

“Integral de caminos como enfoque alternativo para la valuación de opciones financieras”

Programa en finanzas cuantitativas - Universidad del CEMA

Trabajo Final

Rodrigo J. Kang¹

¹*Facultad de Ciencias Exactas Universidad Nacional de La Plata, C.C 67, 1900 La Plata, Argentina.*

Resumen

En este trabajo proponemos el uso de integrales de camino como una estrategia innovadora y alternativa a los modelos convencionales para fijar precios de opciones financieras. Analizamos el caso de opciones tipo call europeas y obtenemos el propagador de Black-Scholes de manera analítica mediante la aplicación de integrales funcionales. Haciendo uso de la convolución del propagador de Black-Scholes contra la función de payoff ofrecemos una demostración diferente al teorema fundamental de la valuación de activos. Por último, implementamos el algoritmo de Metropolis-Hasting como método numérico para efectuar las integrales multidimensionales que naturalmente aparecen en la formulación de integral funcional y comparamos los resultados analíticos y numéricos.

Palabras clave: Integrales de camino, opciones, Black-Scholes, Metropolis-Hasting.

1. Introducción

En 1973 Black y Scholes establecieron las bases de la teoría clásica de fijación de precios de opciones [1]. Ese mismo año e independientemente de Black y Scholes, Merton derivó la misma formulación [2]. Esta teoría se basa en la dinámica de un proceso estocástico específico, el movimiento browniano geométrico. En condiciones ideales de mercado, sin arbitraje, sin dividendos y con volatilidades constantes, la fórmula de Black-Scholes-Merton proporciona una solución analítica para la valuación de opciones financieras, especialmente para opciones europeas tipo call simples. Sin embargo, para el caso de derivados financieros más complejos, que se caracterizan por el ejercicio anticipado y la dependencia del historial del activo subyacente, la fórmula Black-Scholes-Merton no ofrece soluciones analíticas, lo cual se ha constituido en un desafío que ha sido abordado mediante el desarrollo de métodos numéricos específicos para la valuación de derivados financieros exóticos con características dependientes de la trayectoria [3, 4].

En este contexto, este trabajo se enfoca en contribuir a la eficiente valuación de opciones en el ámbito financiero mediante el uso del método de integral de camino. Este método que tiene sus raíces en los trabajos de Wiener y Kac en cálculo estocástico y de Feynman en mecánica cuántica, ha ganado importancia en finanzas [3, 4, 5, 6]. Este enfoque permite la aplicación de técnicas analíticas y numéricas muy potentes y robustas. Debido a la importancia capital de las opciones en

los mercados financieros, con un valor de mercado bruto de derivados extrabursátiles que superó los 15.5 billones de dólares en el primer semestre de 2020 [6], el desarrollo de modelos y métodos computacionales para la fijación de precios de opciones es crucial. A pesar de las conocidas deficiencias en los supuestos del modelo Black-Scholes-Merton, su amplio uso persiste, en gran medida debido a la disponibilidad de soluciones cerradas [7]. Sin embargo, las opciones más exóticas requieren enfoques numéricos como diferencias finitas, elementos finitos o Monte Carlo. En este sentido, las integrales de trayectoria ofrecen una formulación alternativa elegante. Introducidas en los modelos financieros por Dash [8] y Linetsky [3], estas integrales, basadas en el trabajo previo de Feynman en mecánica cuántica [9, 10, 11, 12] y de Wiener en movimiento browniano [13], se han vuelto estándar en matemáticas financieras.

Este trabajo se organiza de la siguiente manera. En la Sección 2 se introduce el concepto de integral de camino en el contexto de la mecánica cuántica como herramienta para calcular la amplitud de probabilidad entre un estado inicial y un estado final y su relación con la función de Green de la ecuación de Schrödinger. En la Sección 3 se analiza la relación que existe entre la dinámica del mercado de opciones y la de los sistemas cuánticos, se deriva el propagador de Black-Scholes de manera analítica aplicando el enfoque de integrales de trayectoria y se muestra cómo con esta formulación es posible obtener el teorema fundamental de la valuación de activos. En la Sección 4 se argumenta el motivo por el cual el algoritmo de Metropolis-Hasting es el método numérico más adecuado para realizar las integrales multidimensionales que emergen de la formulación de la integral funcional y se presentan los resultados obtenidos de la implementación de este algoritmo con el lenguaje de programación Python. Por último, se cierra este trabajo con conclusiones y posibles perspectivas.

2. Integrales de camino en mecánica cuántica

En mecánica cuántica, los estados de un sistema están descritos por funciones de onda que son vectores en un espacio de Hilbert \mathcal{H} y cuya dinámica (en el caso no relativista) está dada por la ecuación de Schrödinger. Sin pérdida de generalidad y con el objetivo de simplificar los cálculos, consideremos un sistema cuántico con un único grado de libertad. En este contexto, para un hamiltoniano dado \hat{H} , la ecuación de Schrödinger toma la forma:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \quad (1)$$

Si se conoce la función de onda $\psi(x_i, t_i)$ en un momento dado t_i , podemos deducir su forma en un momento posterior t_f que es equivalente a integrar la ecuación (1). Para ello, es necesario conocer el efecto de la función de onda $\psi(x_i, t_i)$ en el instante inicial t_i sobre la función de onda $\psi(x_f, t_f)$ en el instante final t_f . Es razonable suponer que la intensidad de la onda que surge de x_i y llega a x_f en el momento t_f es proporcional a la amplitud inicial [14]. Por lo tanto, si llamamos $K(x_f, t_f; x_i, t_i)$ a la constante de proporcionalidad y consideramos todas las contribuciones en cada punto del espacio desde el instante inicial al instante final, la solución a la ecuación de (1) puede expresarse como:

$$\psi(x_f, t_f) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_i K(x_f, t_f; x_i, t_i) \psi(x_i, t_i) \quad (2)$$

La cantidad $K(x_f, t_f; x_i, t_i)$ se conoce como función de Green o propagador y dado que describe el efecto de la onda $\psi(x_i, t_i)$, que se encontraba en el punto x_i en el pasado t_i , sobre la onda $\psi(x_f, t_f)$, que se encuentra en el punto x_f en el momento posterior t_f , el conocimiento de la evolución temporal del sistema cuántico se reduce a determinar la forma de $K(x_f, t_f; x_i, t_i)$.

En lo que sigue vamos a calcular el propagador usando el método de integrales de camino propuesto por Feynman¹, para ello destacamos el hecho de que la función de onda en el esquema de Schrödinger² en la representación de coordenadas se escribe como³:

$$\psi(x_f, t_f) = \langle x_f | \psi; t_f \rangle \quad (5)$$

dado que los dos estados $|\psi; t_f\rangle$ y $|\psi; t_i\rangle$ están conectados por el operador evolución $\hat{U}(t_f, t_i)$:

$$|\psi; t_f\rangle = \hat{U}(t_f, t_i) |\psi; t_i\rangle \quad (6)$$

la ecuación (5) se puede entender como el elemento de matriz del operador evolución temporal, es decir:

$$\psi(x_f, t_f) = \langle x_f | \psi; t_f \rangle = \langle x_f | \hat{U}(t_f, t_i) |\psi; t_i\rangle = \int dx_i \langle x_f | \hat{U}(t_f, t_i) | x_i \rangle \psi(x_i, t_i) \quad (7)$$

con lo que comparando la ecuación (7) con la ecuación (2) podemos identificar el propagador como $K(x_f, t_f; x_i, t_i) := \langle x_f | \hat{U}(t_f, t_i) | x_i \rangle$, que no es otra cosa que la amplitud de probabilidad de transición entre un estado inicial (x_i, t_i) y un estado final (x_f, t_f) .

Para un Hamiltoniano que no tenga una dependencia explícita del tiempo, se puede ver que el operador evolución está dado por [11]:

$$\hat{U}(t_f, t_i) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_f - t_i)} \quad (8)$$

luego,

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) := \langle x_f | \hat{U}(t_f, t_i) | x_i \rangle = \langle x_f | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_f - t_i)} | x_i \rangle \quad (9)$$

Para poder llevar a cabo este cálculo lo que podemos hacer es fraccionar el intervalo temporal en $N \in \mathbb{N}$ intervalos discretos de longitud $\Delta t = \frac{t_f - t_i}{N}$, con lo cual:

$$\langle x_f | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_f - t_i)} | x_i \rangle = \langle x_f | \prod_{k=1}^N e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \Delta t} | x_i \rangle \quad (10)$$

Teniendo en cuenta que los operadores \hat{p} y \hat{x} tienen sistemas completos de autovectores:

$$\begin{aligned} \hat{p} |p\rangle &= p |p\rangle, \quad p \in \mathbb{R}, \quad \hat{I} = \int dp |p\rangle \langle p| \\ \hat{x} |x\rangle &= x |x\rangle, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \hat{I} = \int dx |x\rangle \langle x| \end{aligned} \quad (11)$$

¹Originalmente la idea fue propuesta por Dirac y sistematizada por Feynman [12].

²En el esquema de Schrödinger los estados de un sistema cuántico están descritos por vectores de un espacio de Hilbert \mathcal{H} que evolucionan con el tiempo mientras que los operadores son independientes del tiempo. Por otra parte, en el esquema de Heisenberg, el estado está determinado por un vector fijo de \mathcal{H} , mientras que los operadores evolucionan con el tiempo [10, 11, 12].

³Dada una base de autofunciones del operador posición, el estado cuántico $|\psi\rangle$ se puede representar como una combinación lineal de los estados de dicha base:

$$|\psi\rangle = \int dx_f |x_f\rangle \langle x_f | \psi \rangle \quad (3)$$

Se dice entonces que el valor de la función de onda en x_f , es la componente del estado $|\psi\rangle$ sobre el vector base $|x_f\rangle$ de la representación $\{|x_f\rangle\}$ [15], es decir:

$$\psi(x_f) = \langle x_f | \psi \rangle \quad (4)$$

Análogamente se puede definir el valor de la función de onda en la representación de momentos.

podemos usar estas relaciones de clausura para reescribir la ecuación (10) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \langle x_f | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_f - t_i)} | x_i \rangle &= \int dx_1 \int dx_2 \cdots \int dx_{N-1} \langle x_N | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \Delta t} | x_{N-1} \rangle \langle x_{N-1} | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \Delta t} | x_{N-2} \rangle \\ &\quad \cdots \langle x_2 | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \Delta t} | x_1 \rangle \langle x_1 | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \Delta t} | x_0 \rangle \end{aligned} \quad (12)$$

donde hemos identificando x_0 con x_i y x_N con x_f . Por otro lado, teniendo en cuenta que el operador hamiltoniano está dado por:

$$\hat{H}(\hat{p}, \hat{x}) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \quad (13)$$

y basándonos en la aproximación a orden $(\Delta t)^2$ (i.e. $\mathcal{O}(N^{-2})$) de la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff⁴ podemos escribir:

$$e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \Delta t} = e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{\hat{p}^2}{2m} \Delta t} e^{-\frac{i}{\hbar} V(\hat{x}) \Delta t} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{-i \Delta t}{\hbar} \right)^2 \left[\frac{\hat{p}^2}{2m}, V(\hat{x}) \right]} + \cdots \quad (15)$$

A partir de esto, suponiendo suavidad en la función $V(\hat{x})$ respecto a su argumento y teniendo en cuenta que:

$$\langle x | p \rangle = \frac{e^{\frac{i}{\hbar} p x}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \quad (16)$$

obtenemos la siguiente aproximación:

$$\begin{aligned} \langle x_{j+1} | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \Delta t} | x_j \rangle &= \langle x_{j+1} | e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{\hat{p}^2}{2m} \Delta t} e^{-\frac{i}{\hbar} V(\hat{x}) \Delta t} | x_j \rangle [1 + \mathcal{O}(N^{-2})] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_j \langle x_{j+1} | p_j \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p_j^2}{2m} \Delta t} \langle p_j | x_j \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} V(x_j) \Delta t} [1 + \mathcal{O}(N^{-2})] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p(x_{j+1} - x_j)} e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p_j^2}{2m} \Delta t} e^{-\frac{i}{\hbar} V(x_j) \Delta t} [1 + \mathcal{O}(N^{-2})] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} [p_j (\frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta t}) - H(p_j, x_j)] \Delta t} [1 + \mathcal{O}(N^{-2})] \end{aligned} \quad (17)$$

donde la función $H(p, x)$ es el hamiltoniano clásico del sistema, es decir:

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad (18)$$

insertando el resultado (17) en la ecuación (12) tenemos que:

$$\begin{aligned} \langle x_f | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_f - t_i)} | x_i \rangle &= \int dx_1 \int dx_2 \cdots \int dx_{N-1} \int \frac{dp_0}{2\pi\hbar} \int \frac{dp_1}{2\pi\hbar} \cdots \int \frac{dp_{N-1}}{2\pi\hbar} \\ &\quad e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} \Delta t [p_j (\frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta t}) - H(p_j, x_j)]} [1 + \mathcal{O}(N^{-2})]^N \\ &= \int dx_1 \int dx_2 \cdots \int dx_{N-1} \int \frac{dp_0}{2\pi\hbar} \int \frac{dp_1}{2\pi\hbar} \cdots \int \frac{dp_{N-1}}{2\pi\hbar} \\ &\quad e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} \Delta t [p_j (\frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta t}) - H(p_j, x_j)]} [1 + \mathcal{O}(N^{-1})] \end{aligned} \quad (19)$$

4

$e^{\hat{X} + \hat{Y}} = e^{\hat{X}} e^{\hat{Y}} e^{-\frac{1}{2} [\hat{X}, \hat{Y}]} + \cdots \quad (14)$

Tomando el límite con N tendiendo a infinito, obtenemos una forma de calcular la amplitud de probabilidad y por lo tanto el propagador:

$$\begin{aligned}
K(x_f, t_f; x_i, t_i) &= \langle x_f | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_f - t_i)} | x_i \rangle \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \int dx_1 \cdots \int dx_{N-1} \int \frac{dp_0}{2\pi\hbar} \cdots \int \frac{dp_{N-1}}{2\pi\hbar} \\
&\quad e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} \Delta t [p_j (\frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta t}) - H(p_j, x_j)]} [1 + \mathcal{O}(N^{-1})] \\
&= \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt [p(t)\dot{x}(t) - H(p(t), x(t))]}
\end{aligned} \tag{20}$$

donde hemos introducido la siguiente medida de integración:

$$\mathcal{D}x \mathcal{D}p = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=1}^{N-1} dx_k \frac{dp_k}{2\pi\hbar} \right) \frac{dp_0}{2\pi\hbar} \tag{21}$$

De este resultado es inmediato identificar el exponente con la acción clásica, es decir:

$$S[p(t), x(t)] := \int_{t_i}^{t_f} dt [p(t)\dot{x}(t) - H(p(t), x(t))] \tag{22}$$

con lo cual:

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} S[p(t), x(t)]} \tag{23}$$

que puede interpretarse como la suma ponderada por las contribuciones provenientes de la exponencial de $\frac{i}{\hbar}$ veces la acción clásica (en la formulación Hamiltoniana) de aquellos caminos del espacio de fases $(p(t), x(t))$ que conectan los puntos x_i y x_f en la ventana temporal $(t_f - t_i)$. Por otro lado, dado que las variables p_j en la ecuación (20) pueden ser integradas, la integral de caminos puede ser llevada al espacio de configuración. Para ello, introducimos las siguientes definiciones para compactar un poco la notación:

$$\begin{cases} \Delta x := x_{j+1} - x_j \\ I(\Delta x) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} [p_j \Delta x - \Delta t \frac{p_j^2}{2m} - \Delta t V(x_j)]} \end{cases} \tag{24}$$

si completamos cuadrados:

$$\begin{aligned}
-\frac{\Delta t}{2m} p_j^2 + \Delta x p_j - \Delta t V(x_j) &= -\frac{\Delta t}{2m} \left[p_j^2 - \frac{2m\Delta x}{\Delta t} p_j + \left(\frac{m\Delta x}{\Delta t} \right)^2 - \left(\frac{m\Delta x}{\Delta t} \right)^2 \right] - \Delta t V(x_j) \\
&= -\frac{\Delta t}{2m} \left(p_j - \frac{m\Delta x}{\Delta t} \right)^2 + \frac{m\Delta x^2}{2\Delta t} - \Delta t V(x_j)
\end{aligned} \tag{25}$$

y sustituimos en la integral $I(\Delta x)$ de la ecuación (24) tenemos que:

$$\begin{aligned}
I(\Delta x) &= \frac{1}{2\pi\hbar} e^{\frac{im\Delta x^2}{2\hbar\Delta t} - \frac{i\Delta t}{\hbar} V(x_j)} \int_{-\infty}^{\infty} dp_j e^{-\frac{i\Delta t}{2m\hbar} (p_j - \frac{m\Delta x}{\Delta t})^2} \\
&= \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i \Delta t}} e^{\frac{i\Delta t}{\hbar} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2 - V(x_j) \right]}
\end{aligned} \tag{26}$$

con lo cual, reemplazando estas integrales en la expresión (20) obtenemos:

$$\begin{aligned}
K(x_f, t_f; x_i, t_i) &= \langle x_f | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_f - t_i)} | x_i \rangle \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \int dx_1 \cdots \int dx_{N-1} \left(\frac{m}{2\pi \hbar i \Delta t} \right)^{\frac{N}{2}} e^{\frac{i \Delta t}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2 - V(x_j) \right]} [1 + \mathcal{O}(N^{-1})] \\
&= \int \mathcal{D}x e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L}
\end{aligned} \tag{27}$$

donde la cantidad $L = \frac{m}{2} \dot{x}^2(t) - V[x(t)]$ es el lagrangiano del sistema. Por lo tanto, podemos identificar al exponente con la acción clásica en la formulación Lagrangiana, es decir:

$$S[x(t)] := \int_{t_i}^{t_f} dt L[x(t), \dot{x}(t)] \tag{28}$$

por lo que el propagador puede expresarse como:

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \int \mathcal{D}x e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]} \tag{29}$$

con una medida de integración está dada por:

$$\mathcal{D}x = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{N-1} dx_k \left(\frac{m}{2\pi \hbar i \Delta t} \right)^{\frac{N}{2}} \tag{30}$$

El resultado (29) nos dice que la amplitud de probabilidad se determina mediante la suma de todas las trayectorias (o caminos) continuos en el espacio de configuración ponderados por las contribuciones de la forma $e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]}$ tomadas con la medida de integración dada por (30) y sujetos a la condición inicial $x(t_i) = x_i$ y la condición final $x(t_f) = x_f$.

3. Analogías entre los sistemas cuánticos y los mercados de opciones

En esta sección explicaremos la conexión sorprendente y profunda que existe entre el comportamiento de los sistemas cuánticos y el de los mercados de opciones y cómo utilizando el enfoque de integral funcional desarrollado en el apartado anterior en el marco de la mecánica cuántica es posible valorar este tipo de derivados financieros.

En primer lugar, consideremos la ecuación de Black-Scholes para el caso de una call europea en donde S es el precio del activo subyacente y en el que K y T corresponden al strike price y al tiempo de expiración respectivamente. Si llamamos $C(S, t)$ al valor de la call europea, la ecuación de Black-Scholes puede expresarse como [1, 2, 7, 16]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \tag{31}$$

con el cambio de variables $x = \ln(S)$, obtenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial x} \frac{dx}{dS} = \frac{1}{S} \frac{\partial C}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{1}{S} \frac{\partial C}{\partial x} \right) = -\frac{1}{S^2} \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \end{cases} \tag{32}$$

que sustituyéndolas en la ecuación (31) podemos llevarla a la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \left(-\frac{1}{S^2} \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right) + rS \left(\frac{1}{S} \frac{\partial C}{\partial x} \right) - rC &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \left(\frac{1}{2}\sigma^2 - r \right) \frac{\partial C}{\partial x} - rC &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Separando la parte temporal de la espacial, podemos reescribir la ecuación (33) como:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \hat{H}_{BS} C \quad (34)$$

donde:

$$\hat{H}_{BS} := -\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 - r \right) \frac{\partial}{\partial x} + r \quad (35)$$

es el Hamiltoniano de Black-Scholes [16].

Es en este punto en donde podemos ver la relación que existe entre la dinámica de las opciones y la de los sistemas cuánticos, dado que por comparación de la ecuación (34) con la ecuación (1) permite interpretar a la ecuación de Black-Scholes como la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo transformada según la prescripción $t \rightarrow \frac{-it}{\hbar}$, que en el contexto de la física se conoce como rotación de Wick [6]. Esto proporciona un marco matemático común para describir ambos tipos de sistemas, con lo cual, todo lo que puede comprenderse de uno de ellos se puede trasladar al otro y viceversa. Guiándonos por esta analogía, podríamos interpretar a los mercados de opciones como sistemas cuyos estados están descritos por funciones de dos variables $C(x, t)$ ⁵ que describen su valor y cuya dinámica está dada por la ecuación de Black-Scholes⁶ (34). De esta manera, por similitud tenemos que:

$$\begin{aligned} C(x, t) = \langle x|C; t \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_T \langle x| e^{-\tau \hat{H}_{BS}} |x_T \rangle \langle x_T|F \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_T K_{BS}(x_T, T|x, t) F(x_T) \end{aligned} \quad (36)$$

donde:

$$\begin{cases} \tau := T - t \\ F(x_T) := \langle x_T|F \rangle, \text{ payoff} \\ K_{BS}(x_T, T|x, t) := \langle x| e^{-\tau \hat{H}_{BS}} |x_T \rangle \end{cases} \quad (37)$$

con lo que el propagador de Black-Scholes puede calcularse evaluando el elemento de matriz $\langle x| e^{-\tau \hat{H}_{BS}} |x_T \rangle$. Para ello, podemos usar la relación de clausura:

$$\hat{I} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk |k \rangle \langle k| \quad (38)$$

y dado que el número de onda k es igual a $\frac{p}{\hbar}$ y para el caso financiero $\hbar = 1$, podemos llevar al propagador de Black-Scholes a la forma:

$$K_{BS}(x_T, T|x, t) = \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} \langle x_T| e^{-\tau \hat{H}_{BS}} |p \rangle \langle p|x \rangle \quad (39)$$

⁵Podríamos llamarlas informalmente “las funciones de onda financieras”

⁶Podríamos llamarla informalmente “la ecuación de Schrödinger financiera”

Para evaluar esta integral, notamos que a partir del Hamiltoniano de Black-Scholes (35) podemos reescribir el elemento de matriz del integrando en (39) como:

$$\langle x_T | e^{-\tau \hat{H}_{BS}} | p \rangle = e^{-\tau \hat{H}_{BS}} \langle x_T | p \rangle = e^{-\tau \hat{H}_{BS}} \frac{e^{ipx_T}}{\sqrt{2\pi}} \quad (40)$$

con lo que se requiere saber cómo actúa el exponencial de $-\tau$ veces el Hamiltoniano de Black-Scholes sobre e^{ipx_T} :

$$\begin{aligned} e^{-\tau \hat{H}_{BS}} e^{ipx_T} &= [\hat{I} - \tau \hat{H}_{BS} + \tau^2 \hat{H}_{BS}^2 + \dots] e^{ipx_T} \\ &= \left\{ \hat{I} - \tau \left[\frac{\sigma^2 p^2}{2} + i \left(\frac{\sigma^2}{2} - r \right) p + r \right] + \tau^2 \left[\frac{\sigma^2 p^2}{2} + i \left(\frac{\sigma^2}{2} - r \right) p + r \right]^2 + \dots \right\} e^{ipx_T} \\ &= e^{-\tau \left[\frac{\sigma^2 p^2}{2} + i \left(\frac{\sigma^2}{2} - r \right) p + r \right]} e^{ipx_T} \end{aligned} \quad (41)$$

Sustituyendo en (39) tenemos que:

$$K_{BS}(x_T, T|x, t) = \int \frac{dp}{2\pi} e^{-\tau \left[\frac{\sigma^2 p^2}{2} + i p \left(\frac{\sigma^2}{2} - r \right) + r \right]} e^{ip(x_T - x)} \quad (42)$$

completando cuadrados:

$$\begin{aligned} -\tau \left[\frac{\sigma^2 p^2}{2} + i p \left(\frac{\sigma^2}{2} - r \right) + r \right] + ip(x_T - x) &= -\frac{\tau \sigma^2}{2} p^2 + i \left[x_T - x + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau \right] p - r\tau \\ &= -\frac{\tau \sigma^2}{2} \left\{ p - \frac{i}{\tau \sigma^2} \left[x_T - x + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau \right] \right\}^2 - \frac{1}{2\tau \sigma^2} \left[x_T - x + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau \right]^2 - r\tau \end{aligned} \quad (43)$$

obtenemos finalmente:

$$K_{BS}(x_T, T|x, t) = \frac{e^{-r\tau}}{\sqrt{2\pi\tau\sigma^2}} e^{-\frac{\left[x_T - x + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau \right]^2}{2\tau\sigma^2}} \quad (44)$$

3.1. Derivación del propagador de Black-Scholes mediante integrales de camino

En lo que sigue utilizaremos el método de integral de caminos explicado en el contexto de la mecánica cuántica para derivar el propagador de Black-Scholes. Cabe destacar que si bien el propagador se obtendrá de manera analítica dando por resultado una expresión idéntica a (44), el método de integral funcional conforma una herramienta alternativa disruptiva e innovadora que en conjunto con técnicas numéricas robustas y eficientes permite el modelado de opciones más complejas que pueden llegar a ser imposibles de abordar con otros métodos [3, 4, 5, 6, 16, 17, 18]. Comencemos por pasar nuestro problema de la formulación Hamiltoniana a la formulación Lagrangiana lo que exige aplicar una transformación de Legendre al Hamiltoniano clásico que se obtiene de la ecuación (35) sustituyendo $\frac{\partial}{\partial x}$ por p , es decir:

$$H_{BS} = -\frac{1}{2}\sigma^2 p^2 + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 - r \right) p + r \quad (45)$$

Por otro lado, hacemos uso de las ecuaciones de Hamilton para obtener las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H_{BS}}{\partial p} = -\sigma^2 p - r + \frac{\sigma^2}{2} \\ -\dot{p} = \frac{\partial H_{BS}}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (46)$$

con lo cual:

$$\begin{aligned}
L_{BS} &= \dot{x}p - H_{BS} \\
&= \left(-\sigma^2 p - r + \frac{\sigma^2}{2} \right) p - \left[-\frac{1}{2}\sigma^2 p^2 + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 - r \right) p + r \right] \\
&= -\frac{\sigma^2}{2} p^2 - r
\end{aligned} \tag{47}$$

por lo tanto, el Lagrangiano de Black-Scholes toma la siguiente forma:

$$L_{BS}[x(t), \dot{x}(t)] = -\frac{1}{2\sigma^2} \left(\dot{x} + r - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 - r \tag{48}$$

Para un intervalo de tiempo corto Δt tenemos que:

$$\begin{aligned}
\langle x_j | e^{-\Delta t \hat{H}_{BS}} | x_{j-1} \rangle &= \frac{e^{-r\Delta t}}{\sqrt{2\pi\Delta t\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\Delta t\sigma^2} \left[x_j - x_{j-1} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t \right]^2} \\
&= \frac{e^{-r\Delta t}}{\sqrt{2\pi\Delta t\sigma^2}} e^{-\frac{\Delta t}{2\sigma^2} \left[\frac{\Delta x}{\Delta t} + r - \frac{\sigma^2}{2} \right]^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t\sigma^2}} e^{-r\Delta t - \frac{\Delta t}{2\sigma^2} \left[\frac{\Delta x}{\Delta t} + r - \frac{\sigma^2}{2} \right]^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t\sigma^2}} e^{\Delta t L_{BS}[x_j, x_{j-1}, \Delta t]}
\end{aligned} \tag{49}$$

y si instrumentamos para el caso de Black-Scholes la misma receta aplicada en el contexto mecano-cuántico, es decir subdividiendo el intervalo de tiempo en N partes iguales Δt , es decir $\tau = N\Delta t$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
K_{BS}(x_N, t_N | x_0, t_0) &= \langle x_N | e^{-\Delta t \hat{H}_{BS}} | x_0 \rangle \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \int dx_1 \cdots \int dx_{N-1} \langle x_N | e^{-\Delta t \hat{H}_{BS}} | x_{N-1} \rangle \cdots \\
&\quad \langle x_1 | e^{-\Delta t \hat{H}_{BS}} | x_0 \rangle [1 + \mathcal{O}(N^{-1})] \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t\sigma^2}} \right)^N \left(\prod_{j=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} dx_j \right) e^{\Delta t \sum_{j=1}^N L_{BS}[x_j, x_{j-1}, \Delta t]} [1 + \mathcal{O}(N^{-1})] \\
&= \int \mathcal{D}x e^{-\int_t^T dt L_{BS}} \\
&= \int \mathcal{D}x e^{-S_{BS}}
\end{aligned} \tag{50}$$

donde ahora la medida de integración estará dada por:

$$\mathcal{D}x = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{N-1} dx_j \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t\sigma^2}} \right)^N \tag{51}$$

Como adelantamos al principio, es posible calcular el propagador de Black-Scholes de manera analítica con este enfoque. Con este objetivo en mente tomemos la acción de Black-Scholes discretizada:

$$\begin{aligned}
S_{BS} &= \Delta t \sum_{j=1}^N L_{BS}[x_j, x_{j-1}, \Delta t] \\
&= -\frac{1}{2\Delta t\sigma^2} \sum_{j=1}^N \left[x_j - x_{j-1} + \Delta t \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2 - N\Delta t r
\end{aligned} \tag{52}$$

efectuando el cambio de variables $z_j = x_j - x_{j-1} + \Delta t \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)$ y teniendo en cuenta que $dz_j = dx_j$ para $j = 1, 2, \dots, N$ tenemos que:

$$\int \mathcal{D}x e^{S_{BS}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t\sigma^2}} \right)^N \int dz_1 \dots \int dz_{N-1} e^{-r\tau - \frac{1}{2\sigma^2\Delta t} \sum_{j=1}^N z_j^2} [1 + \mathcal{O}(N^{-1})] \quad (53)$$

Aquí es importante puntualizar el hecho de que tenemos N variables de integración pero sólo $N - 1$ integrales, con lo cual se hace necesario una condición adicional sobre las variables z_j . Esa condición adicional es la condición de borde que está dada por:

$$x_N = x_T \quad (54)$$

o en otras palabras, debemos alcanzar x_N al final. Ahora bien, debido a la alternancia de signos en la definición de z_j , la suma sobre $j = 1, 2, \dots, N - 1$ deja desapareadas las puntas, es decir:

$$\begin{aligned} \lambda &= \sum_{j=1}^N z_j \\ &= x_N - x_0 + N\Delta t \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \\ &:= x_T - x + \tau \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (55)$$

y esto permite acomodar la condición de frontera de la siguiente manera:

$$\lambda - \sum_{j=1}^N z_j = 0 \quad (56)$$

De esta forma podemos incorporarla a (53) usando astutamente la delta de Dirac:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}x e^{S_{BS}} &= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-r\tau} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t\sigma^2}} \right)^N \prod_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} dz_j e^{-\frac{1}{2\sigma^2\Delta t} \sum_{j=1}^N z_j^2} \delta \left(\lambda - \sum_{j=1}^N z_j \right) \\ &\quad \times [1 + \mathcal{O}(N^{-1})] \end{aligned} \quad (57)$$

Usando la representación integral de la delta⁷:

$$\delta \left(\lambda - \sum_{j=1}^N z_j \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{ip(\lambda - \sum_{j=1}^N z_j)} \quad (59)$$

podemos reescribir la ecuación (57) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}x e^{S_{BS}} &= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-r\tau} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t\sigma^2}} \right)^N \prod_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} dz_j \\ &\quad \times e^{-\frac{1}{2\sigma^2\Delta t} \sum_{j=1}^N z_j^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{ip(\lambda - \sum_{j=1}^N z_j)} [1 + \mathcal{O}(N^{-1})] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{-ip\lambda} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dz_j e^{-\frac{z_j^2}{2\sigma^2\Delta t} + ipz_j} \right)^N [1 + \mathcal{O}(N^{-1})] \end{aligned} \quad (60)$$

⁷

$$\delta(x - y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{ip(x-y)} \quad (58)$$

completando cuadrados:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\Delta t\sigma^2}z_j^2 + ipz_j &= -\frac{1}{2\Delta t\sigma^2} \left[z_j^2 - 2i\Delta t\sigma^2 pz_j + (i\Delta t\sigma^2 p)^2 - (i\Delta t\sigma^2 p)^2 \right] \\ &= -\frac{1}{2\Delta t\sigma^2} (z_j - i\Delta t\sigma^2 p)^2 - \frac{\Delta t\sigma^2 p^2}{2} \end{aligned} \quad (61)$$

de donde obtenemos:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}x e^{S_{BS}} &= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{-ip\lambda} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dz_j e^{-\frac{z_j^2}{2\sigma^2\Delta t} + ipz_j} \right)^N [1 + \mathcal{O}(N^{-1})] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{-ip\lambda} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t\sigma^2}} \sqrt{2\pi\Delta t\sigma^2} e^{-\frac{\Delta t\sigma^2 p^2}{2}} \right]^N [1 + \mathcal{O}(N^{-1})] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{-ip\lambda} e^{-\frac{\tau\sigma^2 p^2}{2}} [1 + \mathcal{O}(N^{-1})] \end{aligned} \quad (62)$$

completando cuadrados otra vez podemos llevar la integral a una tipo gaussiana:

$$\begin{aligned} -\frac{\tau\sigma^2}{2}p^2 - i\lambda p &= -\frac{\tau\sigma^2}{2} \left[p^2 + \frac{2i\lambda}{\tau\sigma^2}p + \left(\frac{i\lambda}{\tau\sigma^2} \right)^2 - \left(\frac{i\lambda}{\tau\sigma^2} \right)^2 \right] \\ &= -\frac{\tau\sigma^2}{2} \left(p + \frac{i\lambda}{\tau\sigma^2} \right)^2 - \frac{\lambda^2}{2\tau\sigma^2} \end{aligned} \quad (63)$$

y de esta manera tenemos que:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}x e^{S_{BS}} &= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{-ip\lambda} e^{-\frac{\tau\sigma^2 p^2}{2}} [1 + \mathcal{O}(N^{-1})] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-r\tau} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{\tau\sigma^2}} e^{-\frac{\lambda^2}{2\tau\sigma^2}} [1 + \mathcal{O}(N^{-1})] \end{aligned} \quad (64)$$

Utilizando la definición para λ en (55), obtenemos:

$$K_{BS}(x_T, t_T | x, t) = \int \mathcal{D}x e^{S_{BS}} = \frac{e^{-r\tau}}{\sqrt{2\pi\tau\sigma^2}} e^{-\frac{\left[x_T - x + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau \right]^2}{2\tau\sigma^2}} \quad (65)$$

con lo cual, sorprendentemente recuperamos el mismo propagador (44) obtenido por el otro método.

Una observación pertinente sobre la última expresión obtenida es que si convolucionamos el propagador de Black-Scholes (65) según la prescripción dada en (36) obtenemos:

$$C(x, t) = e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} dx_T \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau\sigma^2}} e^{-\frac{\left[x_T - x + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau \right]^2}{2\tau\sigma^2}} F(X_T) \quad (66)$$

identificando:

$$f_{(x,t)}[X_T] := \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau\sigma^2}} e^{-\frac{\left[x_T - x + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau \right]^2}{2\tau\sigma^2}} \quad (67)$$

con la distribución de probabilidad condicionada al precio inicial x a tiempo t , podemos reescribir la ecuación (66) de la siguiente manera:

$$C(x, t) = e^{-r\tau} \mathbb{E}_{(x,t)}[F(X_T)] \quad (68)$$

donde $\mathbb{E}_{(x,t)}[F(X_T)]$ es la esperanza de la función del payoff condicionada al precio inicial x en el instante de tiempo t [3]. De esta forma, de una manera alternativa y elegante hemos demostrado el “**Teorema Fundamental de la Valuación de Activos**”.

4. El algoritmo de Metropolis-Hastings

Aunque el propagador de Black-Scholes puede ser obtenido de manera analítica permitiendo de esa manera fijar los precios de opciones mediante su convolución con la función de payoff, no siempre es posible obtener fórmulas cerradas para problemas más complejos. Para estos casos, las integral de caminos resulta un enfoque muy adecuado en combinación con métodos de integración numérica. En relación a esto, si observamos con detenimiento la expresión (50) podemos percatarnos de que la integral de caminos es esencialmente una integral multidimensional sobre las coordenadas intermedias ponderadas por la exponencial de la acción clásica de Black-Scholes S_{BS} . Por lo tanto, la elección del método numérico a implementar juega un papel preponderante si se desea una buena precisión, ahorrar tiempo de ejecución y capacidad de cómputo. Bajo esa premisa, de los métodos de integración numérica conocidos, el método de Montecarlo sobresale respecto al resto. El motivo de esta afirmación se basa en que la precisión en Montecarlo aumenta como $\frac{1}{\sqrt{n}}$, donde n es el número de datos en la muestra, incluso en el caso de integrales d -dimensionales, con d arbitrario [19]. Esto no es lo que ocurre con otros métodos como la regla del trapecio que aunque su tasa de convergencia para el caso de una dimensión es mejor que la de Montecarlo ($\sim \frac{1}{n^2}$) es peor para el caso multidimensional ($\sim \frac{1}{n^{2/d}}$, $d > 4$) [19, 20, 21]. Si bien existen métodos que mejoran de alguna forma la velocidad de convergencia del método de los trapecios como es el caso de la cuadratura de Gauss [20, 21], incluso así el método de Montecarlo sigue siendo superior para un número suficientemente grande de dimensiones.

La idea fundamental del método de Montecarlo es la de aproximar una integral definida mediante el uso de números aleatorios. En otras palabras, se generan un conjunto de n números aleatorios x_j en el intervalo de interés, digamos $[a, b]$ y se suman los valores correspondientes de la función $f(x_j)$, con lo cual, la estimación de la integral estará dada por:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{M} \sum_{j=1}^M f(x_j) \quad (69)$$

donde $\frac{b-a}{M}$ representa el ancho de intervalo promedio estimado. Para $M \rightarrow \infty$, lo que esperamos obtener es una aproximación precisa de la integral. La gran ventaja de este enfoque es la facilidad y simplicidad en su implementación. Sin embargo, la desventaja principal radica en que su convergencia es lenta, sobre todo cuando se busca aproximar integrales de funciones que son pequeñas en regiones extensas del intervalo de integración como es el caso de integrales gaussianas en intervalos infinitos que son los que debemos enfrentar en el caso de integral de caminos. Por lo tanto, se hace mandatorio buscar enfoques más eficientes, especialmente cuando se trata de funciones con comportamientos no uniformes en el dominio de integración. Una forma de abordar este problema es construyendo un generador que preste más atención en los lugares donde la función es grande, es decir que genere números aleatorios cuya distribución aproxime al integrando. A este tipo de procedimientos se los denomina muestreo de importancia [16, 19, 22].

Uno de los enfoques de muestreo de importancia más conocidos es el método de aceptación-rechazo. Tal vez el arquetipo para ejemplificar de manera acorde este procedimiento es el lanzamiento de dardos sobre un plano bidimensional con ejes x e y , donde trazamos la función $f(x)$ como una línea en el plano para delimitar el área objetivo. Si un dardo cae por debajo de la curva, aceptamos el valor de x y en caso contrario, lo ignoramos. Iterando este proceso con suficiente frecuencia, los números aleatorios x_j que se agrupan alrededor de los valores donde $f(x)$ es apreciablemente grande. Formalmente, aceptación-rechazo se basa en la generación de dos números aleatorios, x_j e y_j , donde y_j se encuentra en el rango entre el mínimo y el máximo de la función

$f(x)$ y en la selección de los x_j para los cuales $y_j < f(x_j)$. La limitación de esta estrategia es que puede llevar a una tasa considerable de rechazo de números aleatorios, especialmente en regiones donde $f(x)$ es pequeña, por lo que puede ser ineficiente en tales regiones. Para superar este problema se hace necesario un algoritmo que genere nuevos números aleatorios con una preferencia intrínseca por permanecer cerca de los valores donde $f(x)$ sea grande. Uno de los algoritmos de este tipo más conocido es el algoritmo de Metropolis-Hastings que se fundamenta en la generación de nuevas muestras x_{j+1} a partir de la muestra anterior x_j incorporando un incremento aleatorio de magnitud $\beta\hat{P}$ (cadena de Markov [22]), donde \hat{P} representa una muestra extraída de un generador de números aleatorios que produce valores distribuidos simétricamente alrededor de cero, como por ejemplo un generador que produce números aleatorios uniformemente distribuidos entre -1 y 1. El parámetro β determina la magnitud del paso, siendo de vital importancia para evitar quedarse atrapado en máximos locales y darle la posibilidad al algoritmo de explorar todo el espacio de posibles valores.

Algoritmo 1: Metropolis-Hastings

Entrada: Función de densidad de probabilidad $f(x)$; Número de iteraciones n ; Parámetro de paso β .

Salida: Muestra $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ distribuida aproximadamente según $f(x)$.

```

1 Inicializar  $x_0$  aleatoriamente
2 para  $j \leftarrow 1$  a  $n$  hacer
    Generar  $\hat{P}$  de una distribución simétrica alrededor de cero
    Generar  $u$  de una distribución uniforme entre 0 y 1
    Calcular  $y = x_j + \beta\hat{P}$ 
    Calcular  $\alpha = \frac{f(y)}{f(x_j)}$ 
    si  $\alpha > 1$  entonces
        | Aceptar la nueva muestra:  $x_{j+1} = y$ 
    en otro caso
        Generar  $u$  de una distribución uniforme entre 0 y 1
        si  $\alpha > u$  entonces
            | Aceptar la nueva muestra:  $x_{j+1} = y$ 
        en otro caso
            | Rechazar la nueva muestra:  $x_{j+1} = x_j$ 

```

El procedimiento de Metropolis-Hastings se presenta en el Algoritmo (1) escrito en pseudocódigo. Cabe destacar que existe libertad de iniciar el algoritmo desde cualquier valor aleatorio, aunque se recomienda iterar durante un número significativo de iteraciones preliminares para evitar quedarse atrapado en una región debido a una elección desatinada del valor inicial.

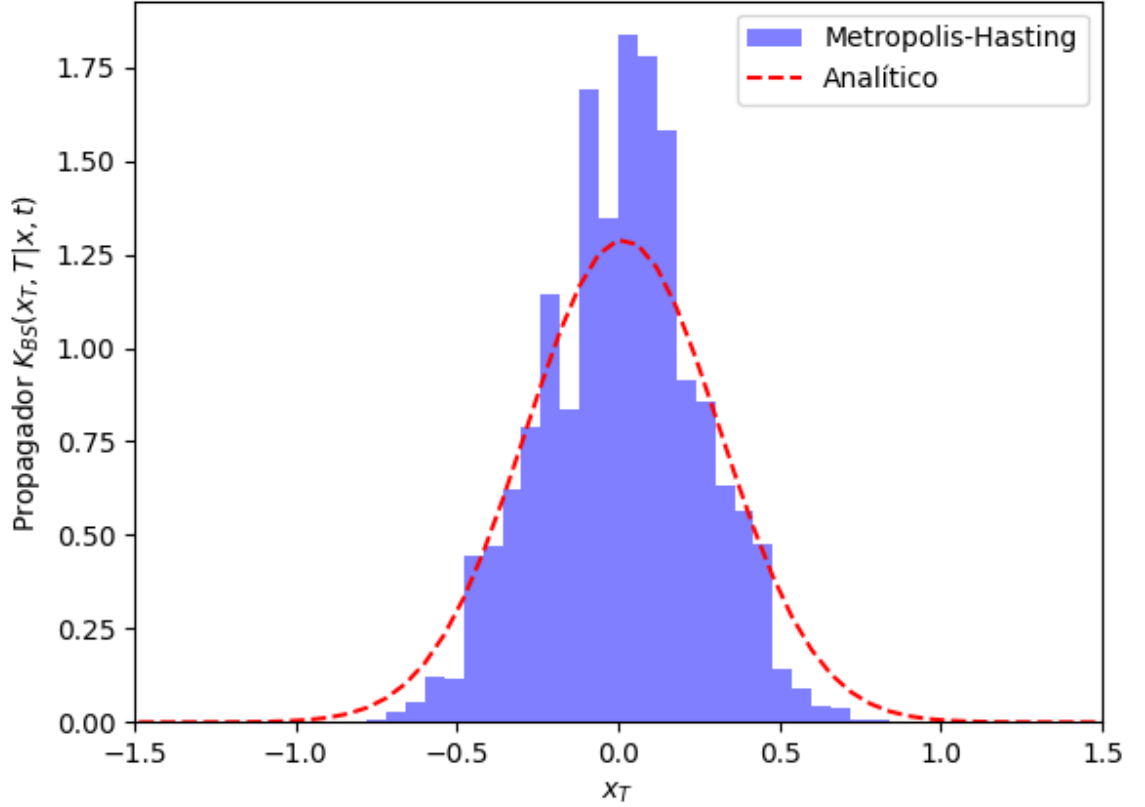


Figura 1: Propagador de Black-Scholes en función de x_T . La línea punteada roja corresponde al resultado obtenido analíticamente mientras que el diagrama de barras corresponde a los resultados numéricos implementando Metropolis-Hastings.

En este trabajo, la implementación del algoritmo Metropolis-Hastings la realizamos con el lenguaje de programación Python. En la Fig. (1) se presenta una comparación de los resultados obtenidos analíticamente y numéricamente del propagador de Black-Scholes de en función de x_T para una ventana de tiempo de un año, tasa libre de riesgo 0,03, volatilidad 0,3 en dimensión 5 y con un número de iteraciones igual a 1000000.

5. Conclusiones

En este trabajo hemos introducido el concepto de integral de caminos para la valuación de opciones financieras. Obtuvimos a partir de este enfoque el propagador de Black-Scholes de manera analítica y convolucionándolo con la función de payoff derivamos de una manera elegante el teorema fundamental de la valuación de activos. Por otra parte, implementamos el algoritmo de Metropolis-Hastings con el lenguaje de programación Python como método numérico para calcular las integrales multidimensionales que aparecen en la formulación de la integral de caminos. La comparación entre los resultados analíticos y numéricos indican que el método es una herramienta apropiada para la valuación de opciones más complejas. Queda para el futuro la búsqueda de modificaciones del lagrangiano de Black-Scholes para modelar el precio de otros tipos de opciones

mediante el enfoque de la integral funcional.

Referencias

- [1] Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 81(3):637–654, 1973.
- [2] Robert C Merton. Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of economics and management science*, pages 141–183, 1973.
- [3] Vadim Linetsky. The path integral approach to financial modeling and options pricing. *Computational Economics*, 11:129–163, 1997.
- [4] Jeroen PA Devreese, Damiaan Lemmens, and Jacques Tempere. Path integral approach to asian options in the black – scholes model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 389(4):780–788, 2010.
- [5] Guido Montagna, Oreste Nicosini, and Nicola Moreni. A path integral way to option pricing. *Physica A: Statistical mechanics and its applications*, 310(3-4):450–466, 2002.
- [6] Pietro Capuozzo, Emanuele Panella, Tancredi Schettini Gherardini, and Dimitri D Vvedensky. Path integral monte carlo method for option pricing. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 581:126231, 2021.
- [7] Manuel Maurette. La ecuación de black – scholes, 2023.
- [8] J Dash. Path integrals and options–i. *Part II, CNRS Preprint CPT89/PE*, 2333, 1989.
- [9] Richard P Feynman, Albert R Hibbs, and Daniel F Styer. *Quantum mechanics and path integrals*. Courier Corporation, 2010.
- [10] Jun John Sakurai and Eugene D Commins. Modern quantum mechanics, revised edition, 1995.
- [11] Horacio Falomir. Integrales funcionales en mecánica cuántica y teoría cuántica de campos, 2021.
- [12] Fidel Schaposnik. Mecánica cuántica 2, 2014.
- [13] Norbert Wiener. The average of an analytic functional. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 7(9):253–260, 1921.
- [14] Walter Greiner and Joachim Reinhardt. *Quantum Electrodynamics*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [15] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Frank Laloe. Quantum mechanics, volume 1. *Quantum Mechanics*, 1:898, 1986.
- [16] Volker Ziemann and Volker Ziemann. Quantum finance and path integrals. *Physics and Finance*, pages 145–170, 2021.
- [17] Belal E Baaquie. *Quantum Finance: Path Integrals and Hamiltonians for Options and Interest Rates*. Cambridge University Press, 2007.

- [18] Belal Ehsan Baaquie. *Mathematical Methods and Quantum Mathematics for Economics and Finance*. Springer Nature, 2020.
- [19] Glen Cowan. *Statistical Data Analysis*. Oxford university press, 1998.
- [20] Richard L Burden. *Numerical analysis*. Brooks/Cole Cengage Learning, 2011.
- [21] William H Press. *Numerical recipes 3rd edition: The art of scientific computing*. Cambridge university press, 2007.
- [22] Reuven Y Rubinstein and Dirk P Kroese. *Simulation and the Monte Carlo Method*. John Wiley & Sons, 2016.