

Lista de Exercícios 3 - Sistemas Lineares - Métodos diretos e iterativos

1. Dado o sistema:

$$\begin{cases} -5x + y + z = -1 \\ x + y + 4z = 2 \\ -4x - y + 2z = -2 \end{cases}$$

resolva-o pelo método de eliminação de Gauss.

2. Tente resolver o seguinte sistema pela eliminação de Gauss. O que acontece? O que se pode concluir?

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 8 \\ 4x + 2y - 3z = -1 \\ 6x + 7y - 10z = -10 \end{cases}$$

3. Sejam a matriz \mathbf{A} e o vetor \mathbf{b} dados por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -6 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Agora, são pedidos os seguintes itens:

- (a) Determine as matrizes \mathbf{L} e \mathbf{U} da decomposição $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$.
- (b) Resolva o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ usando a fatoração \mathbf{LU} encontrada no item (a).

4. Faça o gráfico do seguinte sistema linear

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ -x + 2y = 2 \end{cases}$$

e resolva pelos métodos:

- (a) Gauss-Jacobi com tolerância $\epsilon = 0.04$. Marque as iterações no gráfico.
- (b) Gauss-Seidel com tolerância $\epsilon = 0.04$. Marque as iterações no gráfico e compare com o item (a).

5. Considere o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ para:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -7 \\ 3 & -5 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Reordene as equações convenientemente de modo que haja garantia de convergência para o método de Gauss-Seidel através do Critério de Sassenfeld. Justifique.
- (b) Para o sistema reformulado no item (a), calcule apenas uma iteração usando o método de Gauss-Seidel a partir de $X^{(0)} = (0, 26; 1, 15; -0, 59)^T$.
- (c) Determine o erro cometido na iteração do item (b) usando a norma do máximo.

6. Dado o sistema:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 5 \\ 2y + 5z = 9 \\ 2.1x + y + z = 3 \end{cases}$$

Calcule, pelo método de Gauss-Seidel, partindo de $X^{(0)} = (0, 0, 0)^t$, uma aproximação para $X^{(3)}$ e usando o sistema de forma tal que a convergência do método esteja garantida.

7. Dado o sistema

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Verifique se o Critério de Sassenfeld é satisfeito.
- (b) Se o item (a) for satisfeito, resolva por Gauss-Seidel com tolerância $\epsilon \leq 10^{-4}$ e partindo de $X^{(0)} = (0, 0, 0)^t$.