

Cálculo Numérico - IME/UERJ

Lista de Exercícios 2

Série de Taylor e Raízes de funções

1. Numa calculadora aproxima-se o valor de e^x , para todo $x \in [-1, 1]$, pelo valor do polinômio de Taylor de grau 3, obtido através da expansão de e^x em série de Taylor em torno do ponto $x_0 = 0$.
 - (a) Qual a aproximação de $e^{0.5}$ fornecida pela calculadora?
 - (b) Utilizando a expressão do erro cometido ao se aproximar a função e^x pela sua expansão em série de Taylor, forneça um limitante superior para o erro cometido no item (a).
2. Seja $f(x) = \ln(x + 1)$.
 - (a) Obtenha a série de Taylor ao redor de 0 para $f(x)$.
 - (b) Obtenha o polinômio de Taylor de terceira ordem ao redor de 0 da função $f(x)$ do item anterior e calcule $P_3(0.5)$. Qual o erro verdadeiro cometido?
 - (c) Encontre a expressão analítica para o erro de truncamento $R_3(x)$ e estime o erro máximo em módulo ao se usar $P_3(0.5)$ para aproximar $f(0.5)$. Mostre que o resultado é compatível com o erro que foi encontrado no item (b).
 - (d) Determine o número mínimo de termos que deve ter o polinômio de Taylor para que $\ln(1.5)$ seja calculado com um erro de truncamento menor que 10^{-8} .
3. Seja $f(x) = \frac{1}{x}$.
 - (a) Calcule a série de Taylor ao redor de 8.
 - (b) Determine um limitante inferior e outro superior do erro de truncamento para o polinômio de Taylor de ordem 4 de $f(x)$ em $x = 10$ ao redor de 8.
 - (c) Obtenha uma aproximação de 0.1 usando o polinômio de ordem 4 e verifique que o erro cometido fica entre os limites encontrados em (b).
 - (d) Calcule a expressão binária de 0.1 a partir de (a).
 - (e) Determine uma aproximação binária de 0.1 a partir de (b).
 - (f) De que ordem deve ser o polinômio de Taylor para obter uma aproximação de 0,1 com erro inferior a 10^{-8} ?
4. Calcule uma aproximação de $x^* = \sqrt[3]{25}$ com uma tolerância $\xi = 10^{-4}$ pelo método da Bissecção.

5. Determine uma aproximação da raiz da equação $x + \log(x) = 0$ com tolerância $\xi = 0.001$ pelo método da Bissecção no intervalo $[0.1, 0.6]$.
6. Considere o método da bissecção. Quantas iterações são necessárias para encontrar uma aproximação da solução de $x - 0,5(\sin(x) + \cos(x)) = 0$ com 3 casas decimais corretas sendo $[0, 1]$ o intervalo inicial?
7. Considere o polinômio $p(x) = (x - 1)(x - 2,5)^2(x - 4)^3$. Quais zeros não podem ser determinadas usando o método da bissecção? Justifique a sua resposta.
8. Determine um intervalo $[a, b]$ para iniciar o cálculo de $\ln(10)$ usando o método da bissecção. Explique. Quantas iterações são necessárias para obter $\ln(10)$ com erro menor ou igual a 10^{-3} ?
9. Determine um intervalo (a, b) e uma função de iteração $\varphi(x)$ associada, de tal forma que $\forall x_0 \in (a, b)$, a função de iteração gere uma sequência convergente para a(s) raiz(es) de cada uma das funções abaixo, usando o método iterativo linear (MIL) com tolerância $\xi \leq 1 \cdot 10^{-3}$.
 - (a) $f_1(x) = \sqrt{x} - e^{-x}$.
 - (b) $f_2(x) = \ln(x) - x + 2$.
 - (c) $f_3(x) = e^{x/2} - x^3$.
 - (d) $f_4(x) = \sin(x) - x^2$.
 - (e) $f_5(x) = x/4 - \cos(x)$.
10. A equação $x^2 - 7x + 12 = 0$ tem 3 e 4 como raízes. Considere a função de iteração dada por $\varphi(x) = x^2 - 6x + 12$. Determine o intervalo (a, b) , onde para qualquer que seja x_0 escolhido a sequência $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge para a raiz $x = 3$. Mostre que a convergência é quadrática.
11. As funções de iterações $\varphi_1(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 4$ e $\varphi_2(x) = \frac{x^2}{2} - 2.5x + 5$ geram sequências convergentes para a raiz $x = 2$, para qualquer aproximação inicial $x_0 \in (1.5, 3)$. Qual das duas funções geram sequências mais rapidamente convergentes para esta raiz? Justifique a resposta.
12. Para determinar a raiz quadrada de um número $c \geq 0$, basta resolver a equação $x^2 - c = 0$. É possível determinar sua raiz quadrada usando a função de iteração $\varphi(x) = c/x$? Justifique a resposta.
13. Determine as raízes do exercício 9, usando o Método de Newton-Raphson.

14. Os zeros da função $f(x) = x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 60x$ são: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ e $x_4 = 5$.
- Calcule uma iteração do método de Newton-Raphson a partir de $x_0 = 2$. A sequência parece convergir para que raiz?
 - Repita o processo a partir de $x_0 = 1$. O que acontece neste caso?
 - É possível aplicar o método da bisseção no intervalo $[2, 3.5]$? Justifique a resposta. No caso afirmativo, obtenha o número de iterações a partir da qual obtém-se uma aproximação de a menos de 0.001.
15. O zero da função $f(x) = \arctg(x)$ é $x^* = 0$. Considere o método de Newton-Raphson. Verifique se:
- o ponto inicial é $x_0 = 1.3917452$, então temos a sequência de iterações $x_1 = -1.3917$; $x_2 = 1.3917$; $x_3 = -1.3917$; ...
 - o ponto inicial é $x_0 = 1.3$, então a sequência converge a x^* .
 - $x_0 = 1.5$, então a sequência diverge.
16. Calcular as raízes dos polinômios abaixo, por Birge-Vieta, usando uma casa decimal.
- $P(x) = x^3 - 21x^2 + 95x - 75 = 0$.
 - $P(x) = x^4 - 18x^3 + 97x^2 - 180x + 100 = 0$.
17. Seja $x = \xi$ uma raiz de $f(x)$, tal que $f'(\xi) \neq 0$ e $f''(\xi) = 0$. Mostre que neste caso o Método de Newton-Raphson tem convergência cúbica.
18. **(Segundo trabalho extra - Valendo 1,0 ponto)**
- (Raízes múltiplas) Considere $f(x) = (x - 1)^2$
- Aplice o método de Newton-Raphson para $f(x) = 0$ com tolerância $\epsilon = 10^{-4}$. Sendo r a raiz verdadeira encontrada, calcule o erro $e_k = x_k - r$ para cada iteração k realizada. Qual a taxa de convergência baseada nos erros calculados?
 - Aplice o método de Newton modificado a seguir e verifique o que acontece com as iterações.
- $$x_{k+1} = x_k - 2 \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$
- Prove que a ordem de convergência do método do item (b) é quadrática, ou seja, prove que:
- $$e_{k+1} \approx \frac{f'''(r)}{6f''(r)} e_k^2, \quad \text{onde } e_k = x_k - r.$$

Dicas:

Use aproximação por série de Taylor de $f(x_k)$ em torno de r e depois faça a sua primeira derivada, $f'(x_k)$. Use também $\left(1 + \frac{e_k f'''(r)}{2 f''(r)}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{e_k f'''(r)}{2 f''(r)}$.