CÁLCULO NUMÉRICO
UERJ/2023

Estudo do Erro de Interpolação Polinomial

Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br
IME-UERJ

Sumário

Forma de Newton

A forma de Newton para um polinômio de grau n, $P_n(x)$, que interpola uma função $f(x)$ nos pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ é dada por:

$$P_n(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + d_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

onde d_k é a **diferença dividida de ordem k**.

Definimos o operador diferenças divididas através deste bloco:

$d_0 = f[x_0] = f(x_0)$ (Ordem zero)

$d_1 = f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ (Ordem 1)

...

$d_n = f[x_0, x_1, x_2, ..., x_n] = \dfrac{f[x_1, x_2, ..., x_n] - f[x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}]}{x_n - x_0}$ (Ordem n)

Forma de Newton

A forma de Newton para um polinômio de grau n, $P_n(x)$, que interpola uma função $f(x)$ nos pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ é dada por:

$$P_n(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + d_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

onde d_k é a **diferença dividida de ordem k**.

Definimos o operador diferenças divididas através deste bloco:

$d_0 = f[x_0] = f(x_0)$ (Ordem zero)

$d_1 = f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ (Ordem 1)

...

$d_n = f[x_0, x_1, x_2, ..., x_n] = \dfrac{f[x_1, x_2, ..., x_n] - f[x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}]}{x_n - x_0}$ (Ordem n)

Forma de Newton

Construção da tabela

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	...	Ordem n
x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$			
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		
		$f[x_2, x_3]$		$(...)$	$f[x_0, x_1, ...x_n]$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$		
		$f[x_3, x_4]$			
...	...	...	...	...	...
			$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	...	
		$f[x_{n-1}, x_n]$		...	
x_n	$f[x_n]$			...	

Forma de Newton

Construção da tabela

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	...	Ordem n
x_0	$f[x_0] = d_0$				
		$f[x_0, x_1] = d_1$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2] = d_2$		
		$f[x_1, x_2]$			
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		
		$f[x_2, x_3]$		(...)	$f[x_0, x_1, ..., x_n] = d_n$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$		
		$f[x_3, x_4]$			
...	...	...	...	...	...
			$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	...	
		$f[x_{n-1}, x_n]$		...	
x_n	$f[x_n]$			...	

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1]\,(x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + ... + f[x_0, x_1, ..., x_n](x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$

Forma de Newton

Construção da tabela

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	...	Ordem n
x_0	$f[x_0] = d_0$				
		$f[x_0, x_1] = d_1$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2] = d_2$		
		$f[x_1, x_2]$			
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		
		$f[x_2, x_3]$		$(...)$	$f[x_0, x_1, ..., x_n] = d_n$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$		
		$f[x_3, x_4]$			
...	...	...	...	...	...
			$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	...	
		$f[x_{n-1}, x_n]$		...	
x_n	$f[x_n]$			...	

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1]\,(x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + ... + f[x_0, x_1, ..., x_n](x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$

Erro na Interpolação

Teorema (Teorema 1)

Seja $f(x)$ *uma função contínua, com* n *derivadas contínuas e sejam* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *pontos distintos num intervalo* $[a, b]$ *que contém estes pontos.*

Então, existe um número $\xi \in (a, b)$ *tal que:*

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} .$$

Erro na Interpolação

Demonstração:

n = 1:

Basta usar o Teorema do Valor Médio para mostrar que se $f(x)$ é contínua e possui uma derivada em (a, b), então existe $\xi \in (a, b)$ tal que:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(\xi).$$

n = 2: Aqui, a hipótese é de que $f(x)$ seja contínua e com duas derivadas contínuas.

O polinômio de Newton de grau 2, $P_2(x)$, que interpola $f(x)$ nos pontos x_0, x_1, x_2 é dado por:

$$P_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

Sabemos que nos nós de interpolação x_0, x_1, x_2:

$f(x_k) = P_2(x_k)$, para todo $k = 0, 1, 2$.

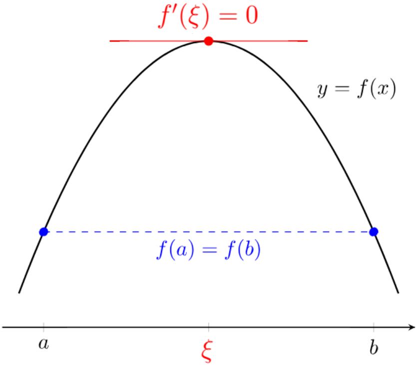
Erro na Interpolação

Então, nos nós de interpolação:

$$E_2(x_k) = f(x_k) - P_2(x_k) = 0, \text{ para todo } k = 0, 1, 2.$$

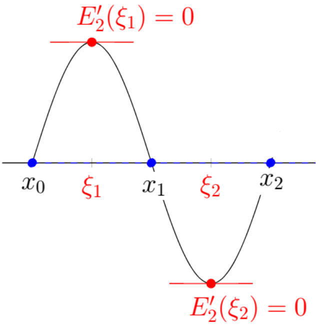
Isso significa que x_0, x_1, x_2 são raízes de $E_2(x)$.

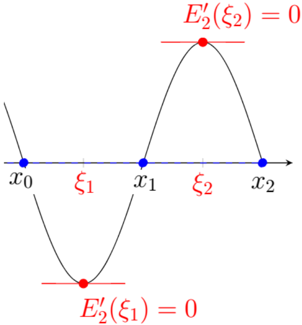
O **Teorema de Rolle** nos diz que se $f(x)$ for contínua no intervalo $[a, b]$ e $f(a) = f(b) = 0$, então existe no mínimo um número $\xi \in (a, b)$ tal que $f'(\xi) = 0$.



Erro na Interpolação

Então, aplicando o Teorema de Rolle para $E_2(x)$, temos uma das situações:





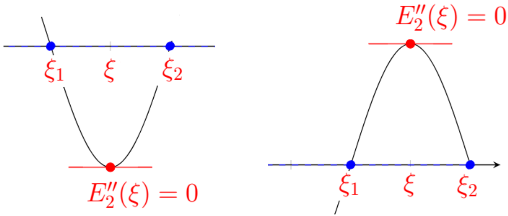
Ou seja, existem pontos ξ_1, ξ_2 tais que:

$$x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2$$

Assim, $E_2'(\xi_1) = E_2'(\xi_2) = 0 \Rightarrow \xi_1, \xi_2$ são raízes de $E_2'(x)$.

Erro na Interpolação

Aplicando novamente o Teorema de Rolle para $E_2'(x)$, temos uma das situações:



Ou seja, existe $\xi_1 < \xi < \xi_2$, e consequentemente, $x_0 < \xi < x_2$ (pois vimos anteriormente que $x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2$), tal que $E_2''(\xi) = 0$.

Sabemos que:

$$E_2(x) = f(x) - P_2(x)$$

$$\Rightarrow E_2(x) = f(x) - \{f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)\}$$

$$\Rightarrow E_2''(x) = f''(x) - 2\ f[x_0, x_1, x_2]$$

Erro na Interpolação

Ou seja, se $E_2''(\xi) = 0$, temos que:

$$E_2''(\xi) = f''(\xi) - 2\, f[x_0, x_1, x_2] = 0 \Rightarrow f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f''(\xi)}{2!}$$

Para o caso geral n > 1: Aqui, a hipótese é de que $f(x)$ seja contínua e com n derivadas contínuas. O polinômio de Newton de grau n, $P_n(x)$, que interpola $f(x)$ nos pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$ é dado por:

$$\begin{aligned} P_n(x) = & f(x_0) + f[x_0, x_1]\,(x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)(x - x_1) \\ & + \cdots + f[x_0, x_1, \dots, x_n]\,(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Sabemos que nos nós de interpolação:

$f(x_k) = P_n(x_k)$, para todo $k = 0, 1, \dots, n$.

Ou seja, $E_n(x_k) = f(x_k) - P_n(x_k) = 0$, para todo $k = 0, 1, \dots, n$.

Erro na Interpolação

Isso significa que os nós de interpolação $x_0, x_1, \ldots, x_n$ são raízes de $E_n(x)$.

Aplicando o Teorema de Rolle, existem $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ tais que $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ e $E_n'(x_k) = 0$, para todo $k = 1, 2, \ldots, n$.

Assim, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ são raízes de $E_n'(x)$.

Aplicando novamente o teorema de Rolle para $E_n'(x)$, existem $\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \ldots, \tilde{\xi}_{n-1}$ tais que $\tilde{\xi}_k \in (\xi_k, \xi_{k+1})$ e $E_n''(\tilde{\xi}_k) = 0$, para todo $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Assim, $\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \ldots, \tilde{\xi}_{n-1}$ são raízes de $E_n''(x)$.

Logo, o Teorema de Rolle deve ser sucessivamente aplicado até encontrar:

$E_n^{(n)}(\xi) = 0$, onde $\xi \in (x_0, x_n)$.

Erro na Interpolação

Sabemos que:

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

Assim, a n-ésima derivada de $E_n(x)$ é dada por:

$$E_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - n!\ f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

Tomando $x = \xi$ e sabendo que $E_n^{(n)}(\xi) = 0$, obtemos:

$$E_n^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - n!\ f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = 0$$

Portanto,

$$\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} = f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\ .$$

Erro na Interpolação

Vimos durante as aulas do curso que para todo $x \in (x_0, x_n)$, $x \neq x_k$, para todo $k = 0, 1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + f[x_0, x_1]\,(x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)(x - x_1) \\ & + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\,(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) \\ & + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\,(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n), \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} P_n(x) = & f(x_0) + f[x_0, x_1]\,(x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)(x - x_1) \\ & + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\,(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}), \end{aligned}$$

$$E_n(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\,(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

Erro na Interpolação

Ou seja, $f(x)$ é um polinômio de grau $(n+1)$, $P_{n+1}(x)$, que interpola $f(x)$ nos pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n, x$, onde $x \neq x_k$, para todo $k = 0, 1, \ldots, n$.

Assim, pelo Teorema 1, temos que:

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]$$

Logo, substituindo na equação de $E_n(x)$, temos que:

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n).$$

Erro na Interpolação

E assim, temos o teorema que define o erro na interpolação de $f(x)$ pelo polinômio de grau n, $P_n(x)$, nos pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Teorema (Teorema 2)

Sejam $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$, $(n+1)$ *pontos.*
Seja $f(x)$ *com derivadas até ordem* $(n+1)$ *para todo* $x \in [x_0, x_n]$

O erro em qualquer ponto $x \in [x_0, x_n]$ *é dado por*

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!},$$

onde $\xi \in (x_0, x_n)$.

Erro na Interpolação

Corolário 1: Limitante superior para o erro na interpolação de $f(x)$ por $P_n(x)$ nos pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$:

$$|E_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)| \frac{M_{n+1}}{(n+1)!},$$

onde $M_{n+1} = \max\limits_{x \in [x_0, x_n]} |f^{n+1}(x))|$

Corolário 2: Pontos igualmente espaçados

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = ... = x_n - x_{n-1} = h$$

$$|E_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| < h^{n+1} \frac{M_{n+1}}{4(n+1)},$$

Erro na Interpolação

Corolário 1: Limitante superior para o erro na interpolação de $f(x)$ por $P_n(x)$ nos pontos distintos $x_0, x_1, \dots, x_n$:

$$|E_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)| \frac{M_{n+1}}{(n+1)!},$$

onde $M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{n+1}(x))|$

Corolário 2: Pontos igualmente espaçados

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = ... = x_n - x_{n-1} = h$$

$$|E_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| < h^{n+1} \frac{M_{n+1}}{4(n+1)},$$

Erro na Interpolação

Estimativa para o erro
Na maioria das vezes, a função $f(x)$ é dada na forma de tabela.

Neste caso, $\dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!} \approx$ (máx | diferenças divididas de ordem $(n+1)$ |)

no intervalo $[x_0, x_n]$.

Assim, dizemos que

$$|E_n(x)| \approx |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)|$$
$$(\text{máx} \mid \text{diferenças divididas de ordem } (n+1) \mid)$$

Interpolação Inversa

Condição: f(x) tem que ser uma função bijetiva.
$y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y) = g(y)$

Ou seja, fazemos $x = g(y) = P_n(y)$

Interpolação Normal

x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$f(x) = y$	$f(x_0) = y_0$	$f(x_1) = y_1$	$f(x_2) = y_2$	$\dots$	$f(x_n) = y_n$

Interpolação Inversa

y	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n
$g(y) = x$	$g(y_0) = x_0$	$g(y_1) = x_1$	$g(y_2) = x_2$	$\dots$	$g(y_n) = x_n$

Interpolação Inversa

Condição: f(x) tem que ser uma função bijetiva.
$y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y) = g(y)$

Ou seja, fazemos $x = g(y) = P_n(y)$

Interpolação Normal

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x) = y$	$f(x_0) = y_0$	$f(x_1) = y_1$	$f(x_2) = y_2$	...	$f(x_n) = y_n$

Interpolação Inversa

y	y_0	y_1	y_2	...	y_n
$g(y) = x$	$g(y_0) = x_0$	$g(y_1) = x_1$	$g(y_2) = x_2$	...	$g(y_n) = x_n$

Interpolação Inversa

Condição: f(x) tem que ser uma função bijetiva.
$y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y) = g(y)$

Ou seja, fazemos $x = g(y) = P_n(y)$

Interpolação Normal

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x) = y$	$f(x_0) = y_0$	$f(x_1) = y_1$	$f(x_2) = y_2$	...	$f(x_n) = y_n$

Interpolação Inversa

y	y_0	y_1	y_2	...	y_n
$g(y) = x$	$g(y_0) = x_0$	$g(y_1) = x_1$	$g(y_2) = x_2$	...	$g(y_n) = x_n$

Exemplo 1

Dada a tabela:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$y = e^x$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

Obter x tal que $e^x = 1.3165$ usando interpolação quadrática.

Pela forma de Newton, temos a seguinte tabela de diferenças divididas:

y	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
1	0			
		0.9506		
1.1052	0.1		-0.4065	
		0.8606		0.1994
1.2214	0.2		-0.3367	
		0.7782		0.1679
1.3499	0.3		-0.2718	
		0.7047		0.1081
1.4918	0.4		-0.2256	
		0.6373		
1.6487	0.5			

Exemplo 1

Dada a tabela:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$y = e^x$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

Obter x **tal que** $e^x = 1.3165$ **usando interpolação quadrática**.
Pela forma de Newton, temos a seguinte tabela de diferenças divididas:

y	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
1	0			
		0.9506		
1.1052	0.1		-0.4065	
		0.8606		0.1994
1.2214	0.2		-0.3367	
		0.7782		0.1679
1.3499	0.3		-0.2718	
		0.7047		0.1081
1.4918	0.4		-0.2256	
		0.6373		
1.6487	0.5			

Exemplo 1

y	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
1	0			
		0.9506		
1.1052	0.1		−0.4065	
		0.8606		0.1994
1.2214	0.2		−0.3367	
		0.7782		0.1679
1.3499	0.3		−0.2718	
		0.7047		0.1081
1.4918	0.4		−0.2256	
		0.6373		
1.6487	0.5			

$$x \approx P_2(y) = g(y_0) + (y - y_0)g[y_0, y_1] + (y - y_0)(y - y_1)g[y_0, y_1, y_2]$$

$$P_2(y) = 0.2 + (y - 1.2214)0.7782 + (y - 1.2214)(y - 1.3499)(-0.2718) = \mathbf{0.27487}$$

Exemplo 1

y	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
1	0			
		0.9506		
1.1052	0.1		−0.4065	
		0.8606		0.1994
1.2214	0.2		−0.3367	
		0.7782		0.1679
1.3499	0.3		−0.2718	
		0.7047		0.1081
1.4918	0.4		−0.2256	
		0.6373		
1.6487	0.5			

$$x \approx P_2(y) = g(y_0) + (y - y_0)g[y_0, y_1] + (y - y_0)(y - y_{1)}\, g[y_0, y_1, y_2]$$

$$P_2(y) = 0.2 + (y - 1.2214)0.7782 + (y - 1.2214)(y - 1.3499)(-0.2718) = \mathbf{0.27487}$$

Exemplo 1

Limitante superior para o erro:

$$|E_2(y)| = |g(y) - P_n(y)| \leq |(y - y_0)(y - x_1)(y - x_2)| \frac{M_3}{3!},$$

onde $M_3 = max|g'''(y)|$, $y \in [y_0, y_2] = [1.2214, 1.4918]$

$$f(x) = e^x \Rightarrow g(y) = f^{-1}(y) = \ln(y)$$

$$g'''(y) = \frac{2}{y^3} \Rightarrow M_3 = \frac{2}{(1.2214)^3} = 1.0976$$

Logo, $|E_2(y)| \leq 1.0186 \times 10^{-4}$.

Estimativa para o erro:

$|E_2(y)| \approx |(y - y_0)(y - y_1)(y - y_2)|(\text{máx}|\text{diferenças divididas de ordem } 3|)$

$$|E_2(y)| \approx 1.11028 \times 10^{-4}$$

Exemplo 1

Limitante superior para o erro:

$$|E_2(y)| = |g(y) - P_n(y)| \leq |(y - y_0)(y - x_1)(y - x_2)|\frac{M_3}{3!},$$

onde $M_3 = max|g'''(y)|$, $y \in [y_0, y_2] = [1.2214, 1.4918]$

$$f(x) = e^x \Rightarrow g(y) = f^{-1}(y) = ln(y)$$

$$g'''(y) = \frac{2}{y^3} \Rightarrow M_3 = \frac{2}{(1.2214)^3} = 1.0976$$

Logo, $|E_2(y)| \leq 1.0186 \times 10^{-4}$.

Estimativa para o erro:

$|E_2(y)| \approx |(y - y_0)(y - y_1)(y - y_2)|(\text{máx}|\text{diferenças divididas de ordem } 3|)$

$|E_2(y)| \approx 1.11028 \times 10^{-4}$

Exemplo 1

Limitante superior para o erro:

$$|E_2(y)| = |g(y) - P_n(y)| \leq |(y - y_0)(y - x_1)(y - x_2)| \frac{M_3}{3!},$$

onde $M_3 = max|g'''(y)|,\ y \in [y_0, y_2] = [1.2214, 1.4918]$

$f(x) = e^x \Rightarrow g(y) = f^{-1}(y) = ln(y)$

$$g'''(y) = \frac{2}{y^3} \Rightarrow M_3 = \frac{2}{(1.2214)^3} = 1.0976$$

Logo, $|E_2(y)| \leq 1.0186 \times 10^{-4}$.

Estimativa para o erro:

$|E_2(y)| \approx |(y - y_0)(y - y_1)(y - y_2)|(\text{máx}|\text{diferenças divididas de ordem } 3|)$

$|E_2(y)| \approx 1.11028 \times 10^{-4}$

Exemplo 1

Limitante superior para o erro:

$$|E_2(y)| = |g(y) - P_n(y)| \leq |(y - y_0)(y - x_1)(y - x_2)|\frac{M_3}{3!},$$

onde $M_3 = max|g'''(y)|$, $y \in [y_0, y_2] = [1.2214, 1.4918]$

$f(x) = e^x \Rightarrow g(y) = f^{-1}(y) = ln(y)$

$$g'''(y) = \frac{2}{y^3} \Rightarrow M_3 = \frac{2}{(1.2214)^3} = 1.0976$$

Logo, $|E_2(y)| \leq 1.0186 \times 10^{-4}$.

Estimativa para o erro:
$|E_2(y)| \approx |(y - y_0)(y - y_1)(y - y_2)|(\text{máx}|\text{diferenças divididas de ordem } 3|)$

$|E_2(y)| \approx 1.11028 \times 10^{-4}$

Exemplo 2

Escolha do grau do polinômio interpolador

Considere a tabela:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
1	1		
		0.5	
1.01	1.005		0
		0.5	
1.02	1.01		−0.5
		0.49	
1.03	1.0149		0
		0.49	
1.04	1.0198		0
		0.49	
1.05	1.0247		

Polinômio de grau 1 é uma boa aproximação.

Exemplo 2

Escolha do grau do polinômio interpolador

Considere a tabela:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
1	1		
		0.5	
1.01	1.005		0
		0.5	
1.02	1.01		−0.5
		0.49	
1.03	1.0149		0
		0.49	
1.04	1.0198		0
		0.49	
1.05	1.0247		

Polinômio de grau 1 é uma boa aproximação.

Exemplo 2

Escolha do grau do polinômio interpolador

Considere a tabela:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
1	1		
		0.5	
1.01	1.005		0
		0.5	
1.02	1.01		-0.5
		0.49	
1.03	1.0149		0
		0.49	
1.04	1.0198		0
		0.49	
1.05	1.0247		

Polinômio de grau 1 é uma boa aproximação.

Referências I

- RUGGIERO, M.; LOPES, V.. **Cálculo Numérico**: Aspectos Teóricos e Computacionais. Pearson, 1996, 2a. Ed.
- BURDEN, R.. **Numerical Analysis**. Brooks/Cole Pub Co, 1996, 6th Edition.