Cálculo Numérico - IME/UERJ

Lista de Exercícios 2

Série de Taylor e Raízes de funções

1. Deseja-se aproximar o valor de $e^x$, para todo $x \in [-1, 1]$, pelo valor do polinomio de grau 3, obtido através da expansão de $e^x$ em série de Taylor em torno do ponto $x_0 = 0$.
   (a) Encontre a aproximação de $e^{0.5}$. Qual o erro absoluto cometido?
   (b) Utilizando a expressão do erro cometido ao se aproximar a função $e^x$ pela sua expansão em série de Taylor, estime um limitante superior para o erro cometido no item (a). Isso é compatível com o erro absoluto encontrado no item (a)?

2. Seja $f(x) = \ln(x + 1)$.
   (a) Obtenha o polinômio de Taylor de quarta ordem ao redor de 0 da função $f(x)$ do item anterior e calcule $P_4(0.5)$. Qual o erro verdadeiro cometido?
   (b) Estime um limitante superior para o erro ao se usar $P_4(0.5)$ para aproximar $f(0.5)$. Mostre que o resultado é compatível com o erro que foi encontrado no item (b).

3. Considere o polinômio $p(x) = (x - 1)(x - 2,5)^2(x - 4)^3$ Quais zeros não podem ser determinadas usando o método da bisseção? Justifique a sua resposta.

4. Determine um intervalo $[a, b]$ para iniciar o cálculo de $\ln(10)$ usando o método da bisseção. Explique. Quantas iterações são necessárias para obter $\ln(10)$ com erro menor ou igual a $10^{-3}$?

5. No cálculo da raiz de $f(x) = e^{-2x} + x^2 - 4 = 0$, pelo método do ponto fixo (ou iteração linear), fazem-se as transformações para as funções de iteração:
   - $x = \varphi_1(x) = \sqrt{4 - e^{-2x}}$
   - $x = \varphi_2(x) = -\dfrac{1}{2}\ln(4 - x^2)$

   (a) Obtenha, graficamente, boas estimativas iniciais para as duas raízes $r_1$ e $r_2$. (1,0 ponto)
   (b) Indique, sem iteragir, qual função de iteração irá convergir para cada raiz.

6. Pelo método de Newton-Raphson, calcule a maior raiz de $f(x)$ da questão anterior com erro menor que $0,0001$.

7. Determine um intervalo $(a, b)$ (por gráfico ou analiticamente) e uma função de iteração $\varphi(x)$ associada, de tal forma que $\forall x_0 \in (a, b)$, a função de iteração gere uma sequência convergente para a(s) raiz(es) de cada uma das funções abaixo, usando o

método iterativo do ponto fixo (ou método da iteração linear (MIL)).

(a) $f_1(x) = \sqrt{x} - e^{-x}$.

(b) $f_2(x) = \ln(x) - x + 2$.

(c) $f_3(x) = e^{x/2} - x^3$.

(d) $f_4(x) = \text{sen}(x) - x^2$.

(e) $f_5(x) = x/4 - \cos(x)$.

8. Determine as raízes das funções do exercício 5, usando o Método de Newton-Raphson com tolerância $\varepsilon \leq 1 \cdot 10^{-4}$.

9. As funções de iterações $\varphi_1(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 4$ e $\varphi_2(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2.5x + 5$ geram sequências convergentes para a raiz $x = 2$, para qualquer aproximação inicial $x_0 \in (1.5, 3)$. Qual das duas funções geram sequências mais rapidamente convergentes para esta raiz? Justifique a resposta.

10. Calcular as raízes dos polinômios abaixo, por Birge-Vieta, usando uma casa decimal com erro menor que 0,1.

(a) $P(x) = 1,0x^3 - 14,5x^2 + 47,6x - 37,9 = 0$.

(b) $P(x) = 1,0x^3 + 12,6x^2 - 44,2x - 38,7 = 0$.

(c) $P(x) = 1,0x^4 - 18,7x^3 + 97,3x^2 - 180,1x + 100,5 = 0$.