p,$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  é o produto interno em  $T_p\mathcal{M}$  definido pela métrica estabelecida.

<sup>10</sup>Intuitivamente, essas inversas e composições estão bem definidas, pois, a princípio, podemos transitar entre diferentes sistemas de coordenadas que descrevem um sistema mecânico sem que as formas das leis físicas sejam alteradas. Em palavras chiques, esta característica é chamada de *covariância geral*.

<sup>11</sup>Para uma leitura mais aprofundada sobre os temas desta seção, vide [15] ou [16].

Como a lagrangiana de um sistema mecânico é uma função das configurações e das velocidades relacionadas às configurações do sistema, é razoável defini-la como sendo uma função diferenciável  $L: T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ .

No que segue, sejam  $a, b \in \mathcal{M}$  e  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  tais que  $t_1 < t_2$ . Ademais, seja  $C$  o conjunto de todas as curvas diferenciáveis  $c: [t_1, t_2] \rightarrow \mathcal{M}$  tal que  $c(t_1) = a$  e  $c(t_2) = b$ .

**Definição 13.6.** *Sejam  $\mathcal{M}$  um sistema mecânico e  $L: T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  uma lagrangiana definida neste sistema. A **ação** determinada por  $L$  é a função  $S: C \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$S(c) := \int_{t_1}^{t_2} L(c(t), \dot{c}(t)) dt.$$

**Definição 13.7.** *Dado  $\varepsilon > 0$ , uma **variação** de  $c \in C$  é um mapa  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow C$  tal que:*

1.  $\gamma(0) = c$ ;
2. O mapa  $\tilde{\gamma}: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_1, t_2] \rightarrow \mathcal{M}$ , definido por  $\tilde{\gamma}(s, t) := \gamma(s)(t)$ , é diferenciável.

No mais, se  $S$  é a ação de um sistema mecânico, diz-se que  $c$  é um **ponto crítico** de  $S$  quando

$$\left. \frac{d}{ds} S(\gamma(s)) \right|_{s=0} = 0$$

para qualquer variação  $\gamma$  da curva  $c$ .

**Teorema 13.1 (Princípio de Hamilton).** *Uma curva  $c \in C$  é um ponto crítico da ação determinada por uma lagrangiana  $L: T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  se e somente se satisfaz as **equações de Euler-Lagrange***

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0$$

para qualquer carta  $(TU, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  em  $T\mathcal{M}$ .

*Demonstração.*

( $\Leftarrow$ ) Seja  $(U, \varphi) = (U, q^1, \dots, q^n)$  uma carta em  $\mathcal{M}$  tal que  $c([t_1, t_2]) \subset U$ <sup>12</sup>. Dado  $\varepsilon > 0$ , seja  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow C$  uma variação de  $c$  e defina  $q(s, t) := (q \circ \tilde{\gamma})(s, t)$ . Localmente, a expressão para a ação do sistema é

$$S(\gamma(s)) = \int_{t_1}^{t_2} L(q(s, t), \frac{\partial q}{\partial t}(s, t)) dt,$$

onde  $L(q(s, t), \frac{\partial q}{\partial t}(s, t))$  é um abuso de notação para a composição  $L \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ , com  $\tilde{\varphi}^{-1}$  sendo a inversa do mapa de coordenadas da carta induzida  $(TU, \tilde{\varphi})$ ,  $\tilde{\varphi} = (q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ .

<sup>12</sup>Isto não é necessariamente verdade, para o caso em que a imagem está contida em mais de uma carta, vide o capítulo 7 de [15].

A derivada da ação  $S$  avaliada em  $s = 0$  é

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} S(\gamma(s)) \right|_{s=0} &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \left( q(0, t), \frac{\partial q}{\partial t}(0, t) \right) \frac{\partial q^\alpha}{\partial s}(0, t) dt \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \left( q(0, t), \frac{\partial q}{\partial t}(0, t) \right) \frac{\partial^2 q^\alpha}{\partial s \partial t}(0, t) dt. \end{aligned}$$

Integração por partes implica em

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} S(\gamma(s)) \right|_{s=0} &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \left( q(0, t), \frac{\partial q}{\partial t}(0, t) \right) \frac{\partial q^\alpha}{\partial s}(0, t) dt \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \left( q(0, t), \frac{\partial q}{\partial t}(0, t) \right) \frac{\partial q}{\partial s}(0, t) \Big|_{t_1}^{t_2} \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^n \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \left( q(0, t), \frac{\partial q}{\partial t}(0, t) \right) \right) \frac{\partial q^\alpha}{\partial s}(0, t) dt. \end{aligned}$$

Como por hipótese  $\forall s \gamma(s) \in C$ , segue que  $\forall s \ q(s, t_1) := q(\gamma(s)(t_1)) = q(c(t_1)) = q(a)$  e  $q(s, t_2) := q(\gamma(s)(t_2)) = q(c(t_2)) = q(b)$ . Consequentemente

$$\frac{\partial q}{\partial s}(0, t_1) = \frac{\partial q}{\partial s}(0, t_2) = 0.$$

Disto, conclui-se facilmente que a expressão para a derivada da ação em  $s = 0$  é

$$\left. \frac{d}{ds} S(\gamma(s)) \right|_{s=0} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^n \left[ \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \right] (q(t), \dot{q}(t)) w^\alpha(t) dt,$$

onde  $q(t) \equiv q(c(t))$ ,  $\dot{q}(t) \equiv \partial q / \partial t(0, t)$  e  $w^\alpha(t) \equiv \partial q^\alpha / \partial s(0, t)$ . Visto que localmente  $c: [t_1, t_2] \rightarrow \mathcal{M}$  satisfaz as equações de Euler-Lagrange, então conclui-se que

$$\left. \frac{d}{ds} S(\gamma(s)) \right|_{s=0} = 0.$$

Sendo  $\gamma$  qualquer, ao estender o resultado acima para toda variação tem-se que a curva  $c$  é um ponto crítico da ação.

( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $c$  é ponto crítico da ação do sistema. Escolhidas uma carta  $(U, \varphi)$  e um mapa suave  $w: [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $w(t_1) = w(t_2) = 0$ , tem-se que o mapa  $q(s, t) := q(t) + sw(t)$  é a forma local do mapa induzido por uma variação  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow C$  da curva  $c$ . Se  $\rho: [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave e positiva tal que  $\rho(t_1) = \rho(t_2) = 0$ , então basta definir as funções coordenadas de  $w$  como sendo

$$w^\alpha(t) := \left[ \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \right] (q(t), \dot{q}(t)) \rho(t).$$

Daí, como  $c$  é ponto crítico da ação, tem-se que:

$$\left. \frac{d}{ds} S(\gamma(s)) \right|_{s=0} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^n \left[ \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \right]^2 (q(t), \dot{q}(t)) \rho(t) dt = 0.$$

Portanto, para cada  $\alpha$  vale que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) (q(t), \dot{q}(t)) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} (q(t), \dot{q}(t)) = 0.$$

■

Fisicamente, o princípio de Hamilton<sup>13</sup> exprime que a evolução temporal de um sistema mecânico é descrito por uma trajetória  $c: [t_1, t_2] \rightarrow \mathcal{M}$  no espaço de configurações em que a grandeza chamada *ação* não possui perturbações de primeira ordem.

**Definição 13.8.** *Seja  $\mathcal{M}$  um sistema mecânico. A **derivada fibrada**<sup>14</sup> da função lagrangiana  $L$  é a aplicação  $\mathbb{F}L: T\mathcal{M} \rightarrow T^*\mathcal{M}$  que a cada  $(p, v) \in T\mathcal{M}$  designa um elemento  $\mathbb{F}L_v \in T_p^*\mathcal{M}$  definido por*

$$(\mathbb{F}L)_v(w) := \left. \frac{d}{dt} L(v + tw) \right|_{t=0}, \quad \forall w \in T_p\mathcal{M}.$$

Para não carregar a notação, tem-se que  $(\mathbb{F}L)_v \equiv \mathbb{F}L(p, v)$ .

**Definição 13.9.** *Seja  $L: T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  a lagrangiana de um sistema mecânico. A sua função **Hamiltoniana associada**,  $H: T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , é a função definida por*

$$H(v) := (\mathbb{F}L)_v(v) - L(v).$$

Seja  $(a, v) \in T\mathcal{M}$ <sup>15</sup>. Em coordenadas locais  $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ , a Hamiltoniana associada exprime-se como

$$H(q(a), \dot{q}(v)) = \dot{q}^\alpha(v) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - L(q(a), \dot{q}(v)).$$

Daí, segue que a hamiltoniana associada (em coordenadas locais) é a mesma grandeza definida na eq. (13.15) e portanto é definida a partir da transformada de Legendre da lagrangiana. Visto que nesta seção a energia cinética é uma forma quadrática das coordenadas generalizadas e que a lagrangiana é uma função independente do tempo, concluímos o mesmo da seção anterior: a hamiltoniana equivale à energia do sistema e ela é constante. Esta última característica encontra-se no

<sup>13</sup>Também chamado de *princípio da ação estacionária* ou *princípio da mínima ação*.

<sup>14</sup>Tradução livre do termo *fiber derivative*.

<sup>15</sup>Optei por usar  $a$  no lugar de  $p$ , pois físicos reservam este último símbolo para denotar o momento linear.

**Teorema 13.2.** *A função Hamiltoniana associada é constante ao longo das soluções das equações de Euler-Lagrange.*

**Exercício 13.3.** *Prove o teorema 13.2.*

Um aspecto importante do formalismo lagrangiano é sua capacidade de explicitar a relação entre simetrias e quantidades conservadas. Isso será explorado um pouco mais detalhadamente a seguir.

**Definição 13.10.** *Seja  $G$  um grupo e  $S$  um conjunto. Diz-se que  $G$  atua em  $S$  se existe um homomorfismo  $\phi$  entre  $G$  e o grupo de bijeções de  $S$  em  $S$ . Equivalentemente:*

$$\phi(g)(p) = A(g, p),$$

onde  $A: G \times S \rightarrow S$  é um mapa que satisfaz:

1. Se  $e \in G$  é o elemento neutro, então  $A(e, p) = p$ ,  $\forall p \in S$ ;
2. Se  $g, h \in G$ , então  $A(gh, p) = A(g, A(h, p))$ ,  $\forall g, h \in G \forall p \in S$ .

Por costume, denota-se  $A(g, p)$  por  $g \cdot p$ .

**Definição 13.11.** *Seja  $G$  um grupo de Lie atuando em uma variedade  $\mathcal{M}$ . A lagrangiana  $L: T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita  $G$ -invariante se*

$$L((dg)_p v) = L(v),$$

para todos  $v \in T_p \mathcal{M}$ ,  $p \in \mathcal{M}$  e  $g \in G$ , onde  $g: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  é o mapa  $p \mapsto g \cdot p$ .

Recordando que  $\mathfrak{g} \equiv T_e G$ , temos o seguinte:

**Definição 13.12.** *Seja  $G$  um grupo de Lie atuando em uma variedade  $\mathcal{M}$ . A ação infinitesimal de  $V \in \mathfrak{g}$  em  $\mathcal{M}$  é o campo vetorial  $X^V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  definido por*

$$X_p^V := \left. \frac{d}{dt} (\exp(tV) \cdot p) \right|_{t=0} = (dA_p)_e V,$$

onde  $A_p: G \rightarrow \mathcal{M}$  é o mapa  $A_p(g) = g \cdot p$ .

**Teorema 13.3 (Noether).** *Seja  $G$  um grupo de Lie atuando em uma variedade  $\mathcal{M}$ . Se  $L: T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  for  $G$ -invariante, então  $J^V: T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  definido por  $J^V(v) := \mathbb{F}L_v(X^V)$  é constante ao longo das soluções das equações de Euler-Lagrange para todo  $V \in \mathfrak{g}$ .*

*Demonstração.*

■

**Exemplo 13.7.**

**Exemplo 13.8.**



# Bibliografia

- [1] Elon L. Lima. *Curso de Análise Vol. 1*. IMPA, 2019.
- [2] Mark A. Armstrong. *Basic Topology*. Undergraduate Texts in Mathematics. 1983.
- [3] Nivaldo A. Lemos. *Convite à Física Matemática*. Livraria da Física, 2013.
- [4] James R. Munkres. *Topology: Pearson New International Edition*. Pearson, 2013.
- [5] John M. Lee. *Introduction to Topological Manifolds*. Vol. 202. Springer Science & Business Media, 2011.
- [6] Frederic P. Schuller. *The WE-Heraeus International Winter School on Gravity and Light*. [https://www.youtube.com/playlist?list=PLFeEvEPtX\\_OS6vxxiiNPrJbLu9aK1UVC\\_](https://www.youtube.com/playlist?list=PLFeEvEPtX_OS6vxxiiNPrJbLu9aK1UVC_). Acessado em 06/12/2020. 2015.
- [7] Loring Wulian Tu. *An Introduction to Manifolds*. Universitext. Springer-Verlag, 2011.
- [8] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer-Verlag New York, 2012.
- [9] Frank W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Vol. 94. Springer Science & Business Media, 1983.
- [10] William T. Gowers. *How to lose your fear of tensor products*. <https://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/tensors3.html>. Acessado em 06/12/2020.
- [11] Manfredo P. do Carmo. *Differential Forms and Applications*. Universitext. Springer-Verlag, 1994.
- [12] K. F. Warnick e P. H. Russer. “Differential Forms and Electromagnetic Field Theory (Invited Paper)”. Em: *Progress In Electromagnetics Research (PIER)* 148 (2014), pp. 83–112. DOI: [10.2528/PIER14063009](https://doi.org/10.2528/PIER14063009).
- [13] Norbert Straumann. *General relativity*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [14] John M Lee. *Introduction to Riemannian manifolds*. Springer, 2018.
- [15] Leonor Godinho e José Natário. *An Introduction to Riemannian Geometry. With Applications to Mechanics and Relativity*. Universitext. Springer, 2014.

- [16] Michael Spivak. *Physics for Mathematicians. Mechanics I*. Publish or Perish, 2010.