CÁLCULO NUMÉRICO
UERJ

Integração Numérica

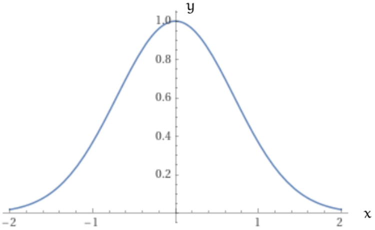
Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br
IME-UERJ

Sumário

Introdução

Motivação: Tente resolver a integral definida a seguir:

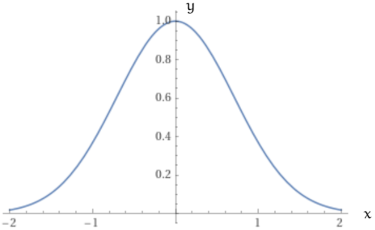
$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = ?$$



Introdução

Motivação: Tente resolver a integral definida a seguir:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = ?$$

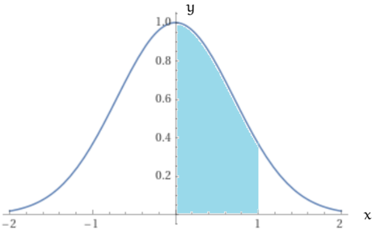


Essa integral não tem primitiva em termos de funções elementares!

Introdução

Motivação: Tente resolver a integral definida a seguir:

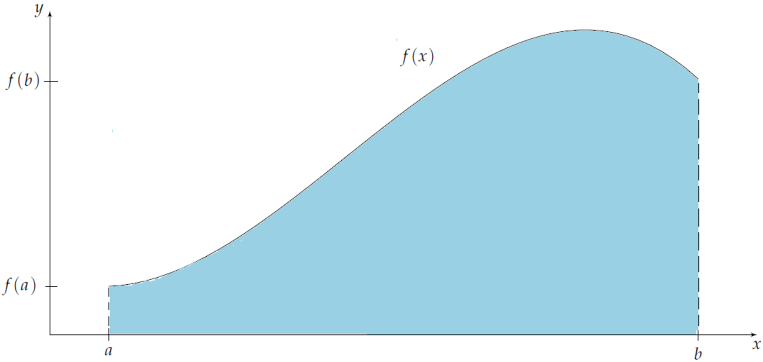
$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = ?$$



Essa integral não tem primitiva em termos de funções elementares!
Mas ela tem um valor numérico bem definido, que corresponde à área em azul acima!

Introdução

Integral definida de uma função

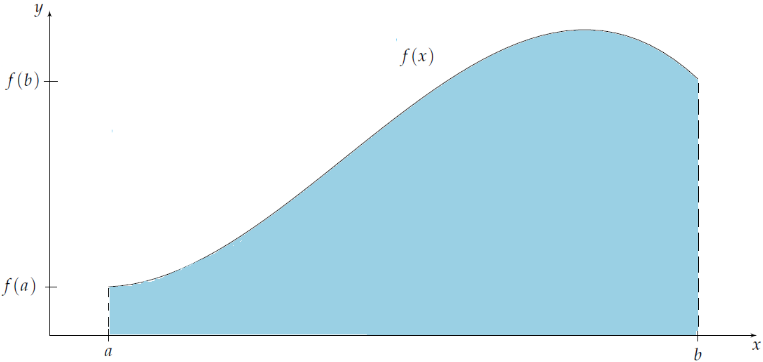


Solução analítica:

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)dx$$

Introdução

Integral definida de uma função



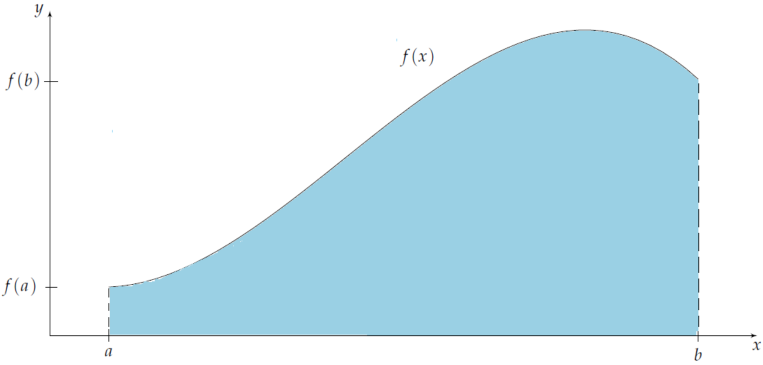
Solução analítica:

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)dx$$

Mas, e quando a primitiva de $f(x)$ é desconhecida?

Introdução

Integral definida de uma função

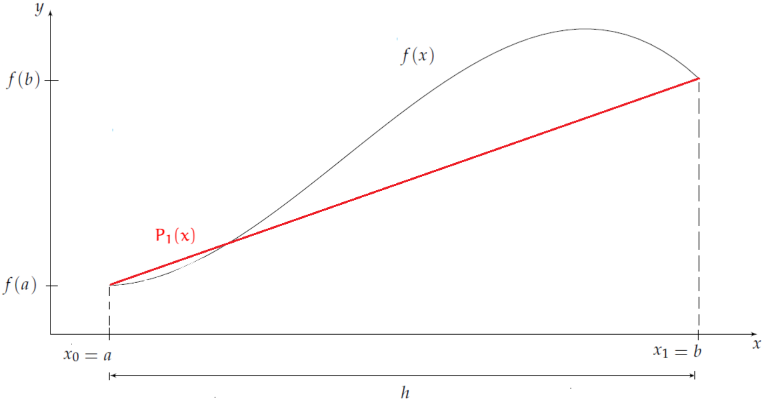


Mas, e quando a primitiva de $f(x)$ é desconhecida?

Solução numérica:

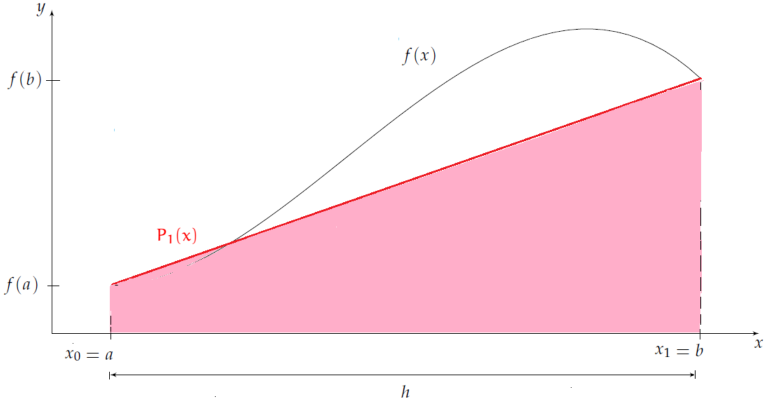
- Regra dos Trapézios
- Regra $(1/3)$ de Simpson

Regra dos Trapézios



No intervalo $[a, b]$, aproximamos a curva da função $f(x)$ por uma reta $P_1(x)$.

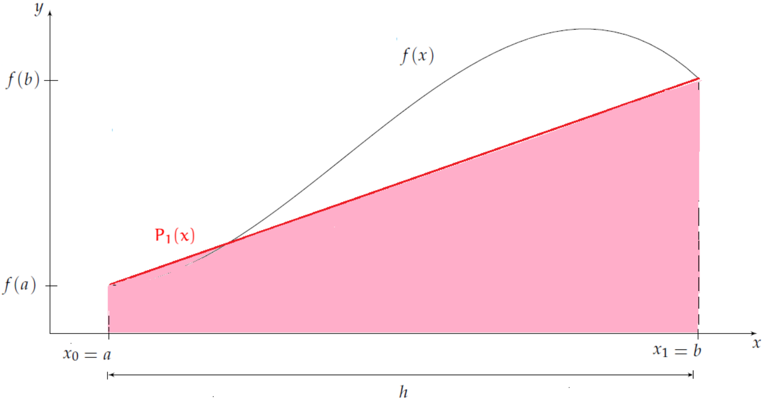
Regra dos Trapézios



No intervalo $[a, b]$, aproximamos a curva da função $f(x)$ por uma reta $P_1(x)$. Assim, aproximamos a integral:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x)dx.$$

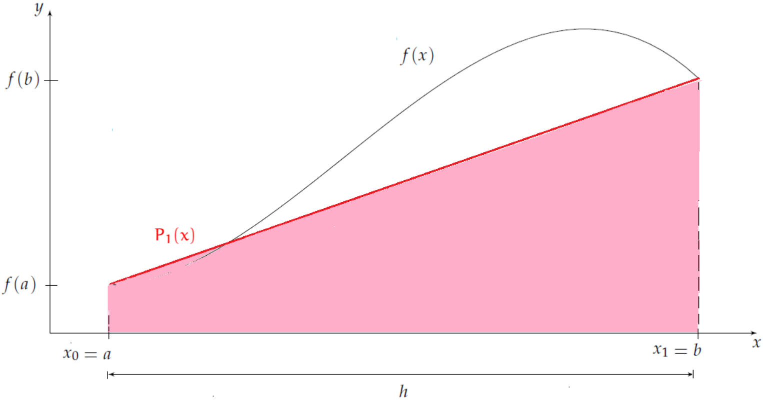
Regra dos Trapézios



No intervalo $[a, b]$, aproximamos a curva da função $f(x)$ por uma reta $P_1(x)$.
Assim, aproximamos a integral:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x)dx = \text{Área do Trapézio.}$$

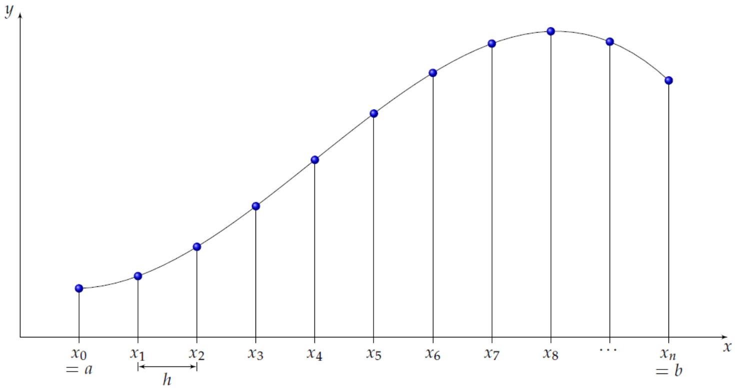
Regra dos Trapézios



Logo, obtemos a **Regra dos Trapézios simples**:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{a=x_0}^{b=x_1} P_1(x)dx = (f(a)+f(b))\left(\frac{b-a}{2}\right) = \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)].$$

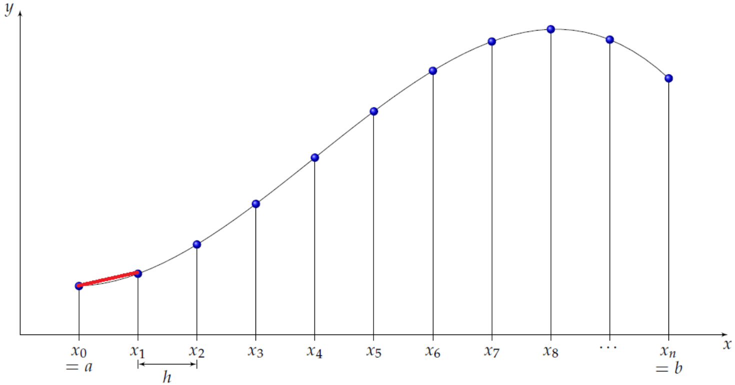
Regra dos Trapézios



Para aumentar a precisão da integral, precisamos dividir o intervalo $[a, b]$ em muitos subintervalos de mesmo tamanho h.

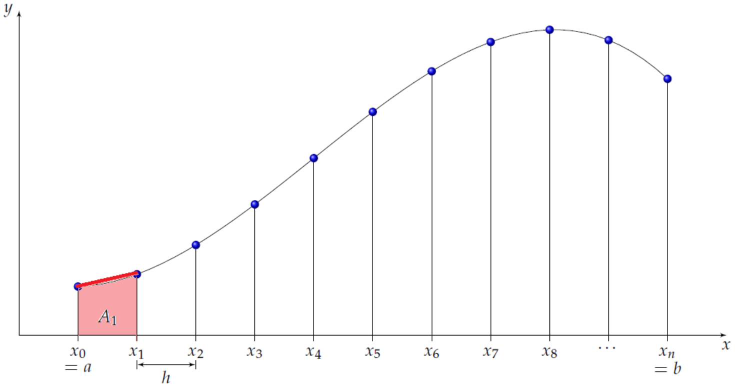
Com n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, onde $i = 1, 2, \ldots, n$, temos $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Regra dos Trapézios



Em cada subintervalo, aproximo a curva $f(x)$ de uma reta.
No subintervalo $[x_0, x_1]$, aproximo $f(x)$ por $P_1(x)$.

Regra dos Trapézios

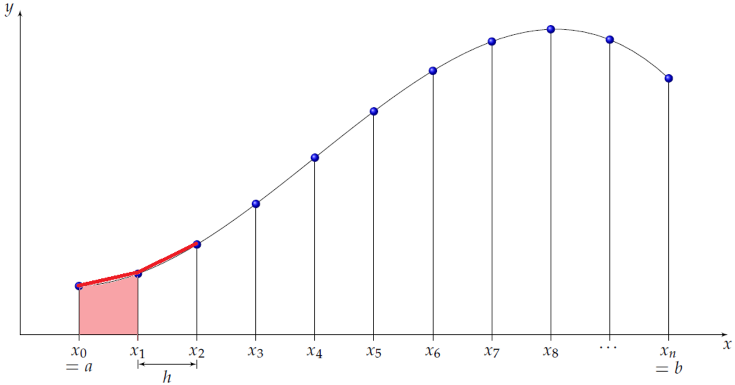


Em cada subintervalo, aproximo a curva $f(x)$ de uma reta.
No subintervalo $[x_0, x_1]$, aproximo $f(x)$ por $P_1(x)$.

A área do trapézio sob $P_1(x)$ em $[x_0, x_1]$ é dada por:

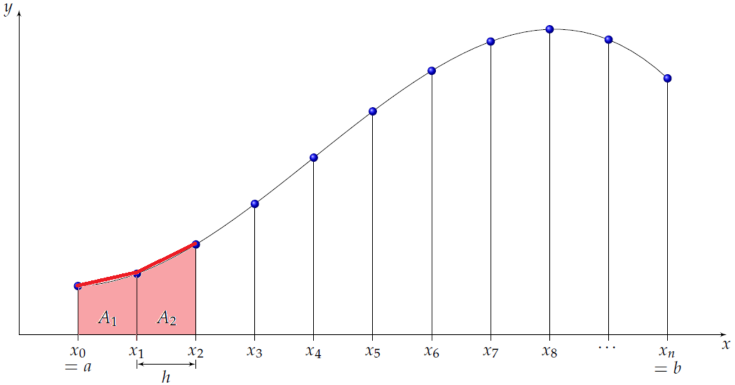
$$A_1 = \int_{x_0}^{x_1} P_1(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)].$$

Regra dos Trapézios



No subintervalo $[x_1, x_2]$, aproximo $f(x)$ por $P_1(x)$.

Regra dos Trapézios

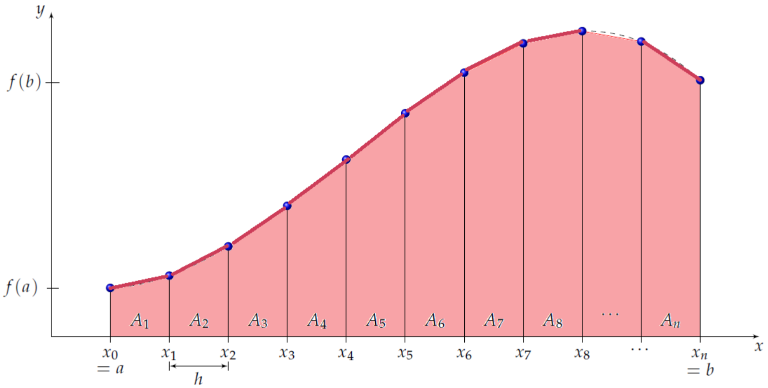


No subintervalo $[x_1, x_2]$, aproximo $f(x)$ por $P_1(x)$.

A área do trapézio sob $P_1(x)$ em $[x_1, x_2]$ é dada por:

$$A_2 = \int_{x_1}^{x_2} P_1(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)].$$

Regra dos Trapézios



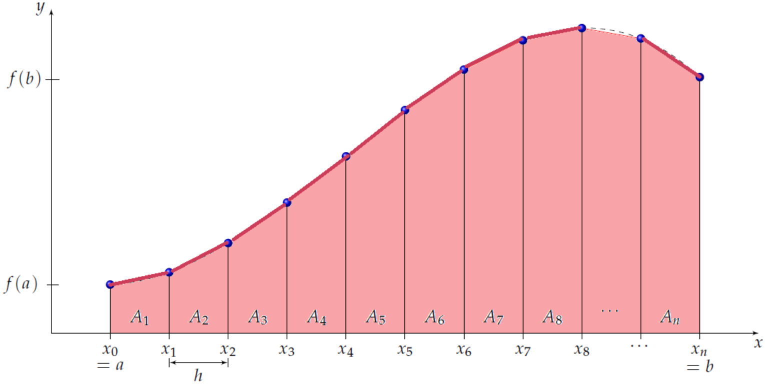
Continuando até o subintervalo $[x_{n-1}, x_n]$, a integral aproximada é dada por:

$$\int_{a=x_0}^{b=x_n} f(x)dx \approx A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n,$$

onde A_i é a área do trapézio i, dada por:

$$A_i = (f(x_{i-1}) + f(x_i))\frac{h}{2}, \text{ para } i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

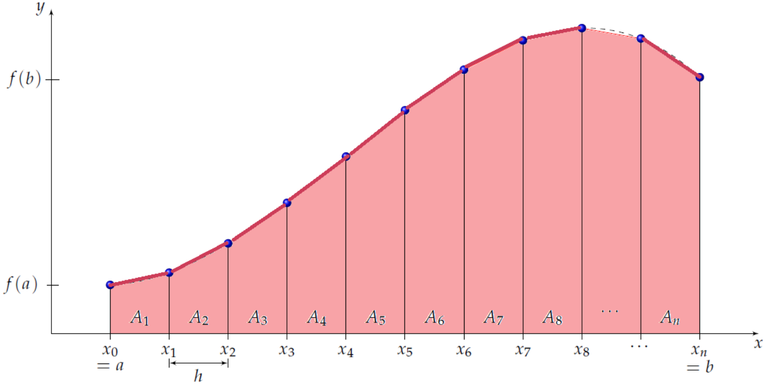
Regra dos Trapézios



Assim,

$$\int_{a=x_0}^{b=x_n} f(x)dx \approx (f(x_0)+f(x_1))\frac{h}{2} + (f(x_1)+f(x_2))\frac{h}{2} + \ldots + (f(x_{n-1})+f(x_n))\frac{h}{2}.$$

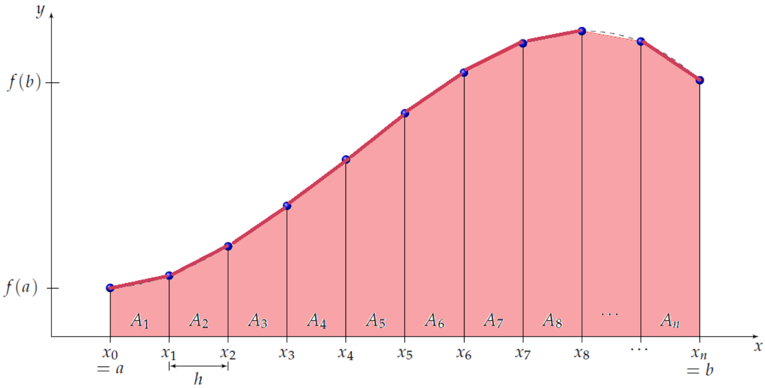
Regra dos Trapézios



Colocando $\frac{h}{2}$ em evidência, temos:

$$\int_{a=x_0}^{b=x_n} f(x) \approx \frac{h}{2}[(f(x_0)+f(x_1))+(f(x_1)+f(x_2))+\ldots+(f(x_{n-1})+f(x_n))].$$

Regra dos Trapézios

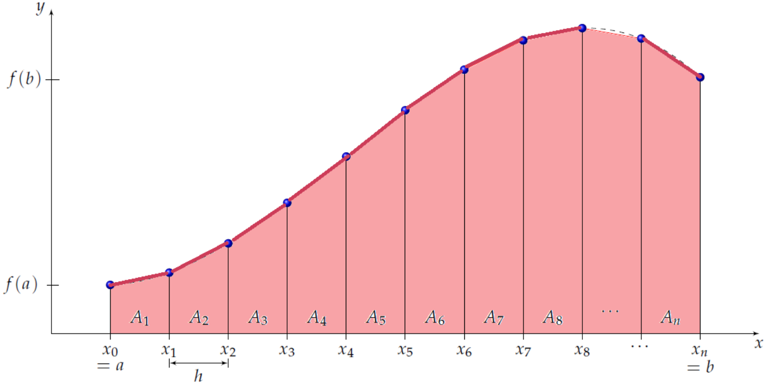


Logo,

$$\int_{a=x_0}^{b=x_n} f(x) \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2)) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

Esta é a **Regra dos Trapézios repetida**.

Regra dos Trapézios

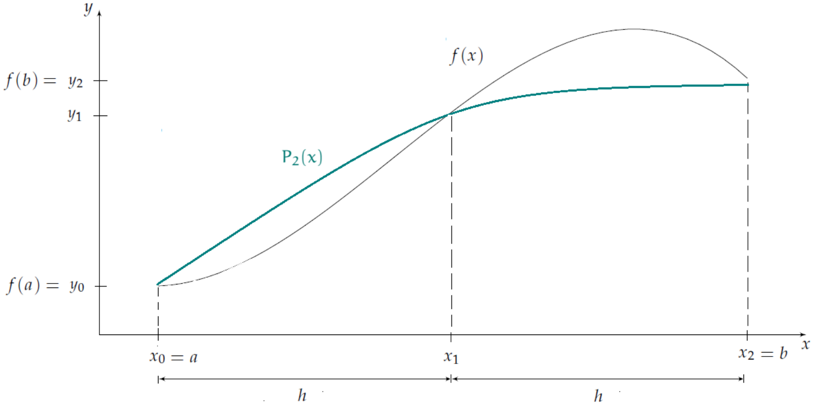


Logo,

$$\int_{a=x_0}^{b=x_n} f(x) \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2)) + \ldots + f(x_{n-1})) + f(x_n)].$$

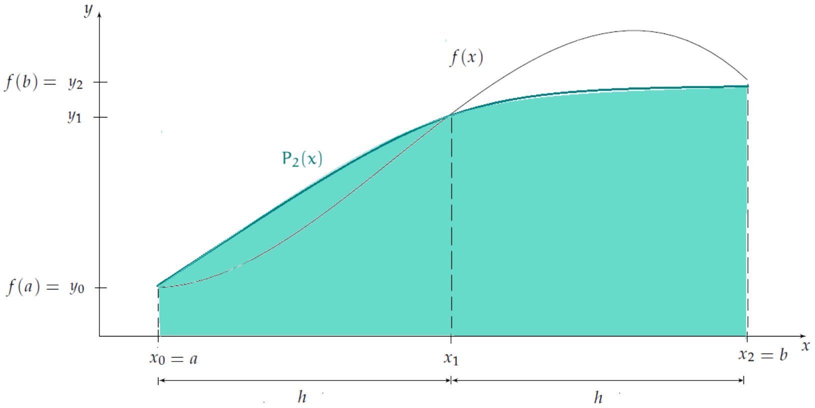
Esta é a **Regra dos Trapézios repetida**.

Regra de 1/3 Simpson



No intervalo $[a, b]$, aproximamos a curva da função $f(x)$ por uma parábola $P_2(x)$.

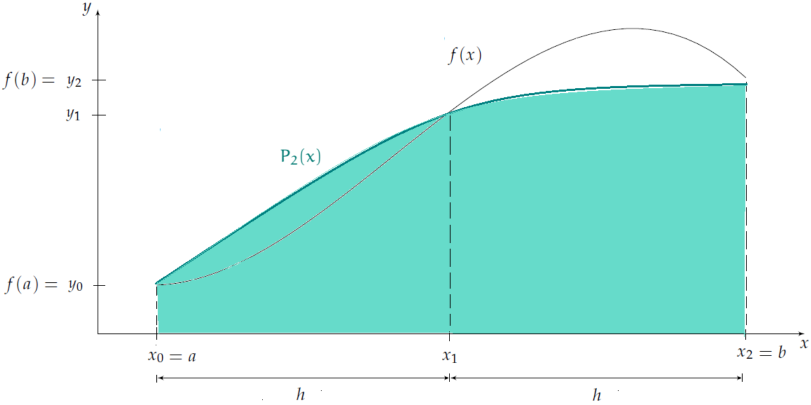
Regra (1/3) de Simpson



No intervalo $[a, b]$, aproximamos a curva da função $f(x)$ por uma parábola $P_2(x)$. Assim, aproximamos a integral:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_2(x)dx.$$

Regra (1/3) de Simpson

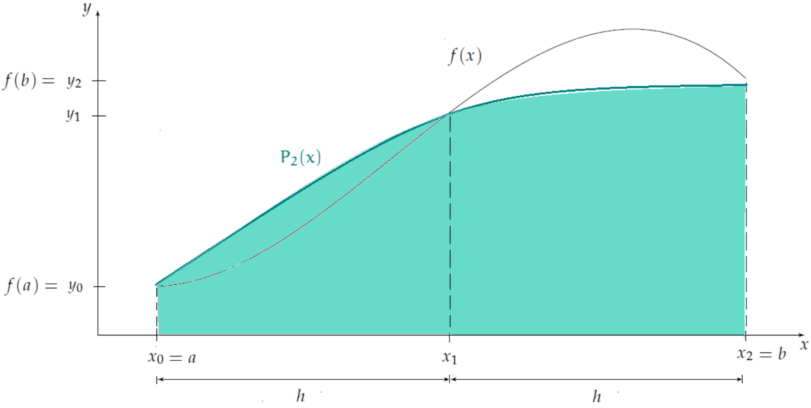


Sabemos do estudo de interpolação quadrática que:

$$P_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2), \text{ onde}$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)};\ L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)};\ L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

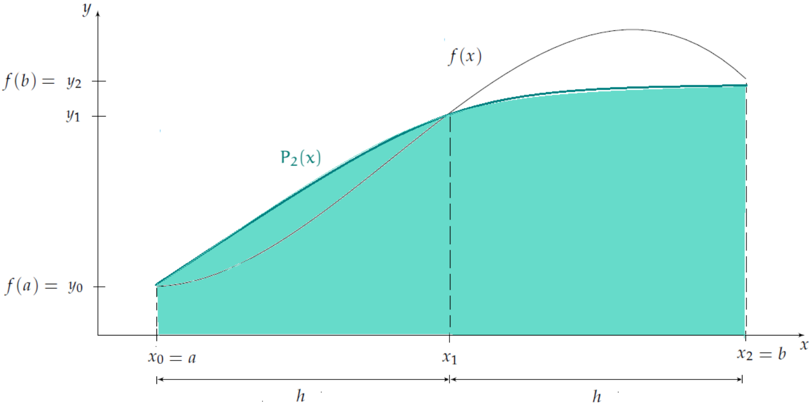
Regra (1/3) de Simpson



Assim,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_2(x)dx = \int_{a=x_0}^{b=x_2} [\, L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) \,]\, dx.$$

Regra (1/3) de Simpson



Assim,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_2(x)dx =$$

$$\int_a^b \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \right] dx.$$

Regra (1/3) de Simpson

Cálculo das parcelas da integral:

1a. parcela do lado direito de $\int_a^b P_2(x)\ dx$**:**

$$\int_a^b \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0)dx = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0)dx$$

$$= \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \int_{x_0}^{x_2} (x-x_1)(x-x_2)dx.$$

Sabendo que $x_1 - x_0 = h \Rightarrow x_0 - x_1 = -h$ e $x_2 - x_0 = 2h \Rightarrow x_0 - x_2 = -2h$, temos que $(x_0-x_1)(x_0-x_2) = (-h)(-2h) = 2h^2$.

Substituindo na equação, obtemos:

$$\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \int_{x_0}^{x_2} (x-x_1)(x-x_2)dx = \frac{f(x_0)}{2h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x-x_1)(x-x_2)dx.$$

Podemos resolver essa última integral em azul de forma mais simples usando mudança de variável.

Regra (1/3) de Simpson

Mudança de variável de $x \in [x_0, x_2]$ para $t \in [0, 2]$:

As distâncias de um ponto à origem são proporcionais nas duas retas. Logo,

$$\frac{x - x_0}{x_2 - x_0} = \frac{t - 0}{2 - 0} = \frac{t}{2} \Rightarrow \frac{x - x_0}{2h} = \frac{t}{2} \Rightarrow x = x_0 + ht$$

Logo,

$$\frac{dx}{dt} = h \Rightarrow dx = hdt; \qquad (1)$$

$$x - x_1 = (x_0 + ht) - x_1 = (x_0 - x_1) + ht = -h + ht = h(t - 1); \qquad (2)$$

$$x - x_2 = (x_0 + ht) - x_2 = (x_0 - x_2) + ht = -2h + ht = h(t - 2) \qquad (3)$$

Regra (1/3) de Simpson

Substituindo (1), (2) e (3) na integral em azul, obtemos:

$$\frac{f(x_0)}{2h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)dx = \frac{f(x_0)}{2h^2}\int_0^2 h(t-1)h(t-2)hdt$$

$$= \frac{f(x_0)}{2h^2}h^3\int_0^2 (t-1)(t-2)dt = f(x_0)\frac{h}{2}\int_0^2 (t-1)(t-2)dt.$$

$$= f(x_0)\frac{h}{2}\int_0^2 (t^2-3t+2)dt = f(x_0)\frac{h}{2}\left[\frac{t^3}{3}-\frac{3t^2}{2}+2t\right]_0^2$$

$$= f(x_0)\frac{h}{2}\left[\frac{8}{3}-\frac{3\cdot 4}{2}+4\right] = f(x_0)\frac{h}{2}\left[\frac{8}{3}-2\right] = f(x_0)\frac{h}{\cancel{2}}\left[\frac{\cancel{2}}{3}\right] = \frac{h}{3}f(x_0)$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_2}\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)dx = \frac{h}{3}f(x_0).$$

Regra (1/3) de Simpson

De forma análoga, as outras duas parcelas da integral $\int_a^b P_2(x)dx$ ficam:

$$\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1)dx = \frac{4h}{3} f(x_1);$$

$$\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)dx = \frac{h}{3} f(x_2).$$

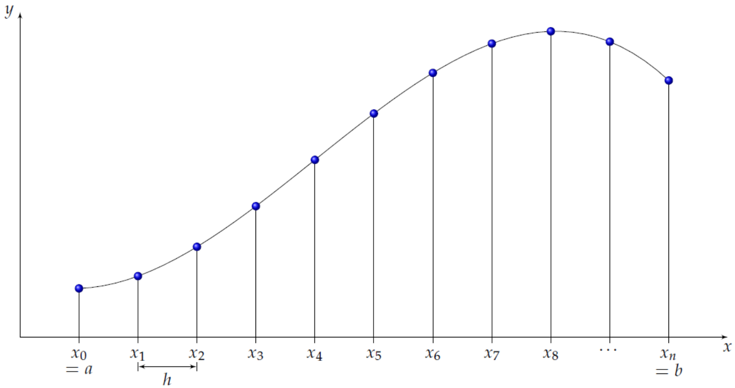
Logo, somando as parcelas,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_2(x)dx = \frac{h}{3} f(x_0) + \frac{4h}{3} f(x_1) + \frac{h}{3} f(x_2)$$

E assim, obtemos a **Regra (1/3) de Simpson simples**:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_2(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

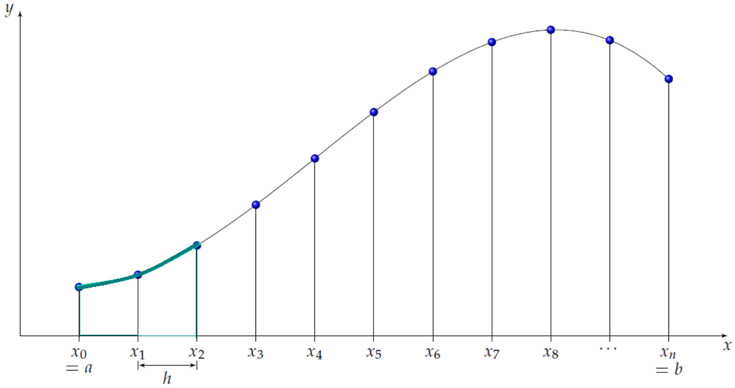
Regra (1/3) de Simpson



Para aumentar a precisão da integral, precisamos dividir o intervalo $[a, b]$ em muitos subintervalos de mesmo tamanho h.

Com n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, onde $i = 1, 2, \ldots, n$, temos $h = \dfrac{b-a}{n}$.

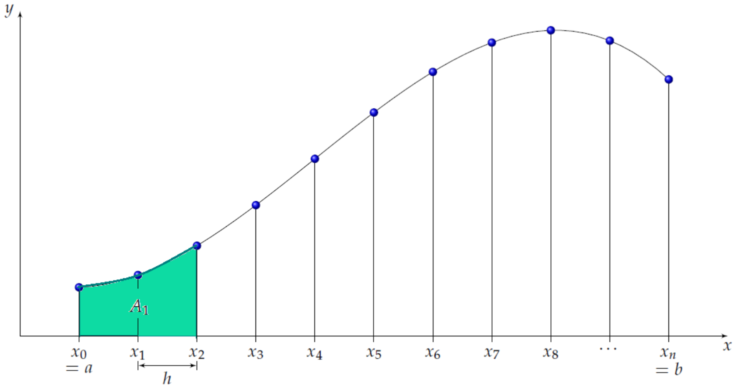
Regra (1/3) de Simpson



Para aproximar uma curva $f(x)$ de uma parábola $P_2(x)$, precisamos de 3 nós de interpolação.

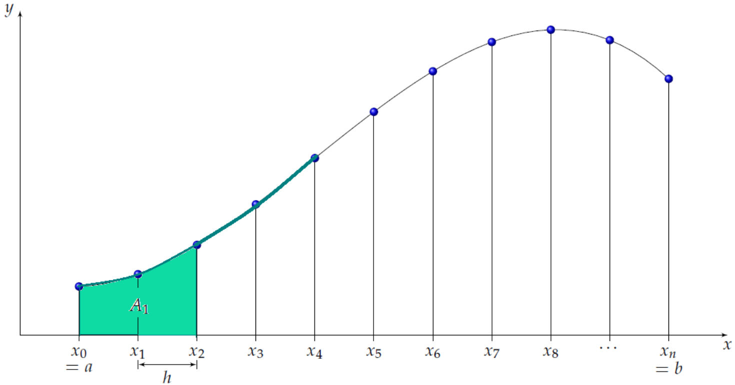
No subintervalo $[x_0, x_2]$, aproximo $f(x)$ por $P_2(x)$, passando por 3 nós: x_0, x_1, x_2.

Regra (1/3) de Simpson



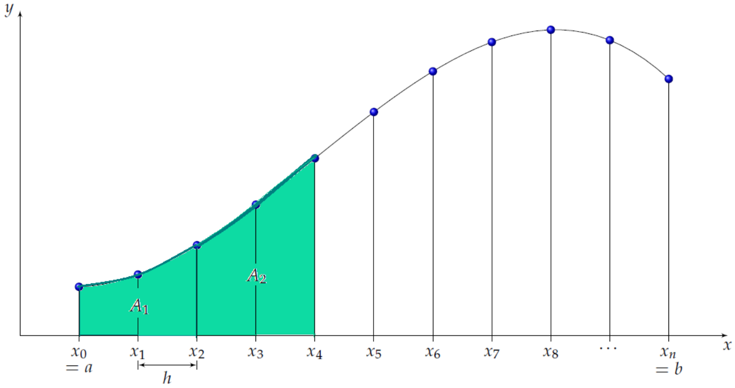
Sob essa parábola, achamos a área $A_1 = \int_{x_0}^{x_2} P_2(x) = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$.

Regra (1/3) de Simpson



No subintervalo $[x_2, x_4]$, aproximo $f(x)$ por $P_2(x)$, passando por 3 nós: x_2, x_3, x_4.

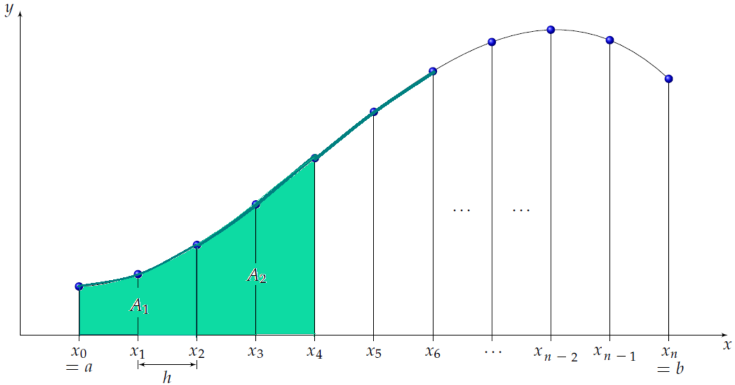
Regra (1/3) de Simpson



No subintervalo $[x_2, x_4]$, aproximo $f(x)$ por $P_2(x)$, passando por 3 nós: x_2, x_3, x_4.

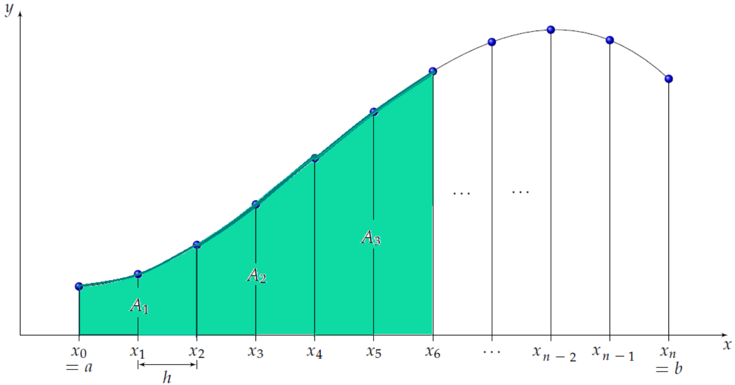
Sob essa parábola, achamos a área $A_2 = \int_{x_2}^{x_4} P_2(x) = \frac{h}{3}[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)]$.

Regra (1/3) de Simpson



No subintervalo $[x_4, x_6]$, aproximo $f(x)$ por $P_2(x)$, passando por 3 nós: x_4, x_5, x_6.

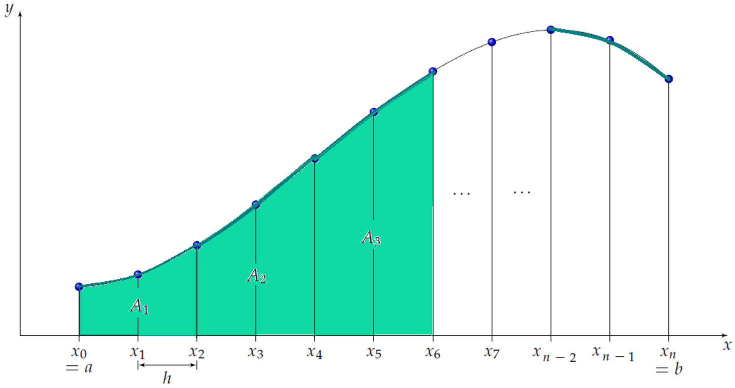
Regra (1/3) de Simpson



No subintervalo $[x_4, x_6]$, aproximo $f(x)$ por $P_2(x)$, passando por 3 nós: x_4, x_5, x_6.

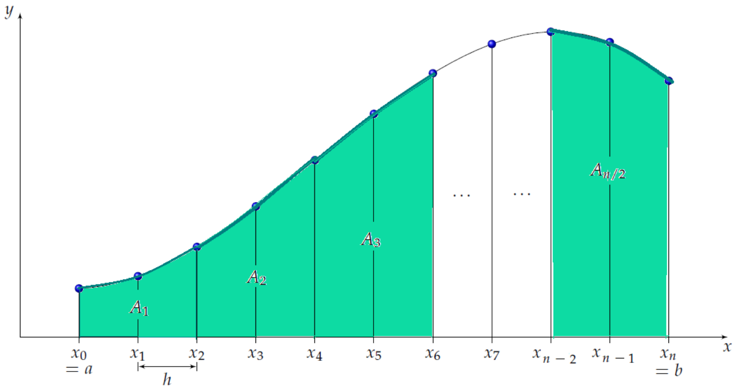
Sob essa parábola, achamos a área $A_3 = \int_{x_4}^{x_6} P_2(x) = \frac{h}{3}[f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)]$.

Regra (1/3) de Simpson



Continuando o processo até o subintervalo $[x_{n-2}, x_n]$, aproximo $f(x)$ por $P_2(x)$, passando por 3 nós: x_{n-2}, x_{n-1}, x_n.

Regra (1/3) de Simpson

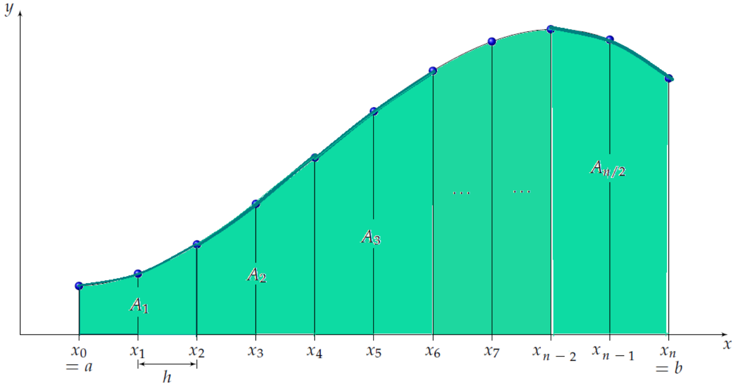


Continuando o processo até o subintervalo $[x_{n-2}, x_n]$, aproximo $f(x)$ por $P_2(x)$, passando por 3 nós: x_{n-2}, x_{n-1}, x_n.

Sob essa parábola, achamos a área

$$A_{n/2} = \int_{x_{n-2}}^{x_n} P_2(x) = \frac{h}{3}[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

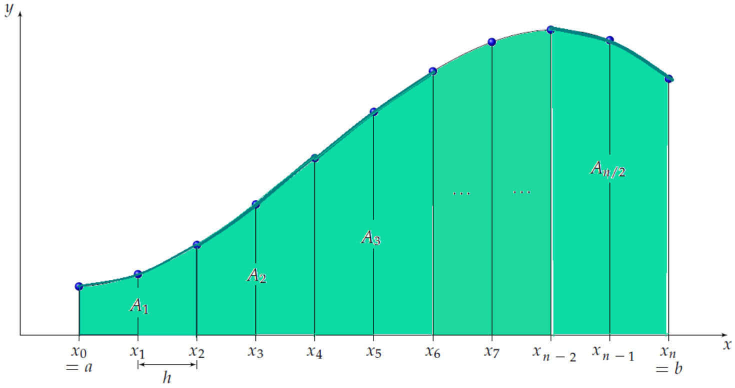
Regra (1/3) de Simpson



Portanto, a integral no intervalo $[a, b] = [x_0, x_n]$ é aproximada pela soma das áreas:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_2(x)dx = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots A_{n/2}.$$

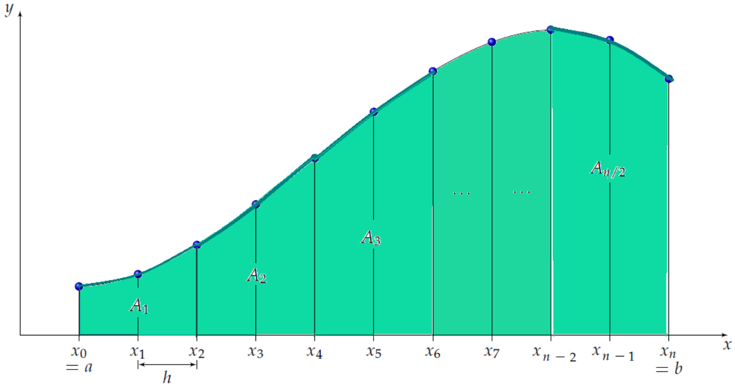
Regra (1/3) de Simpson



Logo,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_2(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)] + \frac{h}{3}[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)]$$
$$+\frac{h}{3}[f(x_4)+4f(x_5)+f(x_6)] + \ldots + \frac{h}{3}[f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)].$$

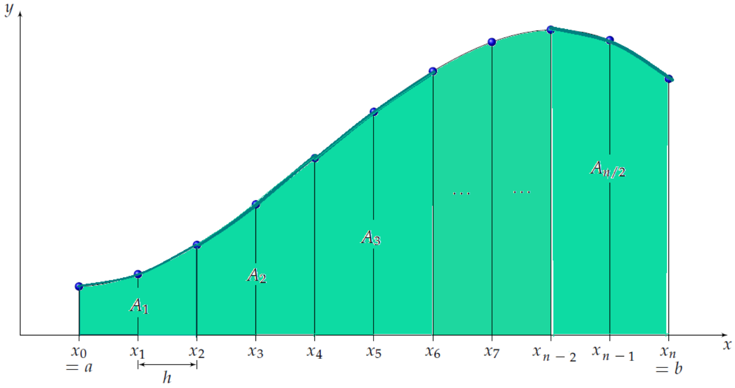
Regra (1/3) de Simpson



Colocando $\frac{h}{3}$ em evidência, temos:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_2(x)dx = \frac{h}{3}([f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)]$$
$$+[f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)] + \ldots + [f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]).$$

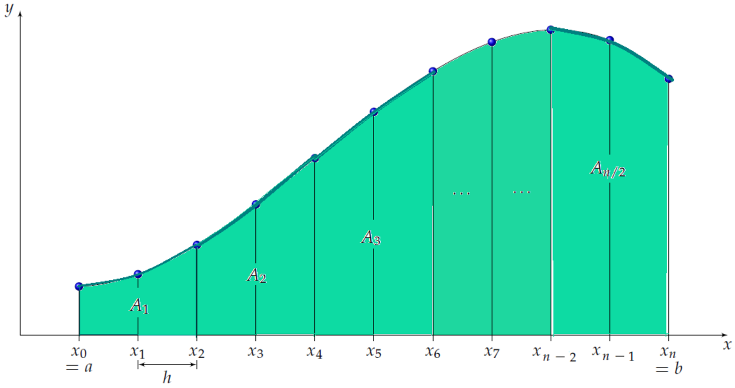
Regra (1/3) de Simpson



Colocando $\frac{h}{3}$ em evidência, obtemos:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_2(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + 2f(x_6) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

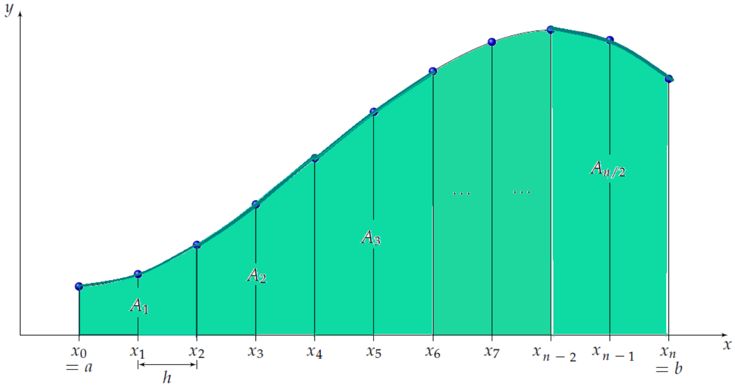
Regra (1/3) de Simpson



Esta é a **Regra de Simpson repetida**:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_2(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + 2f(x_6) + \ldots + 4f(x_{n-3}) + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

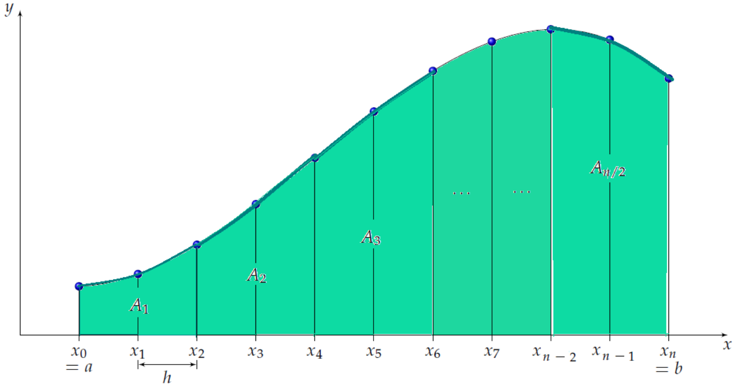
Regra (1/3) de Simpson



Esta é a **Regra de Simpson repetida**:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_2(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + \ldots + f(x_{n-1})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + \ldots + f(x_{n-2})) + f(x_n)].$$

Regra (1/3) de Simpson



Note que para cada área A_i, usamos 2 subintervalos: $[x_{2i-2}, x_{2i-1}]$ e $[x_{2i-1}, x_{2i}]$, para $i = 1, 2, 3, \ldots, \frac{n}{2}$.

Portanto, o número total de subintervalos na Regra de Simpson **deve ser par!**

Erros das regras de Trapézios e (1/3) de Simpson

Erro global da Regra dos Trapézios

$$E_{TR} = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi),$$

sendo ξ uma constante (desconhecida), tal que $a \leq \xi \leq b$.

Como não conhecemos ξ, podemos delimitar o erro:

Limitante superior do erro da Regra dos Trapézios

$$|E_{TR}| \leq \frac{|b-a|^3}{12n^2} M_2,$$

onde $M_2 = \max\limits_{a \leq \xi \leq b} |f''(\xi)|$

Erros das regras de Trapézios e Simpson

Erro global da Regra (1/3) de Simpson

$$E_S = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(iv)}(\xi),$$

sendo ξ uma constante (desconhecida), tal que $a \leq \xi \leq b$, e **n deve ser par**.

Como não conhecemos ξ, podemos delimitar o erro:

Limitante superior do erro da Regra (1/3) de Simpson

$$|E_S| \leq \frac{|b-a|^5}{180n^4} M_4,$$

onde $M_4 = \max\limits_{a \leq \xi \leq b} |f^{(iv)}(\xi)|$.

Exemplos

Exemplo 1 (Regra dos Trapézios):

Considere a integral definida $\int_0^1 e^x \, dx$.

(a) Estime o valor da integral usando a Regra dos Trapézios repetida com 10 subintervalos.

(b) Qual o número **mínimo** n de subintervalos que devemos usar para que o erro cometido seja menor que 10^{-3}?

Exemplos

Solução:

(a) Com $n = 10$, temos $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1-0}{10} = 0,1$.

Como $f(x) = e^x$, obtemos pela Regra dos Trapézios:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{0,1}{2}[f(0) + 2\cdot f(0,1) + 2\cdot f(0,2) + 2\cdot f(0,3) + 2\cdot f(0,4) + 2\cdot f(0,5)$$
$$+ 2\cdot f(0,6) + 2\cdot f(0,7) + 2\cdot f(0,8) + 2\cdot f(0,9) + f(1)]$$

$$\Rightarrow \int_0^1 e^x\,dx \approx \frac{0,1}{2}[e^0 + 2\cdot e^{0,1} + 2\cdot e^{0,2} + 2\cdot e^{0,3} + 2\cdot e^{0,4} + 2\cdot e^{0,5}$$
$$+ 2\cdot e^{0,6} + 2\cdot e^{0,7} + 2\cdot e^{0,8} + 2\cdot e^{0,9} + e^1]$$
$$\approx 1,7197.$$

Obs.: Solução analítica

$$\int_0^1 e^x\,dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 \approx 1,7183 \Rightarrow E_{abs} \approx |1,7197 - 1,7183| \approx 0,0014.$$

Exemplos

- (b) Número mínimo de subintervalos n para que $|E_{TR}| < 10^{-3}$:

Do limitante superior do erro da Regra dos Trapézios, extraímos que:

$$|E_{TR}| \leq \frac{|b-a|^3}{12n^2} M_2 < 10^{-3} \Rightarrow |E_{TR}| \leq \frac{|1-0|^3}{12n^2} M_2 < 10^{-3},$$

onde $M_2 = \max\limits_{0 \leq \xi \leq 1} |f''(x)| = \max\limits_{0 \leq \xi \leq 1} |e^x|$.

Nos extremos de $[a,b] = [0,1]$: $|e^0| = 1$; $|e^1| \approx 2,7183$.

$\Rightarrow M_2 = \max\{|e^0|, |e^1|\} = \max\{1;\ 2,7183\} = 2,7183$.

Logo, $|E_{TR}| \leq \dfrac{|1-0|^3}{12n^2}(2,7183) < 10^{-3}$

$$\Rightarrow \frac{2,7183}{12n^2} < 10^{-3} \Rightarrow \frac{12n^2}{2,7183} > 10^3$$

Exemplos

$$\Rightarrow 12n^2 > 2,7183 \cdot 10^3 \Rightarrow n^2 > \frac{2,7183 \cdot 10^3}{12} \Rightarrow n > \sqrt{\frac{2,7183 \cdot 10^3}{12}}$$

$$\Rightarrow n > 15,0507$$

Logo, $n_{\text{min}} = 16$.

Exemplo 2 (Regra (1/3) de Simpson):

Considere a mesma integral definida no exemplo anterior: $\displaystyle\int_0^1 e^x \, dx$.

(a) Estime o valor da integral usando a Regra de Simpson repetida com 10 subintervalos.

(b) Qual o número **mínimo** n de subintervalos que devemos usar para que o erro cometido seja menor que 10^{-3}?

Exemplos

Solução:

(a) Com $n = 10$, temos $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1-0}{10} = 0,1$.

Como $f(x) = e^x$, obtemos pela Regra de Simpson:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{0,1}{3}[f(0) + 4\cdot f(0,1) + 2\cdot f(0,2) + 4\cdot f(0,3) + 2\cdot f(0,4)$$
$$+ 4\cdot f(0,5) + 2\cdot f(0,6) + 4\cdot f(0,7) + 2\cdot f(0,8)$$
$$+ 4\cdot f(0,9) + f(1)]$$

$$\Rightarrow \int_0^1 e^x\,dx \approx \frac{0,1}{3}[e^0 + 4\cdot e^{0,1} + 2\cdot e^{0,2} + 4\cdot e^{0,3} + 2\cdot e^{0,4} + 4\cdot e^{0,5}$$
$$+ 2\cdot e^{0,6} + 4\cdot e^{0,7} + 2\cdot e^{0,8} + 4\cdot e^{0,9} + e^1]$$
$$\approx 1,71828278192$$

Obs.: Solução analítica

$$\int_0^1 e^x\,dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 \approx 1,71828182846 \Rightarrow E_{abs} \approx 9,5346\cdot 10^{-7}.$$

Exemplos

(b) Número mínimo de subintervalos n para que $|E_S| < 10^{-3}$:

Do limitante superior do erro da Regra de Simpson, extraímos que:

$$|E_S| \leq \frac{|b-a|^5}{180n^4} M_4 < 10^{-3} \Rightarrow |E_S| \leq \frac{|1-0|^5}{180n^4} M_4 < 10^{-3},$$

onde $M_4 = \max\limits_{0 \leq \xi \leq 1} |f^{(iv)}(x)| = \max\limits_{0 \leq \xi \leq 1} |e^x|$.

Nos extremos de $[a, b] = [0, 1]$: $|e^0| = 1$; $|e^1| \approx 2,7183$.

$\Rightarrow M_4 = \max\{|e^0|, |e^1|\} = \max\{1;\ 2,7183\} = 2,7183$.

Logo, $|E_S| \leq \frac{|1-0|^5}{180n^4}(2,7183) < 10^{-3}$

$$\Rightarrow \frac{2,7183}{180n^4} < 10^{-3} \Rightarrow \frac{180n^4}{2,7183} > 10^3$$

Exemplos

$$\Rightarrow 180n^4 > 2,7183 \cdot 10^3 \Rightarrow n^4 > \frac{2,7183 \cdot 10^3}{180} \Rightarrow n > \sqrt[4]{\frac{2,7183 \cdot 10^3}{180}}$$

$$\Rightarrow n > 1,9713$$

Logo, $n_{\text{min}} = 2$.

Pergunta: E se a inequação final deste exercício tivesse sido $n > 2,9713$? Qual seria o número mínimo de subintervalos pela Regra de Simpson?

Exemplos

$$\Rightarrow 180n^4 > 2,7183 \cdot 10^3 \Rightarrow n^4 > \frac{2,7183 \cdot 10^3}{180} \Rightarrow n > \sqrt[4]{\frac{2,7183 \cdot 10^3}{180}}$$

$$\Rightarrow n > 1,9713$$

Logo, $n_{\text{min}} = 2$.

Pergunta: E se a inequação final deste exercício tivesse sido $n > 2,9713$? Qual seria o número mínimo de subintervalos pela Regra de Simpson?

Resposta: $n_{\text{min}} = 4$, pois na Regra de Simpson, n **deve ser sempre par!**

Referências I

- RUGGIERO, M.; LOPES, V.. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. Pearson, 1996, 2a. Ed.
- BURDEN, R.. **Numerical Analysis**. Brooks/Cole Pub Co, 1996, 6th Edition.