Cálculo Numérico - IME/UERJ

Lista de Exercícios 5 - Matemática - Sistemas Lineares - Métodos iterativos

1. Considere o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ para:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -7 \\ 3 & -5 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Reordene as equações convenientemente de modo que haja garantia de convergência para o método de Gauss-Seidel através do Critério de Sassenfeld. Justifique.

   (b) Para o sistema reformulado no item (a), calcule apenas uma iteração usando o método de Gauss-Seidel a partir de $X^{(0)} = (0,26; 1,15; -0,59)^T$.

   (c) Determine o erro cometido na iteração do item (b) usando a norma do máximo.

2. Dado o sistema:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 5 \\ \quad 2y + 5z = 9 \\ 2.1x + y + z = 3 \end{cases}$$

   Calcule, pelo método de Gauss-Seidel, partindo de $X^{(0)} = (0,0,0)^t$, uma aproximação para $X^{(3)}$ e usando o sistema de forma tal que a convergência do método esteja garantida.

3. Dado o sistema

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Verifique se o Critério de Sassenfeld é satisfeito.

   (b) Se o item (a) for satisfeito, resolva por Gauss-Seidel com tolerância $\epsilon \leq 10^{-4}$ e partindo de $X^{(0)} = (0,0,0)^t$.

4. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

   (a) Mostre que este sistema não satisfaz o Critério das Linhas.

   (b) Mostre que este sistema não satisfaz o Critério de Sassenfeld.

   (c) Mostre que o sistema obtido permutando-se as duas primeiras equações satisfaz o Critério de Sassenfeld.

   (d) Usando o método de Gauss-Seidel, determine a solução aproximada do sistema com a permutação sugerida no item anterior e erro na norma do máximo

$$\|x^{k+1} - x^k\|_\infty = \max_{i=1,\dots,4} |x_i^{k+1} - x_i^k| \leq \epsilon = 1 \cdot 10^{-3}$$