Cálculo Numérico - IME/UERJ

Lista de Exercícios 3

Sistemas Lineares - Métodos diretos e iterativos

1. Resolva o sistema abaixo pelo método de Gauss com pivoteamento parcial usando arredondamento com 4 casas decimais em todas as operações:

$$\begin{cases} 0.2641x + 0.1735y + 0.8642z = -0.7521 \\ 0.9411x - 0.0175y + 0.1463z = 0.6310 \\ -0.8641x - 0.4243y + 0.0711z = 0.2501 \end{cases}$$

2. Tente resolver o seguinte sistema pela eliminação de Gauss. O que acontece? O que se pode concluir?

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 8 \\ 4x + 2y - 3z = -1 \\ 6x + 7y - 10z = -10 \end{cases}$$

3. Dado o sistema:

$$\begin{cases} 2y + 5z = 9 \\ x - 3y + z = 5 \\ 2.1x + y + z = 3 \end{cases}$$

   É possível resolvê-lo usando o método de Gauss? Justifique a resposta. No caso afirmativo aplique o algoritmo, caso contrário use o método de Gauss com pivoteamento parcial.

4. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Resolva o sistema $Ax = b$ usando decomposição LU para:

      (i) $b = (2, 1)^t$;

      (ii) $b = (1, -1)^t$.

   (b) Ache a inversa de A, ou seja, A^{-1}, usando decomposição LU.

5. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Calcule A^{-1} usando fatoração LU.

   (b) É possível calcular A^{-1} usando fatoração LU usando pivoteamento parcial? No caso afirmativo, calculá-la.

6. Resolver o seguinte sistema linear usando fatoração LU com pivoteamento parcial:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$$

   É possível resolvê-lo usando o método de Gauss? Justifique a resposta. No caso afirmativo aplique o algoritmo, caso contrário use o método de Gauss com pivoteamento parcial.

7. Considere o sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_2 - 2x_3 = 3 \\ 10x_1 + x_2 + + x_4 = -8 \\ x_1 - x_3 + 3x_4 = 8 \end{cases}$$

   (a) Resolva o sistema pelo método de Eliminação de Gauss com pivoteamento parcial.

   (b) Utilizando o resultado do item anterior, escreva o sistema linear $LUx = Pb$, equivalente ao sistema linear dado, onde P é uma matriz de permutação. Determine a matriz inversa de A, oriunda de $PA = LU$.

   (c) Podemos determinar a solução aproximada do sistema usando o Método de Gauss-Seidel para qualquer aproximação inicial? Por quê?

8. Faça o gráfico do seguinte sistema linear

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ -x + 2y = 2 \end{cases}$$

   e resolva pelos métodos:

   (a) Gauss-Jacobi com tolerância $\epsilon = 0.04$. Marque as iterações no gráfico.

   (b) Gauss-Seidel com tolerância $\epsilon = 0.04$. Marque as iterações no gráfico e compare com o item (a).

9. Dado o sistema

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Verifique se o Critério de Sassenfeld é satisfeito.

   (b) Resolva por Gauss-Seidel, se possível, com tolerância $\epsilon \leq 10^{-4}$.

10. Dado o sistema:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 5 \\ 2y + 5z = 9 \\ 2.1x + y + z = 3 \end{cases}$$

Calcule, pelo método de Gauss-Jacobi uma primeira aproximação $X^{(1)}$, partindo de $X^{(0)} = (0, 0, 0)^t$ e usando o sistema de forma tal que a convergência do método esteja garantida.

11. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \\ - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ - x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

   (a) Mostre que este sistema não satisfaz o Critério das Linhas.

   (b) Mostre que este sistema não satisfaz o Critério de Sassenfeld.

   (c) O que se pode afirmar sobre a convergência dos métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel quando aplicados a este sistema?

   (d) Mostre que o sistema obtido permutando-se as duas primeiras equações satisfaz o Critério de Sassenfeld.

   (e) Usando o método de Gauss-Seidel, determine a solução aproximada do sistema com a permutação sugerida no item anterior e erro

   $\|x^{k+1} - x^k\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,4} |x_i^{k+1} - x_i^k| \leq \epsilon = 1 \cdot 10^{-3}$

12. Encontre o valor do maior inteiro k positivo tal que no sistema linear abaixo fique garantida a convergência do método de Gauss-Seidel pelo critério de Sassenfeld. Justifique.

$$\begin{cases} 7x_1 + kx_2 - 2x_3 = 5 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 + kx_3 = 5 \end{cases}$$