

CÁLCULO NUMÉRICO

UERJ/2023

02 - Série de Taylor

Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br
IME-UERJ

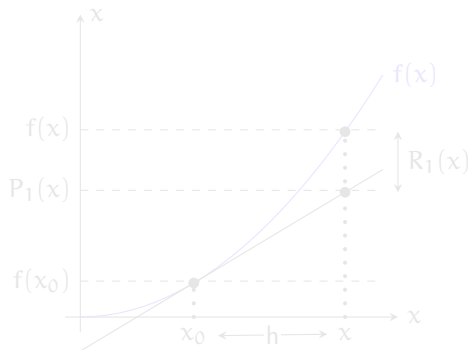
Sumário

- 1 Introdução
- 2 Definição de Série de Taylor
- 3 Erro de truncamento da série de Taylor
- 4 Limitante superior do erro de truncamento
- 5 Definição de Série de Maclaurin
- 6 Bibliografia

Introdução

Seja $f(x)$ uma função de classe C^∞ , isto é, contínua e infinitamente diferenciável em um intervalo \mathcal{I} . Desejamos aproximar $f(x)$ por um polinômio de grau n , $P_n(x)$, em torno de um ponto $x_0 \in \mathcal{I}$.

Vejamos o que acontece quando aproxima-se $f(x)$ pela reta $P_1(x)$ em torno de x_0 .



Quando x está suficientemente próximo de x_0 , temos

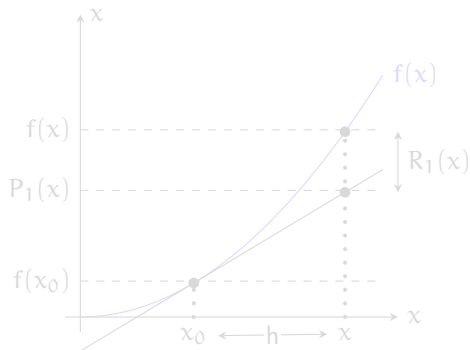
$$f'(x_0) \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Rightarrow f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P_1(x)}$$

Introdução

Seja $f(x)$ uma função de classe C^∞ , isto é, contínua e infinitamente diferenciável em um intervalo \mathcal{I} . Desejamos aproximar $f(x)$ por um polinômio de grau n , $P_n(x)$, em torno de um ponto $x_0 \in \mathcal{I}$.

Vejamos o que acontece quando aproxima-se $f(x)$ pela reta $P_1(x)$ em torno de x_0 .



Quando x está suficientemente próximo de x_0 , temos

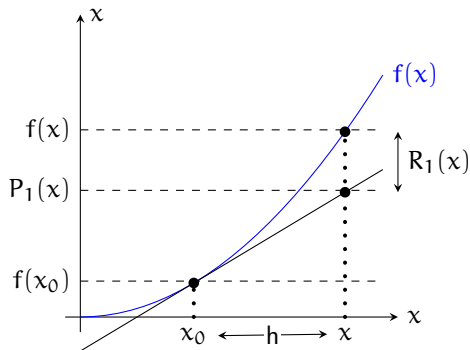
$$f'(x_0) \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Rightarrow f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P_1(x)}$$

Introdução

Seja $f(x)$ uma função de classe C^∞ , isto é, contínua e infinitamente diferenciável em um intervalo \mathcal{I} . Desejamos aproximar $f(x)$ por um polinômio de grau n , $P_n(x)$, em torno de um ponto $x_0 \in \mathcal{I}$.

Vejamos o que acontece quando aproxima-se $f(x)$ pela reta $P_1(x)$ em torno de x_0 .



Quando x está suficientemente próximo de x_0 , temos

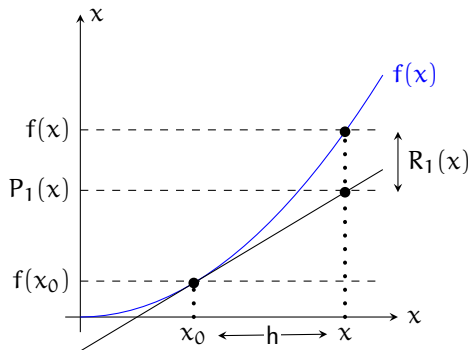
$$f'(x_0) \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Rightarrow f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P_1(x)}$$

Introdução

Seja $f(x)$ uma função de classe C^∞ , isto é, contínua e infinitamente diferenciável em um intervalo \mathcal{I} . Desejamos aproximar $f(x)$ por um polinômio de grau n , $P_n(x)$, em torno de um ponto $x_0 \in \mathcal{I}$.

Vejamos o que acontece quando aproxima-se $f(x)$ pela reta $P_1(x)$ em torno de x_0 .



Quando x está suficientemente próximo de x_0 , temos

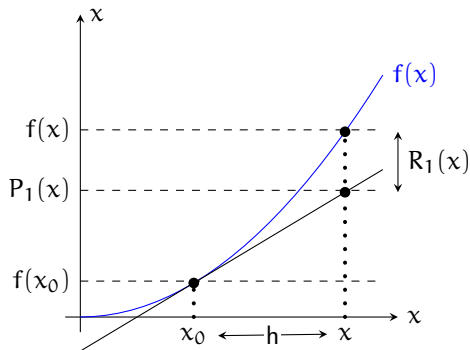
$$f'(x_0) \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Rightarrow f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P_1(x)}$$

Introdução

Seja $f(x)$ uma função de classe C^∞ , isto é, contínua e infinitamente diferenciável em um intervalo \mathcal{I} . Desejamos aproximar $f(x)$ por um polinômio de grau n , $P_n(x)$, em torno de um ponto $x_0 \in \mathcal{I}$.

Vejamos o que acontece quando aproxima-se $f(x)$ pela reta $P_1(x)$ em torno de x_0 .



Quando x está suficientemente próximo de x_0 , temos

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Rightarrow f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P_1(x)}$$

Introdução

$$\Rightarrow f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P_1(x)}$$

Então, a reta $P_1(x)$ é o polinômio de grau 1

$$P_1(x) = c_0 + c_1(x - x_0),$$

onde $c_0 = f(x_0)$, $c_1 = f'(x_0)$.

Essa aproximação de $f(x)$ por $P_1(x)$ gera um erro de truncamento $R_1(x)$.
Portanto,

$$f(x) = P_1(x) + R_1(x).$$

Vejamos o que acontece agora quando aproximamos $f(x)$ pelo polinômio de grau 2, $P_2(x)$, em torno de x_0 .

Introdução

$$\Rightarrow f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P_1(x)}$$

Então, a reta $P_1(x)$ é o polinômio de grau 1

$$P_1(x) = c_0 + c_1(x - x_0),$$

onde $c_0 = f(x_0)$, $c_1 = f'(x_0)$.

Essa aproximação de $f(x)$ por $P_1(x)$ gera um erro de truncamento $R_1(x)$.
Portanto,

$$f(x) = P_1(x) + R_1(x).$$

Vejamos o que acontece agora quando aproximamos $f(x)$ pelo polinômio de grau 2, $P_2(x)$, em torno de x_0 .

Introdução

$$\Rightarrow f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P_1(x)}$$

Então, a reta $P_1(x)$ é o polinômio de grau 1

$$P_1(x) = c_0 + c_1(x - x_0),$$

onde $c_0 = f(x_0)$, $c_1 = f'(x_0)$.

Essa aproximação de $f(x)$ por $P_1(x)$ gera um erro de truncamento $R_1(x)$.
Portanto,

$$f(x) = P_1(x) + R_1(x).$$

Vejamos o que acontece agora quando aproximamos $f(x)$ pelo polinômio de grau 2, $P_2(x)$, em torno de x_0 .

Introdução

$$\Rightarrow f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P_1(x)}$$

Então, a reta $P_1(x)$ é o polinômio de grau 1

$$P_1(x) = c_0 + c_1(x - x_0),$$

onde $c_0 = f(x_0)$, $c_1 = f'(x_0)$.

Essa aproximação de $f(x)$ por $P_1(x)$ gera um erro de truncamento $R_1(x)$.
Portanto,

$$f(x) = P_1(x) + R_1(x).$$

Vejamos o que acontece agora quando aproximamos $f(x)$ pelo polinômio de grau 2, $P_2(x)$, em torno de x_0 .

Introdução

$$\Rightarrow f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P_1(x)}$$

Então, a reta $P_1(x)$ é o polinômio de grau 1

$$P_1(x) = c_0 + c_1(x - x_0),$$

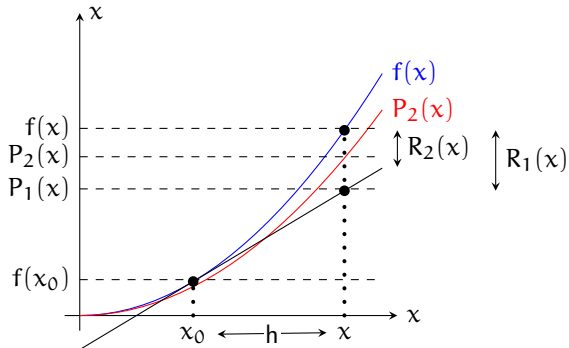
onde $c_0 = f(x_0)$, $c_1 = f'(x_0)$.

Essa aproximação de $f(x)$ por $P_1(x)$ gera um erro de truncamento $R_1(x)$.
Portanto,

$$f(x) = P_1(x) + R_1(x).$$

Vejamos o que acontece agora quando aproximamos $f(x)$ pelo polinômio de grau 2, $P_2(x)$, em torno de x_0 .

Introdução

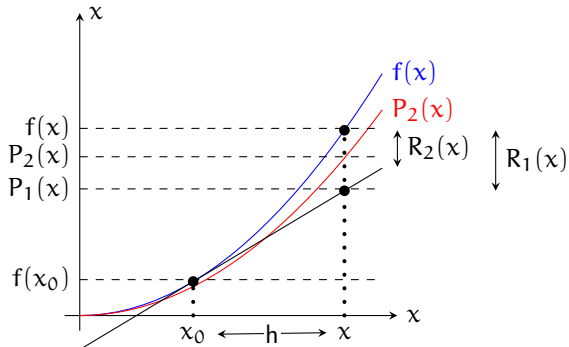


Percebe-se uma aproximação de $f(x)$ por $P_2(x)$ em torno de x_0 com erro de truncamento $R_2(x)$ ainda menor.

Assim,

$$P_2(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P_1(x)} + c_2(x - x_0)^2$$

Introdução

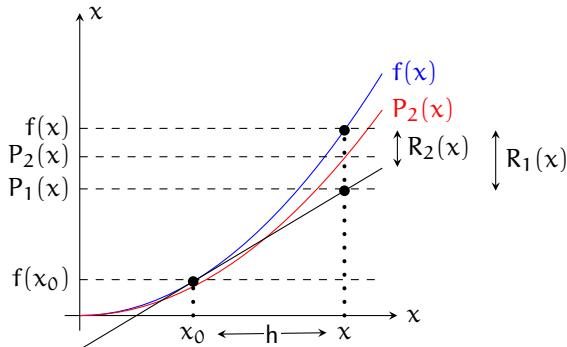


Percebe-se uma aproximação de $f(x)$ por $P_2(x)$ em torno de x_0 com erro de truncamento $R_2(x)$ ainda menor.

Assim,

$$P_2(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P_1(x)} + c_2(x - x_0)^2$$

Introdução



Percebe-se uma aproximação de $f(x)$ por $P_2(x)$ em torno de x_0 com erro de truncamento $R_2(x)$ ainda menor.

Assim,

$$P_2(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P_1(x)} + c_2(x - x_0)^2$$

Introdução

Portanto,

$$f(x) = P_2(x) + R_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + R_2(x).$$

Na sequência, ao aproximarmos $f(x)$ por $P_3(x)$ em torno de x_0 teremos um erro $R_3(x)$ ainda menor. Assim,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + R_3(x).$$

Generalizando, para aproximar $f(x)$ por $P_n(x)$ em torno de x_0 , temos

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \cdots + c_n(x - x_0)^n + R_n(x),$$

onde $R_n(x) < R_{n-1}(x) < \cdots < R_3(x) < R_2(x) < R_1(x)$.

Introdução

Portanto,

$$f(x) = P_2(x) + R_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + R_2(x).$$

Na sequência, ao aproximarmos $f(x)$ por $P_3(x)$ em torno de x_0 teremos um erro $R_3(x)$ ainda menor. Assim,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + R_3(x).$$

Generalizando, para aproximar $f(x)$ por $P_n(x)$ em torno de x_0 , temos

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \cdots + c_n(x - x_0)^n + R_n(x),$$

onde $R_n(x) < R_{n-1}(x) < \cdots < R_3(x) < R_2(x) < R_1(x)$.

Introdução

Portanto,

$$f(x) = P_2(x) + R_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + R_2(x).$$

Na sequência, ao aproximarmos $f(x)$ por $P_3(x)$ em torno de x_0 teremos um erro $R_3(x)$ ainda menor. Assim,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + R_3(x).$$

Generalizando, para aproximar $f(x)$ por $P_n(x)$ em torno de x_0 , temos

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \cdots + c_n(x - x_0)^n + R_n(x),$$

onde $R_n(x) < R_{n-1}(x) < \cdots < R_3(x) < R_2(x) < R_1(x)$.

Introdução

Portanto,

$$f(x) = P_2(x) + R_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + R_2(x).$$

Na sequência, ao aproximarmos $f(x)$ por $P_3(x)$ em torno de x_0 teremos um erro $R_3(x)$ ainda menor. Assim,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + R_3(x).$$

Generalizando, para aproximar $f(x)$ por $P_n(x)$ em torno de x_0 , temos

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \cdots + c_n(x - x_0)^n + R_n(x),$$

onde $R_n(x) < R_{n-1}(x) < \cdots < R_3(x) < R_2(x) < R_1(x)$.

Introdução

Como vimos anteriormente que $c_0 = f(x_0)$ e $c_1 = f'(x_0)$, podemos reescrever a última equação como

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \cdots + c_n(x - x_0)^n + \dots,$$

Mas, ainda está faltando definir os coeficientes $c_2, c_3, \dots, c_n, \dots$ de $f(x)$.

É muito simples: basta aplicarmos as derivadas de $f(x)$.

A primeira derivada de $f(x)$ é dada por:

$$f'(x) = c_1 + 2 c_2(x - x_0) + 3 c_3(x - x_0)^2 + \cdots + n c_n(x - x_0)^{n-1} + \dots$$

Ao tomarmos $x = x_0$, obtemos

$c_1 = f'(x_0)$, como já havíamos visto.

Introdução

Como vimos anteriormente que $c_0 = f(x_0)$ e $c_1 = f'(x_0)$, podemos reescrever a última equação como

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \cdots + c_n(x - x_0)^n + \dots,$$

Mas, ainda está faltando definir os coeficientes $c_2, c_3, \dots, c_n, \dots$ de $f(x)$.

É muito simples: basta aplicarmos as derivadas de $f(x)$.

A primeira derivada de $f(x)$ é dada por:

$$f'(x) = c_1 + 2 c_2(x - x_0) + 3 c_3(x - x_0)^2 + \cdots + n c_n(x - x_0)^{n-1} + \dots$$

Ao tomarmos $x = x_0$, obtemos

$c_1 = f'(x_0)$, como já havíamos visto.

Introdução

Como vimos anteriormente que $c_0 = f(x_0)$ e $c_1 = f'(x_0)$, podemos reescrever a última equação como

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \cdots + c_n(x - x_0)^n + \dots,$$

Mas, ainda está faltando definir os coeficientes $c_2, c_3, \dots, c_n, \dots$ de $f(x)$.

É muito simples: basta aplicarmos as derivadas de $f(x)$.

A primeira derivada de $f(x)$ é dada por:

$$f'(x) = c_1 + 2 c_2(x - x_0) + 3 c_3(x - x_0)^2 + \cdots + n c_n(x - x_0)^{n-1} + \dots$$

Ao tomarmos $x = x_0$, obtemos

$c_1 = f'(x_0)$, como já havíamos visto.

Introdução

Como vimos anteriormente que $c_0 = f(x_0)$ e $c_1 = f'(x_0)$, podemos reescrever a última equação como

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \cdots + c_n(x - x_0)^n + \dots,$$

Mas, ainda está faltando definir os coeficientes $c_2, c_3, \dots, c_n, \dots$ de $f(x)$.

É muito simples: basta aplicarmos as derivadas de $f(x)$.

A primeira derivada de $f(x)$ é dada por:

$$f'(x) = c_1 + 2 c_2(x - x_0) + 3 c_3(x - x_0)^2 + \cdots + n c_n(x - x_0)^{n-1} + \dots$$

Ao tomarmos $x = x_0$, obtemos

$c_1 = f'(x_0)$, como já havíamos visto.

Introdução

Como vimos anteriormente que $c_0 = f(x_0)$ e $c_1 = f'(x_0)$, podemos reescrever a última equação como

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \cdots + c_n(x - x_0)^n + \dots,$$

Mas, ainda está faltando definir os coeficientes $c_2, c_3, \dots, c_n, \dots$ de $f(x)$.

É muito simples: basta aplicarmos as derivadas de $f(x)$.

A primeira derivada de $f(x)$ é dada por:

$$f'(x) = c_1 + 2 c_2(x - x_0) + 3 c_3(x - x_0)^2 + \cdots + n c_n(x - x_0)^{n-1} + \dots$$

Ao tomarmos $x = x_0$, obtemos

$c_1 = f'(x_0)$, como já havíamos visto.

Introdução

A segunda derivada de $f(x)$ é dada por:

$$f''(x) = 2 c_2 + \underbrace{3 \cdot 2}_{3!} c_3 (x - x_0) + \cdots + n(n-1) c_n (x - x_0)^{n-2} + \dots$$

Ao tomarmos $x = x_0$, obtemos

$$c_2 = \frac{f''(x_0)}{2}.$$

A terceira derivada de $f(x)$ é dada por:

$$f'''(x) = 3! c_3 + \cdots + n(n-1)(n-2) c_n (x - x_0)^{n-3} + \dots$$

Ao tomarmos $x = x_0$, obtemos

$$c_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}.$$

Introdução

A segunda derivada de $f(x)$ é dada por:

$$f''(x) = 2 c_2 + \underbrace{3 \cdot 2}_{3!} c_3 (x - x_0) + \cdots + n(n-1) c_n (x - x_0)^{n-2} + \dots$$

Ao tomarmos $x = x_0$, obtemos

$$c_2 = \frac{f''(x_0)}{2}.$$

A terceira derivada de $f(x)$ é dada por:

$$f'''(x) = 3! c_3 + \cdots + n(n-1)(n-2) c_n (x - x_0)^{n-3} + \dots$$

Ao tomarmos $x = x_0$, obtemos

$$c_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}.$$

Introdução

A segunda derivada de $f(x)$ é dada por:

$$f''(x) = 2 c_2 + \underbrace{3 \cdot 2}_{3!} c_3 (x - x_0) + \cdots + n(n-1) c_n (x - x_0)^{n-2} + \dots$$

Ao tomarmos $x = x_0$, obtemos

$$c_2 = \frac{f''(x_0)}{2}.$$

A terceira derivada de $f(x)$ é dada por:

$$f'''(x) = 3! c_3 + \cdots + n(n-1)(n-2) c_n (x - x_0)^{n-3} + \dots$$

Ao tomarmos $x = x_0$, obtemos

$$c_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}.$$

Introdução

A segunda derivada de $f(x)$ é dada por:

$$f''(x) = 2 c_2 + \underbrace{3 \cdot 2}_{3!} c_3 (x - x_0) + \cdots + n(n-1) c_n (x - x_0)^{n-2} + \dots$$

Ao tomarmos $x = x_0$, obtemos

$$c_2 = \frac{f''(x_0)}{2}.$$

A terceira derivada de $f(x)$ é dada por:

$$f'''(x) = 3! c_3 + \cdots + n(n-1)(n-2) c_n (x - x_0)^{n-3} + \dots$$

Ao tomarmos $x = x_0$, obtemos

$$c_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}.$$

Série de Taylor

Logo, já podemos deduzir que o coeficiente c_n é dado por

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Portanto, o que acabamos de mostrar chama-se Série de Taylor.

Definição (Série de Taylor)

Sejam $f(x)$ uma função contínua e infinitamente diferenciável em um intervalo \mathcal{I} e $x_0 \in \mathcal{I}$. A série de Taylor de $f(x)$ em torno de x_0 é uma série infinita de potências $\{P_n(x)\}$ dada por:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i. \end{aligned}$$

Série de Taylor

Logo, já podemos deduzir que o coeficiente c_n é dado por

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Portanto, o que acabamos de mostrar chama-se Série de Taylor.

Definição (Série de Taylor)

Sejam $f(x)$ uma função contínua e infinitamente diferenciável em um intervalo \mathcal{I} e $x_0 \in \mathcal{I}$. A série de Taylor de $f(x)$ em torno de x_0 é uma série infinita de potências $\{P_n(x)\}$ dada por:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i. \end{aligned}$$

Série de Taylor

Logo, já podemos deduzir que o coeficiente c_n é dado por

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Portanto, o que acabamos de mostrar chama-se Série de Taylor.

Definição (Série de Taylor)

Sejam $f(x)$ uma função contínua e infinitamente diferenciável em um intervalo \mathcal{I} e $x_0 \in \mathcal{I}$. A série de Taylor de $f(x)$ em torno de x_0 é uma série infinita de potências $\{P_n(x)\}$ dada por:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i. \end{aligned}$$

Exemplos

Exemplo 1: Encontre a série de Taylor da função $f(x) = \text{sen}(x)$ em torno de 0.

Primeiro, verificamos a função e suas derivadas e depois calculamos os seus valores quando $x = x_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \text{sen}(x) &\Rightarrow f(0) &= \text{sen}(0) &= 0; \\
 f'(x) &= \cos(x) &\Rightarrow f'(0) &= \cos(0) &= 1; \\
 f''(x) &= -\text{sen}(x) &\Rightarrow f''(0) &= -\text{sen}(0) &= 0; \\
 f'''(x) &= -\cos(x) &\Rightarrow f'''(0) &= -\cos(0) &= -1; \\
 f^{(iv)}(x) &= \text{sen}(x) &\Rightarrow f^{(iv)}(0) &= \text{sen}(0) &= 0; \\
 f^{(v)}(x) &= \cos(x) &\Rightarrow f^{(v)}(0) &= \cos(0) &= 1; \\
 f^{(vi)}(x) &= -\text{sen}(x) &\Rightarrow f^{(vi)}(0) &= -\text{sen}(0) &= 0; \\
 f^{(vii)}(x) &= -\cos(x) &\Rightarrow f^{(vii)}(0) &= -\cos(0) &= -1; \\
 &(\dots)
 \end{aligned}$$

Exemplos

Exemplo 1: Encontre a série de Taylor da função $f(x) = \text{sen}(x)$ em torno de 0.

Primeiro, verificamos a função e suas derivadas e depois calculamos os seus valores quando $x = x_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \text{sen}(x) &\Rightarrow f(0) &= \text{sen}(0) &= 0; \\
 f'(x) &= \cos(x) &\Rightarrow f'(0) &= \cos(0) &= 1; \\
 f''(x) &= -\text{sen}(x) &\Rightarrow f''(0) &= -\text{sen}(0) &= 0; \\
 f'''(x) &= -\cos(x) &\Rightarrow f'''(0) &= -\cos(0) &= -1; \\
 f^{(iv)}(x) &= \text{sen}(x) &\Rightarrow f^{(iv)}(0) &= \text{sen}(0) &= 0; \\
 f^{(v)}(x) &= \cos(x) &\Rightarrow f^{(v)}(0) &= \cos(0) &= 1; \\
 f^{(vi)}(x) &= -\text{sen}(x) &\Rightarrow f^{(vi)}(0) &= -\text{sen}(0) &= 0; \\
 f^{(vii)}(x) &= -\cos(x) &\Rightarrow f^{(vii)}(0) &= -\cos(0) &= -1; \\
 &(\dots)
 \end{aligned}$$

Exemplos

Exemplo 1: Encontre a série de Taylor da função $f(x) = \text{sen}(x)$ em torno de 0.

Primeiro, verificamos a função e suas derivadas e depois calculamos os seus valores quando $x = x_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \text{sen}(x) &\Rightarrow f(0) &= \text{sen}(0) &= 0; \\
 f'(x) &= \cos(x) &\Rightarrow f'(0) &= \cos(0) &= 1; \\
 f''(x) &= -\text{sen}(x) &\Rightarrow f''(0) &= -\text{sen}(0) &= 0; \\
 f'''(x) &= -\cos(x) &\Rightarrow f'''(0) &= -\cos(0) &= -1; \\
 f^{(iv)}(x) &= \text{sen}(x) &\Rightarrow f^{(iv)}(0) &= \text{sen}(0) &= 0; \\
 f^{(v)}(x) &= \cos(x) &\Rightarrow f^{(v)}(0) &= \cos(0) &= 1; \\
 f^{(vi)}(x) &= -\text{sen}(x) &\Rightarrow f^{(vi)}(0) &= -\text{sen}(0) &= 0; \\
 f^{(vii)}(x) &= -\cos(x) &\Rightarrow f^{(vii)}(0) &= -\cos(0) &= -1; \\
 &(\dots)
 \end{aligned}$$

Exemplos

A série de Taylor é dada por:

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{f^{(iv)}(0)}{4!}(x-0)^4 + \dots$$

Note que as derivadas de ordem par são iguais a zero e as derivadas de ordem ímpar alternam o sinal quando $x = 0$.

Então, a série de Taylor para $\sin(x)$ em torno de $x_0 = 0$ é dada por:

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1}. \end{aligned}$$

Exemplos

A série de Taylor é dada por:

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{f^{(iv)}(0)}{4!}(x-0)^4 + \dots$$

Note que as derivadas de ordem par são iguais a zero e as derivadas de ordem ímpar alternam o sinal quando $x = 0$.

Então, a série de Taylor para $\sin(x)$ em torno de $x_0 = 0$ é dada por:

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1}. \end{aligned}$$

Exemplos

A série de Taylor é dada por:

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{f^{(iv)}(0)}{4!}(x-0)^4 + \dots$$

Note que as derivadas de ordem par são iguais a zero e as derivadas de ordem ímpar alternam o sinal quando $x = 0$.

Então, a série de Taylor para $\sin(x)$ em torno de $x_0 = 0$ é dada por:

$$f(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \dots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1}.$$

Exemplos

A série de Taylor é dada por:

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{f^{(iv)}(0)}{4!}(x-0)^4 + \dots$$

Note que as derivadas de ordem par são iguais a zero e as derivadas de ordem ímpar alternam o sinal quando $x = 0$.

Então, a série de Taylor para $\sin(x)$ em torno de $x_0 = 0$ é dada por:

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1}. \end{aligned}$$

Exemplos

Como as ordens das potências da série são ímpares, só podemos ter aproximações de $\sin(x)$ por polinômios de graus ímpares.

Quando aproximamos $\sin(x)$ por um polinômio de grau 1, $P_1(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_1(x) = x,$$

Quando aproximamos $\sin(x)$ por um polinômio de grau 3, $P_3(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}.$$

Quando aproximamos $\sin(x)$ por um polinômio de grau 5, $P_5(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Quando aproximamos $\sin(x)$ por um polinômio de grau 7, $P_7(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}, \dots \text{ e assim por diante.}$$

Exemplos

Como as ordens das potências da série são ímpares, só podemos ter aproximações de $\text{sen}(x)$ por polinômios de graus ímpares.

Quando aproximamos $\text{sen}(x)$ por um polinômio de grau 1, $P_1(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_1(x) = x,$$

Quando aproximamos $\text{sen}(x)$ por um polinômio de grau 3, $P_3(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}.$$

Quando aproximamos $\text{sen}(x)$ por um polinômio de grau 5, $P_5(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Quando aproximamos $\text{sen}(x)$ por um polinômio de grau 7, $P_7(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}, \dots \text{ e assim por diante.}$$

Exemplos

Como as ordens das potências da série são ímpares, só podemos ter aproximações de $\text{sen}(x)$ por polinômios de graus ímpares.

Quando aproximamos $\text{sen}(x)$ por um polinômio de grau 1, $P_1(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_1(x) = x,$$

Quando aproximamos $\text{sen}(x)$ por um polinômio de grau 3, $P_3(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}.$$

Quando aproximamos $\text{sen}(x)$ por um polinômio de grau 5, $P_5(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Quando aproximamos $\text{sen}(x)$ por um polinômio de grau 7, $P_7(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}, \dots \text{ e assim por diante.}$$

Exemplos

Como as ordens das potências da série são ímpares, só podemos ter aproximações de $\text{sen}(x)$ por polinômios de graus ímpares.

Quando aproximamos $\text{sen}(x)$ por um polinômio de grau 1, $P_1(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_1(x) = x,$$

Quando aproximamos $\text{sen}(x)$ por um polinômio de grau 3, $P_3(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}.$$

Quando aproximamos $\text{sen}(x)$ por um polinômio de grau 5, $P_5(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Quando aproximamos $\text{sen}(x)$ por um polinômio de grau 7, $P_7(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}, \dots \text{ e assim por diante.}$$

Exemplos

Como as ordens das potências da série são ímpares, só podemos ter aproximações de $\text{sen}(x)$ por polinômios de graus ímpares.

Quando aproximamos $\text{sen}(x)$ por um polinômio de grau 1, $P_1(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_1(x) = x,$$

Quando aproximamos $\text{sen}(x)$ por um polinômio de grau 3, $P_3(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}.$$

Quando aproximamos $\text{sen}(x)$ por um polinômio de grau 5, $P_5(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Quando aproximamos $\text{sen}(x)$ por um polinômio de grau 7, $P_7(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}, \dots \text{ e assim por diante.}$$

Exemplos

Como as ordens das potências da série são ímpares, só podemos ter aproximações de $\text{sen}(x)$ por polinômios de graus ímpares.

Quando aproximamos $\text{sen}(x)$ por um polinômio de grau 1, $P_1(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_1(x) = x,$$

Quando aproximamos $\text{sen}(x)$ por um polinômio de grau 3, $P_3(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}.$$

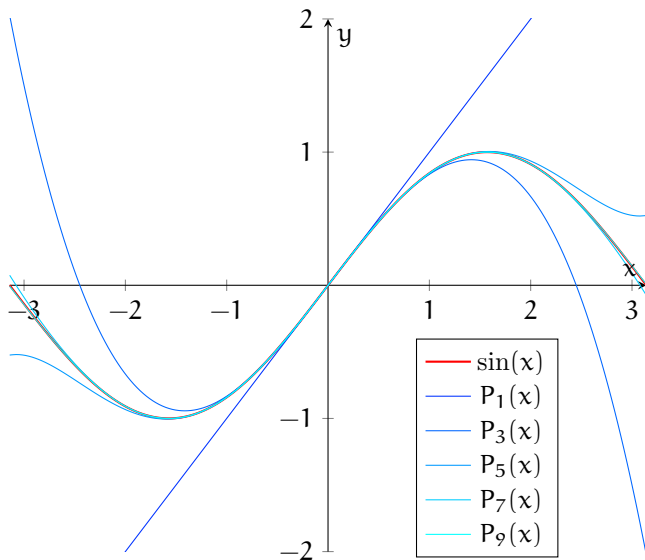
Quando aproximamos $\text{sen}(x)$ por um polinômio de grau 5, $P_5(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Quando aproximamos $\text{sen}(x)$ por um polinômio de grau 7, $P_7(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}, \dots \text{ e assim por diante.}$$

Exemplos



Erro de truncamento da série de Taylor

Vimos anteriormente que $f(x)$ pode ser reescrito como

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

ou seja, a soma de sua aproximação por $P_n(x)$ com o valor residual $R_n(x)$, dado por:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + \frac{f^{(n+2)}(x_0)}{(n+2)!}(x-x_0)^{n+2} + \dots$$

Taylor também mostrou que o somatório infinito acima equivale a

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}$$

onde $\xi \in (x_0, x)$, se $x \geq x_0$ ou $\xi \in (x, x_0)$, se $x \leq x_0$. Isso é o mesmo que dizer $|x_0 - \xi| \leq |x - x_0|$.

Este valor residual é o erro de truncamento cometido ao se aproximar $f(x)$ por um polinômio de grau n , $P_n(x)$, em torno de x_0 na série de Taylor.

Erro de truncamento da série de Taylor

Vimos anteriormente que $f(x)$ pode ser reescrito como

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

ou seja, a soma de sua aproximação por $P_n(x)$ com o valor residual $R_n(x)$, dado por:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + \frac{f^{(n+2)}(x_0)}{(n+2)!}(x-x_0)^{n+2} + \dots$$

Taylor também mostrou que o somatório infinito acima equivale a

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}$$

onde $\xi \in (x_0, x)$, se $x \geq x_0$ ou $\xi \in (x, x_0)$, se $x \leq x_0$. Isso é o mesmo que dizer $|x_0 - \xi| \leq |x - x_0|$.

Este valor residual é o erro de truncamento cometido ao se aproximar $f(x)$ por um polinômio de grau n , $P_n(x)$, em torno de x_0 na série de Taylor.

Erro de truncamento da série de Taylor

Vimos anteriormente que $f(x)$ pode ser reescrito como

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

ou seja, a soma de sua aproximação por $P_n(x)$ com o valor residual $R_n(x)$, dado por:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + \frac{f^{(n+2)}(x_0)}{(n+2)!}(x-x_0)^{n+2} + \dots$$

Taylor também mostrou que o somatório infinito acima equivale a

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}$$

onde $\xi \in (x_0, x)$, se $x \geq x_0$ ou $\xi \in (x, x_0)$, se $x \leq x_0$. Isso é o mesmo que dizer $|x_0 - \xi| \leq |x - x_0|$.

Este valor residual é o erro de truncamento cometido ao se aproximar $f(x)$ por um polinômio de grau n , $P_n(x)$, em torno de x_0 na série de Taylor.

Erro de truncamento da série de Taylor

Vimos anteriormente que $f(x)$ pode ser reescrito como

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

ou seja, a soma de sua aproximação por $P_n(x)$ com o valor residual $R_n(x)$, dado por:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + \frac{f^{(n+2)}(x_0)}{(n+2)!}(x-x_0)^{n+2} + \dots$$

Taylor também mostrou que o somatório infinito acima equivale a

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}$$

onde $\xi \in (x_0, x)$, se $x \geq x_0$ ou $\xi \in (x, x_0)$, se $x \leq x_0$. Isso é o mesmo que dizer $|x_0 - \xi| \leq |x - x_0|$.

Este valor residual é o erro de truncamento cometido ao se aproximar $f(x)$ por um polinômio de grau n , $P_n(x)$, em torno de x_0 na série de Taylor.

Erro de truncamento da série de Taylor

Definição (Erro de truncamento de uma série de Taylor)

O erro de truncamento de uma série de Taylor ao aproximar $f(x)$ por um polinômio de grau n , $P_n(x)$, em torno de x_0 é dado por

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{(n+1)},$$

onde $\xi \in (x_0, x)$ ou $\xi \in (x, x_0)$. Ou seja, $|x_0 - \xi| \leq |x - x_0|$.

Limitante superior do erro de truncamento

Como geralmente o ponto ξ não é conhecido exatamente, usa-se na prática uma cota superior do erro de truncamento dada por

Definição (Limitante do erro de truncamento de uma série de Taylor)

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |x - x_0|^{(n+1)},$$

onde $M_{n+1} = \max_{|x_0 - \xi| \leq |x - x_0|} |f^{(n+1)}(\xi)|$

Lembre-se de que

$M_{n+1} = \max_{|x_0 - \xi| \leq |x - x_0|} |f^{(n+1)}(\xi)|$ é o mesmo que $\max |f^{(n+1)}(\xi)|$ quando $x_0 < \xi < x$ ou $x < \xi < x_0$.

Limitante superior do erro de truncamento

Como geralmente o ponto ξ não é conhecido exatamente, usa-se na prática uma cota superior do erro de truncamento dada por

Definição (Limitante do erro de truncamento de uma série de Taylor)

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |x - x_0|^{(n+1)},$$

onde $M_{n+1} = \max_{|x_0 - \xi| \leq |x - x_0|} |f^{(n+1)}(\xi)|$

Lembre-se de que

$M_{n+1} = \max_{|x_0 - \xi| \leq |x - x_0|} |f^{(n+1)}(\xi)|$ é o mesmo que $\max |f^{(n+1)}(\xi)|$ quando $x_0 < \xi < x$ ou $x < \xi < x_0$.

Limitante superior do erro de truncamento

Exemplo 2: Encontre um limitante superior do erro para o cálculo de $\text{sen}(0.35)$, em torno do ponto $x_0 = 0$, aproximando a função por um polinômio de grau 3.

Na aproximação de $\text{sen}(x)$ por $P_3(x)$, temos:

$$\text{sen}(x) = P_3(x) + R_3(x),$$

onde

$$R_3(x) = \frac{f^{(iv)}(\xi)}{4!} x^4.$$

Calculando $f^{(iv)}(\xi)$ para $\xi = 0$ e $\xi = 0.35$, obtemos

$$f^{(iv)}(0) = \text{sen}(0) = 0; \quad f^{(iv)}(0.35) = \text{sen}(0.35) \approx 0.3429.$$

Então,

$$M_4 = \max_{0 < \xi < 0.35} |f^{(4)}(\xi)| = 0.3429$$

$$\Rightarrow |R_4(0.35)| \leq \frac{M_4}{4!} |0.35 - 0|^4 = \frac{0.3429}{4!} |0.35|^4 \approx 2.1440 \times 10^{-4}.$$

Limitante superior do erro de truncamento

Exemplo 2: Encontre um limitante superior do erro para o cálculo de $\sin(0.35)$, em torno do ponto $x_0 = 0$, aproximando a função por um polinômio de grau 3.

Na aproximação de $\sin(x)$ por $P_3(x)$, temos:

$$\sin(x) = P_3(x) + R_3(x),$$

onde

$$R_3(x) = \frac{f^{(iv)}(\xi)}{4!} x^4.$$

Calculando $f^{(iv)}(\xi)$ para $\xi = 0$ e $\xi = 0.35$, obtemos

$$f^{(iv)}(0) = \sin(0) = 0; \quad f^{(iv)}(0.35) = \sin(0.35) \approx 0.3429.$$

Então,

$$M_4 = \max_{0 < \xi < 0.35} |f^{(4)}(\xi)| = 0.3429$$

$$\Rightarrow |R_4(0.35)| \leq \frac{M_4}{4!} |0.35 - 0|^4 = \frac{0.3429}{4!} |0.35|^4 \approx 2.1440 \times 10^{-4}.$$

Limitante superior do erro de truncamento

Exemplo 2: Encontre um limitante superior do erro para o cálculo de $\text{sen}(0.35)$, em torno do ponto $x_0 = 0$, aproximando a função por um polinômio de grau 3.

Na aproximação de $\text{sen}(x)$ por $P_3(x)$, temos:

$$\text{sen}(x) = P_3(x) + R_3(x),$$

onde

$$R_3(x) = \frac{f^{(iv)}(\xi)}{4!} x^4.$$

Calculando $f^{(iv)}(\xi)$ para $\xi = 0$ e $\xi = 0.35$, obtemos

$$f^{(iv)}(0) = \text{sen}(0) = 0; \quad f^{(iv)}(0.35) = \text{sen}(0.35) \approx 0.3429.$$

Então,

$$M_4 = \max_{0 < \xi < 0.35} |f^{(4)}(\xi)| = 0.3429$$

$$\Rightarrow |R_4(0.35)| \leq \frac{M_4}{4!} |0.35 - 0|^4 = \frac{0.3429}{4!} |0.35|^4 \approx 2.1440 \times 10^{-4}.$$

Limitante superior do erro de truncamento

Exemplo 2: Encontre um limitante superior do erro para o cálculo de $\sin(0.35)$, em torno do ponto $x_0 = 0$, aproximando a função por um polinômio de grau 3.

Na aproximação de $\sin(x)$ por $P_3(x)$, temos:

$$\sin(x) = P_3(x) + R_3(x),$$

onde

$$R_3(x) = \frac{f^{(iv)}(\xi)}{4!} x^4.$$

Calculando $f^{(iv)}(\xi)$ para $\xi = 0$ e $\xi = 0.35$, obtemos

$$f^{(iv)}(0) = \sin(0) = 0; \quad f^{(iv)}(0.35) = \sin(0.35) \approx 0.3429.$$

Então,

$$M_4 = \max_{0 < \xi < 0.35} |f^{(4)}(\xi)| = 0.3429$$

$$\Rightarrow |R_4(0.35)| \leq \frac{M_4}{4!} |0.35 - 0|^4 = \frac{0.3429}{4!} |0.35|^4 \approx 2.1440 \times 10^{-4}.$$

Limitante superior do erro de truncamento

Exemplo 2: Encontre um limitante superior do erro para o cálculo de $\text{sen}(0.35)$, em torno do ponto $x_0 = 0$, aproximando a função por um polinômio de grau 3.

Na aproximação de $\text{sen}(x)$ por $P_3(x)$, temos:

$$\text{sen}(x) = P_3(x) + R_3(x),$$

onde

$$R_3(x) = \frac{f^{(iv)}(\xi)}{4!} x^4.$$

Calculando $f^{(iv)}(\xi)$ para $\xi = 0$ e $\xi = 0.35$, obtemos

$$f^{(iv)}(0) = \text{sen}(0) = 0; \quad f^{(iv)}(0.35) = \text{sen}(0.35) \approx 0.3429.$$

Então,

$$M_4 = \max_{0 < \xi < 0.35} |f^{(4)}(\xi)| = 0.3429$$

$$\Rightarrow |R_4(0.35)| \leq \frac{M_4}{4!} |0.35 - 0|^4 = \frac{0.3429}{4!} |0.35|^4 \approx 2.1440 \times 10^{-4}.$$

Limitante superior do erro de truncamento

Exemplo 2: Encontre um limitante superior do erro para o cálculo de $\text{sen}(0.35)$, em torno do ponto $x_0 = 0$, aproximando a função por um polinômio de grau 3.

Na aproximação de $\text{sen}(x)$ por $P_3(x)$, temos:

$$\text{sen}(x) = P_3(x) + R_3(x),$$

onde

$$R_3(x) = \frac{f^{(iv)}(\xi)}{4!} x^4.$$

Calculando $f^{(iv)}(\xi)$ para $\xi = 0$ e $\xi = 0.35$, obtemos

$$f^{(iv)}(0) = \text{sen}(0) = 0; \quad f^{(iv)}(0.35) = \text{sen}(0.35) \approx 0.3429.$$

Então,

$$M_4 = \max_{0 < \xi < 0.35} |f^{(4)}(\xi)| = 0.3429$$

$$\Rightarrow |R_4(0.35)| \leq \frac{M_4}{4!} |0.35 - 0|^4 = \frac{0.3429}{4!} |0.35|^4 \approx 2.1440 \times 10^{-4}.$$

Limitante superior do erro de truncamento

Exemplo 3: Qual deve ser o grau mínimo do polinômio de Taylor para obter uma aproximação de $\sin(0.35)$ em torno de $x_0 = 0$ com erro inferior a 10^{-8} ?

O limitante do erro para a aproximação de uma função $f(x)$ por um polinômio de grau n da série de Taylor em torno de $x_0 = 0$ é calculado por

$$|R_n(x)| \leq \frac{\max_{\xi \in (0, 0.35)} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Com $x = 0.35$, temos

$$|R_n(0.35)| \leq \frac{\max_{\xi \in (0, 0.35)} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} (0.35)^{n+1}.$$

Limitante superior do erro de truncamento

Exemplo 3: Qual deve ser o grau mínimo do polinômio de Taylor para obter uma aproximação de $\sin(0.35)$ em torno de $x_0 = 0$ com erro inferior a 10^{-8} ?

O limitante do erro para a aproximação de uma função $f(x)$ por um polinômio de grau n da série de Taylor em torno de $x_0 = 0$ é calculado por

$$|R_n(x)| \leq \frac{\max_{\xi \in (0, 0.35)} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Com $x = 0.35$, temos

$$|R_n(0.35)| \leq \frac{\max_{\xi \in (0, 0.35)} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} (0.35)^{n+1}.$$

Limitante superior do erro de truncamento

Exemplo 3: Qual deve ser o grau mínimo do polinômio de Taylor para obter uma aproximação de $\sin(0.35)$ em torno de $x_0 = 0$ com erro inferior a 10^{-8} ?

O limitante do erro para a aproximação de uma função $f(x)$ por um polinômio de grau n da série de Taylor em torno de $x_0 = 0$ é calculado por

$$|R_n(x)| \leq \frac{\max_{\xi \in (0, 0.35)} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Com $x = 0.35$, temos

$$|R_n(0.35)| \leq \frac{\max_{\xi \in (0, 0.35)} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} (0.35)^{n+1}.$$

Limitante superior do erro de truncamento

Vimos anteriormente que $\text{sen}(x)$, em torno de $x_0 = 0$, é aproximada por uma série de Taylor cujas potências possuem grau ímpar, pois:

As derivadas de ordem par quando $x_0 = 0$ são todas nulas:

$$|f^0(0)| = |f''(0)| = |f^{(iv)}(0)| = |f^{(vi)}(0)| = \dots = |\text{sen}(0)| = 0$$

e as derivadas de ordem ímpar quando $x_0 = 0$ são, em módulo:

$$|f'(0)| = |f'''(0)| = |f^{(v)}(0)| = |f^{(vii)}(0)| = \dots = |\cos(0)| = 1$$

Então,

$$|f^{(n+1)}(0)| = 1$$

$$|f^{(n+1)}(0.35)| = |\cos(0.35)| \approx 0.9394$$

$$\Rightarrow M_{n+1} = \max_{\xi \in (0, 0.35)} |f^{(n+1)}(\xi)| = \max\{1, 0.9394\} = 1.$$

Limitante superior do erro de truncamento

Vimos anteriormente que $\text{sen}(x)$, em torno de $x_0 = 0$, é aproximada por uma série de Taylor cujas potências possuem grau ímpar, pois:

As derivadas de ordem par quando $x_0 = 0$ são todas nulas:

$$|f^0(0)| = |f''(0)| = |f^{(iv)}(0)| = |f^{(vi)}(0)| = \dots = |\text{sen}(0)| = 0$$

e as derivadas de ordem ímpar quando $x_0 = 0$ são, em módulo:

$$|f'(0)| = |f'''(0)| = |f^{(v)}(0)| = |f^{(vii)}(0)| = \dots = |\cos(0)| = 1$$

Então,

$$|f^{(n+1)}(0)| = 1$$

$$|f^{(n+1)}(0.35)| = |\cos(0.35)| \approx 0.9394$$

$$\Rightarrow M_{n+1} = \max_{\xi \in (0, 0.35)} |f^{(n+1)}(\xi)| = \max\{1, 0.9394\} = 1.$$

Limitante superior do erro de truncamento

Vimos anteriormente que $\text{sen}(x)$, em torno de $x_0 = 0$, é aproximada por uma série de Taylor cujas potências possuem grau ímpar, pois:

As derivadas de ordem par quando $x_0 = 0$ são todas nulas:

$$|f^0(0)| = |f''(0)| = |f^{(iv)}(0)| = |f^{(vi)}(0)| = \dots = |\text{sen}(0)| = 0$$

e as derivadas de ordem ímpar quando $x_0 = 0$ são, em módulo:

$$|f'(0)| = |f'''(0)| = |f^{(v)}(0)| = |f^{(vii)}(0)| = \dots = |\cos(0)| = 1$$

Então,

$$|f^{(n+1)}(0)| = 1$$

$$|f^{(n+1)}(0.35)| = |\cos(0.35)| \approx 0.9394$$

$$\Rightarrow M_{n+1} = \max_{\xi \in (0, 0.35)} |f^{(n+1)}(\xi)| = \max\{1, 0.9394\} = 1.$$

Limitante superior do erro de truncamento

Vimos anteriormente que $\text{sen}(x)$, em torno de $x_0 = 0$, é aproximada por uma série de Taylor cujas potências possuem grau ímpar, pois:

As derivadas de ordem par quando $x_0 = 0$ são todas nulas:

$$|f^0(0)| = |f''(0)| = |f^{(iv)}(0)| = |f^{(vi)}(0)| = \dots = |\text{sen}(0)| = 0$$

e as derivadas de ordem ímpar quando $x_0 = 0$ são, em módulo:

$$|f'(0)| = |f'''(0)| = |f^{(v)}(0)| = |f^{(vii)}(0)| = \dots = |\cos(0)| = 1$$

Então,

$$|f^{(n+1)}(0)| = 1$$

$$|f^{(n+1)}(0.35)| = |\cos(0.35)| \approx 0.9394$$

$$\Rightarrow M_{n+1} = \max_{\xi \in (0, 0.35)} |f^{(n+1)}(\xi)| = \max\{1, 0.9394\} = 1.$$

Limitante superior do erro de truncamento

Vimos anteriormente que $\text{sen}(x)$, em torno de $x_0 = 0$, é aproximada por uma série de Taylor cujas potências possuem grau ímpar, pois:

As derivadas de ordem par quando $x_0 = 0$ são todas nulas:

$$|f^0(0)| = |f''(0)| = |f^{(iv)}(0)| = |f^{(vi)}(0)| = \dots = |\text{sen}(0)| = 0$$

e as derivadas de ordem ímpar quando $x_0 = 0$ são, em módulo:

$$|f'(0)| = |f'''(0)| = |f^{(v)}(0)| = |f^{(vii)}(0)| = \dots = |\cos(0)| = 1$$

Então,

$$|f^{(n+1)}(0)| = 1$$

$$|f^{(n+1)}(0.35)| = |\cos(0.35)| \approx 0.9394$$

$$\Rightarrow M_{n+1} = \max_{\xi \in (0, 0.35)} |f^{(n+1)}(\xi)| = \max\{1, 0.9394\} = 1.$$

Limitante superior do erro de truncamento

Logo, para o limitante superior do erro de truncamento ser menor que 10^{-8} , temos:

$$|R_{n+1}(0.35)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (0.35)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} (0.35)^{n+1} < 10^{-8}.$$

Testando a calculadora para valores ímpares $n = 1, 3, 5, 7, \dots$, encontramos

$$|R_1(0.35)| \leq 0.06125 \text{ (maior que } 10^{-8}\text{)}.$$

$$|R_3(0.35)| \leq 6.2526 \times 10^{-4} \text{ (maior que } 10^{-8}\text{)}.$$

$$|R_5(0.35)| \leq 2.5531 \times 10^{-6} \text{ (maior que } 10^{-8}\text{)}.$$

$$|R_7(0.35)| \leq 5.585 \times 10^{-9} < 10^{-8}.$$

$$\Rightarrow n_{\min} = 7.$$

Observação 1

As séries de Maclaurin são um caso particular da Série de Taylor, considerando a centralização da aproximação em torno de $x_0 = 0$, como vimos no exemplo.

Limitante superior do erro de truncamento

Logo, para o limitante superior do erro de truncamento ser menor que 10^{-8} , temos:

$$|R_{n+1}(0.35)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (0.35)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} (0.35)^{n+1} < 10^{-8}.$$

Testando a calculadora para valores ímpares $n = 1, 3, 5, 7, \dots$, encontramos

$$|R_1(0.35)| \leq 0.06125 \text{ (maior que } 10^{-8}\text{)}.$$

$$|R_3(0.35)| \leq 6.2526 \times 10^{-4} \text{ (maior que } 10^{-8}\text{)}.$$

$$|R_5(0.35)| \leq 2.5531 \times 10^{-6} \text{ (maior que } 10^{-8}\text{)}.$$

$$|R_7(0.35)| \leq 5.585 \times 10^{-9} < 10^{-8}.$$

$$\Rightarrow n_{\min} = 7.$$

Observação 1

As séries de Maclaurin são um caso particular da Série de Taylor, considerando a centralização da aproximação em torno de $x_0 = 0$, como vimos no exemplo.

Limitante superior do erro de truncamento

Logo, para o limitante superior do erro de truncamento ser menor que 10^{-8} , temos:

$$|R_{n+1}(0.35)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (0.35)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} (0.35)^{n+1} < 10^{-8}.$$

Testando a calculadora para valores ímpares $n = 1, 3, 5, 7, \dots$, encontramos

$$|R_1(0.35)| \leq 0.06125 \text{ (maior que } 10^{-8}\text{)}.$$

$$|R_3(0.35)| \leq 6.2526 \times 10^{-4} \text{ (maior que } 10^{-8}\text{)}.$$

$$|R_5(0.35)| \leq 2.5531 \times 10^{-6} \text{ (maior que } 10^{-8}\text{)}.$$

$$|R_7(0.35)| \leq 5.585 \times 10^{-9} < 10^{-8}.$$

$$\Rightarrow n_{\min} = 7.$$

Observação 1

As séries de Maclaurin são um caso particular da Série de Taylor, considerando a centralização da aproximação em torno de $x_0 = 0$, como vimos no exemplo.

Limitante superior do erro de truncamento

Logo, para o limitante superior do erro de truncamento ser menor que 10^{-8} , temos:

$$|R_{n+1}(0.35)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (0.35)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} (0.35)^{n+1} < 10^{-8}.$$

Testando a calculadora para valores ímpares $n = 1, 3, 5, 7, \dots$, encontramos

$$|R_1(0.35)| \leq 0.06125 \text{ (maior que } 10^{-8}\text{)}.$$

$$|R_3(0.35)| \leq 6.2526 \times 10^{-4} \text{ (maior que } 10^{-8}\text{)}.$$

$$|R_5(0.35)| \leq 2.5531 \times 10^{-6} \text{ (maior que } 10^{-8}\text{)}.$$

$$|R_7(0.35)| \leq 5.585 \times 10^{-9} < 10^{-8}.$$

$$\Rightarrow n_{\min} = 7.$$

Observação 1

As séries de Maclaurin são um caso particular da Série de Taylor, considerando a centralização da aproximação em torno de $x_0 = 0$, como vimos no exemplo.

Limitante superior do erro de truncamento

Logo, para o limitante superior do erro de truncamento ser menor que 10^{-8} , temos:

$$|R_{n+1}(0.35)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (0.35)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} (0.35)^{n+1} < 10^{-8}.$$

Testando a calculadora para valores ímpares $n = 1, 3, 5, 7, \dots$, encontramos

$$|R_1(0.35)| \leq 0.06125 \text{ (maior que } 10^{-8}\text{)}.$$

$$|R_3(0.35)| \leq 6.2526 \times 10^{-4} \text{ (maior que } 10^{-8}\text{)}.$$

$$|R_5(0.35)| \leq 2.5531 \times 10^{-6} \text{ (maior que } 10^{-8}\text{)}.$$

$$|R_7(0.35)| \leq 5.585 \times 10^{-9} < 10^{-8}.$$

$$\Rightarrow n_{\min} = 7.$$

Observação 1

As séries de Maclaurin são um caso particular da Série de Taylor, considerando a centralização da aproximação em torno de $x_0 = 0$, como vimos no exemplo.

Limitante superior do erro de truncamento

Logo, para o limitante superior do erro de truncamento ser menor que 10^{-8} , temos:

$$|R_{n+1}(0.35)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (0.35)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} (0.35)^{n+1} < 10^{-8}.$$

Testando a calculadora para valores ímpares $n = 1, 3, 5, 7, \dots$, encontramos

$$|R_1(0.35)| \leq 0.06125 \text{ (maior que } 10^{-8}\text{)}.$$

$$|R_3(0.35)| \leq 6.2526 \times 10^{-4} \text{ (maior que } 10^{-8}\text{)}.$$

$$|R_5(0.35)| \leq 2.5531 \times 10^{-6} \text{ (maior que } 10^{-8}\text{)}.$$

$$|R_7(0.35)| \leq 5.585 \times 10^{-9} < 10^{-8}.$$

$$\Rightarrow n_{\min} = 7.$$

Observação 1

As séries de Maclaurin são um caso particular da Série de Taylor, considerando a centralização da aproximação em torno de $x_0 = 0$, como vimos no exemplo.

Limitante superior do erro de truncamento

Logo, para o limitante superior do erro de truncamento ser menor que 10^{-8} , temos:

$$|R_{n+1}(0.35)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (0.35)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} (0.35)^{n+1} < 10^{-8}.$$

Testando a calculadora para valores ímpares $n = 1, 3, 5, 7, \dots$, encontramos

$$|R_1(0.35)| \leq 0.06125 \text{ (maior que } 10^{-8}\text{)}.$$

$$|R_3(0.35)| \leq 6.2526 \times 10^{-4} \text{ (maior que } 10^{-8}\text{)}.$$

$$|R_5(0.35)| \leq 2.5531 \times 10^{-6} \text{ (maior que } 10^{-8}\text{)}.$$

$$|R_7(0.35)| \leq 5.585 \times 10^{-9} < 10^{-8}.$$

$$\Rightarrow n_{\min} = 7.$$

Observação 1

As séries de Maclaurin são um caso particular da Série de Taylor, considerando a centralização da aproximação em torno de $x_0 = 0$, como vimos no exemplo.

Limitante superior do erro de truncamento

Logo, para o limitante superior do erro de truncamento ser menor que 10^{-8} , temos:

$$|R_{n+1}(0.35)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (0.35)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} (0.35)^{n+1} < 10^{-8}.$$

Testando a calculadora para valores ímpares $n = 1, 3, 5, 7, \dots$, encontramos

$$|R_1(0.35)| \leq 0.06125 \text{ (maior que } 10^{-8}\text{)}.$$

$$|R_3(0.35)| \leq 6.2526 \times 10^{-4} \text{ (maior que } 10^{-8}\text{)}.$$

$$|R_5(0.35)| \leq 2.5531 \times 10^{-6} \text{ (maior que } 10^{-8}\text{)}.$$

$$|R_7(0.35)| \leq 5.585 \times 10^{-9} < 10^{-8}.$$

$$\Rightarrow n_{\min} = 7.$$

Observação 1

As **séries de Maclaurin** são um caso particular da Série de Taylor, considerando a centralização da aproximação em torno de $x_0 = 0$, como vimos no exemplo.

Limitante superior do erro de truncamento

Logo, para o limitante superior do erro de truncamento ser menor que 10^{-8} , temos:

$$|R_{n+1}(0.35)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (0.35)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} (0.35)^{n+1} < 10^{-8}.$$

Testando a calculadora para valores ímpares $n = 1, 3, 5, 7, \dots$, encontramos

$$|R_1(0.35)| \leq 0.06125 \text{ (maior que } 10^{-8}\text{)}.$$

$$|R_3(0.35)| \leq 6.2526 \times 10^{-4} \text{ (maior que } 10^{-8}\text{)}.$$

$$|R_5(0.35)| \leq 2.5531 \times 10^{-6} \text{ (maior que } 10^{-8}\text{)}.$$

$$|R_7(0.35)| \leq 5.585 \times 10^{-9} < 10^{-8}.$$

$$\Rightarrow n_{\min} = 7.$$

Observação 1

As **séries de Maclaurin** são um caso particular da Série de Taylor, considerando a centralização da aproximação em torno de $x_0 = 0$, como vimos no exemplo.

Limitante superior do erro de truncamento

Logo, para o limitante superior do erro de truncamento ser menor que 10^{-8} , temos:

$$|R_{n+1}(0.35)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (0.35)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} (0.35)^{n+1} < 10^{-8}.$$

Testando a calculadora para valores ímpares $n = 1, 3, 5, 7, \dots$, encontramos

$$|R_1(0.35)| \leq 0.06125 \text{ (maior que } 10^{-8}\text{)}.$$

$$|R_3(0.35)| \leq 6.2526 \times 10^{-4} \text{ (maior que } 10^{-8}\text{)}.$$

$$|R_5(0.35)| \leq 2.5531 \times 10^{-6} \text{ (maior que } 10^{-8}\text{)}.$$

$$|R_7(0.35)| \leq 5.585 \times 10^{-9} < 10^{-8}.$$




$$\Rightarrow n_{\min} = 7.$$

Observação 1

As **séries de Maclaurin** são um caso particular da Série de Taylor, considerando a centralização da aproximação em torno de $x_0 = 0$, como vimos no exemplo.

Exercícios

- 1 Encontre a série de Maclaurin da função $f(x) = e^x$ (isto é, encontre a série de Taylor da função $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$).
- 2 Encontre uma aproximação para $P_7(2)$.
- 3 Encontre o grau mínimo de $P_n(2)$ para obter um erro de truncamento menor que 10^{-4} .

-  Santos, Vitoriano R.B. **Curso de Cálculo Numérico**, Rio de Janeiro, LTC, 4a. Ed., 1982.
-  Burden, Faires **Numerical Analysis**, 7th edition, Thomson Learning, 2001.
-  Lima, Elon Lages **Curso de Análise Vol. 1**, 15a. edição, IMPA, 2019.