

## Cálculo Numérico - IME/UERJ

### Lista de Exercícios 9 - Matemática

#### Métodos numéricos para Equações Diferenciais Ordinárias

1. Determine a solução numérica aproximada do PVI

$$\begin{cases} y'(x) + 2y(x) = 0, & \forall x \in [0, 1], \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

com passo  $h = 0,2$ , usando:

- (a) Método de Euler.
  - (b) Método de Euler Melhorado (Runge-Kutta de Ordem 2).
  - (c) Sabendo-se que a solução exata da equação é  $y(x) = e^{-2x}$ , calcule os erros absolutos das iterações nos itens anteriores.
2. Um corpo com massa inicial de 200 Kg está em movimento sob a ação de uma força constante de 2000 N. Sabendo-se que esse corpo está perdendo 1 Kg de sua massa por segundo e considerando que a resistência do ar é o dobro de sua velocidade e que o corpo está em repouso no instante  $t = 0$ , então o PVI que descreve a variação de sua velocidade é dado por:

$$\begin{cases} v'(t) = \frac{2000 - 2v(t)}{200 - t}, & \forall t > 0, \\ v(0) = 0. \end{cases}$$

Determine a velocidade do corpo  $v(t)$  no instante  $t = 5$  segundos com intervalos de 0,5 segundos, usando:

- (a) Método de Euler.
  - (b) Método de Euler Melhorado.
  - (c) Sabendo-se que a solução exata da equação é  $v(t) = 10t - (1/40)t^2$ , compare com a solução aproximada obtida nos itens anteriores.
3. Determine a solução numérica aproximada do PVI

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0, & \forall x \in [0, 1] \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{1}{\pi}, \end{cases}$$

usando, com passo  $h = 0.2$ :

- (a) Método de Euler.

(b) Método de Euler Melhorado.

(c) Sabendo-se que a solução exata da equação é  $y(x) = \frac{1}{\pi} \sin(x)$ , compare com a solução aproximada obtida nos itens anteriores.

**Dica:** use mudança de variável:  $y'(x) = z(x)$ .

4. Seja o PVI

$$\begin{cases} x'(t) = x - 2y, & x(0) = 0, \\ y'(t) = 2x + y, & y(0) = 4, \end{cases}$$

cujas soluções exatas são dadas por:

$$x(t) = -4e^t \sin(2t), \quad y(t) = 4e^t \cos(2t).$$

Determine  $x(0, 2)$  e  $y(0, 2)$  usando:

(a) Método de Euler com passo  $h = 0, 1$ .

(b) Método de Euler Melhorado com passo  $h = 0, 2$ .

(c) Calcule o erro absoluto em cada iteração  $k$  dos itens anteriores usando a norma do máximo

$$\|E_k\|_{\infty} = \max\{|x(t_k) - x_k|, |y(t_k) - y_k|\}.$$