CÁLCULO NUMÉRICO
UERJ/2023

Fatoração LU - Inversa de uma matriz

Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br
IME-UERJ

Como calcular inversa de uma matriz A com fatoração LU

1. Sem pivoteamento parcial ($A = LU$)

Sabemos que:

$A \cdot A^{-1} = I$, onde I é a matriz identidade.

$\Rightarrow LU \cdot A^{-1} = I$ (usando $A = LU$)

Usando uma matriz A de ordem 3, temos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}}_{D=A^{-1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I}$$

Ou seja,

$$LU \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}}_{D=A^{-1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I}$$

Como calcular inversa de uma matriz A com fatoração LU

Chamando as colunas de $D = A^{-1}$ de d_1, d_2, d_3, e as colunas de I de I_1, I_2, I_3, temos:

$$LU \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}}_{D=A^{-1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | \\ I_1 & I_2 & I_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}}_{I}$$

onde

$$d_1 = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{31} \end{bmatrix}; d_2 = \begin{bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ d_{32} \end{bmatrix}; d_3 = \begin{bmatrix} d_{13} \\ d_{23} \\ d_{33} \end{bmatrix};$$

$$I_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; I_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; I_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como calcular inversa de uma matriz A com fatoração LU

Assim, resolvemos 6 sistemas:

1. $LUd_1 = I_1 \underbrace{\Rightarrow}_{Ud_1 = y_1} \begin{cases} Ly_1 &= I_1 & (1) \Rightarrow \text{Acho } y_1 \\ Ud_1 &= y_1 & (2) \Rightarrow \text{Acho } d_1 \end{cases}.$
2. $LUd_2 = I_2 \underbrace{\Rightarrow}_{Ud_2 = y_2} \begin{cases} Ly_2 &= I_2 & (3) \Rightarrow \text{Acho } y_2 \\ Ud_2 &= y_2 & (4) \Rightarrow \text{Acho } d_2 \end{cases}.$
3. $LUd_3 = I_3 \underbrace{\Rightarrow}_{Ud_3 = y_3} \begin{cases} Ly_3 &= I_3 & (5) \Rightarrow \text{Acho } y_3 \\ Ud_3 &= y_3 & (6) \Rightarrow \text{Acho } d_3 \end{cases}.$

Com os vetores-colunas d_1, d_2, d_3, temos a matriz inversa $D = A^{-1}$.

Note que se a matriz A fosse de ordem 2, seriam 4 sistemas.

Como calcular inversa de uma matriz A com fatoração LU

1. Com pivoteamento parcial ($PA = LU$)

Sabemos que:

$PA \cdot (PA)^{-1} = I$, onde P é a matriz permutação das linhas da matriz identidade I durante o processo de eliminação gaussiana.

$\Rightarrow LU \cdot (PA)^{-1} = I$ (usando $PA = LU$)

$\Rightarrow LU \cdot A^{-1}P^{-1} = I$ (usando $(PA)^{-1} = A^{-1}P^{-1}$)

$\Rightarrow LU \cdot A^{-1} \underbrace{P^{-1}P}_{I} = I \cdot P$ (multiplicando por P)

$\Rightarrow LU \cdot A^{-1} = P.$

Suponha que a matriz permutação seja:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como calcular inversa de uma matriz A com fatoração LU

Assim, temos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}}_{D=A^{-1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{P}$$

Ou seja,

$$LU \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}}_{D=A^{-1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{P}$$

Como calcular inversa de uma matriz A com fatoração LU

Chamando as colunas de $D = A^{-1}$ de d_1, d_2, d_3, e as colunas de P de P_1, P_2, P_3, temos:

$$LU \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}}_{D=A^{-1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | \\ P_1 & P_2 & P_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}}_{P}$$

onde

$$d_1 = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{31} \end{bmatrix}; d_2 = \begin{bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ d_{32} \end{bmatrix}; d_3 = \begin{bmatrix} d_{13} \\ d_{23} \\ d_{33} \end{bmatrix};$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como calcular inversa de uma matriz A com fatoração LU

Assim, resolvemos 6 sistemas:

1. $LUd_1 = P_1 \underbrace{\Rightarrow}_{Ud_1 = y_1} \begin{cases} Ly_1 &= P_1 & (1) \Rightarrow \text{Acho } y_1 \\ Ud_1 &= y_1 & (2) \Rightarrow \text{Acho } d_1 \end{cases}.$
2. $LUd_2 = P_2 \underbrace{\Rightarrow}_{Ud_2 = y_2} \begin{cases} Ly_2 &= P_2 & (3) \Rightarrow \text{Acho } y_2 \\ Ud_2 &= y_2 & (4) \Rightarrow \text{Acho } d_2 \end{cases}.$
3. $LUd_3 = P_3 \underbrace{\Rightarrow}_{Ud_3 = y_3} \begin{cases} Ly_3 &= P_3 & (5) \Rightarrow \text{Acho } y_3 \\ Ud_3 &= y_3 & (6) \Rightarrow \text{Acho } d_3 \end{cases}.$

Com os vetores-colunas d_1, d_2, d_3, temos a matriz inversa $D = A^{-1}$.

Note que se a matriz A fosse de ordem 2, seriam 4 sistemas.