CÁLCULO NUMÉRICO
UERJ

Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Ordinárias

Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br
IME-UERJ

Sumário

Introdução

Estudaremos métodos numéricos para problemas de valor inicial (PVI) formulados da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

em que f é uma função das variáveis x (variável independente) e $y = y(x)$ (variável dependente de x).

A equação

$$y(x_0) = y_0,$$

com x_0 e y_0 dados, é chamada **condição inicial**.

A solução de um PVI, quando existe, é uma função y, que depende de x e satisfaz a condição inicial.

Assumiremos que o PVI possui **uma única solução**.

Ideia dos Métodos Numéricos para PVI

Os métodos numéricos para a resolução de um PVI fornecem uma estimativa para $y(x)$ em pontos $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Por simplicidade, assumiremos que os pontos são igualmente espaçados, ou seja,

$$x_{k+1} = x_k + h, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

em que $h > 0$ é chamado tamanho do **passo**.

Denotaremos por y_k a estimativa de $y(x_k)$, ou seja,

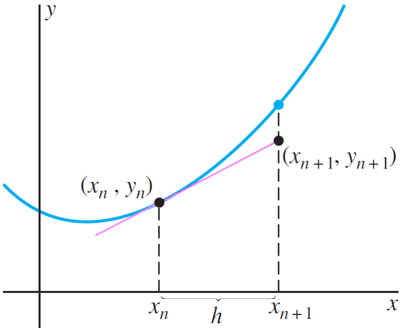
$$y_k \approx y(x_k), \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

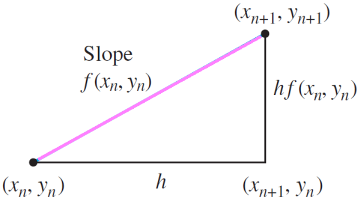
Temos um **método de passo simples** ou *passo um* se y_k é determinado usando apenas y_{k-1}. Caso contrário, temos um **método de passo múltiplo**.

Veremos dois **métodos de passo simples**:

- **Método de Euler**
- **Método de Euler melhorado (Runge-Kutta de 2a. Ordem)**

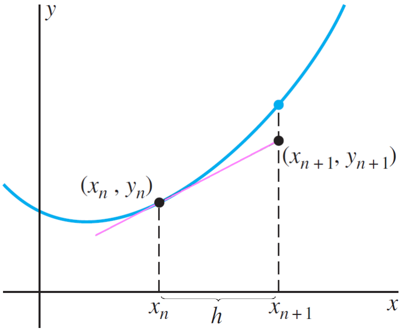
Ideia do Método de Euler

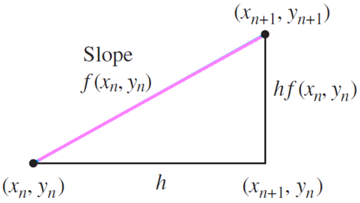




Em cada ponto (x_n, y_n), $n = 0, 1, \ldots, n-1$, traçamos a reta tangente do gráfico de $y(x)$ ou da família $y(x) + C$, onde C é uma constante real, até o ponto (x_{n+1}, y_{n+1}).

Ideia do Método de Euler



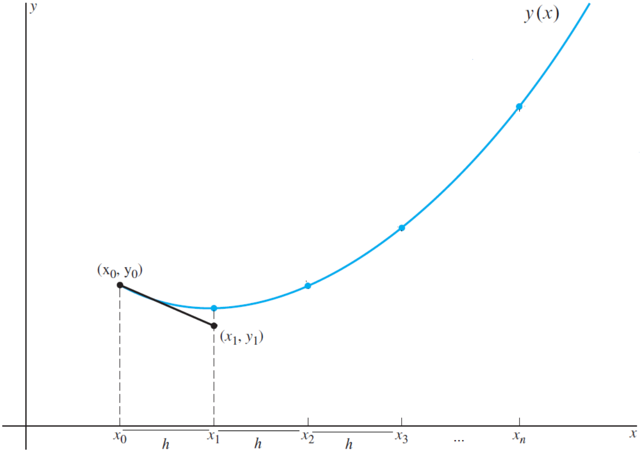


Note que:

$$y'(x) = f(x,y) \Rightarrow f(x_n, y_n) = y'(x_n, y_n) = \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$$

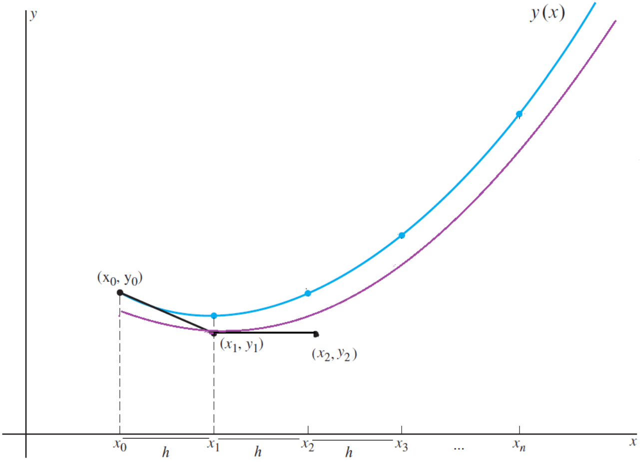
$$\Rightarrow y_{n+1} - y_n = h\, f(x_n, y_n) \Rightarrow y_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n), \quad \forall n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ideia do Método de Euler



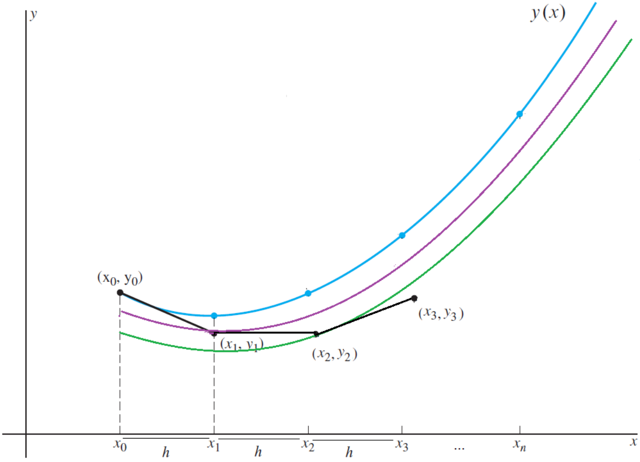
$$f(x_0, y_0) = y'(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{h} \Rightarrow y_1 = y_0 + h\, f(x_0, y_0)$$

Ideia do Método de Euler



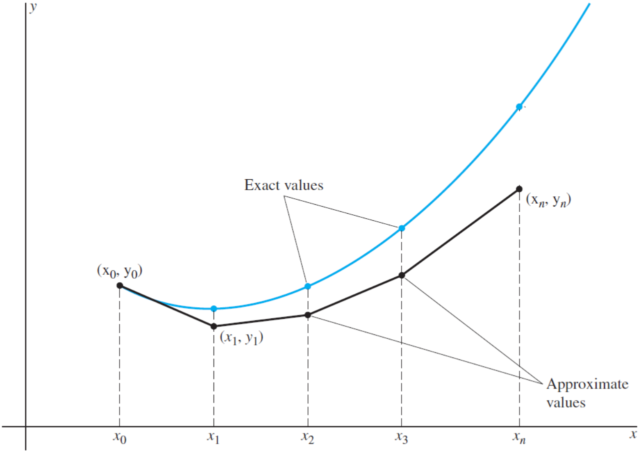
$$f(x_1, y_1) = y'(x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{h} \Rightarrow y_2 = y_1 + h\, f(x_1, y_1)$$

Ideia do Método de Euler



$$f(x_2, y_2) = y'(x_2) = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_3 - y_2}{h} \Rightarrow y_3 = y_2 + h\, f(x_2, y_2)$$

Ideia do Método de Euler



De modo geral, para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$,

$$f(x_k, y_k) = y'(x_k) = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{y_{k+1} - y_k}{h} \Rightarrow y_{k+1} = y_k + h\, f(x_k, y_k)$$

Método de Euler

Método de Euler - Algoritmo

Dado o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

O **Método de Euler com passo** h consiste em se aplicar a fórmula iterativa

$$y_{k+1} = y_k + h\,f(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

para calcular aproximações sucessivas $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ para os valores verdadeiros $y(x_1), y(x_2), y(x_3), \ldots, y(x_n)$ da solução exata $y(x)$ nos pontos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, respectivamente.

Método de Euler

Exemplo 1: Aplique o Método de Euler para encontrar uma solução aproximada para o PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x + y, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

com passo $h = 0,1$, onde $x \in [0,1]$.

Solução:

Aqui, $f(x, y) = x + y$, de modo que a fórmula iterativa do Método de Euler se torna:

$$y_{k+1} = y_k + h\,f(x_k, y_k) \Rightarrow y_{k+1} = y_k + h\,(x_k + y_k),\ \forall k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Começando com $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, as três primeiras aproximações são dadas por:

$$y_1 = y_0 + h\,f(x_0, y_0) \Rightarrow y_1 = 1 + 0,1 \cdot (0 + 1) = 1,1000$$
$$y_2 = y_1 + h\,f(x_1, y_1) \Rightarrow y_2 = 1,1 + 0,1 \cdot (0,1 + 1,1) = 1,2200$$
$$y_3 = y_2 + h\,f(x_2, y_2) \Rightarrow y_3 = 1,2200 + 0,1 \cdot (0,2 + 1,2200) = 1,3620$$

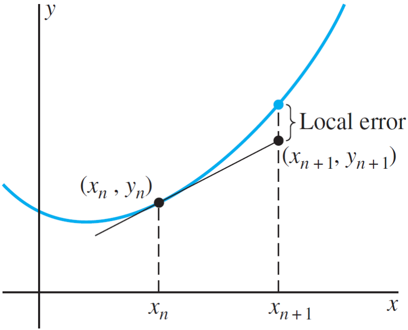
Método de Euler

Como $h = (x_n - x_0)/n = 0,1 \Rightarrow (1-0)/n = 0,1 \Rightarrow n = 1/0,1 = 10$, a tabela a seguir mostra os valores aproximados obtidos em todos os $n = 10$ passos.

Obs.: A solução exata é $y(x) = 2e^x - x - 1$.

k	x_k	y_k	$y(x_k)$	$\lvert y(x_k) - y_k \rvert$
0	$0,0$	$1,0000$	$1,0000$	$0,0000$
1	$0,1$	$1,1000$	$1,1103$	$0,0103$
2	$0,2$	$1,2200$	$1,2428$	$0,0228$
3	$0,3$	$1,3620$	$1,3997$	$0,0377$
4	$0,4$	$1,5282$	$1,5836$	$0,0554$
5	$0,5$	$1,7210$	$1,7974$	$0,0764$
6	$0,6$	$1,9431$	$2,0442$	$0,1011$
7	$0,7$	$2,1974$	$2,3275$	$0,1301$
8	$0,8$	$2,4872$	$2,6511$	$0,1639$
9	$0,9$	$2,8159$	$3,0192$	$0,2033$
10	$1,0$	$3,1875$	$3,4366$	$0,2491$

Erro local - Método de Euler



Em cada iteração k, o Método de Euler possui um erro local dado por:

$$E_k = y(x_k) - y_k, \ \forall k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Problema: nem sempre é possível obter a solução exata $y(x_k)$ para poder calcular o erro absoluto $|E_k|$.

Exemplo: $y'(x) = e^{-x^2} \Rightarrow$ Não conseguimos encontrar a primitiva de e^{-x^2}.

Erro local - Método de Euler

Solução: Podemos estimar o erro absoluto $|E_k| = |y(x_k) - y_k|$ usando **Série de Taylor**:

Série de Taylor - Definição

Se y for suficientemente suave, a **Série de Taylor** de **ordem** m de $y(x)$ **em torno de** x_k é dada por:

$$y(x) = P_m(x) + R_m(x),$$

onde

$$P_m(x) = y(x_k) + y'(x_k)(x - x_k) + y''(x_k)\frac{(x - x_k)^2}{2!} + \ldots + y^{(m)}(x_k)\frac{(x - x_k)^m}{m!}$$

é o **polinômio de Taylor de ordem (grau)** m,

$$R_m(x) = y^{(m+1)}(\xi)\frac{(x - x_k)^{m+1}}{(m+1)!}, \text{ com } \xi \in (x_k, x)$$

é o **erro de truncamento local da série** para a aproximação $y(x) \approx P_k(x)$.

Erro local - Método de Euler

Em particular, o **Método de Euler** é um **método de Série de Taylor de ordem** 1.

Com efeito, se $y = y(x)$ for suficientemente suave, então a série de Taylor de ordem 1 centrada em x_k é dada por:

$$y(x) = y(x_k) + y'(x_k)(x - x_k) + y''(\xi)\frac{(x - x_k)^2}{2!}, \text{ com } \xi \in (x_k, x)$$

Pegando $x = x_{k+1}$ e sabendo que $h = x_{k+1} - x_k$ e $y'(x_k) = f(x_k, y(x_k))$, obtemos:

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h\, f(x_k, y(x_k)) + y''(\xi)\frac{h^2}{2!}, \text{ com } \xi \in (x_k, x_{k+1})$$

Assumindo $y_k = y(x_k)$, obtemos:

$$y(x_{k+1}) = y_k + h\, f(x_k, y_k) + y''(\xi)\frac{h^2}{2!}, \text{ com } \xi \in (x_k, x_{k+1})$$

Lembrando que no método de Euler, $y_{k+1} = y_k + h\, f(x_k, y_k)$, obtemos:

$$y(x_{k+1}) = y_{k+1} + y''(\xi)\frac{h^2}{2!}, \text{ com } \xi \in (x_k, x_{k+1})$$

Erro local - Método de Euler

Da última equação, concluímos que no método de Euler, o erro entre a solução exata e a aproximada no ponto x_{k+1} é dado por:

$$E_{k+1} = y(x_{k+1}) - y_{k+1} = y''(\xi)\frac{h^2}{2!}, \text{ com } \xi \in (x_k, x_{k+1}),$$

para todo $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Em módulo, podemos calcular:

Limitante superior do erro absoluto local - Método de Euler

Considerando E_k o erro cometido pela aproximação $y(x_k) \approx y_k$ usando o Método de Euler,

$$|E_k| \leq M_2 \frac{h^2}{2!}, \text{ onde } M_2 = \max_{\xi \in (x_{k-1}, x_k)} |y''(\xi)|,$$

para todo $k = 1, \ldots, n$.

Erro local - Método de Euler

Voltando ao exemplo anterior: seja o PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x + y, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

com passo $h = 0,1$, onde $x \in [0,1]$.

Sabendo que a solução exata é $y(x) = 2e^x - x - 1$, encontre um limitante superior do erro local no ponto $x = 1$ usando o Método de Euler.

Solução: Sabendo que o passo é $h = 0,1$ e também que o índice k do nó x_k é dado por:

$$h = \frac{x_k - x_0}{k} \Rightarrow k = \frac{x_k - x_0}{h} = \frac{1-0}{0,1} = 10,$$

o limitante superior do erro no ponto $x_k = x_{10} = 1$ neste caso é dado por:

$$|E_{10}| \leq M_2 \frac{h^2}{2!}, \text{ onde } M_2 = \max_{\xi \in (x_9, x_{10})} |y''(\xi)|,$$

Erro local - Método de Euler

O enunciado diz que a solução exata é $y(x) = 2e^x - x - 1$. Logo, a segunda derivada é dada por:

$$y''(x) = 2e^x$$

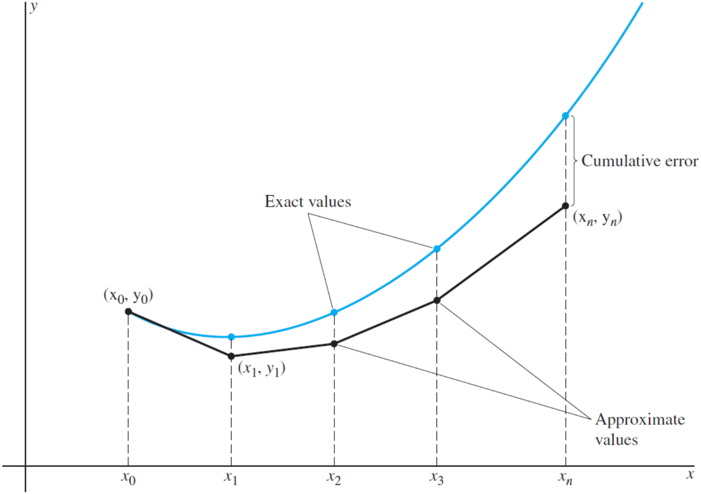
Agora, podemos calcular M_2. Sabendo que $x_9 = x_{10} - h = 1 - 0,1 = 0,9$, obtemos:

$$M_2 = \max_{\xi \in (0,9;1)} |y''(\xi)| = \max\{|2e^{0,9}|, |2e^1|\} = |2e^1| \approx 5,4366$$

Portanto, o **limitante superior do erro local** em $x = 1$ é:

$$|E_{10}| \leq (5,4366)\frac{(0,1)^2}{2!} \approx 0,0272$$

Erro total - Método de Euler



O **erro total** ou **erro acumulado** é dado pela **soma de todos os erros locais** $E_1, E_2, \ldots, E_n$.

Erro total - Método de Euler

Vimos que o erro local no ponto x_k é dado por:

$$E_k = y(x_k) - y_k = y''(\xi_k)\frac{h^2}{2!}, \text{ com } \xi_k \in (x_{k-1}, x_k),$$

para todo $k = 1, \ldots, n$.

Fazendo a soma dos erros locais para $k = 1, \ldots, n$, obtemos:

$$\begin{aligned} E_{Total} &= E_1 + E_2 + \ldots + E_n = y''(\xi_1)\frac{h^2}{2!} + y''(\xi_2)\frac{h^2}{2!} + \ldots y''(\xi_n)\frac{h^2}{2!} \\ &= \frac{h^2}{2!}[y''(\xi_1) + y''(\xi_2) + \ldots y''(\xi_n)] \end{aligned}$$

Em módulo, usando desigualdade triangular, obtemos:

$$\begin{aligned} |E_{Total}| &= |E_1 + E_2 + \ldots + E_n| \leq |E_1| + |E_2| + \ldots + |E_n| \\ &\leq \frac{h^2}{2!}[|y''(\xi_1)| + |y''(\xi_2)| + \ldots |y''(\xi_n)|] \end{aligned}$$

Erro total - Método de Euler

Considerando que $y''(x)$ é contínua no intervalo $[x_0, x_n]$, então é limitada neste intervalo. Logo, existe M_2 real, positivo tal que $|y''(x)| \leq M_2$ para todo $x \in [x_0, x_n]$.

Portanto, para todo $k = 1, \ldots, n$,

$$|y''(\xi_k)| \leq M_2, \text{ onde } M_2 = \max_{\xi \in [x_0, x_n]} |y''(\xi)|.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |E_{Total}| &\leq \frac{h^2}{2!}[|y''(\xi_1)| + |y''(\xi_2)| + \ldots |y''(\xi_n)|] \\ &\leq \frac{h^2}{2!}[n \cdot M_2] = \frac{h^2}{2!}\left[\frac{x_n - x_0}{h} \cdot M_2\right] = \frac{h}{2}[(x_n - x_0) \cdot M_2] \end{aligned}$$

Limitante superior do erro absoluto total - Método de Euler

$$|E_{Total}| \leq \frac{h}{2}(x_n - x_0) \cdot M_2, \text{ onde } M_2 = \max_{\xi \in [x_0, x_n]} |y''(\xi)|.$$

Erro total - Método de Euler

Voltando ao exemplo anterior: seja o PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x + y, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

com passo $h = 0,1$, onde $x \in [0,1]$.

(a) Sabendo que a solução exata é $y(x) = 2e^x - x - 1$, encontre um limitante superior do erro total no ponto $x = 1$ usando o Método de Euler.

Solução: Sabendo que $h = 0,1$, $x_0 = 0$, $x_n = 1$ e $y''(x) = 2e^x$, temos:

$$M_2 = \max_{\xi \in [0,1]} |y''(\xi)| = \max\{|2e^0|, |2e^1|\} = |2e^1| \approx 5,4366$$

Logo,

$$|E_{Total}| \leq \frac{0,1}{2}[(1-0) \cdot 5,4366] \approx 0,2718$$

No primeiro exemplo, vimos que: $|y(1) - y_{10}| \approx 0,2491 < 0,2718$ (OK!)

Erro total - Método de Euler

(b) Agora, encontre um limitante superior do erro total no ponto $x = 0,5$ usando o Método de Euler.

Solução: Sabendo que $h = 0,1$, $x_0 = 0$, $x_n = 0,5$ e $y''(x) = 2e^x$, temos:

$$M_2 = \max_{\xi \in [0;0,5]} |y''(\xi)| = \max\{|2e^0|, |2e^{0,5}|\} = |2e^{0,5}| \approx 3,2974$$

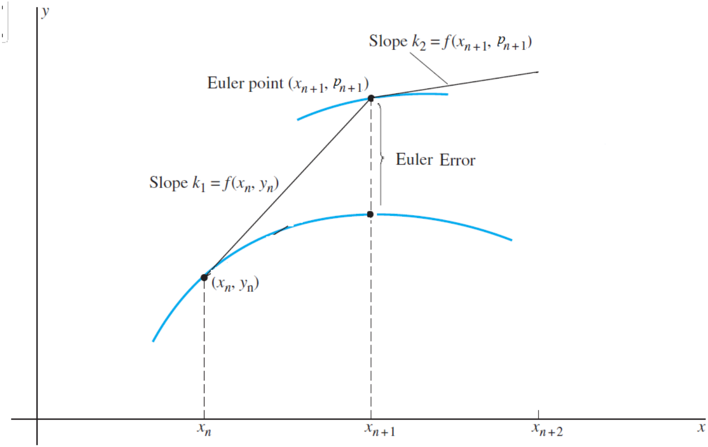
Logo,

$$|E_{Total}| \leq \frac{0,1}{2}[(0,5 - 0) \cdot 3,2974] \approx 0,0824$$

No primeiro exemplo, vimos que: $|y(0,5) - y_5| \approx 0,0764 < 0,0824$ (OK!)

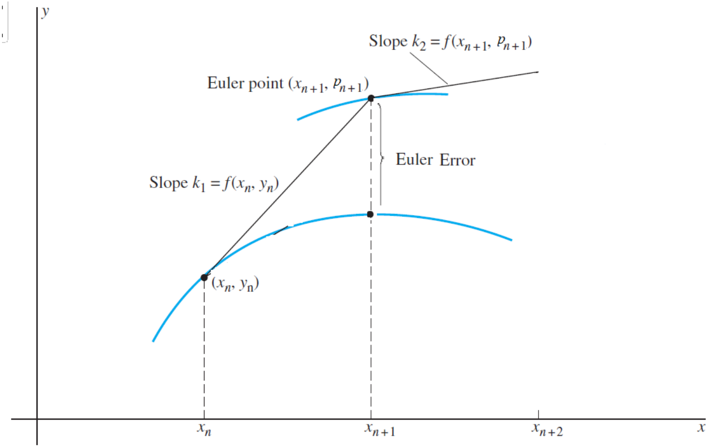
Exercício: Encontre um limitante superior do erro total nos demais pontos x_k usando o Método de Euler e compare com seus respectivos erros absolutos.

Método de Euler melhorado



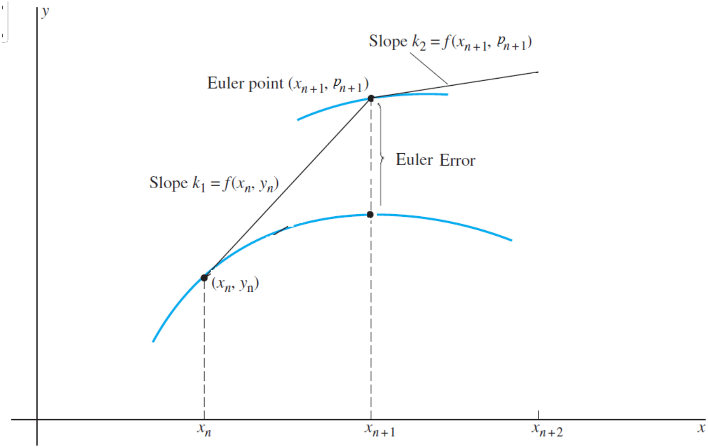
O **Método de Euler melhorado** ou **Runge-Kutta de Ordem 2 (RK2)** visa diminuir o erro do Método de Euler.

Método de Euler melhorado



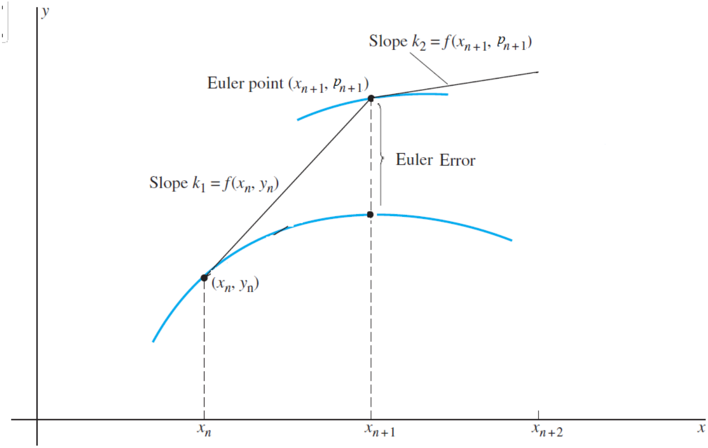
Primeiro, traçamos uma reta tangente à curva $y(x)$ no ponto (x_n, y_n) e obtemos a primeira inclinação: $K_1 = y'(x_n) = f(x_n, y_n)$

Método de Euler melhorado



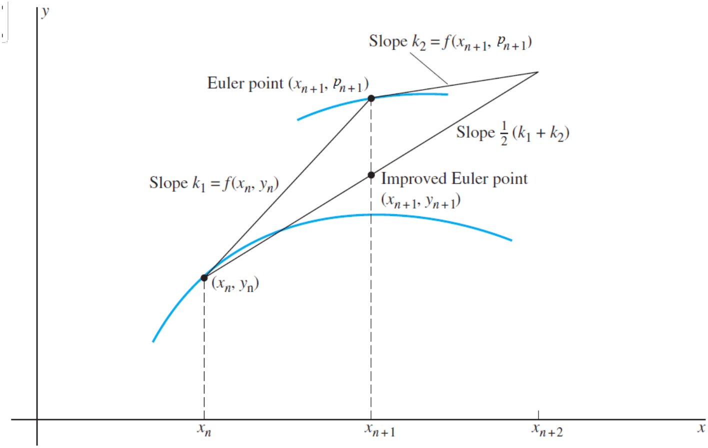
Em seguida, achamos um **preditor** p_{n+1}, que vai predizer o valor aproximado de $y(x_{n+1})$ pelo método de Euler: $p_{n+1} = y_n + h\,K_1 = y_n + h\,f(x_n, y_n)$.

Método de Euler melhorado



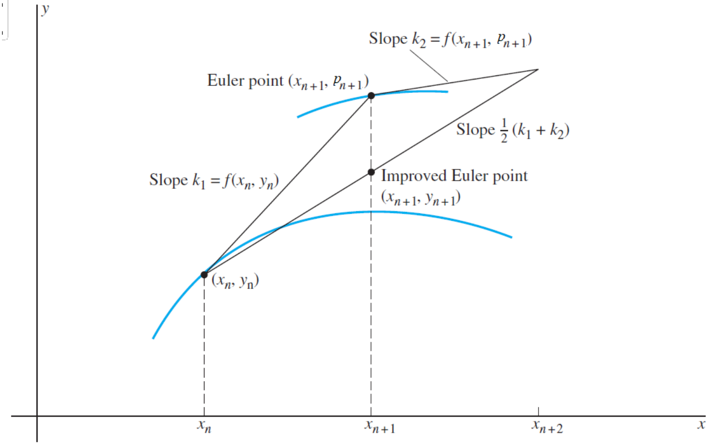
Depois, traçamos uma reta tangente à outra curva da família $y(x) + C$ no ponto (x_{n+1}, p_{n+1}), cuja inclinação é dada por: $K_2 = y'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, p_{n+1})$.

Método de Euler melhorado



Agora, para diminuir o erro do Método de Euler, fazemos a média das inclinações: $(K_1 + K_2)/2$.

Método de Euler melhorado



Finalmente, calculamos o **corretor** y_{n+1} usando a média das inclinações:
$y_{n+1} = y_n + h\,(K_1 + K_2)/2$.
Logo, o **Método de Euler melhorado** é um método **preditor-corretor**.

Método de Euler melhorado

Método de Euler melhorado - Algoritmo

Dado o problema de valor inicial

$$\left\{ \frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \right.$$

O **Método de Euler melhorado com passo** h consiste em se aplicar as seguintes fórmulas iterativas para $k = 0, 1, \ldots, n-1$:

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x_k, y_k), \\ p_{k+1} &= y_k + h\, K_1 \text{ (preditor)}, \\ K_2 &= f(x_{k+1}, p_{k+1}), \\ y_{k+1} &= y_k + h \left(\frac{K_1 + K_2}{2} \right) \text{ (corretor)} \end{aligned}$$

para calcular aproximações sucessivas $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ para os valores verdadeiros $y(x_1), y(x_2), y(x_3), \ldots, y(x_n)$ da solução exata $y(x)$ nos pontos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, respectivamente.

Método de Euler melhorado

Exemplo 2: Aplique o Método de Euler melhorado para encontrar uma solução aproximada para o PVI do Exemplo 1:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x + y, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

com passo $h = 0,1$, onde $x \in [0,1]$.

Solução:
Aqui, $f(x,y) = x + y$, de modo que as fórmulas iterativas do Método de Euler melhorado se tornam para $k = 0, 1, \ldots, n-1$:

$$\begin{aligned} K_1 &= x_k + y_k, \\ p_{k+1} &= y_k + h\,K_1 \text{ (preditor)}, \\ K_2 &= f(x_{k+1}, p_{k+1}), \\ y_{k+1} &= y_k + h\left(\frac{K_1 + K_2}{2}\right) \text{ (corretor)} \end{aligned}$$

Método de Euler melhorado

Começando com $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, as quatro primeiras aproximações são dadas por:

- Cálculo de y_1:

$$
\begin{aligned}
K_1 &= x_0 + y_0 = 0 + 1 = 1, \\
p_1 &= y_0 + h\,K_1 = 1 + 0,1 \cdot 1 = 1,1000 \text{ (preditor)}, \\
K_2 &= f(x_1, p_1) = x_1 + p_1 = 0,1 + 1,1 = 1,2, \\
y_1 &= y_0 + h\,(K_1 + K_2)/2 = 1 + (0,1)\,(1 + 1,2)/2 = 1,1100 \text{ (corretor)}
\end{aligned}
$$

- Cálculo de y_2:

$$
\begin{aligned}
K_1 &= x_1 + y_1 = 0,1 + 1,11 = 1,2100 \\
p_2 &= y_1 + h\,K_1 = 1,11 + 0,1 \cdot 1,21 = 1,2310, \\
K_2 &= f(x_2, p_2) = x_2 + p_2 = 0,2 + 1,2310 = 1,4310, \\
y_2 &= y_1 + h\,(K_1 + K_2)/2 = 1,11 + (0,1)\,(1,21 + 1,431)/2 = 1,2421
\end{aligned}
$$

Método de Euler melhorado

- Cálculo de y_3:

$$K_1 = x_2 + y_2 = 0,2 + 1,2421 = 1,4421$$
$$p_3 = y_2 + h\,K_1 = 1,2421 + 0,1 \cdot 1,4421 = 1,3863,$$
$$K_2 = f(x_3, p_3) = x_3 + p_3 = 0,3 + 1,3863 = 1,6863,$$
$$y_3 = y_2 + h\,(K_1 + K_2)/2 = 1,2421 + (0,1)\,(1,4421 + 1,6863)/2 = 1,3985$$

- Cálculo de y_4:

$$K_1 = x_3 + y_3 = 0,3 + 1,3985 = 1,6985$$
$$p_4 = y_3 + h\,K_1 = 1,3985 + 0,1 \cdot 1,6985 = 1,5684,$$
$$K_2 = f(x_4, p_4) = x_4 + p_4 = 0,4 + 1,5684 = 1,9684,$$
$$y_4 = y_3 + h\,(K_1 + K_2)/2 = 1,3985 + (0,1)\,(1,6985 + 1,9684)/2 = 1,5818$$

Método de Euler melhorado

Como $h = (x_n - x_0)/n = 0,1 \Rightarrow (1-0)/n = 0,1 \Rightarrow n = 1/0,1 = 10$, a tabela a seguir mostra os valores aproximados obtidos em todos os $n = 10$ passos.

Obs.: A solução exata é $y(x) = 2e^x - x - 1$.

k	x_k	y_k	$y(x_k)$	$\|y(x_k) - y_k\|$
0	$0,0$	$1,0000$	$1,0000$	$0,0000$
1	$0,1$	$1,1100$	$1,1103$	$0,0003$
2	$0,2$	$1,2421$	$1,2428$	$0,0007$
3	$0,3$	$1,3985$	$1,3997$	$0,0012$
4	$0,4$	$1,5818$	$1,5836$	$0,0018$
5	$0,5$	$1,7949$	$1,7974$	$0,0025$
6	$0,6$	$2,0409$	$2,0442$	$0,0033$
7	$0,7$	$2,3231$	$2,3275$	$0,0044$
8	$0,8$	$2,6456$	$2,6511$	$0,0055$
9	$0,9$	$3,0124$	$3,0192$	$0,0068$
10	$1,0$	$3,4282$	$3,4366$	$0,0084$

Erro local - Método de Euler melhorado

Euler melhorado é um **método de Série de Taylor de ordem** 2.

Com efeito, se $y = y(x)$ for suficientemente suave, então a série de Taylor de ordem 2 centrada em x_k é dada por:

$$y(x) = y(x_k) + y'(x_k)(x - x_k) + y''(x_k)\frac{(x - x_k)^2}{2!} + y'''(\xi)\frac{(x - x_k)^3}{3!}, \text{ com } \xi \in (x_k, x)$$

Pegando $x = x_{k+1}$ e sabendo que $h = x_{k+1} - x_k$ e $y'(x_k) = f(x_k, y(x_k))$, obtemos:

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h\, f(x_k, y_k) + y''(x_k)\frac{h^2}{2!} + y'''(\xi)\frac{h^3}{3!}, \text{ com } \xi \in (x_k, x_{k+1})$$

Assumindo $y_k = y(x_k)$, obtemos:

$$y(x_{k+1}) = y_k + h\, f(x_k, y_k) + y''(x_k)\frac{h^2}{2!} + y'''(\xi)\frac{h^3}{3!}, \text{ com } \xi \in (x_k, x_{k+1})$$

Erro local - Método de Euler melhorado

Note que pela Regra da Cadeia, temos que:

$$y''(x) = (y'(x))' = \frac{d}{dx}y'(x) = \frac{d}{dx}f(x, y(x)) = f_x + f_y y'(x) = f_x + f_y f$$

Substituindo este resultado na equação anterior, obtemos:

$$y(x_{k+1}) = y_k + h\, f(x_k, y_k) + \frac{h^2}{2!}[f_x + f_y\; f(x_k, y_k)] + y'''(\xi)\frac{h^3}{3!}, \qquad (1)$$
$$\text{com } \xi \in (x_k, x_{k+1})$$

Sabemos do Método de Euler melhorado que:

$$y_{k+1} = y_k + h\left(\frac{K_1 + K_2}{2}\right) = y_k + h\left[\frac{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, p_{k+1})}{2}\right],$$

onde

$$f(x_{k+1}, p_{k+1}) = f(x_{k+1}, y_k + h\, f(x_k, y_k))$$

será desenvolvido por Taylor de ordem 1.

Erro local - Método de Euler melhorado

Aproximação de Taylor de ordem 1 em duas variáveis

Se a função f possui derivadas contínuas de ordem 1, a aproximação de Taylor de $f(x_k + h, y_k + s)$ em torno de (x_k, y_k) é dada por:

$$\begin{aligned} f(x_k + h, y_k + s) = f(x_k, y_k) + f_x(x_k, y_k) \cdot h + f_y(x_k, y_k) \cdot s \\ + \frac{1}{2!}(h^2 \cdot f_{xx} + 2hs \cdot f_{xx} + s^2 \cdot f_{yy})\Big|_{x=\xi_k, y=\eta_k}, \\ \text{onde } \xi_k \in (x_k, x_k + h), \quad \eta_k \in (y_k, y_k + s). \end{aligned}$$

Logo, por desenvolvimento de Taylor, onde $s = h\,f(x_k, y_k)$, obtemos:

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}, p_{k+1}) &= f(x_{k+1}, y_k + h\,f(x_k, y_k)) = f(x_k + h, y_k + h\,f(x_k, y_k)) \\ &= f(x_k, y_k) + h\,f_x + h\,f(x_k, y_k)\,f_y \\ &\quad + \frac{1}{2!}(h^2 \cdot f_{xx} + 2h \cdot h\,f(x_k, y_k) \cdot f_{xx} + (h\,f(x_k, y_k))^2 \cdot f_{yy})\Big|_{x=\xi_k, y=\eta_k} \end{aligned}$$

Erro local - Método de Euler melhorado

$$
\begin{aligned}
f(x_{k+1}, p_{k+1}) &= f(x_k, y_k) + h\, f_x + h\, f(x_k, y_k)\, f_y \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{2!}\left(h^2 \cdot f_{xx} + 2h^2\, f(x_k, y_k) \cdot f_{xx} + h^2 \cdot (f(x_k, y_k))^2 \cdot f_{yy}\right)\Big|_{x=\xi_k, y=\eta_k}}_{\mathcal{O}(h^2),\text{ pois } f(x_k, y_k) \text{ é constante.}}
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
f(x_{k+1}, p_{k+1}) = f(x_k, y_k) + h\, f_x + h\, f(x_k, y_k)\, f_y + \mathcal{O}(h^2)
$$

Substituindo este resultado na equação de Euler melhorado, obtemos:

$$
\begin{aligned}
y_{k+1} &= y_k + h\left[\frac{f(x_k, y_k) + f(x_k, y_k) + h\, f_x + h\, f(x_k, y_k)\, f_y + \mathcal{O}(h^2)}{2}\right] \\
&= y_k + h\left[\frac{2f(x_k, y_k) + h\, f_x + h\, f(x_k, y_k)\, f_y + \mathcal{O}(h^2)}{2}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow y_{k+1} = y_k + h\, f(x_k, y_k) + \frac{h^2}{2}[f_x + f(x_k, y_k)\, f_y] + \mathcal{O}(h^3)
$$

Erro local - Método de Euler melhorado

Este resultado de y_{k+1} está nas parcelas anteriores ao erro de truncamento $y'''(\xi)(h^3/3!)$ no lado direito da Eq. (1). Logo, a Eq. (1) se torna:

$$y(x_{k+1}) = y_{k+1} + y'''(\xi)\frac{h^3}{3!}, \text{ com } \xi \in (x_k, x_{k+1})$$

$$\Rightarrow E_{k+1} = y(x_{k+1}) - y_{k+1} = y'''(\xi)\frac{h^3}{3!}, \text{ com } \xi \in (x_k, x_{k+1})$$

Em módulo, podemos calcular:

Limitante superior do erro absoluto local - Método de Euler melhorado

Considerando E_k o erro cometido pela aproximação $y(x_k) \approx y_k$ usando o Método de Euler melhorado,

$$|E_k| \leq M_3\frac{h^3}{3!}, \text{ onde } M_3 = \max_{\xi \in (x_{k-1}, x_k)} |y'''(\xi)|,$$

para todo $k = 1, \ldots, n$.

Erro total - Método de Euler melhorado

Como o erro total é a soma dos erros locais de $E_1, E_2, \ldots, E_n$, o limitante superior do erro total do Método de Euler melhorado é dado por:

$$
\begin{aligned}
|E_{Total}| &= |E_1 + E_2 + \ldots + E_n| \leq |E_1| + |E_2| + \ldots + |E_n| \\
&\leq n \cdot M_3 \frac{h^3}{3!} = \left(\frac{x_n - x_0}{h}\right) \cdot M_3 \frac{h^3}{3!} = (x_n - x_0) \cdot M_3 \frac{h^2}{3!}
\end{aligned}
$$

Limitante superior do erro absoluto total - Método de Euler melhorado

$$|E_{Total}| \leq \frac{h^2}{6}(x_n - x_0) \cdot M_3, \text{ onde } M_3 = \max_{\xi \in [x_0, x_n]} |y'''(\xi)|.$$

Erro total - Método de Euler melhorado

Voltando ao exemplo anterior: seja o PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x + y, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

com passo $h = 0,1$, onde $x \in [0,1]$.

(a) Sabendo que a solução exata é $y(x) = 2e^x - x - 1$, encontre um limitante superior do erro total no ponto $x = 1$ usando o Método de Euler melhorado.

Solução: Sabendo que $h = 0,1$, $x_0 = 0$, $x_n = 1$ e $y'''(x) = 2e^x$, temos:

$$M_3 = \max_{\xi \in [0,1]} |y'''(\xi)| = \max\{|2e^0|, |2e^1|\} = |2e^1| \approx 5,4366$$

Logo,

$$|E_{Total}| \leq \frac{(0,1)^2}{6} \cdot (1-0) \cdot 5,4366 \approx 0,0091$$

Vimos que no método de Euler melhorado:
$|y(1) - y_{10}| \approx 0,0084 < 0,0091$ (OK!)

Erro total - Método de Euler melhorado

(b) Agora, encontre um limitante superior do erro total no ponto $x = 0,5$ usando o Método de Euler melhorado.

Solução: Sabendo que $h = 0,1$, $x_0 = 0$, $x_n = 0,5$ e $y'''(x) = 2e^x$, temos:

$$M_3 = \max_{\xi \in [0;0,5]} |y'''(\xi)| = \max\{|2e^0|, |2e^{0,5}|\} = |2e^{0,5}| \approx 3,2974$$

Logo,

$$|E_{Total}| \leq \frac{(0,1)^2}{6} \cdot (0,5 - 0) \cdot 3,2974 \approx 0,0027$$

Vimos no método de Euler melhorado que:
$|y(0,5) - y_5| \approx 0,0025 < 0,0027$ (OK!)

Exercício: Encontre um limitante superior do erro total nos demais pontos x_k usando o Método de Euler e compare com seus respectivos erros absolutos.

Sistemas de equações diferenciais

Podemos aplicar os métodos numéricos anteriores ao PVI

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \end{cases}$$

para um sistema de m equações diferenciais de primeira ordem, onde:

- t é uma variável escalar independente;
- As funções vetoriais são:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ \vdots \\ f_m(t, x_1, x_2, \ldots, x_m) \end{bmatrix} .$$

Sistemas de equações diferenciais

No caso de um sistema de 2 equações diferenciais de primeira ordem, aplicamos os métodos numéricos anteriores ao PVI

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \end{cases}$$

onde as funções vetoriais são:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f(t, x, y) \\ g(t, x, y) \end{bmatrix}.$$

Com essas definições, o PVI pode ser reescrito como:

$$\left\{ \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t, x, y) \\ g(t, x, y) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}. \right.$$

Ou seja, o PVI é dado por:

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y), \quad x(t_0) = x_0 \\ y' = g(t, x, y), \quad y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Método de Euler para sistemas de EDO de 1a ordem

Objetivo: Com um passo h, onde $t_{k+1} = t_k + h$, para $k = 0, 1, \ldots, n-1$, calcular aproximações sucessivas $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ para os respectivos valores verdadeiros $\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2), \ldots, \mathbf{x}(t_n)$.

A fórmula iterativa de Euler para sistemas de EDO de 1a ordem é:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h\,\mathbf{f}(t_k, \mathbf{x}_k),$$

que pode ser reescrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} f(t_k, x_k, y_k) \\ g(t_k, x_k, y_k) \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + h\,f(t_k, x_k, y_k), \\ y_{k+1} &= y_k + h\,g(t_k, x_k, y_k) \end{aligned}$$

Método de Euler melhorado para sistemas de EDO

As fórmulas iterativas de Euler melhorado para sistemas de EDO de 1a ordem são:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \mathbf{f}(t_k, \mathbf{x}_k), \\ \mathbf{p}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + h\,\mathbf{K}_1 \text{ (preditor)}, \\ \mathbf{K}_2 &= \mathbf{f}(t_{k+1}, \mathbf{p}_{k+1}), \\ \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + \frac{h}{2}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) \text{ (corretor)}, \end{aligned}$$

onde definimos:

$$K_1 = \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{12} \end{bmatrix};\ \mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix};\ \mathbf{f}(t_k, \mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} f(t_k, x_k, y_k) \\ g(t_k, x_k, y_k) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{p}_{k+1} = \begin{bmatrix} p_{k+1} \\ q_{k+1} \end{bmatrix};\ \mathbf{f}(t_{k+1}, \mathbf{p}_{k+1}) = \begin{bmatrix} f(t_{k+1}, p_{k+1}, q_{k+1}) \\ g(t_{k+1}, p_{k+1}, q_{k+1}) \end{bmatrix};\ K_2 = \begin{bmatrix} K_{21} \\ K_{22} \end{bmatrix}.$$

Método de Euler melhorado para sistemas de EDO

Ou seja, na forma matricial, temos para a primeira fórmula iterativa:

$$\begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t_k, x_k, y_k) \\ g(t_k, x_k, y_k) \end{bmatrix};$$

Para a segunda fórmula iterativa (preditor):

$$\begin{bmatrix} p_{k+1} \\ q_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{12} \end{bmatrix};$$

Para a terceira fórmula iterativa:

$$\begin{bmatrix} K_{21} \\ K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t_{k+1}, p_{k+1}, q_{k+1}) \\ g(t_{k+1}, p_{k+1}, q_{k+1}) \end{bmatrix};$$

Para a quarta fórmula iterativa (corretor):

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} + \frac{h}{2} \left(\begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{21} \\ K_{22} \end{bmatrix} \right).$$

Exemplo

Considere o PVI

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y, & x(0) = 3, \\ y' = 5x - 4y, & y(0) = 6. \end{cases}$$

(a) Calcule duas iterações usando Método de Euler e passo $h = 0,1$.

Aqui, temos:

$$f(t,x,y) = f(x,y) = 3x - 2y, \quad g(t,x,y) = g(x,y) = 5x - 4y,$$

de modo que as fórmulas iterativas de Euler são para $k = 0, 1, \ldots, n-1$:

$$x_{k+1} = x_k + h\, f(x_k, y_k) = x_k + h\,(3x_k - 2y_k),$$
$$y_{k+1} = y_k + h\, g(x_k, y_k) = y_k + h\,(5x_k - 4y_k)$$

- Iteração 1:

$$x_1 = x_0 + h\,(3x_0 - 2y_0) = 3 + 0,1 \cdot (3 \cdot 3 - 2 \cdot 6) = 2,7$$
$$y_1 = y_0 + h\,(5x_0 - 4y_0) = 6 + 0,1 \cdot (5 \cdot 3 - 4 \cdot 6) = 5,1$$

- Iteração 2:

$$x_2 = x_1 + h\,(3x_1 - 2y_1) = 2,7 + 0,1 \cdot (3 \cdot 2,7 - 2 \cdot 5,1) = 2,49$$
$$y_2 = y_1 + h\,(5x_1 - 4y_1) = 5,1 + 0,1 \cdot (5 \cdot 2,7 - 4 \cdot 5,1) = 4,41$$

Exemplo

A solução aproximada com duas iterações ($t_2 = 0,2$) é:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,49 \\ 4,41 \end{bmatrix}$$

A solução exata do sistema é:

$$x(t) = 2e^{-2t} + e^t, \quad y(t) = 5e^{-2t} + e^t,$$

de forma que os valores verdadeiros em $t_2 = 0,2$ são:

$$\begin{bmatrix} x(t_2) \\ y(t_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0,2) \\ y(0,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-2(0,2)} + e^{0,2} \\ 5e^{-2(0,2)} + e^{0,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,562 \\ 4,573 \end{bmatrix}$$

O erro absoluto é dado pela norma do máximo:

$$\max\{|2,562 - 2,49|, |4,573 - 4,41|\} = 0,163.$$

Exemplo

(b) Calcule apenas uma iteração usando Método de Euler melhorado e passo $h = 0,2$ (ou seja, duas vezes o passo $h = 0,1$ aplicado ao Método de Euler).

- Iteração 1:

$$\begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_0 - 2y_0 \\ 5x_0 - 4y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 3 - 2 \cdot 6 \\ 5 \cdot 3 - 4 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -9 \end{bmatrix};$$

Preditor:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} + (0,2) \begin{bmatrix} -3 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,4 \\ 4,2 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} K_{21} \\ K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(p_1, q_1) \\ g(p_1, q_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(2,4;\ 4,2) \\ g(2,4;\ 4,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2,4 - 2 \cdot 4,2 \\ 5 \cdot 2,4 - 4 \cdot 4,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,2 \\ -4,8 \end{bmatrix};$$

Exemplo

Corretor:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \frac{h}{2}\left(\begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{21} \\ K_{22} \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} + \frac{0,2}{2}\left(\begin{bmatrix} -3 \\ -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1,2 \\ -4,8 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2,58 \\ 4,62 \end{bmatrix}$$

O erro absoluto é dado pela norma do máximo:

$$\max\{|2,562 - 2,58|, |4,573 - 4,62|\} = 0,047.$$

Como esperávamos, o resultado de um único passo do método de Euler melhorado é mais preciso do que dois passos do método de Euler comum.

EDO de 2a. ordem

Considere o PVI

$$\begin{cases} x'' = g(t, x, x'), \\ x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Ao fazer a mudança de variável

$$y = x',$$

o PVI de uma EDO de 2a. ordem se transforma no sistema de duas EDOs de 1a. ordem:

$$\begin{cases} x' = y, \quad x(t_0) = x_0 \\ y' = g(t, x, y), \quad y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

onde $f(t, x, y) = y$.

Exemplo

Considere o PVI

$$\begin{cases} x'' = -x, \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 1. \end{cases}$$

Ao fazer a mudança de variável

$$y = x',$$

o PVI de uma EDO de 2a. ordem se transforma no sistema de duas EDOs de 1a. ordem:

$$\begin{cases} x' = y = f(t, x, y), \quad x(0) = 0 \\ y' = -x = g(t, x, y), \quad y(0) = 1. \end{cases}$$

Exemplo

(a) Com Método de Euler e passo $h = 0,5$, a solução aproximada para $y(1,0)$ requer 2 iterações.

Aqui, temos:

$$f(t,x,y) = f(y) = y, \quad g(t,x,y) = g(x) = -x,$$

de modo que as fórmulas iterativas de Euler são para $k = 0, 1, \ldots, n-1$:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + h\, f(y_k) = x_k + h\, y_k, \\ y_{k+1} &= y_k + h\, g(x_k) = y_k + h\,(-x_k) \end{aligned}$$

- Iteração 1:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + h \cdot y_0 = 0 + 0,5 \cdot 1 = 0,5 \\ y_1 &= y_0 + h \cdot (-x_0) = 1 + 0,5 \cdot (-0) = 1,0 \end{aligned}$$

- Iteração 2:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + h \cdot y_1 = 0,5 + 0,5 \cdot 1,0 = 1,0 \\ y_2 &= y_1 + h \cdot (-x_1) = 1,0 + 0,5 \cdot (-0,5) = 0,75 \end{aligned}$$

Exemplo

A solução aproximada com duas iterações ($t_2 = 1,0$) é:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,00 \\ 0,75 \end{bmatrix}$$

A solução exata do sistema é:

$$x(t) = \text{sen}(t), \quad y(t) = \cos(t),$$

de forma que os valores verdadeiros em $t_2 = 1,0$ são:

$$\begin{bmatrix} x(t_2) \\ y(t_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(1,0) \\ y(1,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen}(1,0) \\ \cos(1,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8415 \\ 0,5403 \end{bmatrix}$$

O erro absoluto é dado pela norma do máximo:

$$\max\{|0,8415 - 1|, |0,5403 - 0,75|\} = 0,2097.$$

Exercício: (b) Calcule apenas uma iteração usando Método de Euler melhorado e passo $h = 1,0$. Em seguida, calcule o erro absoluto.

Referências I

- EDWARDS, C.H; PENNEY, D. E., **Differential Equations and Boundary Value Problems - Computing and Modeling**, 5th ed., Pearson, 2015.
- EDWARDS, C.H; PENNEY, D. E., **Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems**, 6th ed., Pearson, 2014.
- BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C., **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**, 10a. ed., Rio de Janeiro, LTC - Livros Técnicos e Científicos, 2015.
- RUGGIERO, M.; LOPES, V.. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. Pearson, 1996, 2a. Ed.
- BURDEN, R.. **Numerical Analysis**. Brooks/Cole Pub Co, 1996, 6th Edition.