

## Cálculo Numérico - IME/UERJ

### Gabarito - Lista de Exercícios 2

#### Série de Taylor e Raízes de funções

1. Numa calculadora aproxima-se o valor de  $e^x$ , para todo  $x \in [-1, 1]$ , pelo valor do polinômio de Taylor de grau 3, obtido através da expansão de  $e^x$  em série de Taylor em torno do ponto  $x_0 = 0$ .
  - (a) Qual a aproximação de  $e^{0.5}$  fornecida pela calculadora?
  - (b) Utilizando a expressão do erro cometido ao se aproximar a função  $e^x$  pela sua expansão em série de Taylor, forneça um limitante superior para o erro cometido no item (a).

#### Resposta:

- (a) Na aproximação de  $f(x)$  por um polinômio de Taylor de grau 3,  $P_3(x)$ , em torno de  $x_0$ , temos:

$$P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3.$$

Como  $f^{(i)}(x_0) = e^{x_0}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , então:

$$P_3(x) = e^{x_0} + e^{x_0}(x - x_0) + \frac{e^{x_0}}{2}(x - x_0)^2 + \frac{e^{x_0}}{3!}(x - x_0)^3.$$

Quando  $x = 0.5$  e  $x_0 = 0$ , temos:

$$P_3(0.5) = e^0 + e^0(0.5 - 0) + \frac{e^0}{2}(0.5 - 0)^2 + \frac{e^0}{3!}(0.5 - 0)^3.$$

Ou seja,

$$P_3(0.5) = 1 + 0.5 + \frac{1}{2}(0.5)^2 + \frac{1}{3!}(0.5)^3.$$

$$P_3(0.5) \approx 1.64583.$$

- (b) A expressão do erro cometido ao se aproximar  $f(x)$  de  $P_3(x)$  é dada pelo valor residual:

$$R_3(x) = \frac{f^{(iv)}(\xi)}{4!}(x - x_0)^4, \text{ onde } \xi \in (x_0, x) \text{ ou } \xi \in (x, x_0).$$

Quando  $x = 0.5$  e  $x_0 = 0$ , temos:

$$R_3(0.5) = \frac{e^\xi}{4!}(0.5)^4, \text{ onde } \xi \in (0, 0.5).$$

Logo, um limitante superior para o erro é dado por

$$R_3(0.5) \leq \frac{M_4}{4!}(0.5)^4, \text{ onde } M_4 = \max_{\xi \in (0, 0.5)} |e^\xi| = e^{0.5} \approx 1.64872.$$

Assim,

$$R_3(0.5) \leq \frac{1.64872}{4!}(0.5)^4 \approx 4.29354 \times 10^{-3}.$$

2. Seja  $f(x) = \ln(x+1)$ .

- (a) Obtenha a série de Taylor ao redor de 0 para  $f(x)$ .
- (b) Obtenha o polinômio de Taylor de terceira ordem ao redor de 0 da função  $f(x)$  do item anterior e calcule  $P_3(0.5)$ . Qual o erro verdadeiro cometido?
- (c) Encontre a expressão analítica para o erro de truncamento  $R_3(x)$  e estime o erro máximo em módulo ao se usar  $P_3(0.5)$  para aproximar  $f(0.5)$ . Mostre que o resultado é compatível com o erro que foi encontrado no item (b).
- (d) Determine o número mínimo de termos que deve ter o polinômio de Taylor para que  $\ln(1.5)$  seja calculado com um erro de truncamento menor que  $10^{-8}$ .

**Resposta:**

(a) A função e suas derivadas em  $x_0 = 0$  são:

$$f(x) = \ln(x+1) \Rightarrow f(0) = \ln(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow f''(0) = -1, \text{ ou seja, } f''(0) = -1!$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} = \frac{2!}{(x+1)^3} \Rightarrow f'''(0) = 2!$$

$$f^{(iv)}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{(x+1)^4} = -\frac{3!}{(x+1)^4} \Rightarrow f^{(iv)}(0) = -3!$$

$$f^{(v)}(x) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(x+1)^5} = \frac{4!}{(x+1)^5} \Rightarrow f^{(iv)}(0) = 4!$$

...

Generalizando, o para  $n \geq 1$ , temos:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x+1)^n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

Então, a série de Taylor de  $f(x)$  em torno de 0 é dada por

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(iv)}(0)}{4!}x^4 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Substituindo os valores de  $f^{(i)}(0)$  para  $i = 0, 1, 2, \dots$ , temos:

$$f(x) = x - \frac{1!}{2!}x^2 + \frac{2!}{3!}x^3 - \frac{3!}{4!}x^4 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n + \dots$$

Ou seja, a série de Taylor ao redor de 0 para  $f(x)$  é:

$$f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i}x^i$$

- (b) Aproximando a série de Taylor encontrada no item (a) por um polinômio de grau 3, temos:

$$P_3(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

Então, quando  $x = 0.5$ , temos:

$$P_3(0.5) = 0.5 - \frac{1}{2}(0.5)^2 + \frac{1}{3}(0.5)^3 \approx 0.4167.$$

O erro absoluto cometido é:

$$|f(0.5) - P_3(0.5)| = |\ln(1.5) - P_3(0.5)| \approx 0.0112.$$

- (c) A expressão analítica para o erro de truncamento  $R_3(x)$  é:

$$R_3(x) = \frac{f^{(iv)}(\xi)}{4!}(x - x_0)^4.$$

Tomando  $x = 0.5$  e  $x_0 = 0$ , temos:

$$R_3(0.5) = \frac{f^{(iv)}(\xi)}{4!}(0.5)^4.$$

Como  $\xi \in (0, 0.5)$  não é conhecido, só podemos calcular o limitante superior do erro dado por:

$$|R_3(0.5)| \leq \frac{M_4}{4!}|0.5|^4, \text{ onde } M_4 = \max_{\xi \in (0, 0.5)} |f^{(iv)}(\xi)|.$$

Assim,

$$M_4 = \max_{\xi \in (0, 0.5)} |f^{(iv)}(\xi)| = \max\{|f^{(iv)}(0)|, |f^{(iv)}(0.5)|\} = \max\{3!, 1.18519\}$$

$$\Rightarrow M_4 = 3!.$$

Portanto,

$$|R_3(0.5)| \leq \frac{3!}{4!}|0.5|^4 = \frac{1}{4}|0.5|^4 \Rightarrow |R_3(0.5)| \leq 0.015625.$$

O valor do erro cometido no item (b) foi 0.0112. Como  $0.0112 < 0.015625$ , o resultado é compatível.

- (d) O limitante superior do erro de truncamento ao se aproximar  $f(0.5)$  por  $P_n(0.5)$  em torno de 0 é dado por:

$$|R_n(0.5)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|0.5|^{n+1}, \text{ onde } M_{n+1} = \max_{\xi \in (0, 0.5)} |f^{(n+1)}(\xi)|$$

Como

$$M_{n+1} = \max_{\xi \in (0, 0.5)} |f^{(n+1)}(\xi)| = \max_{\xi \in (0, 0.5)} \left| (-1)^n \frac{n!}{(\xi + 1)^{n+1}} \right| = \max_{\xi \in (0, 0.5)} \left| \frac{n!}{(\xi + 1)^{n+1}} \right|,$$

então

$$M_{n+1} = \max \left\{ \left| \frac{n!}{(0+1)^{n+1}} \right|, \left| \frac{n!}{(0.5+1)^{n+1}} \right| \right\} = \max \left\{ n!, \frac{n!}{(1.5)^{n+1}} \right\} = n!$$

$$\text{Assim, } |R_n(0.5)| \leq \frac{n!}{(n+1)!}|0.5|^{n+1} = \frac{|0.5|^{n+1}}{n+1}.$$

Portanto, para o erro de truncamento ser menor que  $10^{-8}$ , temos:

$$|R_n(0.5)| \leq \frac{|0.5|^{n+1}}{n+1} < 10^{-8}.$$

Arrumando a última inequação, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{|0.5|^{n+1}}{n+1} < 10^{-8} &\Rightarrow \frac{(0.5)^{n+1}}{n+1} < 10^{-8} \Rightarrow \frac{(2^{-1})^{n+1}}{n+1} < 10^{-8} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2^{n+1}(n+1)} < 10^{-8} \Rightarrow 2^{n+1}(n+1) > 10^8. \end{aligned}$$

Testando na calculadora para alguns valores de  $n \geq 10$ , encontramos:

$$n = 10 \Rightarrow 2^{11} \times 11 \approx 2.25 \times 10^4 \text{ (menor que } 10^8, \text{ não serve!)}$$

$$n = 20 \Rightarrow 2^{21} \times 21 \approx 4.4 \times 10^7 \text{ (menor que } 10^8, \text{ não serve!)}$$

$$n = 21 \Rightarrow 2^{22} \times 22 \approx 9.2 \times 10^7 \text{ (menor que } 10^8, \text{ não serve!)}$$

$$n = 22 \Rightarrow 2^{23} \times 23 \approx 1.93 \times 10^9 \text{ (maior que } 10^8, \text{ ok!)}$$

Logo, o polinômio de Taylor é  $P_{22}(x)$  que tem 22 termos.

3. Seja  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

- (a) Calcule a série de Taylor ao redor de 8.
- (b) Determine um limitante inferior e outro superior do erro de truncamento para o polinômio de Taylor de ordem 4 de  $f(x)$  em  $x = 10$  ao redor de 8.
- (c) Obtenha uma aproximação de 0.1 usando o polinômio de ordem 4 e verifique que o erro cometido fica entre os limites encontrados em (b).
- (d) Calcule a expressão binária de 0.1 a partir de (a).
- (e) Determine uma aproximação binária de 0.1 a partir de (b).
- (f) De que ordem deve ser o polinômio de Taylor para obter uma aproximação de 0.1 com erro inferior a  $10^{-8}$ ?

**Resposta:**

$$(a) \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^6}(x-8) + \frac{1}{2^9}(x-8)^2 - \frac{1}{2^{12}}(x-8)^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i(x-8)^i}{2^{3(i+1)}}.$$

$$(b) \text{ Limitante superior: } |R_4(10)| \leq 0.12 \times 10^{-3};$$

$$\text{Limitante inferior: } |R_4(10)| \geq 0.032 \times 10^{-3}.$$

$$(c) \text{ Para obter a aproximação de 0.1, terei que usar } x = 10, \text{ pois } f(10) = 0.1.$$

Portanto,

$$P_4(10) = \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^6}(2) + \frac{1}{2^9}(2)^2 - \frac{1}{2^{12}}(2)^3 + \frac{1}{2^{15}}(2)^4$$

$$P_4(10) = \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} - \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{11}} = \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^{11}}\right) - \left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^9}\right) \approx 0.1.$$

- (d) Lembrando novamente que para obter a aproximação de 0.1, terei que usar  $x = 10$ , pois  $f(10) = 0.1$ .

Então,

$$\begin{aligned} (0.1)_{10} = f(10) &= \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} - \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{11}} - \frac{1}{2^{13}} + \frac{1}{2^{15}} - \frac{1}{2^{17}} + \dots \\ &= \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^5}\right) + \left(\frac{1}{2^7} - \frac{1}{2^9}\right) + \left(\frac{1}{2^{11}} - \frac{1}{2^{13}}\right) + \left(\frac{1}{2^{15}} - \frac{1}{2^{17}}\right) + \dots \\ &= \left(\frac{2^2 - 1}{2^5}\right) + \left(\frac{2^2 - 1}{2^9}\right) + \left(\frac{2^2 - 1}{2^{13}}\right) + \left(\frac{2^2 - 1}{2^{17}}\right) + \dots \\ &= \left(\frac{2 + 1}{2^5}\right) + \left(\frac{2 + 1}{2^9}\right) + \left(\frac{2 + 1}{2^{13}}\right) + \left(\frac{2 + 1}{2^{17}}\right) + \dots \\ &= \frac{2}{2^5} + \frac{1}{2^5} + \frac{2}{2^9} + \frac{1}{2^9} + \frac{2}{2^{13}} + \frac{1}{2^{13}} + \frac{2}{2^{17}} + \frac{1}{2^{17}} + \dots \\ &= \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{2^{13}} + \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{2^{17}} + \dots \\ &= (0.00011001100110011\dots)_2 \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} P_4(10) &= \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} - \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{11}} \\ &= \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^5}\right) + \left(\frac{1}{2^7} - \frac{1}{2^9}\right) + \frac{1}{2^{11}} \\ &= \left(\frac{2^2 - 1}{2^5}\right) + \left(\frac{2^2 - 1}{2^9}\right) + \frac{1}{2^{11}} \\ &= \left(\frac{2 + 1}{2^5}\right) + \left(\frac{2 + 1}{2^9}\right) + \frac{1}{2^{11}} \\ &= \frac{2}{2^5} + \frac{1}{2^5} + \frac{2}{2^9} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{11}} \\ &= \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{11}} \\ &= (0.00011001101)_2 \end{aligned}$$

(f)  $n = 11$ .

4. Calcule uma aproximação de  $x^* = \sqrt[3]{25}$  com uma tolerância  $\xi = 10^{-4}$  pelo método da Bissecção.

**Resposta:**

O problema é equivalente a resolver  $f(x) = x^3 - 25 = 0$ . Como  $f(2) \cdot f(3) < 0$ , então a raiz  $r \in (2, 3)$ . Uma aproximação com erro  $b_{14} - a_{14} < 0.0001$  é  $r \approx 2.924042$ .

5. Determine uma aproximação da raiz da equação  $x + \log(x) = 0$  com tolerância  $\xi = 0.001$  pelo método da Bissecção no intervalo  $[0.1, 0.6]$ .

**Resposta:**  $r \approx 0.3988$ .

6. Considere o método da bissecção. Quantas iterações são necessárias para encontrar uma aproximação da solução de  $x - 0,5(\sin(x) + \cos(x)) = 0$  com 3 casas decimais corretas sendo  $[0, 1]$  o intervalo inicial?

**Resposta:** Com tolerância  $\epsilon = 0.0001$ ,  $k_{\min} = 14$ .

7. Considere o polinômio  $p(x) = (x - 1)(x - 2.5)^2(x - 4)^3$ . Quais zeros não podem ser determinadas usando o método da bissecção? Justifique a sua resposta.

**Resposta:** Vamos calcular os valores de  $p(x)$  em pontos suficientemente próximos das raízes. Assim, temos a tabela:

$x$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5
$p(x)$	400	85.75	0	-7.8125	-2	0	-0.5	-0.3125	0	1.75

Analisando o sinal de  $p(x)$  para os valores da tabela, concluímos que nas proximidades da raiz 2.5, no intervalo  $(2, 3)$ , a função  $p(x)$  não mudou de sinal. Portanto, o método da Bissecção não funciona para a raiz 2.5.

8. Determine um intervalo  $[a, b]$  para iniciar o cálculo de  $\ln(10)$  usando o método da bissecção. Explique. Quantas iterações são necessárias para obter  $\ln(10)$  com erro menor ou igual a  $10^{-3}$ ?

**Resposta:**

O problema é equivalente a resolver  $f(x) = e^x - 10 = 0$ . Como  $f(2) \cdot f(3) < 0$ , então a raiz  $r \in (2, 3)$ . Número de iterações:  $k_{\min} = 10$ .

9. Determine um intervalo  $(a, b)$  e uma função de iteração  $\varphi(x)$  associada, de tal forma que  $\forall x_0 \in (a, b)$ , a função de iteração gere uma sequência convergente para a(s) raiz(es) de cada uma das funções abaixo, usando o método iterativo linear (MIL) com tolerância  $\xi \leq 1 \cdot 10^{-3}$ .

(a)  $f_1(x) = \sqrt{x} - e^{-x}$ .

(b)  $f_2(x) = \ln(x) - x + 2$ .

(c)  $f_3(x) = e^{x/2} - x^3$ .

(d)  $f_4(x) = \sin(x) - x^2$ .

(e)  $f_5(x) = x/4 - \cos(x)$ .

**Resposta:**

- (a)  $\varphi_1(x) = e^{-2x}$ . Como  $|\varphi'_1(x)| = 2 \cdot e^{-2x} < 1 \Rightarrow x > 0.34657$ , um bom intervalo é  $(0.34657, 0.5)$ , pois  $f_1(0.34657) \cdot f_1(0.5) < 0$ .
- (b)  $\varphi_2(x) = e^{x-2}$ ;  $r_1 \in (0, 0.5)$ ,  $r_2 \in (3, 3.5)$ .
- (c)  $\varphi_3(x) = e^{x/6}$ ;  $r \in (1, 2)$ .
- (d)  $\varphi_{41}(x) = \sqrt{\sin(x)}$ ;  $r_1 \in (0.8, 0.9)$ . A raiz  $r_2 \in (-0.1, 0.1)$  deve ser encontrada em  $\varphi_{42}(x) = -\sqrt{\sin(x)}$ .
- (e)  $\varphi_5(x) = \arccos(x/4)$ ;  $r \in (1, \pi/2)$ .

10. A equação  $x^2 - 7x + 12 = 0$  tem 3 e 4 como raízes. Considere a função de iteração dada por  $\varphi(x) = x^2 - 6x + 12$ . Determine o intervalo  $(a, b)$ , onde para qualquer que seja  $x_0$  escolhido a sequência  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$  converge para a raiz  $x = 3$ . Mostre que a convergência é quadrática.

**Resposta:**

Um intervalo que contém a raiz é  $(2.5, 3.5)$ . Para mostrar que a convergência é quadrática, faça  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - 3|}{|x_k - 3|^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\varphi(x_k) - 3|}{|x_k - 3|^2} = C$ . O limite resulta em  $C = 1$ .

11. As funções de iterações  $\varphi_1(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 4$  e  $\varphi_2(x) = \frac{x^2}{2} - 2.5x + 5$  geram sequências convergentes para a raiz  $x = 2$ , para qualquer aproximação inicial  $x_0 \in (1.5, 3)$ . Qual das duas funções geram sequências mais rapidamente convergentes para esta raiz? Justifique a resposta.

**Resposta:**

Como  $|\varphi'_1(2)| < |\varphi'_2(2)|$ , logo  $\varphi_1(x)$  gera sequências mais rapidamente convergentes para a raiz.

12. Para determinar a raiz quadrada de um número  $c \geq 0$ , basta resolver a equação  $x^2 - c = 0$ . É possível determinar sua raiz quadrada usando a função de iteração  $\varphi(x) = c/x$ ? Justifique a resposta.

**Resposta:**

$$|\varphi'(x)| = \frac{c}{|x|^2} < 1 \Rightarrow x < -\sqrt{c} \text{ ou } x > \sqrt{c}, \text{ ou seja, } I = (-\infty, -\sqrt{c}) \cup (\sqrt{c}, +\infty).$$

Como as raízes da equação são  $r_1 = -\sqrt{c}$  e  $r_2 = \sqrt{c}$ , então não é possível determinar a raiz usando a função de iteração  $\varphi(x)$ , pois  $r_1$  e  $r_2$  estão fora do intervalo  $I$ .

13. Determine as raízes do exercício 9, usando o Método de Newton-Raphson.

**Resposta:**

- (a)  $r \approx 0.4267$ .

- (b)  $r_1 \approx 0.1586$ ;  $r_2 \approx 3.1462$ .
  - (c)  $r \approx 1.2270$ .
  - (d)  $r_1 \approx 0.8768$ ;  $r_2 \approx 0$ .
  - (e)  $r \approx 1.2524$ .
14. Os zeros da função  $f(x) = x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 60x$  são:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 3$ ,  $x_3 = 4$  e  $x_4 = 5$ .
- (a) Calcule uma iteração do método de Newton-Raphson a partir de  $x_0 = 2$ . A sequência parece convergir para que raiz?
  - (b) Repita o processo a partir de  $x_0 = 1$ . O que acontece neste caso?
  - (c) É possível aplicar o método da bisseção no intervalo  $[2, 3.5]$ ? Justifique a resposta. No caso afirmativo, obtenha o número de iterações a partir da qual obtém-se uma aproximação de a menos de 0.001.

**Resposta:**

- (a) A sequência converge para  $r = 3$ .
  - (b) A sequência converge para  $r = 5$ .
  - (c) Sim. Porque  $f(2)f(3.5) < 0$  e pelo Teorema de Bolzano, quando isso ocorre, existe uma raiz no intervalo  $(2, 3.5)$ .
15. O zero da função  $f(x) = \arctg(x)$  é  $x^* = 0$ . Considere o método de Newton-Raphson. Verifique se:
- (a) o ponto inicial é  $x_0 = 1.3917452$ , então temos a sequência de iterações  $x_1 = -1.3917$ ;  $x_2 = 1.3917$ ;  $x_3 = -1.3917$ ; ...
  - (b) o ponto inicial é  $x_0 = 1.3$ , então a sequência converge a  $x^*$ .
  - (c)  $x_0 = 1.5$ , então a sequência diverge.
16. Calcular as raízes dos polinômios abaixo, por Birge-Vieta, usando uma casa decimal.
- (a)  $P(x) = x^3 - 21x^2 + 95x - 75 = 0$ .
  - (b)  $P(x) = x^4 - 18x^3 + 97x^2 - 180x + 100 = 0$ .
17. Seja  $x = \xi$  uma raiz de  $f(x)$ , tal que  $f'(\xi) \neq 0$  e  $f''(\xi) = 0$ . Mostre que neste caso o Método de Newton-Raphson tem convergência cúbica.