CÁLCULO NUMÉRICO
UERJ/2023

Fatoração LU - Inversa de uma matriz

Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br
IME-UERJ

Inversa de uma matriz A com fatoração LU

- Sem pivoteamento parcial ($A = LU$)

Sabemos que:

$A = LU \Rightarrow A^{-1} = (LU)^{-1} \Rightarrow A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$

Achar A^{-1} $\Rightarrow$ Achar U^{-1}, L^{-1} .

- Uma maneira de encontrar L^{-1} (usando Eliminação de Gauss):

$$A = LU \Rightarrow L^{-1}A = \underbrace{L^{-1}L}_{I}\,U \Rightarrow L^{-1}A = U.$$

Logo, $L^{-1}[A \mid I] \Rightarrow [L^{-1}A \mid L^{-1}I] \Rightarrow [U \mid L^{-1}]$

- Uma maneira de encontrar U^{-1} (usando Eliminação de Gauss-Jordan):

$U^{-1}[U \mid I] \Rightarrow [U^{-1}U \mid U^{-1}I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$

Inversa de uma matriz A com fatoração LU

• Sem pivoteamento parcial ($A = LU$)

Sabemos que:

$$A = LU \Rightarrow A^{-1} = (LU)^{-1} \Rightarrow A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$$

Achar A^{-1} $\Rightarrow$ Achar U^{-1}, L^{-1} .

• Uma maneira de encontrar L^{-1} (usando Eliminação de Gauss):

$$A = LU \Rightarrow L^{-1}A = \underbrace{L^{-1}L}_{I}U \Rightarrow L^{-1}A = U.$$

Logo, $L^{-1}[A \mid I] \Rightarrow [L^{-1}A \mid L^{-1}I] \Rightarrow [U \mid L^{-1}]$

• Uma maneira de encontrar U^{-1} (usando Eliminação de Gauss-Jordan):

$$U^{-1}[U \mid I] \Rightarrow [U^{-1}U \mid U^{-1}I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$$

Inversa de uma matriz A com fatoração LU

- Sem pivoteamento parcial ($A = LU$)

Sabemos que:

$$A = LU \Rightarrow A^{-1} = (LU)^{-1} \Rightarrow A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$$

Achar $A^{-1} \Rightarrow$ Achar U^{-1}, L^{-1} .

- Uma maneira de encontrar L^{-1} (usando Eliminação de Gauss):

$$A = LU \Rightarrow L^{-1}A = \underbrace{L^{-1}L}_{I}U \Rightarrow L^{-1}A = U.$$

Logo, $L^{-1}[A \mid I] \Rightarrow [L^{-1}A \mid L^{-1}I] \Rightarrow [U \mid L^{-1}]$

- Uma maneira de encontrar U^{-1} (usando Eliminação de Gauss-Jordan):

$$U^{-1}[U \mid I] \Rightarrow [U^{-1}U \mid U^{-1}I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$$

Inversa de uma matriz A com fatoração LU

- Sem pivoteamento parcial ($A = LU$)

Sabemos que:

$A = LU \Rightarrow A^{-1} = (LU)^{-1} \Rightarrow A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$

Achar $A^{-1} \Rightarrow$ Achar U^{-1}, L^{-1} .

- Uma maneira de encontrar L^{-1} (usando Eliminação de Gauss):

$A = LU \Rightarrow L^{-1}A = \underbrace{L^{-1}L}_{I}U \Rightarrow L^{-1}A = U.$

Logo, $L^{-1}[A \mid I] \Rightarrow [L^{-1}A \mid L^{-1}I] \Rightarrow [U \mid L^{-1}]$

- Uma maneira de encontrar U^{-1} (usando Eliminação de Gauss-Jordan):

$U^{-1}[U \mid I] \Rightarrow [U^{-1}U \mid U^{-1}I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$

Inversa de uma matriz A com fatoração LU

- Sem pivoteamento parcial ($A = LU$)

Sabemos que:

$A = LU \Rightarrow A^{-1} = (LU)^{-1} \Rightarrow A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$

Achar $A^{-1} \Rightarrow$ Achar U^{-1}, L^{-1} .

- Uma maneira de encontrar L^{-1} (usando Eliminação de Gauss):

$A = LU \Rightarrow L^{-1}A = \underbrace{L^{-1}L}_{I}U \Rightarrow L^{-1}A = U.$

Logo, $L^{-1}[A \mid I] \Rightarrow [L^{-1}A \mid L^{-1}I] \Rightarrow [U \mid L^{-1}]$

- Uma maneira de encontrar U^{-1} (usando Eliminação de Gauss-Jordan):

$U^{-1}[U \mid I] \Rightarrow [U^{-1}U \mid U^{-1}I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$

Exemplo

Usando fatoração LU (sem pivoteamento parcial), ache a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

Nas aulas anteriores, encontramos:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Devemos agora encontrar U^{-1} e L^{-1} para determinar $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$.

Exemplo

Usando fatoração LU (sem pivoteamento parcial), ache a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

Nas aulas anteriores, encontramos:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Devemos agora encontrar U^{-1} e L^{-1} para determinar $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$.

Exemplo

Usando fatoração LU (sem pivoteamento parcial), ache a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

Nas aulas anteriores, encontramos:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Devemos agora encontrar U^{-1} e L^{-1} para determinar $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$.

Exemplo

1. Achar L^{-1}: por eliminação de Gauss, $[A \mid I] \Rightarrow [U \mid L^{-1}]$.

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 9 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Exemplo

1. Achar L^{-1}: por eliminação de Gauss, $[A \mid I] \Rightarrow [U \mid L^{-1}]$.

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 9 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Exemplo

1. Achar L^{-1}: por eliminação de Gauss, $[A \mid I] \Rightarrow [U \mid L^{-1}]$.

$$[A \mid I] = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 9 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \end{array}$$

Pivô: 2;
$m_{21} = 2 \Rightarrow L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$;
$m_{31} = 4 \Rightarrow L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$;
$m_{41} = 3 \Rightarrow L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$.

Exemplo

1. Achar L^{-1}: por eliminação de Gauss, $[A \mid I] \Rightarrow [U \mid L^{-1}]$.

$$[A \mid I] = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 9 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

Pivô: 2;
$m_{21} = 2 \Rightarrow L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$;
$m_{31} = 4 \Rightarrow L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$;
$m_{41} = 3 \Rightarrow L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$.

Exemplo

1. Achar L^{-1}: por eliminação de Gauss, $[A \mid I] \Rightarrow [U \mid L^{-1}]$.

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 8 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \end{array}$$

Exemplo

1. Achar L^{-1}: por eliminação de Gauss, $[A \mid I] \Rightarrow [U \mid L^{-1}]$.

$$\begin{array}{c}\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 8 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\end{array} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

Pivô: 1;

$m_{32} = 3 \Rightarrow L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$;

$m_{42} = 4 \Rightarrow L_4 \leftarrow L_4 - 4L_2$;

Exemplo

1. Achar L^{-1}: por eliminação de Gauss, $[A \mid I] \Rightarrow [U \mid L^{-1}]$.

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 5 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \end{array}$$

Exemplo

1. Achar L^{-1}: por eliminação de Gauss, $[A \mid I] \Rightarrow [U \mid L^{-1}]$.

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 5 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

Pivô: 2;
$m_{43} = 1 \Rightarrow L_4 \leftarrow L_4 - L_3$;

Exemplo

1. Achar L^{-1}: por eliminação de Gauss, $[A \mid I] \Rightarrow [U \mid L^{-1}]$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & | & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 3 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo

1. Achar L^{-1}: por eliminação de Gauss, $[A \mid I] \Rightarrow [U \mid L^{-1}]$.

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo

2. Achar U^{-1}: por eliminação de Gauss-Jordan, $[U \mid I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$.

Diferenças de Gauss-Jordan para Gauss:

1. Em cada etapa, dividimos a linha do pivô pelo pivô, se ele for diferente de 1 (o objetivo é encontrar a matriz identidade I no lado esquerdo);

2. Eliminamos também os elementos que estiverem acima do pivô.

Exemplo

2. Achar U^{-1}: por eliminação de Gauss-Jordan, $[U \mid I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$.

Diferenças de Gauss-Jordan para Gauss:

1. Em cada etapa, dividimos a linha do pivô pelo pivô, se ele for diferente de 1 (o objetivo é encontrar a matriz identidade I no lado esquerdo);

2. Eliminamos também os elementos que estiverem acima do pivô.

Exemplo

2. Achar U^{-1}: por eliminação de Gauss-Jordan, $[U \mid I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$.

Diferenças de Gauss-Jordan para Gauss:

1. Em cada etapa, dividimos a linha do pivô pelo pivô, se ele for diferente de 1 (o objetivo é encontrar a matriz identidade I no lado esquerdo);

2. Eliminamos também os elementos que estiverem acima do pivô.

Exemplo

2. Achar U^{-1}: por eliminação de Gauss-Jordan, $[U \mid I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$.

$$[U \mid I] = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

Exemplo

2. Achar U^{-1}: por eliminação de Gauss-Jordan, $[U \mid I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$.

$$[U \mid I] = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

Exemplo

2. Achar U^{-1}: por eliminação de Gauss-Jordan, $[U \mid I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$.

$$[U \mid I] = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \end{array}$$

Pivô: 2.

Exemplo

2. Achar U^{-1}: por eliminação de Gauss-Jordan, $[U \mid I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$.

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

1. Divido a linha do pivô pelo pivô (2).

2. Não há elementos para serem eliminados abaixo e acima do pivô. Logo, vou para o próximo pivô.

Exemplo

2. Achar U^{-1}: por eliminação de Gauss-Jordan, $[U \mid I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$.

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \end{array}$$

1. Divido a linha do pivô pelo pivô (2).

2. Não há elementos para serem eliminados abaixo e acima do pivô.
Logo, vou para o próximo pivô.

Exemplo

2. Achar U^{-1}: por eliminação de Gauss-Jordan, $[U \mid I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$.

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

1. Pivô: 1

2. Há apenas um elemento acima do pivô para ser eliminado.

$m_{12} = 1/2 \Rightarrow L_1 \leftarrow L_1 - (1/2)L_2.$

Exemplo

2. Achar U^{-1}: por eliminação de Gauss-Jordan, $[U \mid I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$.

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

1. Pivô: 1

2. Há apenas um elemento acima do pivô para ser eliminado.

$m_{12} = 1/2 \Rightarrow L_1 \leftarrow L_1 - (1/2)L_2$.

Exemplo

2. Achar U^{-1}: por eliminação de Gauss-Jordan, $[U \mid I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & | & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}$$

1. Pivô: 1

2. Há apenas um elemento acima do pivô para ser eliminado.

$m_{12} = 1/2 \Rightarrow L_1 \leftarrow L_1 - (1/2)L_2$.

Exemplo

2. Achar U^{-1}: por eliminação de Gauss-Jordan, $[U \mid I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$.

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \end{array}$$

Exemplo

2. Achar U^{-1}: por eliminação de Gauss-Jordan, $[U \mid I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$.

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

Pivô: 2

1. Divido a linha do pivô pelo pivô (2).

Exemplo

2. Achar U^{-1}: por eliminação de Gauss-Jordan, $[U \mid I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$.

$$\begin{array}{c}\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\end{array}\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

Pivô: 2

1. Divido a linha do pivô pelo pivô (2).

Exemplo

2. Achar U^{-1}: por eliminação de Gauss-Jordan, $[U \mid I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$.

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \end{array}$$

Pivô: 2

1. Divido a linha do pivô pelo pivô (2).

2. Só existe um elemento acima do pivô para ser eliminado.

$m_{23} = 1 \Rightarrow L_2 \leftarrow L_2 - L_3$.

Exemplo

2. Achar U^{-1}: por eliminação de Gauss-Jordan, $[U \mid I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$.

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 & | & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

Pivô: 2

1. Divido a linha do pivô pelo pivô (2).

2. Só existe um elemento acima do pivô para ser eliminado.

$m_{23} = 1 \Rightarrow L_2 \leftarrow L_2 - L_3$.

Exemplo

2. Achar U^{-1}: por eliminação de Gauss-Jordan, $[U \mid I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$.

$$\begin{array}{c}\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\end{array}\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

Exemplo

2. Achar U^{-1}: por eliminação de Gauss-Jordan, $[U \mid I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$.

$$\begin{array}{c}\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\end{array} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

Pivô: 2.

1. Divido a linha do pivô pelo pivô (2).

Exemplo

2. Achar U^{-1}: por eliminação de Gauss-Jordan, $[U \mid I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$.

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

Pivô: 2.

1. Divido a linha do pivô pelo pivô (2).

Exemplo

2. Achar U^{-1}: por eliminação de Gauss-Jordan, $[U \mid I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$.

$$\begin{array}{c}\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right]\end{array}\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

Pivô: 2.

1. Divido a linha do pivô pelo pivô (2).

2. Elimino os elementos não nulos acima do pivô.

$m_{14} = -1/2 \Rightarrow L_1 \leftarrow L_1 + (1/2)L_4$;
$m_{34} = 1 \Rightarrow L_3 \leftarrow L_3 - L_4$.

Exemplo

2. Achar U^{-1}: por eliminação de Gauss-Jordan, $[U \mid I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

Pivô: 2.

1. Divido a linha do pivô pelo pivô (2).

2. Elimino os elementos não nulos acima do pivô.

$m_{14} = -1/2 \Rightarrow L_1 \leftarrow L_1 + (1/2)L_4$;
$m_{34} = 1 \Rightarrow L_3 \leftarrow L_3 - L_4$.

Exemplo

2. Achar U^{-1}: por eliminação de Gauss-Jordan, $[U \mid I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

Pivô: 2.

1. Divido a linha do pivô pelo pivô (2).

2. Elimino os elementos não nulos acima do pivô.

$m_{14} = -1/2 \Rightarrow L_1 \leftarrow L_1 + (1/2)L_4;$
$m_{34} = 1 \Rightarrow L_3 \leftarrow L_3 - L_4.$

Exemplo

2. Achar U^{-1}: por eliminação de Gauss-Jordan, $[U \mid I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$.

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

Pivô: 2.

1. Divido a linha do pivô pelo pivô (2).

2. Elimino os elementos não nulos acima do pivô.

$m_{14} = -1/2 \Rightarrow L_1 \leftarrow L_1 + (1/2)L_4$;
$m_{34} = 1 \Rightarrow L_3 \leftarrow L_3 - L_4$.

Exemplo

2. Achar U^{-1}: por eliminação de Gauss-Jordan, $[U \mid I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$.

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow U^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Exemplo

2. Achar U^{-1}: por eliminação de Gauss-Jordan, $[U \mid I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow U^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Portanto,

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 9/4 & -3/4 & -1/4 & 1/4 \\ -3 & 5/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & -1 & 1 & -1/2 \\ 3/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Inversa de uma matriz A com fatoração LU

- Com pivoteamento parcial ($PA = LU$)

Sabemos que:

$$PA = LU \Rightarrow (PA)^{-1} = (LU)^{-1} \Rightarrow A^{-1}P^{-1} = U^{-1}L^{-1}$$

Multiplicando à direita por P, obtemos:

$$A^{-1}\underbrace{P^{-1}P}_{I} = U^{-1}L^{-1}P \Rightarrow A^{-1} = U^{-1}L^{-1}P$$

Achar $A^{-1} \Rightarrow$ Achar U^{-1}, $L^{-1}P$.

- Uma maneira de encontrar $L^{-1}P$ (usando Eliminação de Gauss):

$$PA = LU \Rightarrow L^{-1}PA = \underbrace{L^{-1}L}_{I}U \Rightarrow L^{-1}PA = U.$$

Logo, $L^{-1}P[A \mid I] \Rightarrow [L^{-1}PA \mid L^{-1}PI] \Rightarrow [U \mid L^{-1}P]$

- Uma maneira de encontrar U^{-1} (usando Eliminação de Gauss-Jordan):

$$U^{-1}[U \mid I] \Rightarrow [U^{-1}U \mid U^{-1}I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$$

Inversa de uma matriz A com fatoração LU

• Com pivoteamento parcial ($PA = LU$)

Sabemos que:

$$PA = LU \Rightarrow (PA)^{-1} = (LU)^{-1} \Rightarrow A^{-1}P^{-1} = U^{-1}L^{-1}$$

Multiplicando à direita por P, obtemos:

$$A^{-1}\underbrace{P^{-1}P}_{I} = U^{-1}L^{-1}P \Rightarrow A^{-1} = U^{-1}L^{-1}P$$

Achar A^{-1} $\Rightarrow$ Achar U^{-1}, $L^{-1}P$.

• Uma maneira de encontrar $L^{-1}P$ (usando Eliminação de Gauss):

$$PA = LU \Rightarrow L^{-1}PA = \underbrace{L^{-1}L}_{I}U \Rightarrow L^{-1}PA = U.$$

Logo, $L^{-1}P[A \mid I] \Rightarrow [L^{-1}PA \mid L^{-1}PI] \Rightarrow [U \mid L^{-1}P]$

• Uma maneira de encontrar U^{-1} (usando Eliminação de Gauss-Jordan):

$$U^{-1}[U \mid I] \Rightarrow [U^{-1}U \mid U^{-1}I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$$

Inversa de uma matriz A com fatoração LU

- Com pivoteamento parcial ($PA = LU$)

Sabemos que:

$$PA = LU \Rightarrow (PA)^{-1} = (LU)^{-1} \Rightarrow A^{-1}P^{-1} = U^{-1}L^{-1}$$

Multiplicando à direita por P, obtemos:

$$A^{-1}\underbrace{P^{-1}P}_{I} = U^{-1}L^{-1}P \Rightarrow A^{-1} = U^{-1}L^{-1}P$$

Achar $A^{-1} \Rightarrow$ Achar U^{-1}, $L^{-1}P$.

- Uma maneira de encontrar $L^{-1}P$ (usando Eliminação de Gauss):

$$PA = LU \Rightarrow L^{-1}PA = \underbrace{L^{-1}L}_{I}U \Rightarrow L^{-1}PA = U.$$

Logo, $L^{-1}P[A \mid I] \Rightarrow [L^{-1}PA \mid L^{-1}PI] \Rightarrow [U \mid L^{-1}P]$

- Uma maneira de encontrar U^{-1} (usando Eliminação de Gauss-Jordan):

$$U^{-1}[U \mid I] \Rightarrow [U^{-1}U \mid U^{-1}I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$$

Inversa de uma matriz A com fatoração LU

- Com pivoteamento parcial ($PA = LU$)

Sabemos que:

$$PA = LU \Rightarrow (PA)^{-1} = (LU)^{-1} \Rightarrow A^{-1}P^{-1} = U^{-1}L^{-1}$$

Multiplicando à direita por P, obtemos:

$$A^{-1}\underbrace{P^{-1}P}_{I} = U^{-1}L^{-1}P \Rightarrow A^{-1} = U^{-1}L^{-1}P$$

Achar $A^{-1} \Rightarrow$ Achar U^{-1}, $L^{-1}P$.

- Uma maneira de encontrar $L^{-1}P$ (usando Eliminação de Gauss):

$$PA = LU \Rightarrow L^{-1}PA = \underbrace{L^{-1}L}_{I}U \Rightarrow L^{-1}PA = U.$$

Logo, $L^{-1}P[A \mid I] \Rightarrow [L^{-1}PA \mid L^{-1}PI] \Rightarrow [U \mid L^{-1}P]$

- Uma maneira de encontrar U^{-1} (usando Eliminação de Gauss-Jordan):

$$U^{-1}[U \mid I] \Rightarrow [U^{-1}U \mid U^{-1}I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$$

Inversa de uma matriz A com fatoração LU

- Com pivoteamento parcial ($PA = LU$)

Sabemos que:

$$PA = LU \Rightarrow (PA)^{-1} = (LU)^{-1} \Rightarrow A^{-1}P^{-1} = U^{-1}L^{-1}$$

Multiplicando à direita por P, obtemos:

$$A^{-1}\underbrace{P^{-1}P}_{I} = U^{-1}L^{-1}P \Rightarrow A^{-1} = U^{-1}L^{-1}P$$

Achar $A^{-1} \Rightarrow$ Achar U^{-1}, $L^{-1}P$.

- Uma maneira de encontrar $L^{-1}P$ (usando Eliminação de Gauss):

$$PA = LU \Rightarrow L^{-1}PA = \underbrace{L^{-1}L}_{I}U \Rightarrow L^{-1}PA = U.$$

Logo, $L^{-1}P[A \mid I] \Rightarrow [L^{-1}PA \mid L^{-1}PI] \Rightarrow [U \mid L^{-1}P]$

- Uma maneira de encontrar U^{-1} (usando Eliminação de Gauss-Jordan):

$$U^{-1}[U \mid I] \Rightarrow [U^{-1}U \mid U^{-1}I] \Rightarrow [I \mid U^{-1}]$$