

Cálculo Numérico - IME/UERJ

Lista de Exercícios 4

Interpolação polinomial e Método dos Mínimos Quadrados

1. Em cada função abaixo determine uma aproximação para $f(z)$ e uma cota superior do erro cometido usando interpolação de Lagrange.

(a) $f(x) = \log x, z = 2.35, f(1) = 0, f(2) = 0.3010, f(3) = 0.4771$

(b) $f(x) = e^{-x}, z = 2.5, f(2) = 0.13, f(3) = 0.04, f(4) = 0.01$

2. Suponha que $f(x) = \sin(x)$ é aproximada em $[0, 1]$ por um polinômio interpolador em $(n + 1)$ pontos distintos equidistantes $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1$. Determine n tal que o erro de truncamento seja menor que 10^{-4} para todo $x \in [0, 1]$.

3. Seja a tabela

x	0,81	0,83	0,86	0,87
$f(x)$	16,94410	17,56492	18,50515	18,82091

Calcule um valor aproximado de $f(0,84)$, usando:

(a) Forma de Newton para polinômio interpolador de grau $n \leq 1, 2, 3$.

(b) Calcule uma cota superior do erro em cada caso, se possível.

4. Construa a tabela de diferenças divididas com os dados

x	0	0.5	1.5	2	2.5	3.5
$f(x)$	-2.78	-2.241	-1.65	-0.594	1.34	4.564

(a) Estime o valor $f(1.7)$ da melhor maneira possível, de forma que se possa estimar o erro cometido.

(b) Justifique o grau do polinômio que você escolheu para resolver o item (a).

5. Dada a tabela da população de uma vila no início de cada ano, estime a população na metade de 2018 usando o polinômio de Newton e justifique o grau do polinômio.

Ano	2015	2016	2017	2018	2019
População	6000	6200	6600	7200	8000

6. Considere a tabela a seguir. Usando um polinômio interpolador de grau 3, determine x tal que $f(x) = 2.3$. Dê uma estimativa do erro cometido.

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	1.0	1.2408	1.5735	2.0333	2.6965	3.7183

7. Considere a tabela:

x	0	1.2	2.3	3.1	3.9
$f(x)$	0	1.5	5.3	9.5	10

Dê uma aproximação para a raiz da equação $f(x) = 2$ usando interpolação quadrática. Dê uma estimativa do erro cometido.

8. Os seguintes dados correspondem a um polinômio de grau ≤ 5 . Qual é o grau do polinômio? Use a tabela de diferenças divididas.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-5	1	1	1	7	25

9. Ajuste os dados abaixo pelo Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) utilizando:

- (a) uma reta
- (b) uma parábola

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0,5	0,6	0,9	0,8	1,2	1,5	1,7	2,0

10. O número de bactérias, por unidade de volume, existente em uma cultura após x horas é dado na tabela abaixo:

número de horas	0	1	2	3	4	5	6
número de bactérias	32	47	65	92	132	190	275

- (a) Ajuste os dados acima à curva $y = ae^{bx}$ pelo método dos mínimos quadrados.
- (b) Quantas horas são necessárias para que o número de bactérias por unidade de volume ultrapasse 2000?

11. Aproxime a tabela abaixo por uma função do tipo $g(x) = 1 + ae^{bx}$ usando mínimos quadrados.

x	0	0,5	1,0	2,5	3,0
y	2,0	2,6	3,7	13,2	21,0

12. Considere a tabela abaixo:

Altura (cm)	183	173	188	163	178
Peso (kg)	79	69	82	63	73

- (a) Usando um Polinômio Interpolador de grau dois, calcule a altura aproximada de uma pessoa com peso de 70 kg.
- (b) Dê uma estimativa de erro para o caso anterior.
- (c) Determine a melhor função da forma $\psi(x) = \alpha \sin(x) + \beta \cos(x)$ que ajusta estes pontos e calcule a altura aproximada de uma pessoa com peso de 70 kg (**Obs.:** Configure neste caso sua calculadora científica para calcular em graus).
13. Sabe-se que ao longo da linha vermelha a velocidade máxima permitida é de 90 km/h e foram colocados radares para medir a velocidade instantânea dos carros. Suponha que numa distância $d = 1,0$ km, um motorista conferiu através do velocímetro (suponha que o velocímetro seja exato) as seguintes velocidades:

distância	0	0,2	0,3	0,5	0,8	1,0
velocidade	80	85	88	92	85	80

Pergunta-se:

- (a) Considere um radar colocado na posição $d = 0,4$. Usando um polinômio interpolador de grau dois ou menor, calcule:
- Velocidade aproximada neste ponto.
 - Erro da interpolação neste ponto.
 - Podemos concluir que o carro não será multado?
- (b) Usando o Método dos Mínimos Quadrados, faça uma regressão linear e calcule a velocidade esperada em $d = 1,1$.
- (c) Usando o Método dos Mínimos Quadrados, determine o polinômio de segundo grau ótimo e calcule a velocidade esperada em $d = 1,1$.