

Zeros de funções - Método de Newton-Raphson

Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br
IME-UERJ

<https://github.com/rodrigolrmadureira/CalculoNumericoUERJ/>

Voltando ao Método do Ponto Fixo (MPF)...

Vimos que:

- 1 Condição de convergência: $|\varphi'(x)| \leq M < 1$, $\forall x \in \mathcal{I}$, onde \mathcal{I} é um intervalo centrado na raiz r .
- 2 A convergência será mais rápida quanto menor for $|\varphi'(r)|$.

Método de Newton: tenta acelerar a convergência do MPF, escolhendo $\varphi(x)$ tal que $|\varphi'(r)| = 0$.

Vamos achar uma expressão para $\varphi(x)$ tal que $|\varphi'(r)| = 0$.

A forma geral para $\varphi(x)$ é:

$$\varphi(x) = x + A(x)f(x), \text{ onde } A(r) \neq 0.$$

Tomando $x = r$, temos que:

$$\varphi(r) = r + A(r)f(r).$$

Como $f(r) = 0$, obtemos:

$$\varphi(r) = r + A(r) \cdot 0 \Rightarrow \varphi(r) = r.$$

Voltando ao Método do Ponto Fixo (MPF)...

Vimos que:

- 1 Condição de convergência: $|\varphi'(x)| \leq M < 1$, $\forall x \in \mathcal{I}$, onde \mathcal{I} é um intervalo centrado na raiz r .
- 2 A convergência será mais rápida quanto menor for $|\varphi'(r)|$.

Método de Newton: tenta acelerar a convergência do MPF, escolhendo $\varphi(x)$ tal que $|\varphi'(r)| = 0$.

Vamos achar uma expressão para $\varphi(x)$ tal que $|\varphi'(r)| = 0$.

A forma geral para $\varphi(x)$ é:

$$\varphi(x) = x + A(x)f(x), \text{ onde } A(r) \neq 0.$$

Tomando $x = r$, temos que:

$$\varphi(r) = r + A(r)f(r).$$

Como $f(r) = 0$, obtemos:

$$\varphi(r) = r + A(r) \cdot 0 \Rightarrow \varphi(r) = r.$$

Voltando ao Método do Ponto Fixo (MPF)...

Vimos que:

- 1 Condição de convergência: $|\varphi'(x)| \leq M < 1$, $\forall x \in \mathcal{I}$, onde \mathcal{I} é um intervalo centrado na raiz r .
- 2 A convergência será mais rápida quanto menor for $|\varphi'(r)|$.

Método de Newton: tenta acelerar a convergência do MPF, escolhendo $\varphi(x)$ tal que $|\varphi'(r)| = 0$.

Vamos achar uma expressão para $\varphi(x)$ tal que $|\varphi'(r)| = 0$.

A forma geral para $\varphi(x)$ é:

$$\varphi(x) = x + A(x)f(x), \text{ onde } A(r) \neq 0.$$

Tomando $x = r$, temos que:

$$\varphi(r) = r + A(r)f(r).$$

Como $f(r) = 0$, obtemos:

$$\varphi(r) = r + A(r) \cdot 0 \Rightarrow \varphi(r) = r.$$

Voltando ao Método do Ponto Fixo (MPF)...

Vimos que:

- 1 Condição de convergência: $|\varphi'(x)| \leq M < 1$, $\forall x \in \mathcal{I}$, onde \mathcal{I} é um intervalo centrado na raiz r .
- 2 A convergência será mais rápida quanto menor for $|\varphi'(r)|$.

Método de Newton: tenta acelerar a convergência do MPF, escolhendo $\varphi(x)$ tal que $|\varphi'(r)| = 0$.

Vamos achar uma expressão para $\varphi(x)$ tal que $|\varphi'(r)| = 0$.

A forma geral para $\varphi(x)$ é:

$$\varphi(x) = x + A(x)f(x), \text{ onde } A(r) \neq 0.$$

Tomando $x = r$, temos que:

$$\varphi(r) = r + A(r)f(r).$$

Como $f(r) = 0$, obtemos:

$$\varphi(r) = r + A(r) \cdot 0 \Rightarrow \varphi(r) = r.$$

Voltando ao Método do Ponto Fixo (MPF)...

Vimos que:

- 1 Condição de convergência: $|\varphi'(x)| \leq M < 1$, $\forall x \in \mathcal{I}$, onde \mathcal{I} é um intervalo centrado na raiz r .
- 2 A convergência será mais rápida quanto menor for $|\varphi'(r)|$.

Método de Newton: tenta acelerar a convergência do MPF, escolhendo $\varphi(x)$ tal que $|\varphi'(r)| = 0$.

Vamos achar uma expressão para $\varphi(x)$ tal que $|\varphi'(r)| = 0$.

A forma geral para $\varphi(x)$ é:

$$\varphi(x) = x + A(x)f(x), \text{ onde } A(r) \neq 0.$$

Tomando $x = r$, temos que:

$$\varphi(r) = r + A(r)f(r).$$

Como $f(r) = 0$, obtemos:

$$\varphi(r) = r + A(r) \cdot 0 \Rightarrow \varphi(r) = r.$$

Voltando ao Método do Ponto Fixo (MPF)...

Vimos que:

- 1 Condição de convergência: $|\varphi'(x)| \leq M < 1$, $\forall x \in \mathcal{I}$, onde \mathcal{I} é um intervalo centrado na raiz r .
- 2 A convergência será mais rápida quanto menor for $|\varphi'(r)|$.

Método de Newton: tenta acelerar a convergência do MPF, escolhendo $\varphi(x)$ tal que $|\varphi'(r)| = 0$.

Vamos achar uma expressão para $\varphi(x)$ tal que $|\varphi'(r)| = 0$.

A forma geral para $\varphi(x)$ é:

$$\varphi(x) = x + A(x)f(x), \text{ onde } A(r) \neq 0.$$

Tomando $x = r$, temos que:

$$\varphi(r) = r + A(r)f(r).$$

Como $f(r) = 0$, obtemos:

$$\varphi(r) = r + A(r) \cdot 0 \Rightarrow \varphi(r) = r.$$

Voltando ao Método do Ponto Fixo (MPF)...

Derivando $\varphi(x)$, obtemos:

$$\varphi'(x) = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x), \text{ onde } A(r) \neq 0.$$

Tomando $x = r$, temos que:

$$\varphi'(r) = 1 + A'(r)f(r) + A(r)f'(r).$$

Como $f(r) = 0$, obtemos:

$$\varphi'(r) = 1 + A'(r) \cdot 0 + A(r)f'(r) \Rightarrow \varphi'(r) = 1 + A(r)f'(r)$$

Impondo a condição $\varphi'(r) = 0$, obtemos, desde que $f'(x) \neq 0$:

$$0 = 1 + A(r)f'(r) \Rightarrow A(r) = -\frac{1}{f'(r)} \underbrace{\Rightarrow}_{r=x} A(x) = -\frac{1}{f'(x)}.$$

Voltando ao Método do Ponto Fixo (MPF)...

Derivando $\varphi(x)$, obtemos:

$$\varphi'(x) = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x), \text{ onde } A(r) \neq 0.$$

Tomando $x = r$, temos que:

$$\varphi'(r) = 1 + A'(r)f(r) + A(r)f'(r).$$

Como $f(r) = 0$, obtemos:

$$\varphi'(r) = 1 + A'(r) \cdot 0 + A(r)f'(r) \Rightarrow \varphi'(r) = 1 + A(r)f'(r)$$

Impondo a condição $\varphi'(r) = 0$, obtemos, desde que $f'(x) \neq 0$:

$$0 = 1 + A(r)f'(r) \Rightarrow A(r) = -\frac{1}{f'(r)} \underbrace{\Rightarrow}_{r=x} A(x) = -\frac{1}{f'(x)}.$$

Voltando ao Método do Ponto Fixo (MPF)...

Derivando $\varphi(x)$, obtemos:

$$\varphi'(x) = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x), \text{ onde } A(r) \neq 0.$$

Tomando $x = r$, temos que:

$$\varphi'(r) = 1 + A'(r)f(r) + A(r)f'(r).$$

Como $f(r) = 0$, obtemos:

$$\varphi'(r) = 1 + A'(r) \cdot 0 + A(r)f'(r) \Rightarrow \varphi'(r) = 1 + A(r)f'(r)$$

Impondo a condição $\varphi'(r) = 0$, obtemos, desde que $f'(x) \neq 0$:

$$0 = 1 + A(r)f'(r) \Rightarrow A(r) = -\frac{1}{f'(r)} \underbrace{\Rightarrow}_{r=x} A(x) = -\frac{1}{f'(x)}.$$

Voltando ao Método do Ponto Fixo (MPF)...

Derivando $\varphi(x)$, obtemos:

$$\varphi'(x) = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x), \text{ onde } A(r) \neq 0.$$

Tomando $x = r$, temos que:

$$\varphi'(r) = 1 + A'(r)f(r) + A(r)f'(r).$$

Como $f(r) = 0$, obtemos:

$$\varphi'(r) = 1 + A'(r) \cdot 0 + A(r)f'(r) \Rightarrow \varphi'(r) = 1 + A(r)f'(r)$$

Impondo a condição $\varphi'(r) = 0$, obtemos, desde que $f'(x) \neq 0$:

$$0 = 1 + A(r)f'(r) \Rightarrow A(r) = -\frac{1}{f'(r)} \underbrace{\Rightarrow}_{r=x} A(x) = -\frac{1}{f'(x)}.$$

Voltando ao Método do Ponto Fixo (MPF)...

Derivando $\varphi(x)$, obtemos:

$$\varphi'(x) = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x), \text{ onde } A(r) \neq 0.$$

Tomando $x = r$, temos que:

$$\varphi'(r) = 1 + A'(r)f(r) + A(r)f'(r).$$

Como $f(r) = 0$, obtemos:

$$\varphi'(r) = 1 + A'(r) \cdot 0 + A(r)f'(r) \Rightarrow \varphi'(r) = 1 + A(r)f'(r)$$

Impondo a condição $\varphi'(r) = 0$, obtemos, desde que $f'(x) \neq 0$:

$$0 = 1 + A(r)f'(r) \Rightarrow A(r) = -\frac{1}{f'(r)} \underbrace{\Rightarrow}_{r=x} A(x) = -\frac{1}{f'(x)}.$$

Método de Newton

Voltando à forma geral para $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = x + A(x)f(x), \text{ onde } A(r) \neq 0.$$

Substituindo $A(x) = -1/f(x)$, obtemos:

$$\varphi(x) = x - \left(\frac{1}{f'(x)} \right) f(x) \Rightarrow \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Método de Newton: é um caso particular do MPF onde:

Dada $f(x)$, a função de iteração $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ será tal que $\varphi'(r) = 0$.

Verificação: Derivando $\varphi(x)$, obtemos:

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{f'(x)} \right] = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

Se $f(r) = 0$, então $\varphi'(r) = 0$.

Método de Newton

Voltando à forma geral para $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = x + A(x)f(x), \text{ onde } A(r) \neq 0.$$

Substituindo $A(x) = -1/f(x)$, obtemos:

$$\varphi(x) = x - \left(\frac{1}{f'(x)} \right) f(x) \Rightarrow \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Método de Newton: é um caso particular do MPF onde:

Dada $f(x)$, a função de iteração $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ será tal que $\varphi'(r) = 0$.

Verificação: Derivando $\varphi(x)$, obtemos:

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{f'(x)} \right] = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

Se $f(r) = 0$, então $\varphi'(r) = 0$.

Método de Newton

Voltando à forma geral para $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = x + A(x)f(x), \text{ onde } A(r) \neq 0.$$

Substituindo $A(x) = -1/f(x)$, obtemos:

$$\varphi(x) = x - \left(\frac{1}{f'(x)} \right) f(x) \Rightarrow \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Método de Newton: é um caso particular do MPF onde:

Dada $f(x)$, a função de iteração $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ será tal que $\varphi'(r) = 0$.

Verificação: Derivando $\varphi(x)$, obtemos:

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{f'(x)} \right] = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

Se $f(r) = 0$, então $\varphi'(r) = 0$.

Método de Newton

Voltando à forma geral para $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = x + A(x)f(x), \text{ onde } A(r) \neq 0.$$

Substituindo $A(x) = -1/f(x)$, obtemos:

$$\varphi(x) = x - \left(\frac{1}{f'(x)} \right) f(x) \Rightarrow \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Método de Newton: é um caso particular do MPF onde:

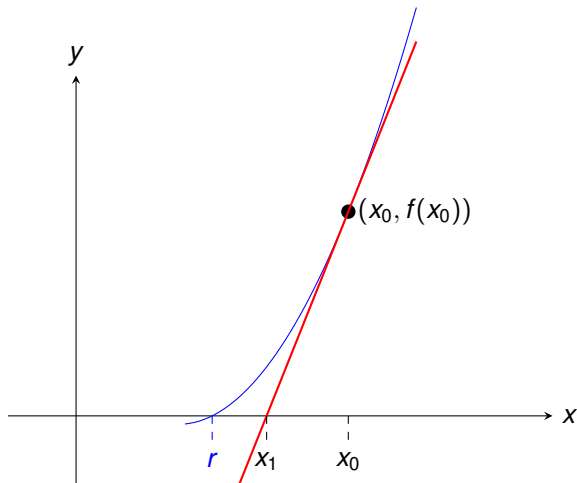
Dada $f(x)$, a função de iteração $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ será tal que $\varphi'(r) = 0$.

Verificação: Derivando $\varphi(x)$, obtemos:

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{f'(x)} \right] = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

Se $f(r) = 0$, então $\varphi'(r) = 0$.

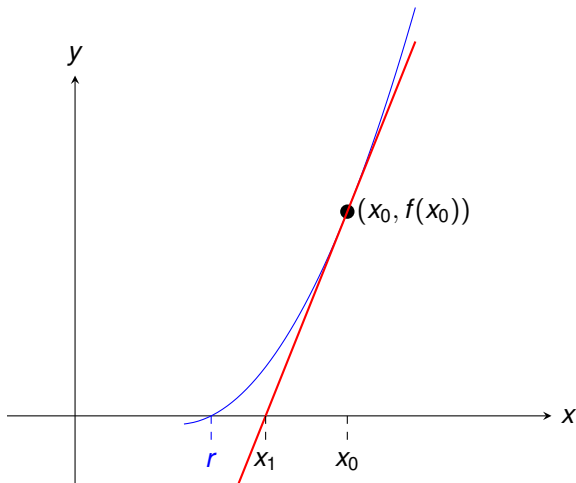
Interpretação geométrica



No ponto $(x_0, f(x_0))$:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - 0}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \Rightarrow (x_0 - x_1)f'(x_0) = f(x_0)$$

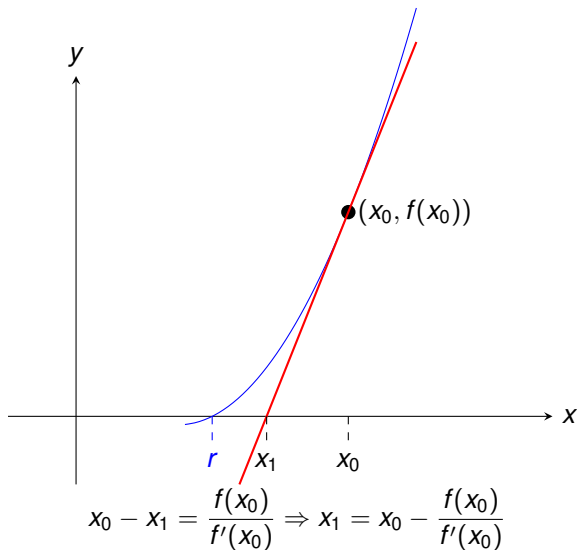
Interpretação geométrica



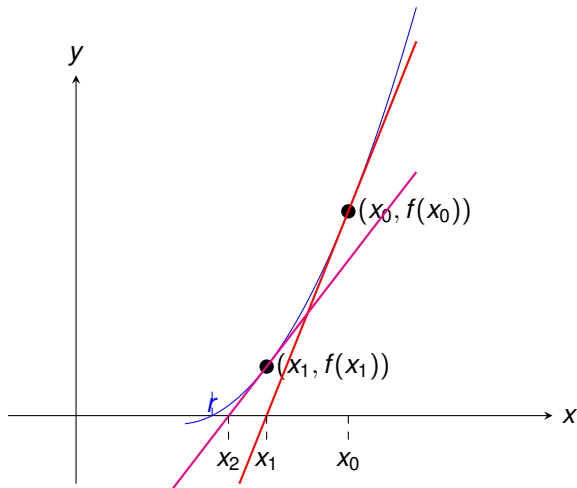
No ponto $(x_0, f(x_0))$:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - 0}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \Rightarrow (x_0 - x_1)f'(x_0) = f(x_0)$$

Interpretação geométrica

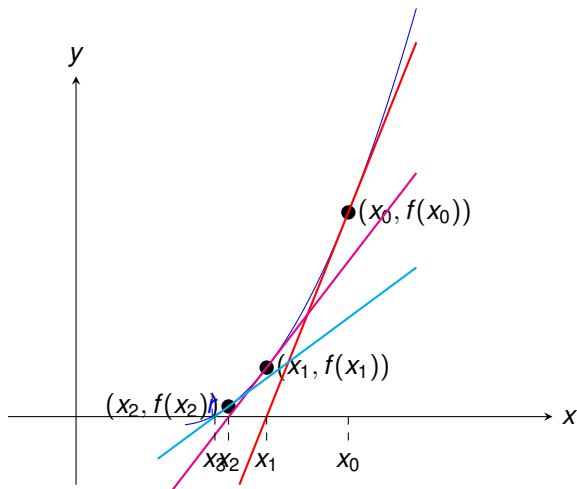


Interpretação geométrica



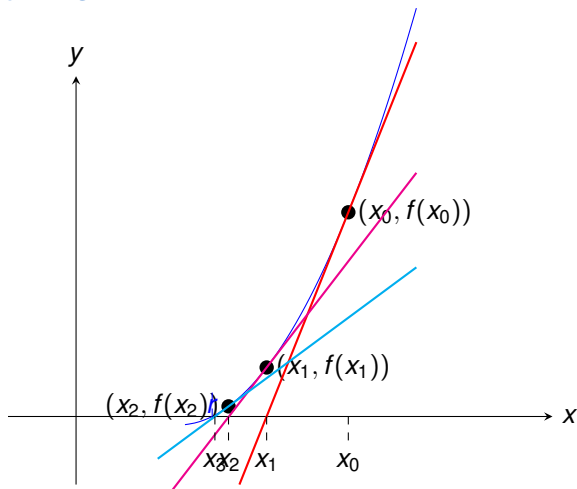
Analogamente,
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Interpretação geométrica



Analogamente,
$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

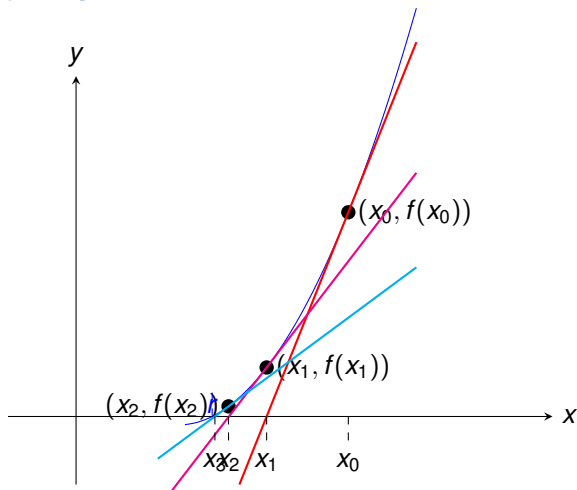
Interpretação geométrica



As aproximações $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ cada vez mais se aproximam de r .

No ponto $(x_k, f(x_k))$: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, para $k = 0, 1, 2, \dots$

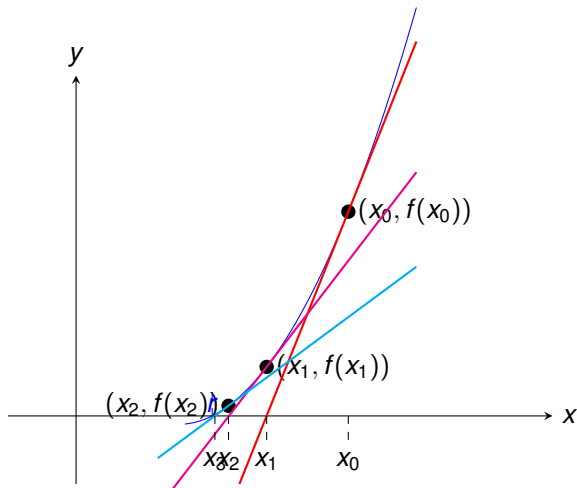
Interpretação geométrica



As aproximações $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ cada vez mais se aproximam de r .

No ponto $(x_k, f(x_k))$: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, para $k = 0, 1, 2, \dots$

Interpretação geométrica



O Método de Newton-Raphson também é conhecido como o método das tangentes.

Obtendo o Método de Newton via retas tangentes

Portanto, a fórmula iterativa é:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \text{ onde } f'(x_k) \neq 0, \text{ para todo } k = 0, 1, 2, \dots$$

Note que tomando:

$$\varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

o Método de Newton é um caso particular do Método do Ponto Fixo:

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

onde a ordem de convergência **para raízes simples** é quadrática ($p = 2$).

Obs.: Veremos em breve que **para raízes múltiplas**, a ordem cai para linear ($p = 1$).

Obtendo o Método de Newton via retas tangentes

Portanto, a fórmula iterativa é:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \text{ onde } f'(x_k) \neq 0, \text{ para todo } k = 0, 1, 2, \dots$$

Note que tomando:

$$\varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

o Método de Newton é um caso particular do Método do Ponto Fixo:

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

onde a ordem de convergência **para raízes simples** é quadrática ($p = 2$).

Obs.: Veremos em breve que **para raízes múltiplas**, a ordem cai para linear ($p = 1$).

Exemplo

Dê uma estimativa para a raiz positiva de $f(x) = x^2 + x - 6$ usando o Método de Newton.

Usando Bhaskara ou "olhômetro", obtemos $r = 2$.

Análise do sinal: usando o TVI, teste $f(x)$ para alguns valores de x :

$$f(0) = 0^2 + 0 - 6 = -6 < 0$$

$$f(1) = 1^2 + 1 - 6 = -4 < 0$$

$$f(3) = 3^2 + 3 - 6 = 6 > 0$$

Exemplo

Dê uma estimativa para a raiz positiva de $f(x) = x^2 + x - 6$ usando o Método de Newton.

Usando Bhaskara ou "olhômetro", obtemos $r = 2$.

Análise do sinal: usando o TVI, teste $f(x)$ para alguns valores de x :

$$f(0) = 0^2 + 0 - 6 = -6 < 0$$

$$f(1) = 1^2 + 1 - 6 = -4 < 0$$

$$f(3) = 3^2 + 3 - 6 = 6 > 0$$

Exemplo

Dê uma estimativa para a raiz positiva de $f(x) = x^2 + x - 6$ usando o Método de Newton.

Usando Bhaskara ou "olhômetro", obtemos $r = 2$.

Análise do sinal: usando o TVI, teste $f(x)$ para alguns valores de x :

$$f(0) = 0^2 + 0 - 6 = -6 < 0$$

$$f(1) = 1^2 + 1 - 6 = -4 < 0$$

$$f(3) = 3^2 + 3 - 6 = 6 > 0$$

Exemplo

Dê uma estimativa para a raiz positiva de $f(x) = x^2 + x - 6$ usando o Método de Newton.

Usando Bhaskara ou "olhômetro", obtemos $r = 2$.

Análise do sinal: usando o TVI, teste $f(x)$ para alguns valores de x :

$$f(0) = 0^2 + 0 - 6 = -6 < 0$$

$$f(1) = 1^2 + 1 - 6 = -4 < 0$$

$$f(3) = 3^2 + 3 - 6 = 6 > 0$$

Exemplo

Dê uma estimativa para a raiz positiva de $f(x) = x^2 + x - 6$ usando o Método de Newton.

Usando Bhaskara ou "olhômetro", obtemos $r = 2$.

Análise do sinal: usando o TVI, teste $f(x)$ para alguns valores de x :

$$f(0) = 0^2 + 0 - 6 = -6 < 0$$

$$f(1) = 1^2 + 1 - 6 = -4 < 0$$

$$f(3) = 3^2 + 3 - 6 = 6 > 0$$

Exemplo 1

Dê uma estimativa para a raiz positiva de $f(x) = x^2 + x - 6$ usando o Método de Newton-Raphson.

Usando Bhaskara ou "olhômetro", obtemos $r = 2$.

Análise do sinal: usando o TVI, teste $f(x)$ para alguns valores de x :

$$f(0) = 0^2 + 0 - 6 = -6 < 0$$

$$f(1) = 1^2 + 1 - 6 = -4 < 0$$

$$f(3) = 3^2 + 3 - 6 = 6 > 0 \Rightarrow \text{Existe uma raiz } r \in (1, 3).$$

A fórmula iterativa é:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\text{onde } f(x_k) = x_k^2 + x_k - 6, \quad f'(x_k) = 2x_k + 1.$$

Logo,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 + x_k - 6}{2x_k + 1} = \frac{x_k^2 + 6}{2x_k + 1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Exemplo 1

Dê uma estimativa para a raiz positiva de $f(x) = x^2 + x - 6$ usando o Método de Newton-Raphson.

Usando Bhaskara ou "olhômetro", obtemos $r = 2$.

Análise do sinal: usando o TVI, teste $f(x)$ para alguns valores de x :

$$f(0) = 0^2 + 0 - 6 = -6 < 0$$

$$f(1) = 1^2 + 1 - 6 = -4 < 0$$

$$f(3) = 3^2 + 3 - 6 = 6 > 0 \Rightarrow \text{Existe uma raiz } r \in (1, 3).$$

A fórmula iterativa é:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\text{onde } f(x_k) = x_k^2 + x_k - 6, \quad f'(x_k) = 2x_k + 1.$$

Logo,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 + x_k - 6}{2x_k + 1} = \frac{x_k^2 + 6}{2x_k + 1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Exemplo 1

Dê uma estimativa para a raiz positiva de $f(x) = x^2 + x - 6$ usando o Método de Newton-Raphson.

Usando Bhaskara ou "olhômetro", obtemos $r = 2$.

Análise do sinal: usando o TVI, teste $f(x)$ para alguns valores de x :

$$f(0) = 0^2 + 0 - 6 = -6 < 0$$

$$f(1) = 1^2 + 1 - 6 = -4 < 0$$

$$f(3) = 3^2 + 3 - 6 = 6 > 0 \Rightarrow \text{Existe uma raiz } r \in (1, 3).$$

A fórmula iterativa é:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\text{onde } f(x_k) = x_k^2 + x_k - 6, \quad f'(x_k) = 2x_k + 1.$$

Logo,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 + x_k - 6}{2x_k + 1} = \frac{x_k^2 + 6}{2x_k + 1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Exemplo 1

Dê uma estimativa para a raiz positiva de $f(x) = x^2 + x - 6$ usando o Método de Newton-Raphson.

Usando Bhaskara ou "olhômetro", obtemos $r = 2$.

Análise do sinal: usando o TVI, teste $f(x)$ para alguns valores de x :

$$f(0) = 0^2 + 0 - 6 = -6 < 0$$

$$f(1) = 1^2 + 1 - 6 = -4 < 0$$

$$f(3) = 3^2 + 3 - 6 = 6 > 0 \Rightarrow \text{Existe uma raiz } r \in (1, 3).$$

A fórmula iterativa é:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\text{onde } f(x_k) = x_k^2 + x_k - 6, \quad f'(x_k) = 2x_k + 1.$$

Logo,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 + x_k - 6}{2x_k + 1} = \frac{x_k^2 + 6}{2x_k + 1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Exemplo 1

Chute inicial: $x_0 = 1.5$.

Usando a calculadora científica: Digite 1.5 e aperte a sequência de botões:



Próxima iteração:

$$x_1 = 1.5 - \frac{f(1.5)}{f'(1.5)} = \frac{(1.5)^2 + 6}{2(1.5) + 1}$$

Na calculadora, para escrever a expressão iterativa

$$(x_k^2 + 6) \div (2x_k + 1),$$

o botão  faz o papel da variável x_k , para $k = 0, 1, 2, \dots$

Então, aperte a sequência de botões:



No display da calculadora aparece: $(Ans^2 + 6) \div (2Ans + 1)$.

O resultado é: $x_1 = 2.0625$.

Exemplo 1

Chute inicial: $x_0 = 1.5$.

Usando a calculadora científica: Digite 1.5 e aperte a sequência de botões:

= *Ans* =

Próxima iteração:

$$x_1 = 1.5 - \frac{f(1.5)}{f'(1.5)} = \frac{(1.5)^2 + 6}{2(1.5) + 1}$$

Na calculadora, para escrever a expressão iterativa

$$(x_k^2 + 6) \div (2x_k + 1),$$

o botão *Ans* faz o papel da variável x_k , para $k = 0, 1, 2, \dots$

Então, aperte a sequência de botões:

(*Ans* ^ 2 + 6) ÷ (2 *Ans* + 1) =

No display da calculadora aparece: $(Ans^2 + 6) \div (2Ans + 1)$.

O resultado é: $x_1 = 2.0625$.

Exemplo 1

Chute inicial: $x_0 = 1.5$.

Usando a calculadora científica: Digite 1.5 e aperte a sequência de botões:

= **Ans** **=**

Próxima iteração:

$$x_1 = 1.5 - \frac{f(1.5)}{f'(1.5)} = \frac{(1.5)^2 + 6}{2(1.5) + 1}$$

Na calculadora, para escrever a expressão iterativa

$$(x_k^2 + 6) \div (2x_k + 1),$$

o botão **Ans** faz o papel da variável x_k , para $k = 0, 1, 2, \dots$

Então, aperte a sequência de botões:

(**Ans** **^** **2** **+** **6** **)** **÷** **(** **2** **Ans** **+** **1** **)** **=**

No display da calculadora aparece: $(Ans^2 + 6) \div (2Ans + 1)$.

O resultado é: $x_1 = 2.0625$.

Exemplo 1

Chute inicial: $x_0 = 1.5$.

Usando a calculadora científica: Digite 1.5 e aperte a sequência de botões:

= **Ans** **=**

Próxima iteração:

$$x_1 = 1.5 - \frac{f(1.5)}{f'(1.5)} = \frac{(1.5)^2 + 6}{2(1.5) + 1}$$

Na calculadora, para escrever a expressão iterativa

$$(x_k^2 + 6) \div (2x_k + 1),$$

o botão **Ans** faz o papel da variável x_k , para $k = 0, 1, 2, \dots$

Então, aperte a sequência de botões:

(**Ans** **^** **2** **+** **6** **)** **÷** **(** **2** **Ans** **+** **1** **)** **=**

No display da calculadora aparece: $(Ans^2 + 6) \div (2Ans + 1)$.

O resultado é: $x_1 = 2.0625$.

Exemplo 1

Chute inicial: $x_0 = 1.5$.

Usando a calculadora científica: Digite 1.5 e aperte a sequência de botões:

= **Ans** **=**

Próxima iteração:

$$x_1 = 1.5 - \frac{f(1.5)}{f'(1.5)} = \frac{(1.5)^2 + 6}{2(1.5) + 1}$$

Na calculadora, para escrever a expressão iterativa

$$(x_k^2 + 6) \div (2x_k + 1),$$

o botão **Ans** faz o papel da variável x_k , para $k = 0, 1, 2, \dots$

Então, aperte a sequência de botões:

(**Ans** **^** **2** **+** **6** **)** **÷** **(** **2** **Ans** **+** **1** **)** **=**

No display da calculadora aparece: $(Ans^2 + 6) \div (2Ans + 1)$.

O resultado é: $x_1 = 2.0625$.

Exemplo 1

Chute inicial: $x_0 = 1.5$.

Usando a calculadora científica: Digite 1.5 e aperte a sequência de botões:

= **Ans** **=**

Próxima iteração:

$$x_1 = 1.5 - \frac{f(1.5)}{f'(1.5)} = \frac{(1.5)^2 + 6}{2(1.5) + 1}$$

Na calculadora, para escrever a expressão iterativa

$$(x_k^2 + 6) \div (2x_k + 1),$$

o botão **Ans** faz o papel da variável x_k , para $k = 0, 1, 2, \dots$


Então, aperte a sequência de botões:

(**Ans** **^** **2** **+** **6** **)** **÷** **(** **2** **Ans** **+** **1** **)** **=**

No display da calculadora aparece: $(Ans^2 + 6) \div (2Ans + 1)$.

O resultado é: $x_1 = 2.0625$.

Exemplo 1

A partir de agora, aperte sempre o botão  para obter os resultados das próximas iterações:

Apertando , a nova aproximação é: $x_2 = 2.000762195$;

Apertando , a nova aproximação é: $x_3 = 2.000000116$;

Apertando , a nova aproximação é: $x_4 = 2$, que é a raiz r .

Verificando os erros absolutos entre duas iterações consecutivas:

$$x_0 = 1.5$$

$$x_1 = 2.0625 \Rightarrow |x_1 - x_0| = 0.5625.$$

$$x_2 = 2.000762195 \Rightarrow |x_2 - x_1| = 0.06137805.$$


$$x_3 = 2.000000116 \Rightarrow |x_3 - x_2| = 0.000762079.$$


$$x_4 = 2 \Rightarrow |x_4 - x_3| = 0.000000116.$$

Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-4}$, a $r \approx x_4 = 2$, pois $|x_4 - x_3| \leq 10^{-4}$ e paro com as iterações.

Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-3}$, a $r \approx x_3 = 2.000000116$, pois $|x_3 - x_2| \leq 10^{-2}$ e paro com as iterações.

Exemplo 1

A partir de agora, aperte sempre o botão  para obter os resultados das próximas iterações:

Apertando , a nova aproximação é: $x_2 = 2.000762195$;

Apertando , a nova aproximação é: $x_3 = 2.000000116$;

Apertando , a nova aproximação é: $x_4 = 2$, que é a raiz r .

Verificando os erros absolutos entre duas iterações consecutivas:

$$x_0 = 1.5$$

$$x_1 = 2.0625 \Rightarrow |x_1 - x_0| = 0.5625.$$

$$x_2 = 2.000762195 \Rightarrow |x_2 - x_1| = 0.06137805.$$


$$x_3 = 2.000000116 \Rightarrow |x_3 - x_2| = 0.000762079.$$


$$x_4 = 2 \Rightarrow |x_4 - x_3| = 0.000000116.$$


Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-4}$, a $r \approx x_4 = 2$, pois $|x_4 - x_3| \leq 10^{-4}$ e paro com as iterações.

Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-3}$, a $r \approx x_3 = 2.000000116$, pois $|x_3 - x_2| \leq 10^{-2}$ e paro com as iterações.

Exemplo 1

A partir de agora, aperte sempre o botão  para obter os resultados das próximas iterações:

Apertando , a nova aproximação é: $x_2 = 2.000762195$;

Apertando , a nova aproximação é: $x_3 = 2.000000116$;

Apertando , a nova aproximação é: $x_4 = 2$, que é a raiz r .

Verificando os erros absolutos entre duas iterações consecutivas:

$$x_0 = 1.5$$

$$x_1 = 2.0625 \Rightarrow |x_1 - x_0| = 0.5625.$$

$$x_2 = 2.000762195 \Rightarrow |x_2 - x_1| = 0.06137805.$$


$$x_3 = 2.000000116 \Rightarrow |x_3 - x_2| = 0.000762079.$$


$$x_4 = 2 \Rightarrow |x_4 - x_3| = 0.000000116.$$


Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-4}$, a $r \approx x_4 = 2$, pois $|x_4 - x_3| \leq 10^{-4}$ e paro com as iterações.

Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-3}$, a $r \approx x_3 = 2.000000116$, pois $|x_3 - x_2| \leq 10^{-2}$ e paro com as iterações.

Exemplo 1

A partir de agora, aperte sempre o botão  para obter os resultados das próximas iterações:

Apertando , a nova aproximação é: $x_2 = 2.000762195$;

Apertando , a nova aproximação é: $x_3 = 2.000000116$;

Apertando , a nova aproximação é: $x_4 = 2$, que é a raiz r .

Verificando os erros absolutos entre duas iterações consecutivas:

$$x_0 = 1.5$$

$$x_1 = 2.0625 \Rightarrow |x_1 - x_0| = 0.5625.$$

$$x_2 = 2.000762195 \Rightarrow |x_2 - x_1| = 0.06137805.$$


$$x_3 = 2.000000116 \Rightarrow |x_3 - x_2| = 0.000762079.$$


$$x_4 = 2 \Rightarrow |x_4 - x_3| = 0.000000116.$$


Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-4}$, a $r \approx x_4 = 2$, pois $|x_4 - x_3| \leq 10^{-4}$ e paro com as iterações.

Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-3}$, a $r \approx x_3 = 2.000000116$, pois $|x_3 - x_2| \leq 10^{-2}$ e paro com as iterações.

Exemplo 1

A partir de agora, aperte sempre o botão  para obter os resultados das próximas iterações:

Apertando , a nova aproximação é: $x_2 = 2.000762195$;

Apertando , a nova aproximação é: $x_3 = 2.000000116$;

Apertando , a nova aproximação é: $x_4 = 2$, que é a raiz r .

Verificando os erros absolutos entre duas iterações consecutivas:

$$x_0 = 1.5$$

$$x_1 = 2.0625 \Rightarrow |x_1 - x_0| = 0.5625.$$

$$x_2 = 2.000762195 \Rightarrow |x_2 - x_1| = 0.06137805.$$


$$x_3 = 2.000000116 \Rightarrow |x_3 - x_2| = 0.000762079.$$


$$x_4 = 2 \Rightarrow |x_4 - x_3| = 0.000000116.$$


Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-4}$, a $r \approx x_4 = 2$, pois $|x_4 - x_3| \leq 10^{-4}$ e paro com as iterações.

Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-3}$, a $r \approx x_3 = 2.000000116$, pois $|x_3 - x_2| \leq 10^{-2}$ e paro com as iterações.

Exemplo 1

A partir de agora, aperte sempre o botão  para obter os resultados das próximas iterações:

Apertando , a nova aproximação é: $x_2 = 2.000762195$;

Apertando , a nova aproximação é: $x_3 = 2.000000116$;

Apertando , a nova aproximação é: $x_4 = 2$, que é a raiz r .

Verificando os erros absolutos entre duas iterações consecutivas:

$$x_0 = 1.5$$

$$x_1 = 2.0625 \Rightarrow |x_1 - x_0| = 0.5625.$$

$$x_2 = 2.000762195 \Rightarrow |x_2 - x_1| = 0.06137805.$$


$$x_3 = 2.000000116 \Rightarrow |x_3 - x_2| = 0.000762079.$$


$$x_4 = 2 \Rightarrow |x_4 - x_3| = 0.000000116.$$


Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-4}$, a $r \approx x_4 = 2$, pois $|x_4 - x_3| \leq 10^{-4}$ e paro com as iterações.

Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-3}$, a $r \approx x_3 = 2.000000116$, pois $|x_3 - x_2| \leq 10^{-2}$ e paro com as iterações.

Exemplo 1

A partir de agora, aperte sempre o botão  para obter os resultados das próximas iterações:

Apertando , a nova aproximação é: $x_2 = 2.000762195$;

Apertando , a nova aproximação é: $x_3 = 2.000000116$;

Apertando , a nova aproximação é: $x_4 = 2$, que é a raiz r .

Verificando os erros absolutos entre duas iterações consecutivas:

$$x_0 = 1.5$$

$$x_1 = 2.0625 \Rightarrow |x_1 - x_0| = 0.5625.$$

$$x_2 = 2.000762195 \Rightarrow |x_2 - x_1| = 0.06137805.$$


$$x_3 = 2.000000116 \Rightarrow |x_3 - x_2| = 0.000762079.$$


$$x_4 = 2 \Rightarrow |x_4 - x_3| = 0.000000116.$$


Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-4}$, a $r \approx x_4 = 2$, pois $|x_4 - x_3| \leq 10^{-4}$ e paro com as iterações.

Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-3}$, a $r \approx x_3 = 2.000000116$, pois $|x_3 - x_2| \leq 10^{-2}$ e paro com as iterações.

Exemplo 1

A partir de agora, aperte sempre o botão  para obter os resultados das próximas iterações:

Apertando , a nova aproximação é: $x_2 = 2.000762195$;

Apertando , a nova aproximação é: $x_3 = 2.000000116$;

Apertando , a nova aproximação é: $x_4 = 2$, que é a raiz r .

Verificando os erros absolutos entre duas iterações consecutivas:

$$x_0 = 1.5$$

$$x_1 = 2.0625 \Rightarrow |x_1 - x_0| = 0.5625.$$

$$x_2 = 2.000762195 \Rightarrow |x_2 - x_1| = 0.06137805.$$


$$x_3 = 2.000000116 \Rightarrow |x_3 - x_2| = 0.000762079.$$


$$x_4 = 2 \Rightarrow |x_4 - x_3| = 0.000000116.$$


Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-4}$, a $r \approx x_4 = 2$, pois $|x_4 - x_3| \leq 10^{-4}$ e paro com as iterações.

Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-3}$, a $r \approx x_3 = 2.000000116$, pois $|x_3 - x_2| \leq 10^{-2}$ e paro com as iterações.

Exemplo 1

A partir de agora, aperte sempre o botão  para obter os resultados das próximas iterações:

Apertando , a nova aproximação é: $x_2 = 2.000762195$;

Apertando , a nova aproximação é: $x_3 = 2.000000116$;

Apertando , a nova aproximação é: $x_4 = 2$, que é a raiz r .

Verificando os erros absolutos entre duas iterações consecutivas:

$$x_0 = 1.5$$

$$x_1 = 2.0625 \Rightarrow |x_1 - x_0| = 0.5625.$$

$$x_2 = 2.000762195 \Rightarrow |x_2 - x_1| = 0.06137805.$$


$$x_3 = 2.000000116 \Rightarrow |x_3 - x_2| = 0.000762079.$$


$$x_4 = 2 \Rightarrow |x_4 - x_3| = 0.000000116.$$


Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-4}$, a $r \approx x_4 = 2$, pois $|x_4 - x_3| \leq 10^{-4}$ e paro com as iterações.

Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-3}$, a $r \approx x_3 = 2.000000116$, pois $|x_3 - x_2| \leq 10^{-2}$ e paro com as iterações.

Exemplo 1

A partir de agora, aperte sempre o botão  para obter os resultados das próximas iterações:

Apertando , a nova aproximação é: $x_2 = 2.000762195$;

Apertando , a nova aproximação é: $x_3 = 2.000000116$;

Apertando , a nova aproximação é: $x_4 = 2$, que é a raiz r .

Verificando os erros absolutos entre duas iterações consecutivas:

$$x_0 = 1.5$$

$$x_1 = 2.0625 \Rightarrow |x_1 - x_0| = 0.5625.$$

$$x_2 = 2.000762195 \Rightarrow |x_2 - x_1| = 0.06137805.$$

$$x_3 = 2.000000116 \Rightarrow |x_3 - x_2| = 0.000762079.$$

$$x_4 = 2 \Rightarrow |x_4 - x_3| = 0.000000116.$$

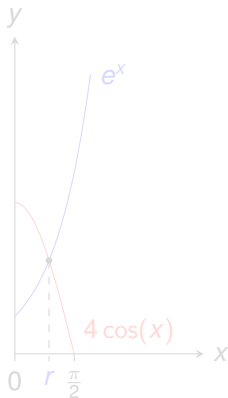
Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-4}$, a $r \approx x_4 = 2$, pois $|x_4 - x_3| \leq 10^{-4}$ e paro com as iterações.

Se a tolerância for $\epsilon \leq 10^{-3}$, a $r \approx x_3 = 2.000000116$, pois $|x_3 - x_2| \leq 10^{-2}$ e paro com as iterações.

Exemplo 2

Determine, usando o Método de Newton-Raphson, a menor raiz positiva da equação $4 \cos(x) - e^x = 0$ com tolerância de erro $\epsilon \leq 10^{-4}$.

1. Intervalo para a raiz: abordagem gráfica

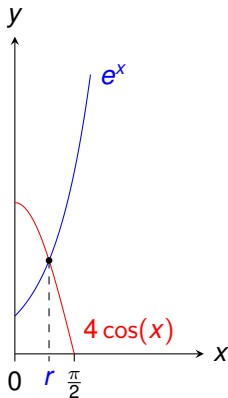


$$4 \cos(x) - e^x = 0 \Rightarrow 4 \cos(x) = e^x \Rightarrow r \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Exemplo 2

Determine, usando o Método de Newton-Raphson, a menor raiz positiva da equação $4 \cos(x) - e^x = 0$ com tolerância de erro $\epsilon \leq 10^{-4}$.

1. Intervalo para a raiz: abordagem gráfica



$$4 \cos(x) - e^x = 0 \Rightarrow 4 \cos(x) = e^x \Rightarrow r \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Exemplo 2

1. Intervalo para a raiz: abordagem do TVI

Testando $f(x)$ para alguns valores positivos de x :

$$f(0) = 4 \cos(0) - e^0 = 3 > 0;$$

$$f(1) = 4 \cos(1) - e^1 \approx -0.5571 < 0 \Rightarrow r \in (0, 1).$$

Iterações:

k	x_k	$ x_k - x_{k-1} $
0	1.0000	—
1	0.9084	$0.0916 > \epsilon$
2	0.9048	$0.0036 > \epsilon$
3	0.9048	$0 \leq \epsilon$ (OK!)

Logo, a menor raiz positiva com $\epsilon \leq 10^{-4}$ é $r \approx 0.9048$.