Cálculo Numérico - IME/UERJ

Gabarito - Lista de Exercícios 3

Sistemas Lineares - Métodos diretos e iterativos

1. (a) (i) $X = (6/5, -1/5)^t$;

   (ii) $X = (-3/5, -2/5)^t$;

   (b)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 4/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

Primeira maneira:

Sabemos que

$UU^{-1} = I$

Como a inversa de uma matriz triangular superior também é triangular superior, logo,

$$U^{-1} = C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix}$$

Assim,

$$UU^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De onde tiramos:

$c_{11} = 1$

$c_{12} - 4c_{22} = 0$

$5c_{22} = 1 \Rightarrow c_{22} = 1/5 \Rightarrow c_{12} = 4/5$

Logo,

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4/5 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Analogamente,

$LL^{-1} = I$

A inversa de uma matriz triangular inferior também é triangular inferior. Neste caso,

$$L^{-1} = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$LL^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d_{21} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De onde tiramos:

$d_{21} = -1$

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sabemos que **sem pivoteamento parcial**:

$A = LU \Rightarrow A^{-1} = (LU)^{-1} \Rightarrow A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$

Então,

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4/5 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 4/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Segunda maneira: Usando forma escalonada por linhas para achar as inversas de L e U.

Assim,

$A = LU \Rightarrow A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$

Cálculo de U^{-1}:

$$U \mid I = \left[\begin{array}{rrcrr} 1 & -4 & | & 1 & 0 \\ 0 & 5 & | & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}$$

pivô $= a_{22} = 5$;

$m_{12} = \dfrac{a_{12}}{a_{22}} = -\dfrac{4}{5} \Rightarrow L_1 \leftarrow L_1 + \dfrac{4}{5}L_2$

$$U^{(1)} \mid D^{(1)} = \left[\begin{array}{rrcrr} 1 & 0 & | & 1 & 4/5 \\ 0 & 5 & | & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}$$

Dividindo L_2 por 5, obtemos:

$$I \mid U^{-1} = \left[\begin{array}{rrcrr} 1 & 0 & | & 1 & 4/5 \\ 0 & 1 & | & 0 & 1/5 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}$$

Cálculo de L^{-1}:

$$L \mid I = \left[\begin{array}{rrcrr} 1 & 0 & | & 1 & 0 \\ 1 & 1 & | & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}$$

pivô $= a_{11} = 1$;

$m_{21} = \dfrac{a_{21}}{a_{11}} = 1 \Rightarrow L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$$I \mid L^{-1} = \left[\begin{array}{rrcrr} 1 & 0 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}$$

Portanto,

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1} = \left[\begin{array}{rr} 1 & 4/5 \\ 0 & 1/5 \end{array}\right] \left[\begin{array}{rr} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rr} 1/5 & 4/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{array}\right]$$

2. (a)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

   (b) Sim. Resolver usando pivoteamento parcial.

3. $X = (6/5, -1, 6/5)^t$;

4. A última linha do sistema triangular é nula, portanto é satisfeita para qualquer valor de z, o que significa que o conjunto de soluções do sistema linear é infinito e está definido por:

   $S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = \frac{1}{16}(z + 13); y = \frac{1}{8}(11z - 17) \right\}$

5. Há necessidade de troca da primeira e terceira linhas.

   $(x, y, z) = (10/7, -5/3, 9/5) \approx (1.423, -1.667, 1.800)$, usando 4 dígitos e arredondamento.

6. (a) $X = (0.3906, 1.2031)$;

   (b) $X = (0.4023, 1.2012)$;

7. (a) Sim.

   (b) $X = (0.3636, 0.4545, 0.4545, 0.3636)^t$

8. Para garantir a convergência do método, devemos efetuar trocas de linhas no sistema para satisfazer o Critério das Linhas, no caso do método de Gauss-Jacobi. Após as trocas das linhas 1 e 3, e em seguida das linhas 2 e 3, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 2.1x + y + z = 3 \\ x - 3y + z = 5 \\ 2y + 5z = 9 \end{cases}$$

   onde:

   $\alpha_1 = \frac{|1| + |1|}{|2.1|} = \frac{2}{2.1} \approx 0.9523 < 1$

   $\alpha_2 = \frac{|1| + |1|}{|-3|} = \frac{2}{3} \approx 0.6667 < 1$

   $\alpha_3 = \frac{|0| + |2|}{|5|} = \frac{2}{5} \approx 0.4 < 1$

$\max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = 0.9523 < 1$

Logo, o Critério das Linhas é satisfeito.

Resolvendo o sistema pelo método de Gauss-Jacobi, uma primeira aproximação $X^{(1)}$, partindo de $X^{(0)} = (0, 0, 0)^t$, é dada por:

$X^{(1)} = (1.4286, -1.6667, 1.8000)^t$.

9. (a) $\alpha_1 = \dfrac{|2| + |-1| + |0|}{|1|} = \dfrac{2}{2.1} = 3 > 1 \Rightarrow$ Não satisfaz o Critério das Linhas.

   (b) $\beta_1 = \alpha_1 = 3 > 1 \Rightarrow$ Não satisfaz o Critério de Sassenfeld.

   (c) Resolvendo o sistema a partir de $X^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^t$, não há convergência em nenhum dos métodos.

   (d) Permutando-se as duas primeiras equações para o sistema, o Critério de Sassenfeld é satisfeito (verifique).

   (e) Resolvendo o sistema do item (d) a partir de $X^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^t$, obtemos a solução:

   $X^* = (0.9052,\ 0.8150,\ 1.5413,\ 1.2706)^t$.

10. k = 4.