Cálculo Numérico - IME/UERJ - Trabalho 4

1. **(1,0 ponto) Opção 1 (Integral dupla):** Considere a integral dupla

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\ dx\ dy$$

definida no domínio retangular $[a,b] \times [c,d]$, onde $x \in [a,b]$ e $y \in [c,d]$.

O cálculo desta integral é dividido em duas etapas:

1.1. Como

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\ dx\ dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\ dx\right]\ dy\ ,$$

denotamos

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)\ dx,$$

onde somente x varia e y é tratada como uma constante. Assim, calculamos uma aproximação para esta integral simples usando as regras numéricas aprendidas durante o curso, Trapézios e (1/3) de Simpson repetidas. Neste caso, usando n_x como o número de nós em x, o passo é dado por $h_x = (b-a)/n_x$.

De forma análoga, podemos calcular:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\ dy\ dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\ dy\right]\ dx, \text{ onde } I(x) = \int_c^d f(x,y)\ dy,$$

onde somente y varia e x é tratada como uma constante.

1.2. De posse da expressão para $I(y)$ do item anterior, podemos finalmente calcular uma aproximação para

$$\int_c^d I(y)\ dy$$

usando as regras numéricas aprendidas durante o curso (Trapézios ou Simpson repetidas). Neste caso, usando n_y como o número de nós em y, o passo é dado por $h_y = (d-c)/n_y$.

De forma análoga, podemos calcular $\displaystyle\int_a^b I(x)\ dx$.

Com base nessas informações:

(a) (0,4 ponto) Determine uma fórmula geral para o cálculo da integral dupla usando:

i. Regra dos trapézios repetida; ii. Regra (1/3) de Simpson repetida.

(b) (0,6 ponto) Considere a função $f(x,y) = ye^x$, os valores $a = c = 0$, enquanto **os valores de b e d serão fornecidos por matrícula**.

Calcule aproximações para a integral dupla usando as fórmulas que você encontrou nos itens anteriores para: $n_x = n_y = 20$ usando:

i. Regra dos trapézios repetida; ii. Regra (1/3) de Simpson repetida.

Você pode fazer os cálculos usando uma planilha em Excel/Calc ou programação.

Ao final, uma tabela deve ser exibida mostrando:

- Os passos h_x, h_y;
- Os nós $x_0, x_1, \ldots x_{n_x}$;
- Os nós $y_0, y_1, \ldots y_{n_y}$;
- Os valores $f(x_j, y_k)$, para $j = 0, 1, \ldots, n_x$, $k = 0, 1, \ldots, n_y$;
- Os valores $I(y_0), I(y_1), \ldots I(y_{n_y})$;
- As aproximações para a integral usando as regras de Trapézios e (1/3) de Simpson.

Obs.: A listagem com a tabela e o gráfico **deve ser entregue somente em PDF**.

2. **(1,0 ponto) Opção 2 (EDO - Runge-Kutta de 4a. Ordem (RK4)):**

Seja um problema de valor inicial (PVI) especificado como:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \forall x \in [x_0, x_n] \\ \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Vimos durante o curso dois métodos para encontrar a solução numérica de uma EDO de 1a. Ordem:

2.1. Método de Euler, onde o erro entre a solução exata e a solução aproximada decresce com ordem $\mathcal{O}(h)$, onde h é o passo dado e $0 < h < 1$.

2.2. Método de Euler melhorado, ou Runge-Kutta de 2a. Ordem (RK2), onde o erro decresce com ordem $\mathcal{O}(h^2)$.

Para este trabalho, deve ser usado o **método de Runge-Kutta de 4a. Ordem (RK4)**, onde o erro descresce com ordem $\mathcal{O}(h^4)$, ou seja, a convergência para a solução exata é mais rápida que a dos métodos anteriores.

Neste método, as inclinações, para todo $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, são dadas por:

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x_k, y_k); \\ K_2 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_1\right); \\ K_3 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_2\right); \\ K_4 &= f\left(x_k + h, y_k + hK_3\right), \end{aligned}$$

onde:

- K_1 é a inclinação no início do intervalo $[x_k, x_{k+1}]$;
- K_2 é a inclinação no ponto médio do intervalo $[x_k, x_{k+1}]$, usando a inclinação K_1 para determinar o valor de y no ponto $x_k + \frac{h}{2}$ através do método de Euler;
- K_3 é novamente a inclinação no ponto médio do intervalo, mas agora usando a inclinação K_2 para determinar o valor de y;
- K_4 é a inclinação no final do intervalo $[x_k, x_{k+1}]$, com seu valor y determinado usando K_3.

Ao final, a solução aproximada com erro de ordem $\mathcal{O}(h^4)$ é dada por:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \text{ para } k = 0, 1, \ldots, n - 1$$

Com base nessas informações, resolva o **exercício 2** da **Lista 9 - Métodos numéricos para Equações Diferenciais Ordinárias** usando **método de Runge-Kutta de 4a. Ordem (RK4)** com $n = 20$ **passos**.

Você pode fazer os cálculos usando uma planilha em Excel/Calc ou programação. Ao final,

- Uma tabela deve ser exibida mostrando os valores de h, x_k, solução aproximada RK4 y_k, solução exata $y(x_k)$, Erro absoluto E_k para $k = 0, 1, \ldots, n - 1$.
- Um gráfico deve ser exibido mostrando a solução aproximada por RK4.

Obs.: A listagem com a tabela e o gráfico **deve ser entregue somente em PDF**.