

# Cálculo Numérico - IME/UERJ

## Lista de Exercícios 2

### Série de Taylor e Raízes de funções

1. Numa calculadora aproxima-se o valor de  $e^x$ , para todo  $x \in [-1, 1]$ , pelo valor do polinômio de Taylor de grau 3, obtido através da expansão de  $e^x$  em série de Taylor em torno do ponto  $x_0 = 0$ .
  - (a) Qual a aproximação de  $e^{0.5}$  fornecida pela calculadora?
  - (b) Utilizando a expressão do erro cometido ao se aproximar a função  $e^x$  pela sua expansão em série de Taylor, forneça um limitante superior para o erro cometido no item (a).
2. Seja  $f(x) = \ln(x + 1)$ .
  - (a) Obtenha a série de Taylor ao redor de 0 para  $f(x)$ .
  - (b) Obtenha o polinômio de Taylor de terceira ordem ao redor de 0 da função  $f(x)$  do item anterior e calcule  $P_3(0.5)$ . Qual o erro verdadeiro cometido?
  - (c) Encontre a expressão analítica para o erro de truncamento  $R_3(x)$  e estime o erro máximo em módulo ao se usar  $P_3(0.5)$  para aproximar  $f(0.5)$ . Mostre que o resultado é compatível com o erro que foi encontrado no item (b).
  - (d) Determine o número mínimo de termos que deve ter o polinômio de Taylor para que  $\ln(1.5)$  seja calculado com um erro de truncamento menor que  $10^{-8}$ .
3. Seja  $f(x) = \frac{1}{x}$ .
  - (a) Calcule a série de Taylor ao redor de 8.
  - (b) Determine um limitante inferior e outro superior do erro de truncamento para o polinômio de Taylor de ordem 4 de  $f(x)$  em  $x = 10$  ao redor de 8.
  - (c) Obtenha uma aproximação de 0.1 usando o polinômio de ordem 4 e verifique que o erro cometido fica entre os limites encontrados em (b).
  - (d) Calcule a expressão binária de 0.1 a partir de (a).
  - (e) Determine uma aproximação binária de 0.1 a partir de (b).
  - (f) De que ordem deve ser o polinômio de Taylor para obter uma aproximação de 0,1 com erro inferior a  $10^{-8}$ ?
4. Calcule uma aproximação de  $x^* = \sqrt[3]{25}$  com uma tolerância  $\xi = 10^{-4}$  pelo método da Bissecção.

5. Determine uma aproximação da raiz da equação  $x + \log(x) = 0$  com tolerância  $\xi = 0.001$  pelo método da Bissecção no intervalo  $[0.1, 0.6]$ .
6. Considere o método da bissecção. Quantas iterações são necessárias para encontrar uma aproximação da solução de  $x - 0,5(\sin(x) + \cos(x)) = 0$  com 3 casas decimais corretas sendo  $[0, 1]$  o intervalo inicial?
7. Considere o polinômio  $p(x) = (x - 1)(x - 2,5)^2(x - 4)^3$ . Quais zeros não podem ser determinadas usando o método da bissecção? Justifique a sua resposta.
8. Determine um intervalo  $[a, b]$  para iniciar o cálculo de  $\ln(10)$  usando o método da bissecção. Explique. Quantas iterações são necessárias para obter  $\ln(10)$  com erro menor ou igual a  $10^{-3}$ ?
9. Determine um intervalo  $(a, b)$  e uma função de iteração  $\varphi(x)$  associada, de tal forma que  $\forall x_0 \in (a, b)$ , a função de iteração gere uma sequência convergente para a(s) raiz(es) de cada uma das funções abaixo, usando o método iterativo linear (MIL) com tolerância  $\xi \leq 1 \cdot 10^{-3}$ .
  - (a)  $f_1(x) = \sqrt{x} - e^{-x}$ .
  - (b)  $f_2(x) = \ln(x) - x + 2$ .
  - (c)  $f_3(x) = e^{x/2} - x^3$ .
  - (d)  $f_4(x) = \sin(x) - x^2$ .
  - (e)  $f_5(x) = x/4 - \cos(x)$ .
10. A equação  $x^2 - 7x + 12 = 0$  tem 3 e 4 como raízes. Considere a função de iteração dada por  $\varphi(x) = x^2 - 6x + 12$ . Determine o intervalo  $(a, b)$ , onde para qualquer que seja  $x_0$  escolhido a sequência  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$  converge para a raiz  $x = 3$ . Mostre que a convergência é quadrática.
11. As funções de iterações  $\varphi_1(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 4$  e  $\varphi_2(x) = \frac{x^2}{2} - 2.5x + 5$  geram sequências convergentes para a raiz  $x = 2$ , para qualquer aproximação inicial  $x_0 \in (1.5, 3)$ . Qual das duas funções geram sequências mais rapidamente convergentes para esta raiz? Justifique a resposta.
12. Para determinar a raiz quadrada de um número  $c \geq 0$ , basta resolver a equação  $x^2 - c = 0$ . É possível determinar sua raiz quadrada usando a função de iteração  $\varphi(x) = c/x$ ? Justifique a resposta.
13. Determine as raízes do exercício 9, usando o Método de Newton-Raphson.

14. Os zeros da função  $f(x) = x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 60x$  são:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 3$ ,  $x_3 = 4$  e  $x_4 = 5$ .
- Calcule uma iteração do método de Newton-Raphson a partir de  $x_0 = 2$ . A sequência parece convergir para que raiz?
  - Repita o processo a partir de  $x_0 = 1$ . O que acontece neste caso?
  - É possível aplicar o método da bisseção no intervalo  $[2, 3.5]$ ? Justifique a resposta. No caso afirmativo, obtenha o número de iterações a partir da qual obtém-se uma aproximação de a menos de 0.001.
15. O zero da função  $f(x) = \arctg(x)$  é  $x^* = 0$ . Considere o método de Newton-Raphson. Verifique se:
- o ponto inicial é  $x_0 = 1.3917452$ , então temos a sequência de iterações  $x_1 = -1.3917$ ;  $x_2 = 1.3917$ ;  $x_3 = -1.3917$ ; ...
  - o ponto inicial é  $x_0 = 1.3$ , então a sequência converge a  $x^*$ .
  - $x_0 = 1.5$ , então a sequência diverge.
16. Calcular as raízes dos polinômios abaixo, por Birge-Vieta, usando uma casa decimal.
- $P(x) = x^3 - 21x^2 + 95x - 75 = 0$ .
  - $P(x) = x^4 - 18x^3 + 97x^2 - 180x + 100 = 0$ .
17. Seja  $x = \xi$  uma raiz de  $f(x)$ , tal que  $f'(\xi) \neq 0$  e  $f''(\xi) = 0$ . Mostre que neste caso o Método de Newton-Raphson tem convergência cúbica.
18. **(Segundo trabalho extra - Valendo 1,0 ponto)**
- (Raízes múltiplas) Considere  $f(x) = (x - 1)^2$
- Aplice o método de Newton-Raphson para  $f$  e calcule a taxa de convergência baseada nos erros computados.
  - Aplice o método de Newton modificado
- $$x_{k+1} = x_k - 2 \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$
- Prove que a ordem de convergência do método do item (b) é quadrática, ou seja, prove que:
- $$e_{k+1} \approx \frac{f'''(r)}{6f''(r)} e_k^2, \text{ onde } e_n = |x_n - r|.$$

**Dicas:**

Use aproximação por série de Taylor de  $f(x_k)$  em torno de  $r$  e depois faça a sua primeira derivada,  $f'(x_k)$ . Use também  $\left(1 + \frac{e_k f'''(r)}{2 f''(r)}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{e_k f'''(r)}{2 f''(r)}$ .