Cálculo Numérico - IME/UERJ

Lista de Exercícios 8 - Engenharia

Métodos numéricos para Equações Diferenciais Ordinárias

1. Determine a solução numérica aproximada do PVI

$$\begin{cases} y'(x) + 2y(x) = 0, & \forall x \in [0,1], \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

com passo $h = 0,2$, usando:

(a) Método de Euler.

(b) Método de Euler Melhorado (Runge-Kutta de Ordem 2).

(c) Sabendo-se que a solução exata da equação é $y(x) = e^{-2x}$, calcule os erros absolutos das iterações nos itens anteriores.

2. Um corpo com massa inicial de 200 Kg está em movimento sob a ação de uma força constante de 2000 N. Sabendo-se que esse corpo está perdendo 1 Kg de sua massa por segundo e considerando que a resistência do ar é o dobro de sua velocidade e que o corpo está em repouso no instante $t = 0$, então o PVI que descreve a variação de sua velocidade é dado por:

$$\begin{cases} v'(t) = \dfrac{2000 - 2v(t)}{200 - t}, & \forall t > 0, \\ v(0) = 0. \end{cases}$$

Determine a velocidade do corpo $v(t)$ no instante $t = 5$ segundos com intervalos de $0,5$ segundos, usando:

(a) Método de Euler.

(b) Método de Euler Melhorado.

(c) Sabendo-se que a solução exata da equação é $v(t) = 10t - (1/40)t^2$, compare com a solução aproximada obtida nos items anteriores.

3. Determine a solução numérica aproximada do PVI

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0, & \forall x \in [0,1] \\ y(0) = 0,\ y'(0) = \dfrac{1}{\pi}, \end{cases}$$

usando, com passo $h = 0.2$:

(a) Método de Euler.

(b) Método de Euler Melhorado.

(c) Sabendo-se que a solução exata da equação é $y(x) = (1/\pi^2)\,\mathrm{sen}(\pi x)$, compare com a solução aproximada obtida nos itens anteriores.

Dica: use mudança de variável: $y'(x) = z(x)$.

4. Seja o PVI

$$\begin{cases} x'(t) = x - 2y, & x(0) = 0, \\ y'(t) = 2x + y, & y(0) = 4, \end{cases}$$

cuja solução exata é dada por:

$$x(t) = -4e^t\,\mathrm{sen}(2t), \quad y(t) = 4e^t\cos(2t).$$

Determine $x(0,2)$ e $y(0,2)$ usando:

(a) Método de Euler com passo $h = 0,1$.

(b) Método de Euler Melhorado com passo $h = 0,2$.

(c) Calcule o erro absoluto em cada iteração k dos itens anteriores usando a norma do máximo

$\|E_k\|_\infty = \max\{|x(t_k) - x_k|, |y(t_k) - y_k|\}$.