Cálculo Numérico - IME/UERJ

Lista de Exercícios 4

Interpolação polinomial e Método dos Mínimos Quadrados

1. Em cada função abaixo determine uma aproximação para $f(z)$ e uma cota superior do erro cometido usando interpolação de Lagrange.
   (a) $f(x) = \log x, z = 2.35, f(1) = 0, f(2) = 0.3010, f(3) = 0.4771$
   (b) $f(x) = e^{-x}, z = 2.5, f(2) = 0.13, f(3) = 0.04, f(4) = 0.01$

2. Seja a tabela

x	0,81	0,83	0,86	0,87
$f(x)$	16,94410	17,56492	18,50515	18,82091

   Calcule um valor aproximado de $f(0,84)$, usando:
   (a) Forma de Newton para polinômio interpolador de grau $n \leq 1, 2, 3$.
   (b) Calcule uma estimativa de erro em cada caso, se possível.

3. Construa a tabela de diferenças divididas com os dados

x	0	0.5	1.5	2	2.5	3.5
$f(x)$	-2.78	-2.241	-1.65	-0.594	1.34	4.564

   (a) Estime o valor $f(1.7)$ da melhor maneira possível, de forma que se possa estimar o erro cometido.
   (b) Justifique o grau do polinômio que você escolheu para resolver o item (a).

4. Dada a tabela da população de uma vila no início de cada ano, estime a população na metade de 2018 usando o polinômio de Newton e justifique o grau do polinômio.

Ano	2015	2016	2017	2018	2019
População	6000	6200	6600	7200	8000

5. Considere a tabela a seguir. Usando um polinômio interpolador de grau 3, determine x tal que $f(x) = 2.3$. Dê uma estimativa do erro cometido.

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	1.0	1.2408	1.5735	2.0333	2.6965	3.7183

6. Considere a tabela:

x	0	1.2	2.3	3.1	3.9
$f(x)$	0	1.5	5.3	9.5	10

Dê uma aproximação para a raiz da equação $f(x) = 2$ usando interpolação quadrática. Dê uma estimativa do erro cometido.

7. Os seguintes dados correspondem a um polinômio de grau ≤ 5. Qual é o grau do polinômio? Use a tabela de diferenças divididas.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-5	1	1	1	7	25

8. Ajuste os dados abaixo pelo Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) utilizando:
   (a) uma reta
   (b) uma parábola

   e calcule uma estimativa para $y(9)$ para ambos os casos.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0,5	0,6	0,9	0,8	1,2	1,5	1,7	2,0

9. O número de bactérias, por unidade de volume, existente em uma cultura após x horas é dado na tabela abaixo:

número de horas	0	1	2	3	4	5	6
número de bactérias	32	47	65	92	132	190	275

   (a) Ajuste os dados acima à curva $y = ae^{bx}$ pelo método dos mínimos quadrados.
   (b) Quantas horas são necessárias para que o número de bactérias por unidade de volume ultrapasse 2000?

10. Aproxime a tabela abaixo por uma função do tipo $g(x) = 1 + ae^{bx}$ usando mínimos quadrados e estime o valor de $y(4,0)$.

x	0	0,5	1,0	2,5	3,0
y	2,0	2,6	3,7	13,2	21,0

11. Considere a tabela abaixo:

Altura (cm)	183	173	188	163	178
Peso (kg)	79	69	82	63	73

   (a) Usando um Polinômio Interpolador de grau dois, calcule a altura aproximada de uma pessoa com peso de 70 kg. (**Dica:** ordene a tabela por peso)

   (b) Dê uma estimativa de erro para o caso anterior.

   (c) Determine a melhor função da forma $\psi(x) = \alpha \operatorname{sen}(x) + \beta \cos(x)$ que ajusta estes pontos e calcule a altura aproximada de uma pessoa com peso de 70 kg (**Obs.:** Excepcionalmente neste item, configure sua calculadora científica para calcular em graus).

12. **(Trabalho extra 3)** Sabe-se que ao longo da Linha Vermelha, a velocidade máxima permitida é de 90 km/h e foram colocados radares para medir a velocidade instantânea dos carros. Suponha que numa distância $d = 1,0$ km, um motorista conferiu através do velocímetro (suponha que o velocímetro seja exato) as seguintes velocidades:

distância	0	0,2	0,3	0,5	0,8	1,0
velocidade	80	85	88	92	85	80

Pergunta-se:

   (a) Considere um radar colocado na posição $d = 0,4$. Usando um polinômio interpolador de grau dois, calcule:

      i. Velocidade aproximada neste ponto.

      ii. Estimativa de erro da interpolação neste ponto.

      iii. Podemos concluir que o carro não será multado?

   (b) Usando o Método dos Mínimos Quadrados, faça uma regressão linear e calcule a velocidade esperada em $d = 1,1$.

   (c) Usando o Método dos Mínimos Quadrados, determine o polinômio de segundo grau ótimo e calcule a velocidade esperada em $d = 1,1$.