

CÁLCULO NUMÉRICO UERJ

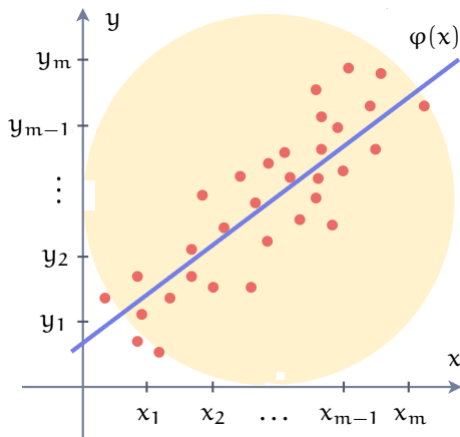
Método dos Mínimos Quadrados

Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br
IME-UERJ

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Método dos Mínimos Quadrados - Caso Linear
- 3 Exemplo
- 4 Método dos Mínimos Quadrados - Parábola
- 5 Exemplo
- 6 Caso não linear - Função exponencial
- 7 Exemplo - Caso não linear
- 8 Bibliografia

Introdução



Seja a tabela a seguir:

x	x_1	x_2	\dots	x_{m-1}	x_m
y	y_1	y_2	\dots	y_{m-1}	y_m

Desejamos ajustar uma curva $y = \varphi(x)$ aos pontos da tabela.

Essa curva pode ser uma reta, uma parábola, uma exponencial, etc.

Se for escolhida uma reta $\varphi(x) = ax + b$, devemos determinar a e b de modo que a reta se ajuste ao conjunto de pontos dados com o mínimo de desvios entre os pontos e a reta.

Introdução

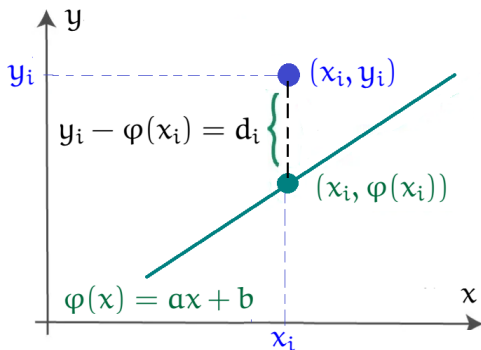


Figura: Visão macroscópica de um ponto da tabela e da reta

Denotamos

$d_i = y_i - \varphi(x_i) = y_i - ax_i - b$ como o **desvio de cada ponto** (x_i, y_i) **da tabela em relação à** **reta** $\varphi(x)$.

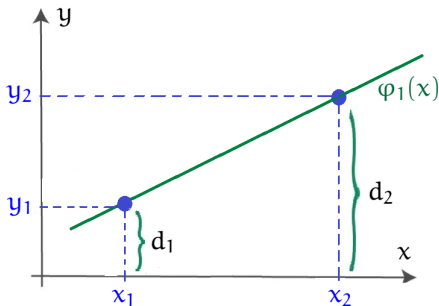
O ideal seria que cada desvio fosse nulo para o ajuste da reta, mas em geral,
 $\varphi(x_i) = ax_i + b \neq y_i$.

E por que usamos a abordagem da **soma dos mínimos quadrados dos desvios** para fazer o **ajuste da reta aos pontos**?

Introdução

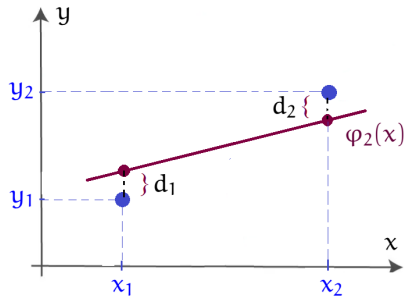
Abordagem 1: Minimizar a soma dos desvios

Exemplo: Ajuste de uma reta a apenas dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) .



$$d_1 = d_2 = 0$$

$$\Rightarrow S_1 = d_1 + d_2 = 0 + 0 = 0$$



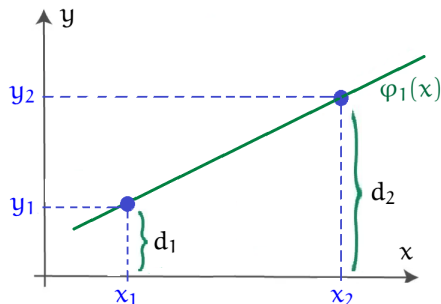
$$d_2 = -d_1$$

$$\Rightarrow S_2 = d_1 + d_2 = d_1 + (-d_1) = 0$$

Problema: A reta $\varphi_1(x)$ se ajusta perfeitamente aos dois pontos. Mas, não é a única que se ajusta a eles com soma de desvios nula. Logo, esta abordagem falha.

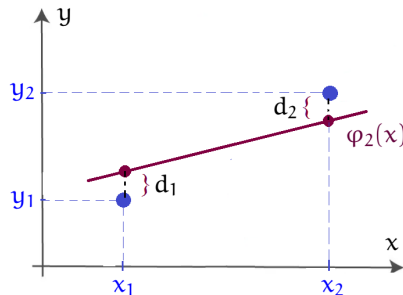
Introdução

Abordagem 2: Minimizar a soma dos módulos dos desvios ($S = |d_1| + |d_2|$)



$$|d_1| = |d_2| = 0$$

$$\Rightarrow S_1 = |d_1| + |d_2| = 0 + 0 = 0$$



$$d_2 = -d_1 \Rightarrow |d_2| = |d_1|$$

$$\Rightarrow S_2 = |d_1| + |d_2| = 2|d_1| \neq 0$$

Problema: Para minimizar uma função, devemos derivá-la e igualar a zero. Porém, a função modular $|d_i| = |y_i - ax_i - b|$ não possui derivada na origem em relação às incógnitas a e b , para $i = 1, 2$. Logo, esta abordagem também falha.

Método dos Mínimos Quadrados - Caso Linear

Então, vamos tratar da abordagem que realmente funciona: **minimizar a soma dos quadrados dos desvios**.

Se temos uma tabela com m pontos

x	x_1	x_2	\dots	x_{m-1}	x_m
y	y_1	y_2	\dots	y_{m-1}	y_m

e queremos ajustá-los a uma reta $\varphi(x) = ax + b$ de modo a **minimizar os quadrados dos desvios** $d_i^2 = (y_i - \varphi(x_i))^2 = (y_i - ax_i - b)^2$, para $i = 1, 2, \dots, m$.

Neste caso, a reta que se ajusta aos pontos é única e o desvio ao quadrado d_i^2 possui derivada em relação às incógnitas a e b em cada ponto $i = 1, 2, \dots, m$.

Assim, a **soma dos quadrados dos desvios** será dada por:

$$S = d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_m^2 = \sum_{i=1}^m d_i^2 = \sum_{i=1}^m (y_i - ax_i - b)^2$$

Método dos Mínimos Quadrados - Caso Linear

Para achar a **reta que minimiza a soma dos quadrados dos desvios**, devemos encontrar seus coeficientes a e b , que são as nossas incógnitas.

Para **minimizar a soma dos quadrados destes desvios**, devemos derivar S em relação às incógnitas a e b e igualar a zero:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad (1) \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0. \quad (2)$$

De (1), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial a} \left(\sum_{i=1}^m (y_i - ax_i - b)^2 \right) = \sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial}{\partial a} (y_i - ax_i - b)^2 \right] = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^m [2(y_i - ax_i - b)(-x_i)] = 0 \Rightarrow 2 \sum_{i=1}^m (y_i - ax_i - b)(-x_i) = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^m (-x_i y_i + ax_i^2 + bx_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m (-x_i y_i) + \sum_{i=1}^m ax_i^2 + \sum_{i=1}^m bx_i = 0 \\ &\Rightarrow a \sum_{i=1}^m x_i^2 + b \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m x_i y_i \quad (3) \end{aligned}$$

Método dos Mínimos Quadrados - Caso Linear

De (2), obtemos:

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial b} \left(\sum_{i=1}^m (y_i - ax_i - b)^2 \right) = \sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial}{\partial b} (y_i - ax_i - b)^2 \right] = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^m [2(y_i - ax_i - b)(-1)] = 0 \Rightarrow 2 \sum_{i=1}^m (y_i - ax_i - b)(-1) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^m (-y_i + ax_i + b) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m (-y_i) + \sum_{i=1}^m ax_i + \sum_{i=1}^m b = 0$$

$$\Rightarrow a \sum_{i=1}^m x_i + b \sum_{i=1}^m 1 = \sum_{i=1}^m y_i \Rightarrow a \sum_{i=1}^m x_i + b \cdot m = \sum_{i=1}^m y_i \quad (4)$$

Logo, para descobrir a **reta dos mínimos quadrados** $\varphi(x) = ax + b$, devemos descobrir a e b através do sistema formado pelas eqs. (3) e (4):

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^m x_i^2 \right) a + \left(\sum_{i=1}^m x_i \right) b = \sum_{i=1}^m x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^m x_i \right) a + \left(\sum_{i=1}^m 1 \right) b = \sum_{i=1}^m y_i \end{cases}$$

Método dos Mínimos Quadrados - Caso Linear

Resumindo:

Para achar a **reta** $\varphi(x) = ax + b$ **que se ajusta aos pontos de uma tabela**

x	x_1	x_2	\dots	x_{m-1}	x_m
y	y_1	y_2	\dots	y_{m-1}	y_m

pelo Método dos Mínimos Quadrados, devemos encontrar primeiro as incógnitas a e b da reta no sistema linear

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m x_i^2 & \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m x_i & \underbrace{\sum_{i=1}^m 1}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m x_i y_i \\ \sum_{i=1}^m y_i \end{bmatrix}$$

Exemplo

Considere a tabela

x	1,0	3,0	4,0	6,0	8,0	9,0	11,0	14,0
$f(x)$	1,0	2,0	4,0	4,0	5,0	7,0	8,0	9,0

Estime o valor de $f(15,5)$ com o ajuste pela reta dos mínimos quadrados.

Solução: Neste exemplo, temos 8 pontos na tabela. Logo, $m = 8$. Portanto, para achar as incógnitas a e b da reta $\varphi(x) = ax + b$, devemos resolver o sistema linear

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^8 x_i^2 & \sum_{i=1}^8 x_i \\ \sum_{i=1}^8 x_i & \underbrace{\sum_{i=1}^8 1}_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^8 x_i y_i \\ \sum_{i=1}^8 y_i \end{bmatrix}$$

Exemplo

Vamos resolver primeiro os somatórios da seguinte forma:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1,0	1,0	1,0	1,0
2	3,0	2,0	9,0	6,0
3	4,0	4,0	16,0	16,0
4	6,0	4,0	36,0	24,0
5	8,0	5,0	64,0	40,0
6	9,0	7,0	81,0	63,0
7	11,0	8,0	121,0	88,0
8	14,0	9,0	196,0	126,0
SOMAS	56,0	40,0	524,0	364,0

Agora, resolvemos o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 524 & 56 \\ 56 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 364 \\ 40 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Usando Eliminação de Gauss, obtemos o sistema aumentado:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 524 & 56 & 364 \\ 56 & 8 & 40 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \begin{array}{l} (\div 4) \\ (\div 8) \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 131 & 14 & 91 \\ 7 & 1 & 5 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}$$

$$\text{pivô} = 131; \quad m_{21} = \frac{7}{131} \Rightarrow L_2 \leftarrow L_2 - \frac{7}{131} L_1.$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 131 & 14 & 91 \\ 0 & 33/131 & 18/131 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}$$

Solução:

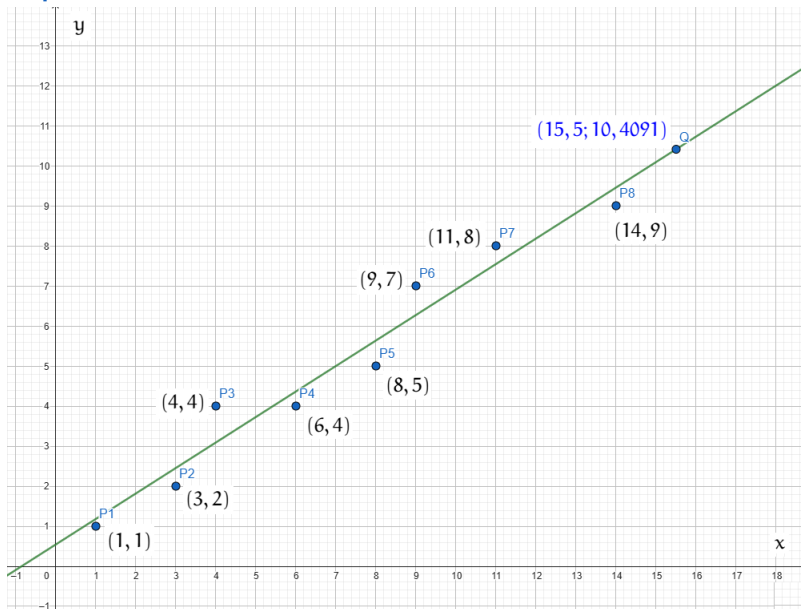
$$b = \frac{18}{33} = \frac{6}{11}; \quad 131a + 14\left(\frac{6}{11}\right) = 91 \Rightarrow a = \frac{7}{11}.$$

Logo, a reta dos mínimos quadrados procurada é $\varphi(x) = \frac{7}{11}x + \frac{6}{11}$.

Agora, para estimar o valor de $f(15, 5)$, basta calcular $\varphi(15, 5)$ na reta encontrada:

$$\varphi(15, 5) = \frac{7}{11}(15, 5) + \frac{6}{11} \approx 10,4091.$$

Exemplo



Método dos Mínimos Quadrados - Parábola

Se temos uma tabela com m pontos

x	x_1	x_2	\dots	x_{m-1}	x_m
y	y_1	y_2	\dots	y_{m-1}	y_m

e queremos ajustá-los a uma parábola $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$ de modo a **minimizar os quadrados dos desvios**

$$d_i^2 = (y_i - \varphi(x_i))^2 = (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2, \text{ para } i = 1, 2, \dots, m.$$

Neste caso, a parábola que se ajusta aos pontos é única e o desvio ao quadrado d_i^2 possui derivada em relação às incógnitas a , b e c em cada ponto $i = 1, 2, \dots, m$.

Assim, a **soma dos quadrados dos desvios** será dada por:

$$S = d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_m^2 = \sum_{i=1}^m d_i^2 = \sum_{i=1}^m (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2$$

Método dos Mínimos Quadrados - Parábola

Para achar a **parábola que minimiza a soma dos quadrados dos desvios**, devemos encontrar seus coeficientes a , b e c , que são as nossas incógnitas.

Para **minimizar a soma dos quadrados destes desvios**, devemos derivar S em relação às incógnitas a , b , c e igualar a zero:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad (1) \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \quad (2) \quad \frac{\partial S}{\partial c} = 0. \quad (3)$$

De (1), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial a} \left(\sum_{i=1}^m (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2 \right) = \sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial}{\partial a} (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2 \right] = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^m [2(y_i - ax_i^2 - bx_i - c)(-x_i^2)] = 0 \Rightarrow 2 \sum_{i=1}^m (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)(-x_i^2) = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^m (-x_i^2 y_i + ax_i^4 + bx_i^3 + cx_i^2) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m (-x_i^2 y_i) + \sum_{i=1}^m ax_i^4 + \sum_{i=1}^m bx_i^3 + \sum_{i=1}^m cx_i^2 = 0 \\ &\Rightarrow a \sum_{i=1}^m x_i^4 + b \sum_{i=1}^m x_i^3 + c \sum_{i=1}^m x_i^2 = \sum_{i=1}^m x_i^2 y_i \quad (3) \end{aligned}$$

Método dos Mínimos Quadrados - Parábola

De (2), obtemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S}{\partial b} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial b} \left(\sum_{i=1}^m (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2 \right) = \sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial}{\partial b} (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2 \right] = 0 \\
 &\Rightarrow \sum_{i=1}^m [2(y_i - ax_i^2 - bx_i - c)(-x_i)] = 0 \Rightarrow 2 \sum_{i=1}^m (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)(-x_i) = 0 \\
 &\Rightarrow \sum_{i=1}^m (-x_i y_i + ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m (-x_i y_i) + \sum_{i=1}^m ax_i^3 + \sum_{i=1}^m bx_i^2 + \sum_{i=1}^m cx_i = 0 \\
 &\Rightarrow a \sum_{i=1}^m x_i^3 + b \sum_{i=1}^m x_i^2 + c \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m x_i y_i \quad (3)
 \end{aligned}$$

De (3), obtemos analogamente (**verifique!**):

$$\frac{\partial S}{\partial c} = 0 \Rightarrow a \sum_{i=1}^m x_i^2 + b \sum_{i=1}^m x_i + c \sum_{i=1}^m 1 = \sum_{i=1}^m y_i \quad (4)$$

Método dos Mínimos Quadrados - Parábola

Para achar a **parábola** $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$ **que se ajusta aos pontos de uma tabela**

X	x_1	x_2	\dots	x_{m-1}	x_m
Y	y_1	y_2	\dots	y_{m-1}	y_m

pelo Método dos Mínimos Quadrados, devemos encontrar primeiro as incógnitas a , b e c da parábola no sistema linear

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m x_i^4 & \sum_{i=1}^m x_i^3 & \sum_{i=1}^m x_i^2 \\ \sum_{i=1}^m x_i^3 & \sum_{i=1}^m x_i^2 & \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m x_i^2 & \sum_{i=1}^m x_i & \underbrace{\sum_{i=1}^m 1}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m x_i^2 y_i \\ \sum_{i=1}^m x_i y_i \\ \sum_{i=1}^m y_i \end{bmatrix}$$

Exemplo

Voltando ao exemplo anterior,

x	1,0	3,0	4,0	6,0	8,0	9,0	11,0	14,0
$f(x)$	1,0	2,0	4,0	4,0	5,0	7,0	8,0	9,0

Estime agora o valor de $f(15,5)$ com o ajuste pela **parábola** dos mínimos quadrados.

Solução: Neste exemplo, temos 8 pontos na tabela. Logo, $m = 8$. Portanto, para achar as incógnitas a , b , c da parábola $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$, devemos resolver o sistema linear

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^8 x_i^4 & \sum_{i=1}^8 x_i^3 & \sum_{i=1}^8 x_i^2 \\ \sum_{i=1}^8 x_i^3 & \sum_{i=1}^8 x_i^2 & \sum_{i=1}^8 x_i \\ \sum_{i=1}^8 x_i^2 & \sum_{i=1}^8 x_i & \underbrace{\sum_{i=1}^8 1}_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^8 x_i^2 y_i \\ \sum_{i=1}^8 x_i y_i \\ \sum_{i=1}^8 y_i \end{bmatrix}$$

Exemplo

Vamos resolver primeiro os somatórios da seguinte forma:

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i^2 y_i$	$x_i y_i$
1	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
2	3,0	2,0	9,0	27,0	81,0	18,0	6,0
3	4,0	4,0	16,0	64,0	256,0	64,0	16,0
4	6,0	4,0	36,0	216,0	1296,0	144,0	24,0
5	8,0	5,0	64,0	512,0	4096,0	320,0	40,0
6	9,0	7,0	81,0	729,0	6561,0	567,0	63,0
7	11,0	8,0	121,0	1331,0	14641,0	968,0	88,0
8	14,0	9,0	196,0	2744,0	38416,0	1764,0	126,0
SOMAS	56,0	40,0	524,0	5624,0	65348,0	3846,0	364,0

Agora, resolvemos o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 65348 & 5624 & 524 \\ 5624 & 524 & 56 \\ 524 & 56 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3846 \\ 364 \\ 40 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Usando Eliminação de Gauss, obtemos o sistema aumentado:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 65348 & 5624 & 524 & 3846 \\ 5624 & 524 & 56 & 364 \\ 524 & 56 & 8 & 40 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \ (\div 8) \\ L_2 \ (\div 8) \\ L_3 \ (\div 8) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \left[\begin{array}{ccc|c} 8168,5 & 703,0 & 65,5 & 480,75 \\ 703,0 & 65,5 & 7,0 & 45,50 \\ 65,5 & 7,0 & 1,0 & 5,00 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \\ \Rightarrow & \\ \Rightarrow & \end{aligned}$$

Solução: (verifique!)

$$a \approx -0,0092; \quad b \approx 0,7723; \quad c \approx 0,1948.$$

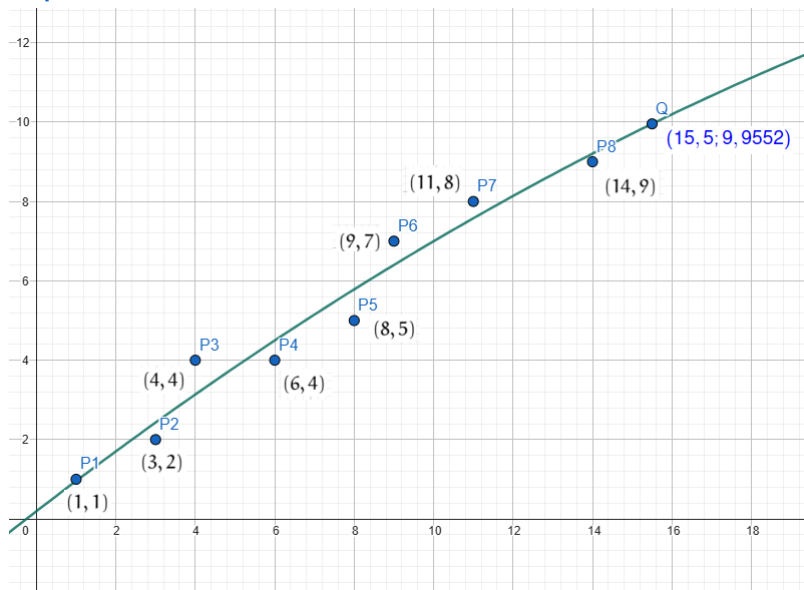
Logo, a parábola dos mínimos quadrados procurada é

$$\varphi(x) = -0,0092x^2 + 0,7723x + 0,1948. \quad (15,5; 9,9552)$$

Agora, para estimar o valor de $f(15,5)$, basta calcular $\varphi(15,5)$:

$$\varphi(15,5) = -0,0092(15,5)^2 + 0,7723(15,5) + 0,1948 \approx 9,9552.$$

Exemplo



Caso não linear - Função exponencial

Em alguns casos, o método dos mínimos quadrados linear pode ser usado para ajustar uma função não linear nos coeficientes.

Suponha que queremos ajustar uma função exponencial $\varphi(x) = \beta_1 e^{\beta_2 x}$ aos dados de uma tabela

x	x_1	x_2	\dots	x_{m-1}	x_m
y	y_1	y_2	\dots	y_{m-1}	y_m

Nesse caso, podemos linearizar o problema usando uma transformação conveniente:

$$\begin{aligned}
 y &\approx \beta_1 e^{\beta_2 x} \Rightarrow \ln(y) \approx \ln(\beta_1 e^{\beta_2 x}) \Rightarrow \ln(y) \approx \ln(\beta_1) + \ln(e^{\beta_2 x}) \\
 &\Rightarrow \underbrace{\ln(y)}_z \approx \underbrace{\ln(\beta_1)}_b + \underbrace{\beta_2}_a x \\
 &\Rightarrow z \approx ax + b, \text{ onde } a = \beta_2, b = \ln(\beta_1),
 \end{aligned}$$

que será ajustada pelo **método dos mínimos quadrados** à tabela

x	x_1	x_2	\dots	x_{m-1}	x_m
$z = \ln(y)$	$z_1 = \ln(y_1)$	$z_2 = \ln(y_2)$	\dots	$z_{m-1} = \ln(y_{m-1})$	$z_m = \ln(y_m)$

Exemplo - Caso não linear

Considere a tabela

x	-1,00	-0,70	-0,40	-0,10	0,20	0,50	0,80	1,00
y	36,54	17,26	8,15	3,85	1,82	0,86	0,40	0,24

Ajuste os dados à curva $\varphi(x) = \beta_1 e^{\beta_2 x}$ e estime o valor de $y(1,50)$.

1. **Linearização:** $y \approx \beta_1 e^{\beta_2 x} \Rightarrow z = \ln(y) \approx ax + b$, onde $a = \beta_2$, $b = \ln(\beta_1)$

2. **Ajuste dos pontos da tabela a seguir à reta dos mínimos quadrados**

$$z \approx ax + b$$

x	-1,00	-0,70	-0,40	-0,10	0,20	0,50	0,80	1,00
z	3,60	2,85	2,10	1,35	0,60	-0,15	-0,92	-1,43

Exemplo - Caso não linear

Vamos resolver primeiro os somatórios da seguinte forma:

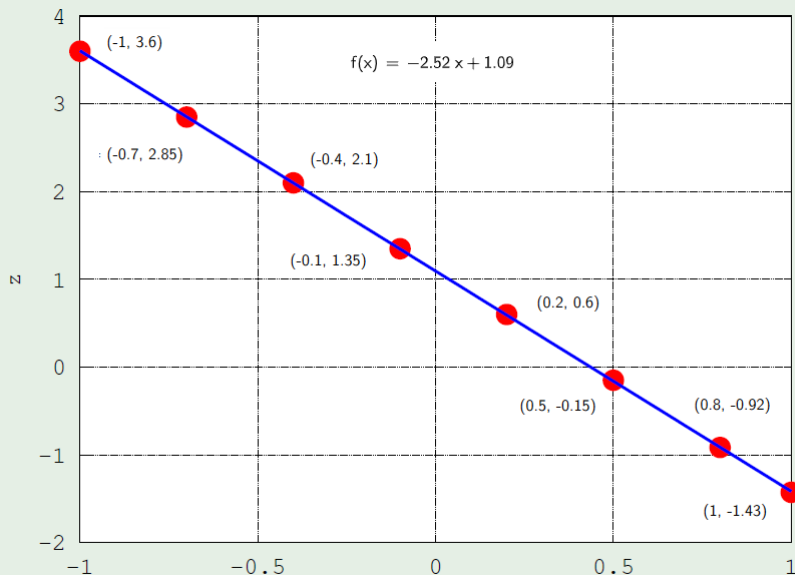
i	x_i	z_i	x_i^2	$x_i z_i$
1	-1,00	3,60	1,00	-3,60
2	-0,70	2,85	0,49	-2,00
3	-0,40	2,10	0,16	-0,84
4	-0,10	1,35	0,01	-0,14
5	0,20	0,60	0,04	0,12
6	0,50	-0,15	0,25	-0,08
7	0,80	-0,92	0,64	-0,74
8	1,00	-1,43	1,00	-1,43
SOMAS	0,30	8,00	3,59	-8,71

Agora, resolvemos o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 3,59 & 0,30 \\ 0,30 & 8,00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8,71 \\ 8,00 \end{bmatrix}$$

e encontramos $a \approx -2,52$, $b \approx 1,09 \Rightarrow z \approx -2,52x + 1,09$. **(Verifique!)**

Exemplo - Caso não linear



Exemplo - Caso não linear

Substituindo os valores para achar a função exponencial $y \approx \beta_1 e^{\beta_2 x}$ que se ajusta aos dados, obtemos:

$$a = \beta_2 \Rightarrow \beta_2 \approx -2,52$$

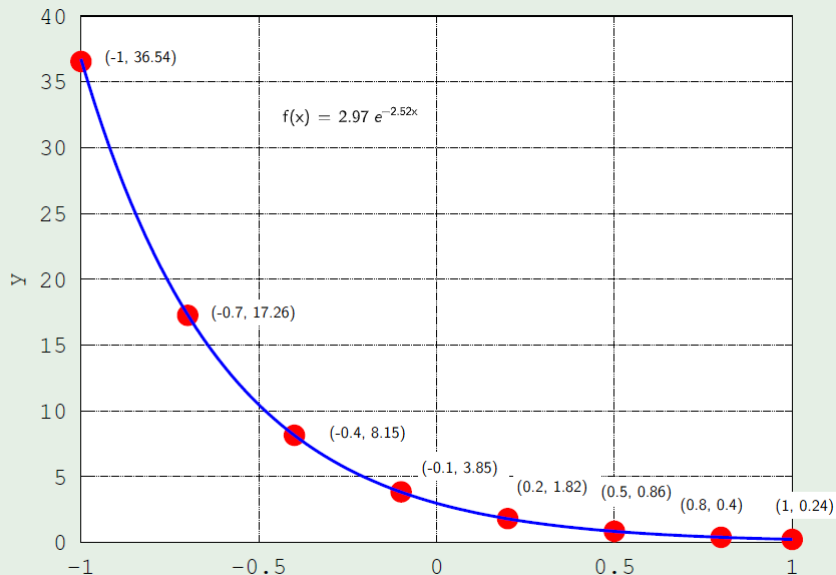
$$b = \ln(\beta_1) \Rightarrow \ln(\beta_1) \approx 1,09 \Rightarrow \beta_1 \approx e^{1,09} \approx 2,97$$

Portanto, a curva exponencial que se ajusta aos dados é




$$y \approx 2,97e^{-2,52x}$$

$$\text{Logo, } y(1,50) \approx 2,97e^{-2,52(1,50)} \Rightarrow y(1,50) \approx 0.07$$

Exemplo - Caso não linear



Referências I

-  DORN, W. S.; McCRACKEN, D.D.. **Cálculo Numérico Com Estudos de Casos Em Fortran IV**. Ed. Campus, 1978.
-  RUGGIERO, M.; LOPES, V.. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. Pearson, 1996, 2a. Ed.
-  BURDEN, R.. **Numerical Analysis**. Brooks/Cole Pub Co, 1996, 6th Edition.