CÁLCULO NUMÉRICO
UERJ

Zeros de funções - Método de Newton-Raphson

Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br
IME-UERJ

https://github.com/rodrigolrmadureira/CalculoNumericoUERJ/

Voltando ao Método do Ponto Fixo (MPF)...

Vimos que:

1. Condição de convergência: $|\varphi'(x)| \leq M < 1, \forall x \in \mathcal{I}$, onde $\mathcal{I}$ é um intervalo centrado na raiz r.
2. A convergência será mais rápida quanto menor for $|\varphi'(r)|$.

Método de Newton: tenta acelerar a convergência do MPF, escolhendo $\varphi(x)$ tal que $|\varphi'(r)| = 0$.

Vamos achar uma expressão para $\varphi(x)$ tal que $|\varphi'(r)| = 0$.

A forma geral para $\varphi(x)$ é:

$\varphi(x) = x + A(x)f(x)$, onde $A(r) \neq 0$.

Tomando $x = r$, temos que:

$\varphi(r) = r + A(r)f(r)$.

Como $f(r) = 0$, obtemos:

$\varphi(r) = r + A(r) \cdot 0 \Rightarrow \varphi(r) = r$.

Voltando ao Método do Ponto Fixo (MPF)...

Vimos que:

1. Condição de convergência: $|\varphi'(x)| \leq M < 1, \forall x \in \mathcal{I}$, onde $\mathcal{I}$ é um intervalo centrado na raiz r.
2. A convergência será mais rápida quanto menor for $|\varphi'(r)|$.

Método de Newton: tenta acelerar a convergência do MPF, escolhendo $\varphi(x)$ tal que $|\varphi'(r)| = 0$.

Vamos achar uma expressão para $\varphi(x)$ tal que $|\varphi'(r)| = 0$.

A forma geral para $\varphi(x)$ é:

$\varphi(x) = x + A(x)f(x),$ onde $A(r) \neq 0$.

Tomando $x = r$, temos que:

$\varphi(r) = r + A(r)f(r)$.

Como $f(r) = 0$, obtemos:

$\varphi(r) = r + A(r) \cdot 0 \Rightarrow \varphi(r) = r$.

Voltando ao Método do Ponto Fixo (MPF)...

Vimos que:

1. Condição de convergência: $|\varphi'(x)| \leq M < 1, \forall x \in \mathcal{I}$, onde $\mathcal{I}$ é um intervalo centrado na raiz r.
2. A convergência será mais rápida quanto menor for $|\varphi'(r)|$.

Método de Newton: tenta acelerar a convergência do MPF, escolhendo $\varphi(x)$ tal que $|\varphi'(r)| = 0$.

Vamos achar uma expressão para $\varphi(x)$ tal que $|\varphi'(r)| = 0$.

A forma geral para $\varphi(x)$ é:

$\varphi(x) = x + A(x)f(x),$ onde $A(r) \neq 0$.

Tomando $x = r$, temos que:

$\varphi(r) = r + A(r)f(r)$.

Como $f(r) = 0$, obtemos:

$\varphi(r) = r + A(r) \cdot 0 \Rightarrow \varphi(r) = r$.

Voltando ao Método do Ponto Fixo (MPF)...

Vimos que:

1. Condição de convergência: $|\varphi'(x)| \leq M < 1, \forall x \in \mathcal{I}$, onde $\mathcal{I}$ é um intervalo centrado na raiz r.
2. A convergência será mais rápida quanto menor for $|\varphi'(r)|$.

Método de Newton: tenta acelerar a convergência do MPF, escolhendo $\varphi(x)$ tal que $|\varphi'(r)| = 0$.

Vamos achar uma expressão para $\varphi(x)$ tal que $|\varphi'(r)| = 0$.

A forma geral para $\varphi(x)$ é:

$$\varphi(x) = x + A(x)f(x), \text{ onde } A(r) \neq 0.$$

Tomando $x = r$, temos que:

$$\varphi(r) = r + A(r)f(r).$$

Como $f(r) = 0$, obtemos:

$$\varphi(r) = r + A(r) \cdot 0 \Rightarrow \varphi(r) = r.$$

Voltando ao Método do Ponto Fixo (MPF)...

Vimos que:

1. Condição de convergência: $|\varphi'(x)| \leq M < 1, \forall x \in \mathcal{I}$, onde $\mathcal{I}$ é um intervalo centrado na raiz r.
2. A convergência será mais rápida quanto menor for $|\varphi'(r)|$.

Método de Newton: tenta acelerar a convergência do MPF, escolhendo $\varphi(x)$ tal que $|\varphi'(r)| = 0$.

Vamos achar uma expressão para $\varphi(x)$ tal que $|\varphi'(r)| = 0$.

A forma geral para $\varphi(x)$ é:

$$\varphi(x) = x + A(x)f(x), \text{ onde } A(r) \neq 0.$$

Tomando $x = r$, temos que:

$$\varphi(r) = r + A(r)f(r).$$

Como $f(r) = 0$, obtemos:

$$\varphi(r) = r + A(r) \cdot 0 \Rightarrow \varphi(r) = r.$$

Voltando ao Método do Ponto Fixo (MPF)...

Vimos que:

1. Condição de convergência: $|\varphi'(x)| \leq M < 1, \forall x \in \mathcal{I}$, onde $\mathcal{I}$ é um intervalo centrado na raiz r.
2. A convergência será mais rápida quanto menor for $|\varphi'(r)|$.

Método de Newton: tenta acelerar a convergência do MPF, escolhendo $\varphi(x)$ tal que $|\varphi'(r)| = 0$.

Vamos achar uma expressão para $\varphi(x)$ tal que $|\varphi'(r)| = 0$.

A forma geral para $\varphi(x)$ é:

$\varphi(x) = x + A(x)f(x),$ onde $A(r) \neq 0$.

Tomando $x = r$, temos que:

$\varphi(r) = r + A(r)f(r).$

Como $f(r) = 0$, obtemos:

$\varphi(r) = r + A(r) \cdot 0 \Rightarrow \varphi(r) = r.$

Voltando ao Método do Ponto Fixo (MPF)...

Derivando $\varphi(x)$, obtemos:

$$\varphi'(x) = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x), \text{ onde } A(r) \neq 0.$$

Tomando $x = r$, temos que:

$$\varphi'(r) = 1 + A'(r)f(r) + A(r)f'(r).$$

Como $f(r) = 0$, obtemos:

$$\varphi'(r) = 1 + A'(r) \cdot 0 + A(r)f'(r) \Rightarrow \varphi'(r) = 1 + A(r)f'(r)$$

Impondo a condição $\varphi'(r) = 0$, obtemos, desde que $f'(x) \neq 0$:

$$0 = 1 + A(r)f'(r) \Rightarrow A(r) = -\frac{1}{f'(r)} \underbrace{\Rightarrow}_{r=x} A(x) = -\frac{1}{f'(x)}.$$

Voltando ao Método do Ponto Fixo (MPF)...

Derivando $\varphi(x)$, obtemos:

$\varphi'(x) = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x),$ onde $A(r) \neq 0$.

Tomando $x = r$, temos que:

$\varphi'(r) = 1 + A'(r)f(r) + A(r)f'(r)$.

Como $f(r) = 0$, obtemos:

$\varphi'(r) = 1 + A'(r) \cdot 0 + A(r)f'(r) \Rightarrow \varphi'(r) = 1 + A(r)f'(r)$

Impondo a condição $\varphi'(r) = 0$, obtemos, desde que $f'(x) \neq 0$:

$$0 = 1 + A(r)f'(r) \Rightarrow A(r) = -\frac{1}{f'(r)} \underbrace{\Rightarrow}_{r=x} A(x) = -\frac{1}{f'(x)}.$$

Voltando ao Método do Ponto Fixo (MPF)...

Derivando $\varphi(x)$, obtemos:

$\varphi'(x) = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x),$ onde $A(r) \neq 0$.

Tomando $x = r$, temos que:

$\varphi'(r) = 1 + A'(r)f(r) + A(r)f'(r).$

Como $f(r) = 0$, obtemos:

$\varphi'(r) = 1 + A'(r) \cdot 0 + A(r)f'(r) \Rightarrow \varphi'(r) = 1 + A(r)f'(r)$

Impondo a condição $\varphi'(r) = 0$, obtemos, desde que $f'(x) \neq 0$:

$$0 = 1 + A(r)f'(r) \Rightarrow A(r) = -\frac{1}{f'(r)} \underbrace{\Rightarrow}_{r=x} A(x) = -\frac{1}{f'(x)}.$$

Voltando ao Método do Ponto Fixo (MPF)...

Derivando $\varphi(x)$, obtemos:

$$\varphi'(x) = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x), \text{ onde } A(r) \neq 0.$$

Tomando $x = r$, temos que:

$$\varphi'(r) = 1 + A'(r)f(r) + A(r)f'(r).$$

Como $f(r) = 0$, obtemos:

$$\varphi'(r) = 1 + A'(r) \cdot 0 + A(r)f'(r) \Rightarrow \varphi'(r) = 1 + A(r)f'(r)$$

Impondo a condição $\varphi'(r) = 0$, obtemos, desde que $f'(x) \neq 0$:

$$0 = 1 + A(r)f'(r) \Rightarrow A(r) = -\frac{1}{f'(r)} \underbrace{\Rightarrow}_{r=x} A(x) = -\frac{1}{f'(x)}.$$

Voltando ao Método do Ponto Fixo (MPF)...

Derivando $\varphi(x)$, obtemos:

$\varphi'(x) = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x)$, onde $A(r) \neq 0$.

Tomando $x = r$, temos que:

$\varphi'(r) = 1 + A'(r)f(r) + A(r)f'(r)$.

Como $f(r) = 0$, obtemos:

$\varphi'(r) = 1 + A'(r) \cdot 0 + A(r)f'(r) \Rightarrow \varphi'(r) = 1 + A(r)f'(r)$

Impondo a condição $\varphi'(r) = 0$, obtemos, desde que $f'(x) \neq 0$:

$$0 = 1 + A(r)f'(r) \Rightarrow A(r) = -\frac{1}{f'(r)} \underbrace{\Rightarrow}_{r=x} A(x) = -\frac{1}{f'(x)}.$$

Método de Newton

Voltando à forma geral para $\varphi(x)$:

$\varphi(x) = x + A(x)f(x),$ onde $A(r) \neq 0$.

Substituindo $A(x) = -1/f(x)$, obtemos:

$$\varphi(x) = x - \left(\frac{1}{f'(x)}\right) f(x) \Rightarrow \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Método de Newton: é um caso particular do MPF onde:

Dada $f(x)$, a função de iteração $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ será tal que $\varphi'(r) = 0$.

Verificação: Derivando $\varphi(x)$, obtemos:

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right] = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

Se $f(r) = 0$, então $\varphi'(r) = 0$.

Método de Newton

Voltando à forma geral para $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = x + A(x)f(x), \text{ onde } A(r) \neq 0.$$

Substituindo $A(x) = -1/f(x)$, obtemos:

$$\varphi(x) = x - \left(\frac{1}{f'(x)}\right) f(x) \Rightarrow \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Método de Newton: é um caso particular do MPF onde:

Dada $f(x)$, a função de iteração $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ será tal que $\varphi'(r) = 0$.

Verificação: Derivando $\varphi(x)$, obtemos:

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right] = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

Se $f(r) = 0$, então $\varphi'(r) = 0$.

Método de Newton

Voltando à forma geral para $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = x + A(x)f(x), \text{ onde } A(r) \neq 0.$$

Substituindo $A(x) = -1/f(x)$, obtemos:

$$\varphi(x) = x - \left(\frac{1}{f'(x)}\right) f(x) \Rightarrow \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Método de Newton: é um caso particular do MPF onde:

Dada $f(x)$, a função de iteração $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ será tal que $\varphi'(r) = 0$.

Verificação: Derivando $\varphi(x)$, obtemos:

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right] = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

Se $f(r) = 0$, então $\varphi'(r) = 0$.

Método de Newton

Voltando à forma geral para $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = x + A(x)f(x), \text{ onde } A(r) \neq 0.$$

Substituindo $A(x) = -1/f(x)$, obtemos:

$$\varphi(x) = x - \left(\frac{1}{f'(x)}\right) f(x) \Rightarrow \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Método de Newton: é um caso particular do MPF onde:

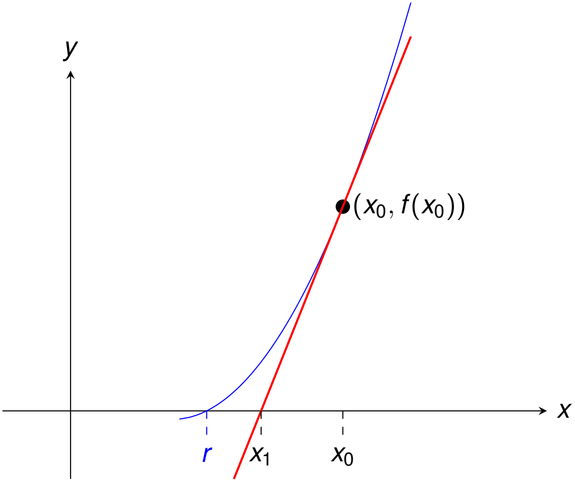
Dada $f(x)$, a função de iteração $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ será tal que $\varphi'(r) = 0$.

Verificação: Derivando $\varphi(x)$, obtemos:

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right] = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

Se $f(r) = 0$, então $\varphi'(r) = 0$.

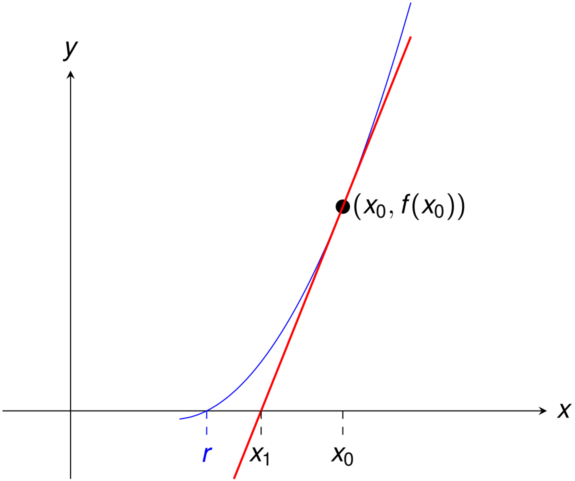
Interpretação geométrica



No ponto $(x_0, f(x_0))$:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - 0}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \Rightarrow (x_0 - x_1)f'(x_0) = f(x_0)$$

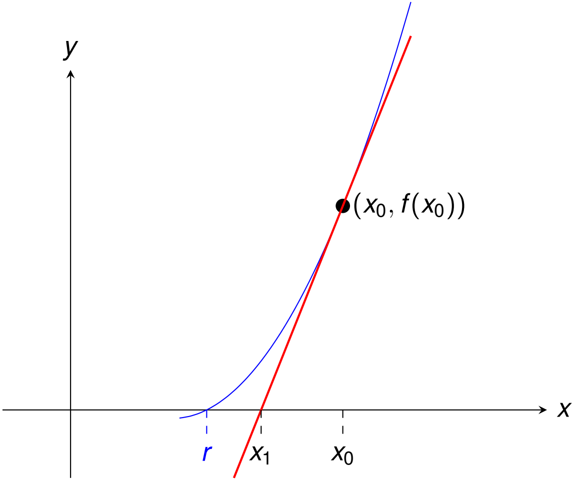
Interpretação geométrica



No ponto $(x_0, f(x_0))$:

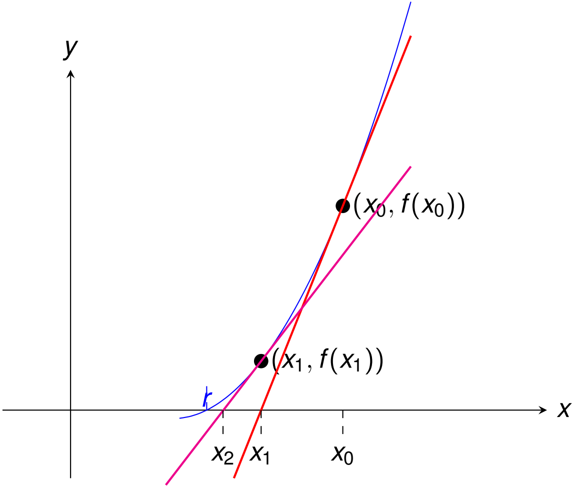
$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - 0}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \Rightarrow (x_0 - x_1)f'(x_0) = f(x_0)$$

Interpretação geométrica



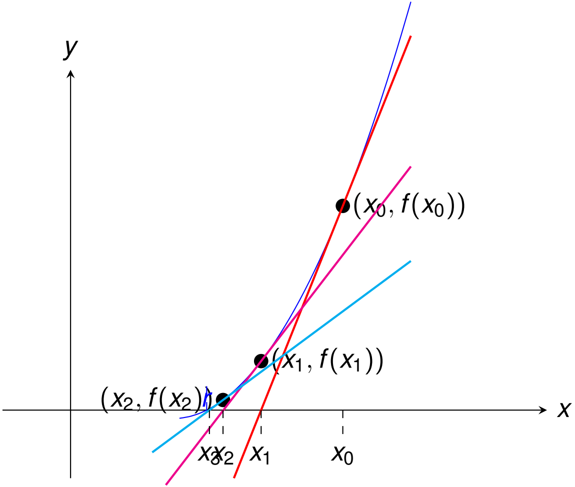
$$x_0 - x_1 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Interpretação geométrica



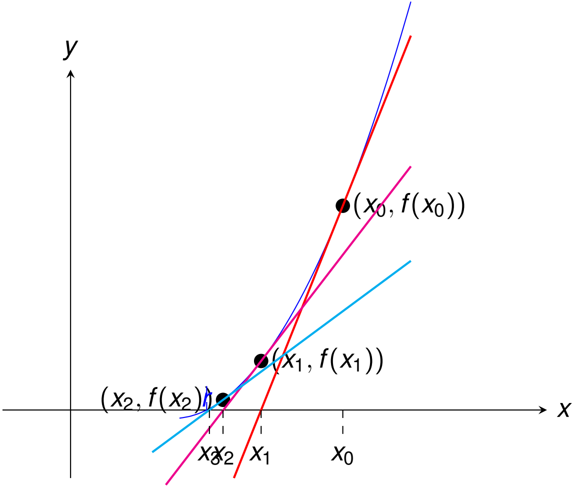
Analogamente, $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

Interpretação geométrica



Analogamente, $x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}$

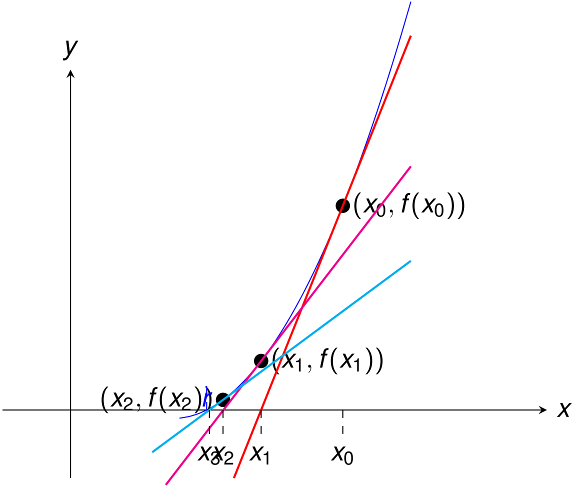
Interpretação geométrica



As aproximações x_0, x_1, x_2, x_3, ... cada vez mais se aproximam de r.

No ponto $(x_k, f(x_k))$: $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

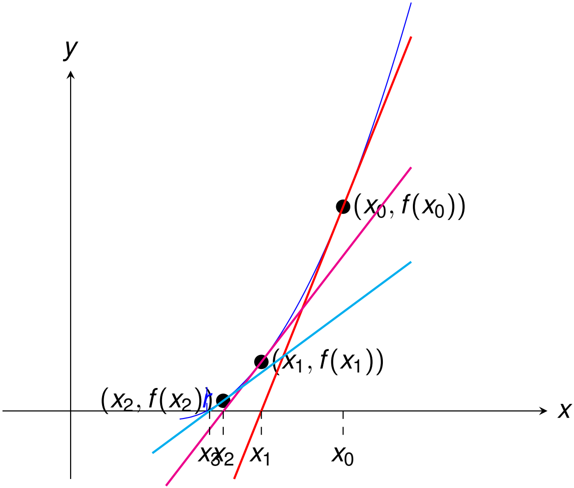
Interpretação geométrica



As aproximações x_0, x_1, x_2, x_3, $\ldots$ cada vez mais se aproximam de r.

No ponto $(x_k, f(x_k))$: $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Interpretação geométrica



O Método de Newton-Raphson também é conhecido como o método das tangentes.

Obtendo o Método de Newton via retas tangentes

Portanto, a fórmula iterativa é:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \text{ onde } f'(x_k) \neq 0, \text{ para todo } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Note que tomando:

$$\varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

o Método de Newton é um caso particular do Método do Ponto Fixo:

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

onde a ordem de convergência **para raízes simples** é quadrática ($p = 2$).

Obs.: Veremos em breve que **para raízes múltiplas**, a ordem cai para linear ($p = 1$).

Obtendo o Método de Newton via retas tangentes

Portanto, a fórmula iterativa é:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \text{ onde } f'(x_k) \neq 0, \text{ para todo } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Note que tomando:

$$\varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

o Método de Newton é um caso particular do Método do Ponto Fixo:

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

onde a ordem de convergência **para raízes simples** é quadrática ($p = 2$).

Obs.: Veremos em breve que **para raízes múltiplas**, a ordem cai para linear ($p = 1$).

Exemplo

Dê uma estimativa para a raiz positiva de $f(x) = x^2 + x - 6$ usando o Método de Newton.

Usando Bhaskara ou ”olhômetro”, obtemos $r = 2$.

Análise do sinal: usando o TVI, testo $f(x)$ para alguns valores de x:
$f(0) = 0^2 + 0 - 6 = -6 < 0$
$f(1) = 1^2 + 1 - 6 = -4 < 0$
$f(3) = 3^2 + 3 - 6 = 6 > 0$

Exemplo

Dê uma estimativa para a raiz positiva de $f(x) = x^2 + x - 6$ usando o Método de Newton.

Usando Bhaskara ou "olhômetro", obtemos $r = 2$.

Análise do sinal: usando o TVI, testo $f(x)$ para alguns valores de x:
$f(0) = 0^2 + 0 - 6 = -6 < 0$
$f(1) = 1^2 + 1 - 6 = -4 < 0$
$f(3) = 3^2 + 3 - 6 = 6 > 0$

Exemplo

Dê uma estimativa para a raiz positiva de $f(x) = x^2 + x - 6$ usando o Método de Newton.

Usando Bhaskara ou "olhômetro", obtemos $r = 2$.

Análise do sinal: usando o TVI, testo $f(x)$ para alguns valores de x:
$f(0) = 0^2 + 0 - 6 = -6 < 0$
$f(1) = 1^2 + 1 - 6 = -4 < 0$
$f(3) = 3^2 + 3 - 6 = 6 > 0$

Exemplo

Dê uma estimativa para a raiz positiva de $f(x) = x^2 + x - 6$ usando o Método de Newton.

Usando Bhaskara ou ”olhômetro”, obtemos $r = 2$.

Análise do sinal: usando o TVI, testo $f(x)$ para alguns valores de x:
$f(0) = 0^2 + 0 - 6 = -6 < 0$
$f(1) = 1^2 + 1 - 6 = -4 < 0$
$f(3) = 3^2 + 3 - 6 = 6 > 0$

Exemplo

Dê uma estimativa para a raiz positiva de $f(x) = x^2 + x - 6$ usando o Método de Newton.

Usando Bhaskara ou "olhômetro", obtemos $r = 2$.

Análise do sinal: usando o TVI, testo $f(x)$ para alguns valores de x:
$f(0) = 0^2 + 0 - 6 = -6 < 0$
$f(1) = 1^2 + 1 - 6 = -4 < 0$
$f(3) = 3^2 + 3 - 6 = 6 > 0$

Exemplo 1

Dê uma estimativa para a raiz positiva de $f(x) = x^2 + x - 6$ usando o Método de Newton-Raphson.

Usando Bhaskara ou ”olhômetro”, obtemos $r = 2$.

Análise do sinal: usando o TVI, testo $f(x)$ para alguns valores de x:
$f(0) = 0^2 + 0 - 6 = -6 < 0$
$f(1) = 1^2 + 1 - 6 = -4 < 0$
$f(3) = 3^2 + 3 - 6 = 6 > 0 \Rightarrow$ Existe uma raiz $r \in (1, 3)$.

A fórmula iterativa é:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

onde $f(x_k) = x_k^2 + x_k - 6, \quad f'(x_k) = 2x_k + 1.$

Logo,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 + x_k - 6}{2x_k + 1} = \frac{x_k^2 + 6}{2x_k + 1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Exemplo 1

Dê uma estimativa para a raiz positiva de $f(x) = x^2 + x - 6$ usando o Método de Newton-Raphson.

Usando Bhaskara ou ”olhômetro”, obtemos $r = 2$.

Análise do sinal: usando o TVI, testo $f(x)$ para alguns valores de x:
$f(0) = 0^2 + 0 - 6 = -6 < 0$
$f(1) = 1^2 + 1 - 6 = -4 < 0$
$f(3) = 3^2 + 3 - 6 = 6 > 0 \Rightarrow$ Existe uma raiz $r \in (1, 3)$.

A fórmula iterativa é:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

onde $f(x_k) = x_k^2 + x_k - 6, \quad f'(x_k) = 2x_k + 1.$

Logo,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 + x_k - 6}{2x_k + 1} = \frac{x_k^2 + 6}{2x_k + 1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Exemplo 1

Dê uma estimativa para a raiz positiva de $f(x) = x^2 + x - 6$ usando o Método de Newton-Raphson.

Usando Bhaskara ou "olhômetro", obtemos $r = 2$.

Análise do sinal: usando o TVI, testo $f(x)$ para alguns valores de x:
$f(0) = 0^2 + 0 - 6 = -6 < 0$
$f(1) = 1^2 + 1 - 6 = -4 < 0$
$f(3) = 3^2 + 3 - 6 = 6 > 0 \Rightarrow$ Existe uma raiz $r \in (1, 3)$.

A fórmula iterativa é:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

onde $f(x_k) = x_k^2 + x_k - 6, \quad f'(x_k) = 2x_k + 1.$

Logo,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 + x_k - 6}{2x_k + 1} = \frac{x_k^2 + 6}{2x_k + 1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Exemplo 1

Dê uma estimativa para a raiz positiva de $f(x) = x^2 + x - 6$ usando o Método de Newton-Raphson.

Usando Bhaskara ou ”olhômetro”, obtemos $r = 2$.

Análise do sinal: usando o TVI, testo $f(x)$ para alguns valores de x:
$f(0) = 0^2 + 0 - 6 = -6 < 0$
$f(1) = 1^2 + 1 - 6 = -4 < 0$
$f(3) = 3^2 + 3 - 6 = 6 > 0 \Rightarrow$ Existe uma raiz $r \in (1, 3)$.

A fórmula iterativa é:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

onde $f(x_k) = x_k^2 + x_k - 6, \quad f'(x_k) = 2x_k + 1.$

Logo,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 + x_k - 6}{2x_k + 1} = \frac{x_k^2 + 6}{2x_k + 1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Exemplo 1

Chute inicial: $x_0 = 1.5$.

Usando a calculadora científica: Digite 1.5 e aperte a sequência de botões:

$\boxed{=}$ $\boxed{Ans}$ $\boxed{=}$

Próxima iteração:

$$x_1 = 1.5 - \frac{f(1.5)}{f'(1.5)} = \frac{(1.5)^2 + 6}{2(1.5) + 1}$$

Na calculadora, para escrever a expressão iterativa

$(x_k^2 + 6) \div (2x_k + 1)$,

o botão $\boxed{Ans}$ faz o papel da variável x_k, para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Então, aperte a sequência de botões:

$\boxed{(}$ $\boxed{Ans}$ $\boxed{\wedge}$ $\boxed{2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{6}$ $\boxed{)}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{(}$ $\boxed{2}$ $\boxed{Ans}$ $\boxed{+}$ $\boxed{1}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$

No display da calculadora aparece: $(Ans^2 + 6) \div (2Ans + 1)$.

O resultado é: $x_1 = 2.0625$.

Exemplo 1

Chute inicial: $x_0 = 1.5$.
Usando a calculadora científica: Digite 1.5 e aperte a sequência de botões:

= *Ans* =

Próxima iteração:

$$x_1 = 1.5 - \frac{f(1.5)}{f'(1.5)} = \frac{(1.5)^2 + 6}{2(1.5) + 1}$$

Na calculadora, para escrever a expressão iterativa

$(x_k^2 + 6) \div (2x_k + 1)$,

o botão *Ans* faz o papel da variável x_k, para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Então, aperte a sequência de botões:

(*Ans* ^ 2 + 6) ÷ (2 *Ans* + 1) =

No display da calculadora aparece: $(Ans^2 + 6) \div (2Ans + 1)$.
O resultado é: $x_1 = 2.0625$.

Exemplo 1

Chute inicial: $x_0 = 1.5$.
Usando a calculadora científica: Digite 1.5 e aperte a sequência de botões:

$=$ Ans $=$

Próxima iteração:

$$x_1 = 1.5 - \frac{f(1.5)}{f'(1.5)} = \frac{(1.5)^2 + 6}{2(1.5) + 1}$$

Na calculadora, para escrever a expressão iterativa

$(x_k^2 + 6) \div (2x_k + 1)$,

o botão Ans faz o papel da variável x_k, para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Então, aperte a sequência de botões:

(Ans ^ 2 + 6) ÷ (2 Ans + 1) =

No display da calculadora aparece: $(Ans^2 + 6) \div (2Ans + 1)$.
O resultado é: $x_1 = 2.0625$.

Exemplo 1

Chute inicial: $x_0 = 1.5$.
Usando a calculadora científica: Digite 1.5 e aperte a sequência de botões:

$=$ *Ans* $=$

Próxima iteração:

$$x_1 = 1.5 - \frac{f(1.5)}{f'(1.5)} = \frac{(1.5)^2 + 6}{2(1.5) + 1}$$

Na calculadora, para escrever a expressão iterativa

$(x_k^2 + 6) \div (2x_k + 1)$,

o botão *Ans* faz o papel da variável x_k, para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Então, aperte a sequência de botões:

(*Ans* ^ 2 + 6) $\div$ (2 *Ans* + 1) $=$

No display da calculadora aparece: $(Ans^2 + 6) \div (2Ans + 1)$.
O resultado é: $x_1 = 2.0625$.

Exemplo 1

Chute inicial: $x_0 = 1.5$.
Usando a calculadora científica: Digite 1.5 e aperte a sequência de botões:

$=$ Ans $=$

Próxima iteração:

$$x_1 = 1.5 - \frac{f(1.5)}{f'(1.5)} = \frac{(1.5)^2 + 6}{2(1.5) + 1}$$

Na calculadora, para escrever a expressão iterativa

$(x_k^2 + 6) \div (2x_k + 1)$,

o botão Ans faz o papel da variável x_k, para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Então, aperte a sequência de botões:

(Ans ^ 2 $+$ 6) $\div$ (2 Ans $+$ 1) $=$

No display da calculadora aparece: $(Ans^2 + 6) \div (2Ans + 1)$.

O resultado é: $x_1 = 2.0625$.

Exemplo 1

Chute inicial: $x_0 = 1.5$.
Usando a calculadora científica: Digite 1.5 e aperte a sequência de botões:

$=$ Ans $=$

Próxima iteração:

$$x_1 = 1.5 - \frac{f(1.5)}{f'(1.5)} = \frac{(1.5)^2 + 6}{2(1.5) + 1}$$

Na calculadora, para escrever a expressão iterativa

$(x_k^2 + 6) \div (2x_k + 1)$,
o botão Ans faz o papel da variável x_k, para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Então, aperte a sequência de botões:

(Ans ^ 2 $+$ 6) $\div$ (2 Ans $+$ 1) $=$

No display da calculadora aparece: $(Ans^2 + 6) \div (2Ans + 1)$.
O resultado é: $x_1 = 2.0625$.

Exemplo 1

A partir de agora, aperte sempre o botão $=$ para obter os resultados das próximas iterações:

Apertando $=$, a nova aproximação é: $x_2 = 2.000762195$;

Apertando $=$, a nova aproximação é: $x_3 = 2.000000116$;

Apertando $=$, a nova aproximação é: $x_4 = 2$, que é a raiz r.

Verificando os erros absolutos entre duas iterações consecutivas:

$x_0 = 1.5$

$x_1 = 2.0625 \Rightarrow |x_1 - x_0| = 0.5625.$

$x_2 = 2.000762195 \Rightarrow |x_2 - x_1| = 0.06137805.$

$x_3 = 2.000000116 \Rightarrow |x_3 - x_2| = 0.000762079.$

$x_4 = 2 \Rightarrow |x_4 - x_3| = 0.000000116.$

Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-4}$, a $r \approx x_4 = 2$, pois $|x_4 - x_3| \leq 10^{-4}$ e paro com as iterações.

Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-3}$, a $r \approx x_3 = 2.000000116$, pois $|x_3 - x_2| \leq 10^{-2}$ e paro com as iterações.

Exemplo 1

A partir de agora, aperte sempre o botão $=$ para obter os resultados das próximas iterações:

Apertando $=$, a nova aproximação é: $x_2 = 2.000762195$;

Apertando $=$, a nova aproximação é: $x_3 = 2.000000116$;

Apertando $=$, a nova aproximação é: $x_4 = 2$, que é a raiz r.

Verificando os erros absolutos entre duas iterações consecutivas:

$x_0 = 1.5$

$x_1 = 2.0625 \Rightarrow |x_1 - x_0| = 0.5625.$

$x_2 = 2.000762195 \Rightarrow |x_2 - x_1| = 0.06137805.$

$x_3 = 2.000000116 \Rightarrow |x_3 - x_2| = 0.000762079.$

$x_4 = 2 \Rightarrow |x_4 - x_3| = 0.000000116.$

Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-4}$, a $r \approx x_4 = 2$, pois $|x_4 - x_3| \leq 10^{-4}$ e paro com as iterações.

Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-3}$, a $r \approx x_3 = 2.000000116$, pois $|x_3 - x_2| \leq 10^{-2}$ e paro com as iterações.

Exemplo 1

A partir de agora, aperte sempre o botão $=$ para obter os resultados das próximas iterações:

Apertando $=$, a nova aproximação é: $x_2 = 2.000762195$;

Apertando $=$, a nova aproximação é: $x_3 = 2.000000116$;

Apertando $=$, a nova aproximação é: $x_4 = 2$, que é a raiz r.

Verificando os erros absolutos entre duas iterações consecutivas:

$x_0 = 1.5$

$x_1 = 2.0625 \Rightarrow |x_1 - x_0| = 0.5625.$

$x_2 = 2.000762195 \Rightarrow |x_2 - x_1| = 0.06137805.$

$x_3 = 2.000000116 \Rightarrow |x_3 - x_2| = 0.000762079.$

$x_4 = 2 \Rightarrow |x_4 - x_3| = 0.000000116.$

Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-4}$, a $r \approx x_4 = 2$, pois $|x_4 - x_3| \leq 10^{-4}$ e paro com as iterações.

Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-3}$, a $r \approx x_3 = 2.000000116$, pois $|x_3 - x_2| \leq 10^{-2}$ e paro com as iterações.

Exemplo 1

A partir de agora, aperte sempre o botão $=$ para obter os resultados das próximas iterações:

Apertando $=$, a nova aproximação é: $x_2 = 2.000762195$;

Apertando $=$, a nova aproximação é: $x_3 = 2.000000116$;

Apertando $=$, a nova aproximação é: $x_4 = 2$, que é a raiz r.

Verificando os erros absolutos entre duas iterações consecutivas:

$x_0 = 1.5$
$x_1 = 2.0625 \Rightarrow |x_1 - x_0| = 0.5625.$
$x_2 = 2.000762195 \Rightarrow |x_2 - x_1| = 0.06137805.$
$x_3 = 2.000000116 \Rightarrow |x_3 - x_2| = 0.000762079.$
$x_4 = 2 \Rightarrow |x_4 - x_3| = 0.000000116.$

Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-4}$, a $r \approx x_4 = 2$, pois $|x_4 - x_3| \leq 10^{-4}$ e paro com as iterações.
Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-3}$, a $r \approx x_3 = 2.000000116$, pois $|x_3 - x_2| \leq 10^{-2}$ e paro com as iterações.

Exemplo 1

A partir de agora, aperte sempre o botão $=$ para obter os resultados das próximas iterações:

Apertando $=$, a nova aproximação é: $x_2 = 2.000762195$;

Apertando $=$, a nova aproximação é: $x_3 = 2.000000116$;

Apertando $=$, a nova aproximação é: $x_4 = 2$, que é a raiz r.

Verificando os erros absolutos entre duas iterações consecutivas:

$x_0 = 1.5$

$x_1 = 2.0625 \Rightarrow |x_1 - x_0| = 0.5625.$

$x_2 = 2.000762195 \Rightarrow |x_2 - x_1| = 0.06137805.$

$x_3 = 2.000000116 \Rightarrow |x_3 - x_2| = 0.000762079.$

$x_4 = 2 \Rightarrow |x_4 - x_3| = 0.000000116.$

Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-4}$, a $r \approx x_4 = 2$, pois $|x_4 - x_3| \leq 10^{-4}$ e paro com as iterações.
Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-3}$, a $r \approx x_3 = 2.000000116$, pois $|x_3 - x_2| \leq 10^{-2}$ e paro com as iterações.

Exemplo 1

A partir de agora, aperte sempre o botão $=$ para obter os resultados das próximas iterações:

Apertando $=$, a nova aproximação é: $x_2 = 2.000762195$;

Apertando $=$, a nova aproximação é: $x_3 = 2.000000116$;

Apertando $=$, a nova aproximação é: $x_4 = 2$, que é a raiz r.

Verificando os erros absolutos entre duas iterações consecutivas:

$x_0 = 1.5$

$x_1 = 2.0625 \Rightarrow |x_1 - x_0| = 0.5625.$

$x_2 = 2.000762195 \Rightarrow |x_2 - x_1| = 0.06137805.$

$x_3 = 2.000000116 \Rightarrow |x_3 - x_2| = 0.000762079.$

$x_4 = 2 \Rightarrow |x_4 - x_3| = 0.000000116.$

Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-4}$, a $r \approx x_4 = 2$, pois $|x_4 - x_3| \leq 10^{-4}$ e paro com as iterações.

Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-3}$, a $r \approx x_3 = 2.000000116$, pois $|x_3 - x_2| \leq 10^{-2}$ e paro com as iterações.

Exemplo 1

A partir de agora, aperte sempre o botão $=$ para obter os resultados das próximas iterações:

Apertando $=$, a nova aproximação é: $x_2 = 2.000762195$;

Apertando $=$, a nova aproximação é: $x_3 = 2.000000116$;

Apertando $=$, a nova aproximação é: $x_4 = 2$, que é a raiz r.

Verificando os erros absolutos entre duas iterações consecutivas:

$x_0 = 1.5$
$x_1 = 2.0625 \Rightarrow |x_1 - x_0| = 0.5625.$
$x_2 = 2.000762195 \Rightarrow |x_2 - x_1| = 0.06137805.$
$x_3 = 2.000000116 \Rightarrow |x_3 - x_2| = 0.000762079.$
$x_4 = 2 \Rightarrow |x_4 - x_3| = 0.000000116.$

Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-4}$, a $r \approx x_4 = 2$, pois $|x_4 - x_3| \leq 10^{-4}$ e paro com as iterações.
Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-3}$, a $r \approx x_3 = 2.000000116$, pois $|x_3 - x_2| \leq 10^{-2}$ e paro com as iterações.

Exemplo 1

A partir de agora, aperte sempre o botão = para obter os resultados das próximas iterações:

Apertando =, a nova aproximação é: $x_2 = 2.000762195$;

Apertando =, a nova aproximação é: $x_3 = 2.000000116$;

Apertando =, a nova aproximação é: $x_4 = 2$, que é a raiz r.

Verificando os erros absolutos entre duas iterações consecutivas:

$x_0 = 1.5$
$x_1 = 2.0625 \Rightarrow |x_1 - x_0| = 0.5625.$
$x_2 = 2.000762195 \Rightarrow |x_2 - x_1| = 0.06137805.$
$x_3 = 2.000000116 \Rightarrow |x_3 - x_2| = 0.000762079.$
$x_4 = 2 \Rightarrow |x_4 - x_3| = 0.000000116.$

Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-4}$, a $r \approx x_4 = 2$, pois $|x_4 - x_3| \leq 10^{-4}$ e paro com as iterações.
Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-3}$, a $r \approx x_3 = 2.000000116$, pois $|x_3 - x_2| \leq 10^{-2}$ e paro com as iterações.

Exemplo 1

A partir de agora, aperte sempre o botão $=$ para obter os resultados das próximas iterações:

Apertando $=$, a nova aproximação é: $x_2 = 2.000762195$;

Apertando $=$, a nova aproximação é: $x_3 = 2.000000116$;

Apertando $=$, a nova aproximação é: $x_4 = 2$, que é a raiz r.

Verificando os erros absolutos entre duas iterações consecutivas:

$x_0 = 1.5$
$x_1 = 2.0625 \Rightarrow |x_1 - x_0| = 0.5625.$
$x_2 = 2.000762195 \Rightarrow |x_2 - x_1| = 0.06137805.$
$x_3 = 2.000000116 \Rightarrow |x_3 - x_2| = 0.000762079.$
$x_4 = 2 \Rightarrow |x_4 - x_3| = 0.000000116.$

Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-4}$, a $r \approx x_4 = 2$, pois $|x_4 - x_3| \leq 10^{-4}$ e paro com as iterações.

Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-3}$, a $r \approx x_3 = 2.000000116$, pois $|x_3 - x_2| \leq 10^{-2}$ e paro com as iterações.

Exemplo 1

A partir de agora, aperte sempre o botão $=$ para obter os resultados das próximas iterações:

Apertando $=$, a nova aproximação é: $x_2 = 2.000762195$;

Apertando $=$, a nova aproximação é: $x_3 = 2.000000116$;

Apertando $=$, a nova aproximação é: $x_4 = 2$, que é a raiz r.
Verificando os erros absolutos entre duas iterações consecutivas:
$x_0 = 1.5$
$x_1 = 2.0625 \Rightarrow |x_1 - x_0| = 0.5625.$
$x_2 = 2.000762195 \Rightarrow |x_2 - x_1| = 0.06137805.$
$x_3 = 2.000000116 \Rightarrow |x_3 - x_2| = 0.000762079.$
$x_4 = 2 \Rightarrow |x_4 - x_3| = 0.000000116.$

Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-4}$, a $r \approx x_4 = 2$, pois $|x_4 - x_3| \leq 10^{-4}$ e paro com as iterações.
Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-3}$, a $r \approx x_3 = 2.000000116$, pois $|x_3 - x_2| \leq 10^{-2}$ e paro com as iterações.

Exemplo 2

Determine, usando o Método de Newton-Raphson, a menor raiz positiva da equação $4\cos(x) - e^x = 0$ com tolerância de erro $\epsilon \leq 10^{-4}$.

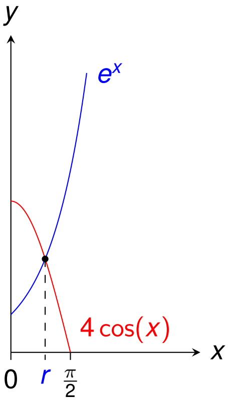
1. Intervalo para a raiz: abordagem gráfica

$$4\cos(x) - e^x = 0 \Rightarrow 4\cos(x) = e^x \Rightarrow r \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Exemplo 2

Determine, usando o Método de Newton-Raphson, a menor raiz positiva da equação $4\cos(x) - e^x = 0$ com tolerância de erro $\epsilon \leq 10^{-4}$.

1. Intervalo para a raiz: abordagem gráfica



$$4\cos(x) - e^x = 0 \Rightarrow 4\cos(x) = e^x \Rightarrow r \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Exemplo 2

1. Intervalo para a raiz: abordagem do TVI

Testando $f(x)$ para alguns valores positivos de x:

$f(0) = 4\cos(0) - e^0 = 3 > 0;$
$f(1) = 4\cos(1) - e^1 \approx -0.5571 < 0 \Rightarrow r \in (0, 1)$.

Iterações:

k	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$
0	1.0000	—
1	0.9084	$0.0916 > \epsilon$
2	0.9048	$0.0036 > \epsilon$
3	0.9048	$0 \leq \epsilon$ (OK!)

Logo, a menor raiz positiva com $\epsilon \leq 10^{-4}$ é $r \approx 0.9048$.

Ordem de convergência

Ordem de convergência p

Seja $e_k = x_k - r$ o erro cometido ao aproximar x_k da raiz r. Uma sequência $\{x_k\}$ de iterações converge para r com ordem de convergência $p \geq 1$ se

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C,$$

para alguma constante $C > 0$.
Sendo $0 < C < 1$, diz-se que:

- Se $p = 1$: convergência *linear*
- Se $1 < p < 2$: convergência *super-linear*
- Se $p = 2$: convergência *quadrática*