CÁLCULO NUMÉRICO

Zeros de funções - Método do Ponto Fixo

Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br
IME-UERJ

Método do Ponto Fixo (MPF)

Seja $f(x) \in C[a,b]$, onde $[a,b]$ é o intervalo que contém uma raiz r da equação $f(x) = 0$.

O **Método do Ponto Fixo (MPF)** consiste em transformar

$f(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = x$,

e a partir de uma aproximação inicial x_0, gerar uma sequência $\{x_k\}$ de aproximações para a única raiz r pela equação de recorrência

$x_{k+1} = \varphi(x_k)$,

pois a função $\varphi(x)$ é tal que:

$f(r) = 0 \Rightarrow \varphi(r) = r$.

Exemplo: $x^2 + x - 6 = 0$

Funções de iteração possíveis:

$\varphi_1(x) = 6 - x^2$

$\varphi_2(x) = \sqrt{6 - x}$

$\varphi_3(x) = \frac{6}{x} - 1$

$\varphi_4(x) = \frac{6}{x+1}$

Exemplo: $x^2 + x - 6 = 0$

Funções de iteração possíveis:

$\varphi_1(x) = 6 - x^2$

$\varphi_2(x) = \sqrt{6 - x}$

$\varphi_3(x) = \frac{6}{x} - 1$

$\varphi_4(x) = \frac{6}{x+1}$

Exemplo: $x^2 + x - 6 = 0$

Funções de iteração possíveis:

$\varphi_1(x) = 6 - x^2$
$\varphi_2(x) = \sqrt{6 - x}$
$\varphi_3(x) = \frac{6}{x} - 1$
$\varphi_4(x) = \frac{6}{x+1}$

Exemplo: $x^2 + x - 6 = 0$

Funções de iteração possíveis:

$\varphi_1(x) = 6 - x^2$

$\varphi_2(x) = \sqrt{6 - x}$

$\varphi_3(x) = \frac{6}{x} - 1$

$\varphi_4(x) = \frac{6}{x+1}$

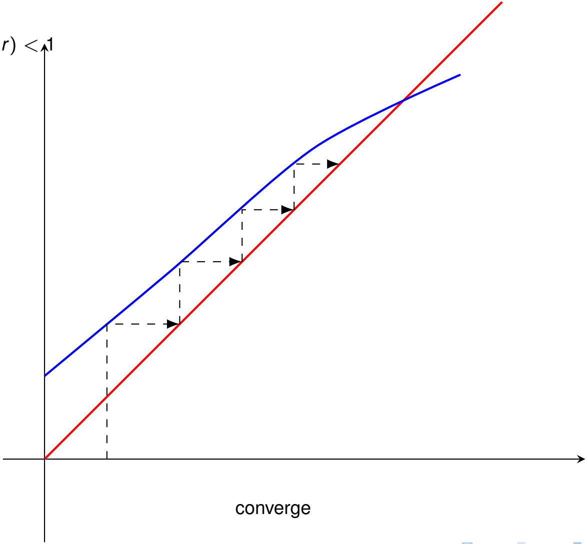
Exemplo: $x^2 + x - 6 = 0$

Funções de iteração possíveis:

$\varphi_1(x) = 6 - x^2$
$\varphi_2(x) = \sqrt{6 - x}$
$\varphi_3(x) = \frac{6}{x} - 1$
$\varphi_4(x) = \frac{6}{x+1}$

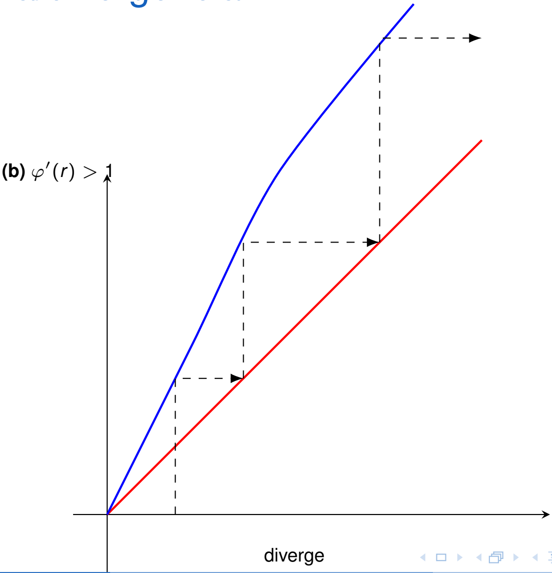
Quatro casos esquemáticos de convergência/divergência

(a) $0 < \varphi'(r) < 1$



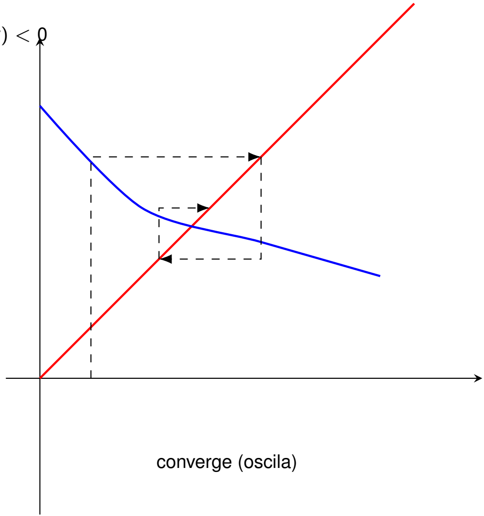
converge

Quatro casos esquemáticos de convergência/divergência



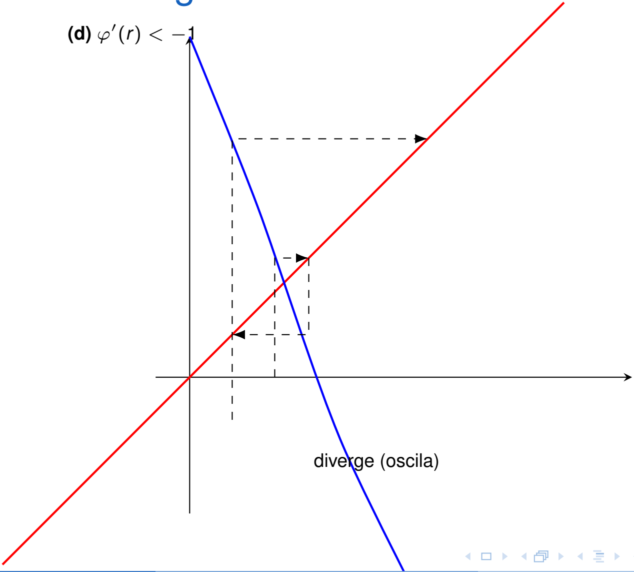
Quatro casos esquemáticos de convergência/divergência

(c) $-1 < \varphi'(r) < 0$

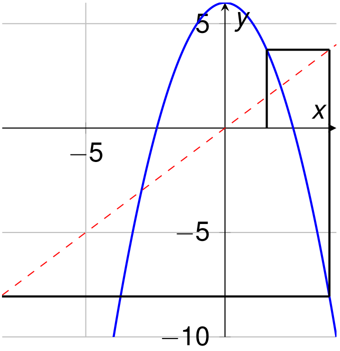


converge (oscila)

Quatro casos esquemáticos de convergência/divergência



Situação 1: $\varphi_1(x) = 6 - x^2$ (divergente)



$x_0 = 1.5$

$x_1 = \varphi_1(x_0) = \varphi_1(1.5) = 3.75$

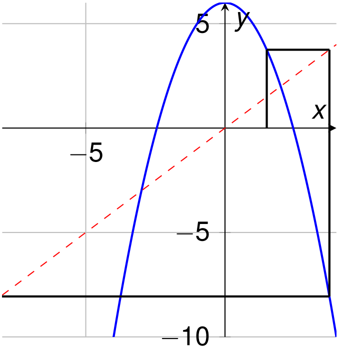
$x_2 = \varphi_1(x_1) = \varphi_1(3.75) = -8.06$

$x_3 = \varphi_1(x_2) = \varphi_1(-8.06) = -59.00$

$x_4 = \varphi_1(x_3) = \varphi_1(-59) = -3475.46$

Conclusão: $\{x_k\}$ diverge.

Situação 1: $\varphi_1(x) = 6 - x^2$ (divergente)



$x_0 = 1.5$

$x_1 = \varphi_1(x_0) = \varphi_1(1.5) = 3.75$

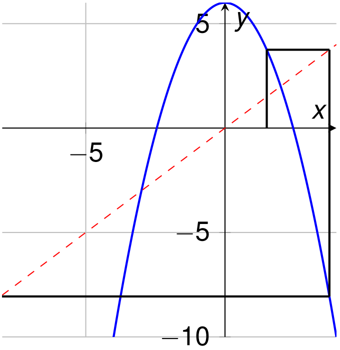
$x_2 = \varphi_1(x_1) = \varphi_1(3.75) = -8.06$

$x_3 = \varphi_1(x_2) = \varphi_1(-8.06) = -59.00$

$x_4 = \varphi_1(x_3) = \varphi_1(-59) = -3475.46$

Conclusão: $\{x_k\}$ diverge.

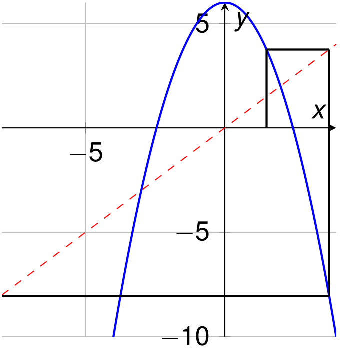
Situação 1: $\varphi_1(x) = 6 - x^2$ (divergente)



$$x_0 = 1.5$$
$$x_1 = \varphi_1(x_0) = \varphi_1(1.5) = 3.75$$
$$x_2 = \varphi_1(x_1) = \varphi_1(3.75) = -8.06$$
$$x_3 = \varphi_1(x_2) = \varphi_1(-8.06) = -59.00$$
$$x_4 = \varphi_1(x_3) = \varphi_1(-59) = -3475.46$$

Conclusão: $\{x_k\}$ diverge.

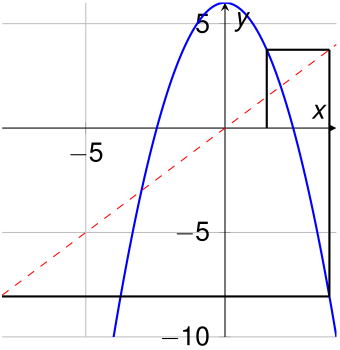
Situação 1: $\varphi_1(x) = 6 - x^2$ (divergente)



$$x_0 = 1.5$$
$$x_1 = \varphi_1(x_0) = \varphi_1(1.5) = 3.75$$
$$x_2 = \varphi_1(x_1) = \varphi_1(3.75) = -8.06$$
$$x_3 = \varphi_1(x_2) = \varphi_1(-8.06) = -59.00$$
$$x_4 = \varphi_1(x_3) = \varphi_1(-59) = -3475.46$$

Conclusão: $\{x_k\}$ diverge.

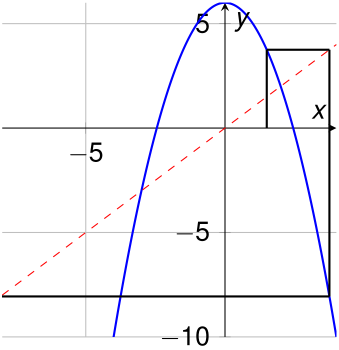
Situação 1: $\varphi_1(x) = 6 - x^2$ (divergente)



$$x_0 = 1.5$$
$$x_1 = \varphi_1(x_0) = \varphi_1(1.5) = 3.75$$
$$x_2 = \varphi_1(x_1) = \varphi_1(3.75) = -8.06$$
$$x_3 = \varphi_1(x_2) = \varphi_1(-8.06) = -59.00$$
$$x_4 = \varphi_1(x_3) = \varphi_1(-59) = -3475.46$$

Conclusão: $\{x_k\}$ diverge.

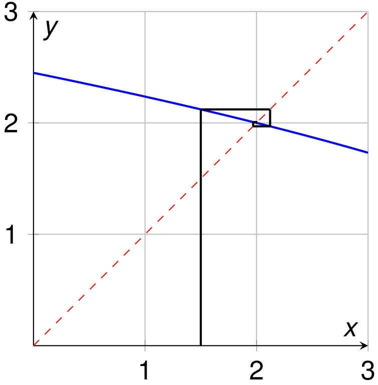
Situação 1: $\varphi_1(x) = 6 - x^2$ (divergente)



$$x_0 = 1.5$$
$$x_1 = \varphi_1(x_0) = \varphi_1(1.5) = 3.75$$
$$x_2 = \varphi_1(x_1) = \varphi_1(3.75) = -8.06$$
$$x_3 = \varphi_1(x_2) = \varphi_1(-8.06) = -59.00$$
$$x_4 = \varphi_1(x_3) = \varphi_1(-59) = -3475.46$$

Conclusão: $\{x_k\}$ diverge.

Situação 2: $\varphi_2(x) = \sqrt{6 - x}$ (convergente)



$x_0 = 1.5$

$x_1 = \varphi_2(x_0) = \varphi_2(1.5) = 2.1213$

$x_2 = \varphi_2(x_1) = \varphi_2(2.1213) = 1.9694$

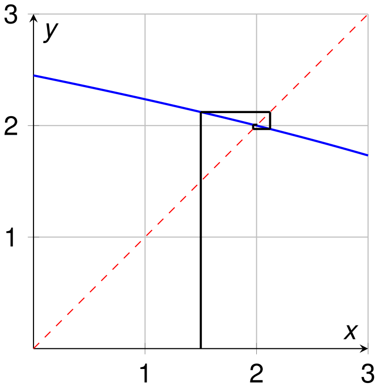
$x_3 = \varphi_2(x_2) = \varphi_2(1.9694) = 2.0076$

$x_4 = \varphi_2(x_3) = \varphi_2(2.0076) = 1.9981$

$x_5 = \varphi_2(x_4) = \varphi_2(1.9981) = 2.0005$

Conclusão: $\{x_k\} \to 2.$

Situação 2: $\varphi_2(x) = \sqrt{6 - x}$ (convergente)



$x_0 = 1.5$

$x_1 = \varphi_2(x_0) = \varphi_2(1.5) = 2.1213$

$x_2 = \varphi_2(x_1) = \varphi_2(2.1213) = 1.9694$

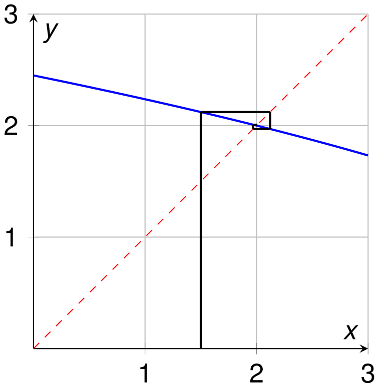
$x_3 = \varphi_2(x_2) = \varphi_2(1.9694) = 2.0076$

$x_4 = \varphi_2(x_3) = \varphi_2(2.0076) = 1.9981$

$x_5 = \varphi_2(x_4) = \varphi_2(1.9981) = 2.0005$

Conclusão: $\{x_k\} \to 2$.

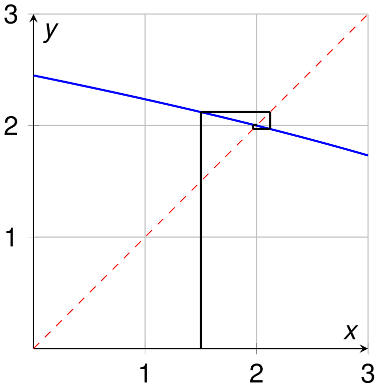
Situação 2: $\varphi_2(x) = \sqrt{6 - x}$ (convergente)



$$x_0 = 1.5$$
$$x_1 = \varphi_2(x_0) = \varphi_2(1.5) = 2.1213$$
$$x_2 = \varphi_2(x_1) = \varphi_2(2.1213) = 1.9694$$
$$x_3 = \varphi_2(x_2) = \varphi_2(1.9694) = 2.0076$$
$$x_4 = \varphi_2(x_3) = \varphi_2(2.0076) = 1.9981$$
$$x_5 = \varphi_2(x_4) = \varphi_2(1.9981) = 2.0005$$

Conclusão: $\{x_k\} \to 2.$

Situação 2: $\varphi_2(x) = \sqrt{6 - x}$ (convergente)



$x_0 = 1.5$

$x_1 = \varphi_2(x_0) = \varphi_2(1.5) = 2.1213$

$x_2 = \varphi_2(x_1) = \varphi_2(2.1213) = 1.9694$

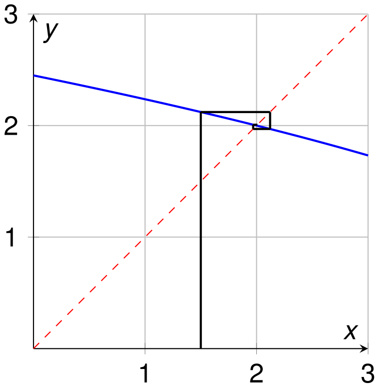
$x_3 = \varphi_2(x_2) = \varphi_2(1.9694) = 2.0076$

$x_4 = \varphi_2(x_3) = \varphi_2(2.0076) = 1.9981$

$x_5 = \varphi_2(x_4) = \varphi_2(1.9981) = 2.0005$

Conclusão: $\{x_k\} \to 2$.

Situação 2: $\varphi_2(x) = \sqrt{6 - x}$ (convergente)



$x_0 = 1.5$

$x_1 = \varphi_2(x_0) = \varphi_2(1.5) = 2.1213$

$x_2 = \varphi_2(x_1) = \varphi_2(2.1213) = 1.9694$

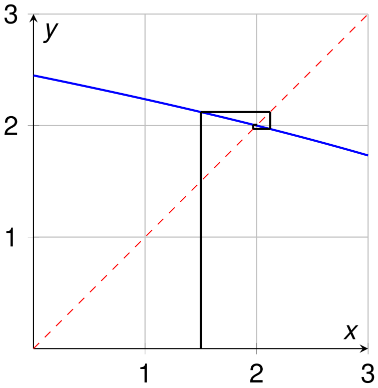
$x_3 = \varphi_2(x_2) = \varphi_2(1.9694) = 2.0076$

$x_4 = \varphi_2(x_3) = \varphi_2(2.0076) = 1.9981$

$x_5 = \varphi_2(x_4) = \varphi_2(1.9981) = 2.0005$

Conclusão: $\{x_k\} \to 2.$

Situação 2: $\varphi_2(x) = \sqrt{6 - x}$ (convergente)



$x_0 = 1.5$

$x_1 = \varphi_2(x_0) = \varphi_2(1.5) = 2.1213$

$x_2 = \varphi_2(x_1) = \varphi_2(2.1213) = 1.9694$

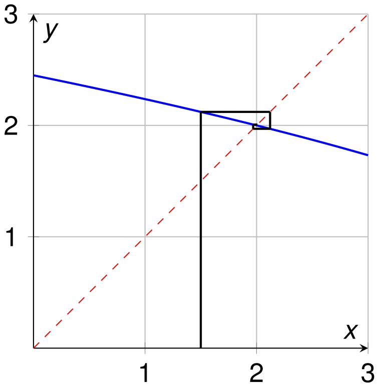
$x_3 = \varphi_2(x_2) = \varphi_2(1.9694) = 2.0076$

$x_4 = \varphi_2(x_3) = \varphi_2(2.0076) = 1.9981$

$x_5 = \varphi_2(x_4) = \varphi_2(1.9981) = 2.0005$

Conclusão: $\{x_k\} \to 2$.

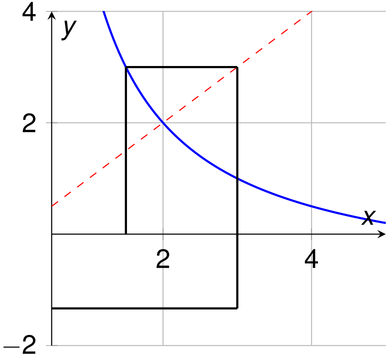
Situação 2: $\varphi_2(x) = \sqrt{6-x}$ (convergente)



$$x_0 = 1.5$$
$$x_1 = \varphi_2(x_0) = \varphi_2(1.5) = 2.1213$$
$$x_2 = \varphi_2(x_1) = \varphi_2(2.1213) = 1.9694$$
$$x_3 = \varphi_2(x_2) = \varphi_2(1.9694) = 2.0076$$
$$x_4 = \varphi_2(x_3) = \varphi_2(2.0076) = 1.9981$$
$$x_5 = \varphi_2(x_4) = \varphi_2(1.9981) = 2.0005$$

Conclusão: $\{x_k\} \to 2$.

Situação 3: $\varphi_3(x) = \frac{6}{x} - 1$



$x_0 = 1.5$

$x_1 = 3.00$

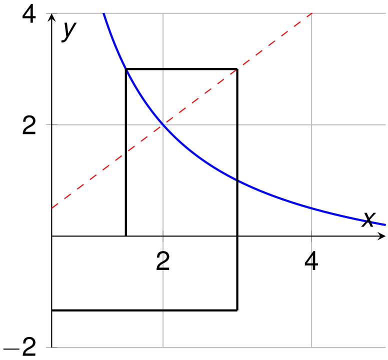
$x_2 = 1.00$

$x_3 = 5.00$

$x_4 = 0.20$

Conclusão: $\{x_k\}$ oscila e não converge.

Situação 3: $\varphi_3(x) = \frac{6}{x} - 1$



$x_0 = 1.5$

$x_1 = 3.00$

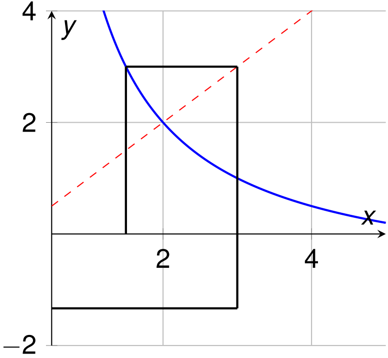
$x_2 = 1.00$

$x_3 = 5.00$

$x_4 = 0.20$

Conclusão: $\{x_k\}$ oscila e não converge.

Situação 3: $\varphi_3(x) = \frac{6}{x} - 1$



$x_0 = 1.5$

$x_1 = 3.00$

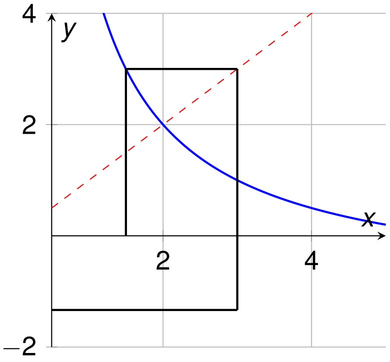
$x_2 = 1.00$

$x_3 = 5.00$

$x_4 = 0.20$

Conclusão: $\{x_k\}$ oscila e não converge.

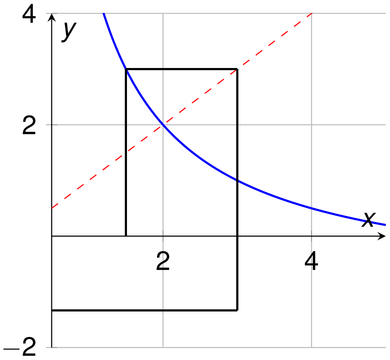
Situação 3: $\varphi_3(x) = \frac{6}{x} - 1$



$x_0 = 1.5$
$x_1 = 3.00$
$x_2 = 1.00$
$x_3 = 5.00$
$x_4 = 0.20$

Conclusão: $\{x_k\}$ oscila e não converge.

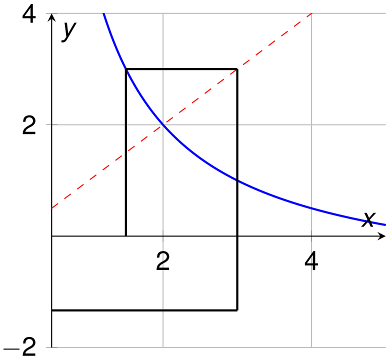
Situação 3: $\varphi_3(x) = \frac{6}{x} - 1$



$x_0 = 1.5$
$x_1 = 3.00$
$x_2 = 1.00$
$x_3 = 5.00$
$x_4 = 0.20$

Conclusão: $\{x_k\}$ oscila e não converge.

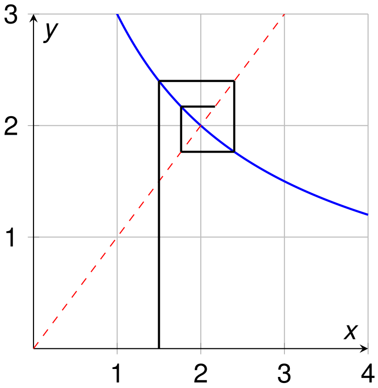
Situação 3: $\varphi_3(x) = \frac{6}{x} - 1$



$x_0 = 1.5$
$x_1 = 3.00$
$x_2 = 1.00$
$x_3 = 5.00$
$x_4 = 0.20$

Conclusão: $\{x_k\}$ oscila e não converge.

Situação 4: $\varphi_4(x) = \frac{6}{x+1}$



$x_0 = 1.5$

$x_1 = 2.40$

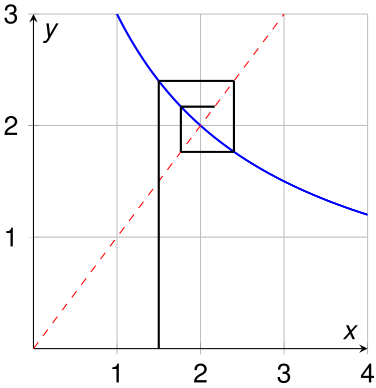
$x_2 = 1.76$

$x_3 = 2.18$

$x_4 = 1.88$

Conclusão: $\{x_k\}$ converge lentamente.

Situação 4: $\varphi_4(x) = \frac{6}{x+1}$



$x_0 = 1.5$

$x_1 = 2.40$

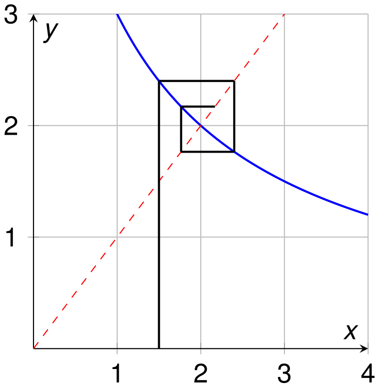
$x_2 = 1.76$

$x_3 = 2.18$

$x_4 = 1.88$

Conclusão: $\{x_k\}$ converge lentamente.

Situação 4: $\varphi_4(x) = \frac{6}{x+1}$



$x_0 = 1.5$

$x_1 = 2.40$

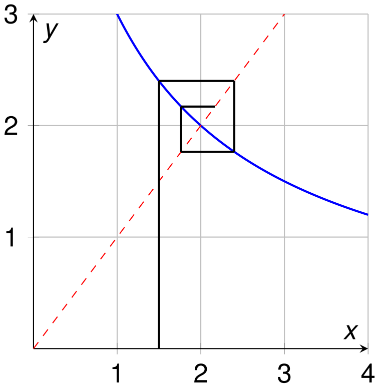
$x_2 = 1.76$

$x_3 = 2.18$

$x_4 = 1.88$

Conclusão: $\{x_k\}$ converge lentamente.

Situação 4: $\varphi_4(x) = \frac{6}{x+1}$



$x_0 = 1.5$

$x_1 = 2.40$

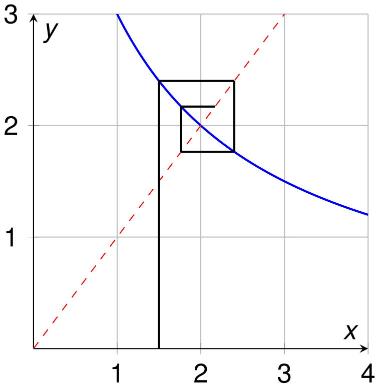
$x_2 = 1.76$

$x_3 = 2.18$

$x_4 = 1.88$

Conclusão: $\{x_k\}$ converge lentamente.

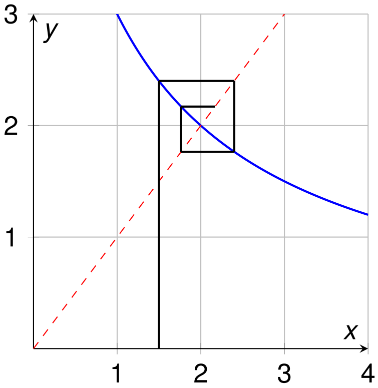
Situação 4: $\varphi_4(x) = \frac{6}{x+1}$



$x_0 = 1.5$
$x_1 = 2.40$
$x_2 = 1.76$
$x_3 = 2.18$
$x_4 = 1.88$

Conclusão: $\{x_k\}$ converge lentamente.

Situação 4: $\varphi_4(x) = \frac{6}{x+1}$



$x_0 = 1.5$

$x_1 = 2.40$

$x_2 = 1.76$

$x_3 = 2.18$

$x_4 = 1.88$

Conclusão: $\{x_k\}$ converge lentamente.

Resumo Comparativo dos Casos

$\varphi(x)$	$\lvert\varphi'(x)\rvert$	**Conclusão**
$\varphi_1(x) = 6 - x^2$	$\lvert\varphi_1'(x)\rvert > 1$	Divergente
$\varphi_2(x) = \sqrt{6-x}$	$\lvert\varphi_1'(x)\rvert < 1$	Convergente ($r = 2$)
$\varphi_3(x) = \frac{6}{x} - 1$	$\lvert\varphi_1'(x)\rvert > 1$	Oscilante / Não converge
$\varphi_4(x) = \frac{6}{x+1}$	$\lvert\varphi_1'(x)\rvert < 1$	Convergente (lento)

Exemplo 2

Ache a raiz da equação $f(x) = e^x + x - 2 = 0$ com tolerância $\epsilon = 10^{-3}$ usando as seguintes funções de iteração linear:

- $\varphi_1(x) = 2 - e^x$;
- $\varphi_2(x) = \ln(2 - x)$