CÁLCULO NUMÉRICO

Zeros de funções - Método da Bisseção

Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br
IME-UERJ

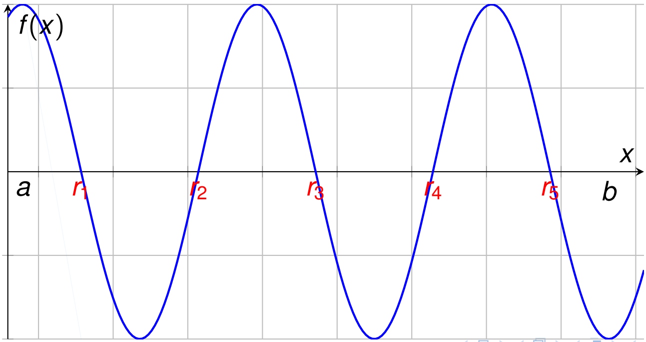
Problema

Queremos resolver a equação $f(x) = 0$, isto é, encontrar as raízes de uma função real contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Teorema do Valor Intermediário (TVI)

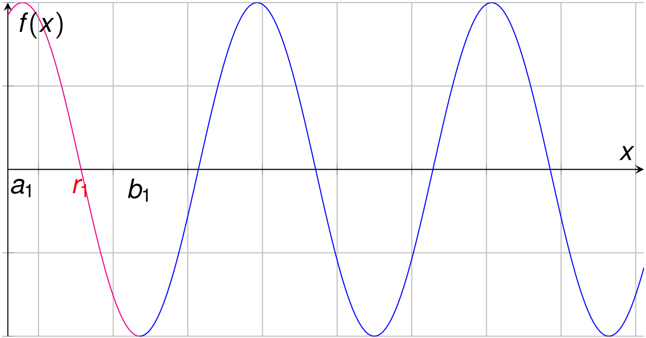
Corolário: Teorema de Bolzano

Se f é contínua em $[a, b]$ e $f(a)f(b) < 0$, então existe pelo menos uma raiz em (a, b).



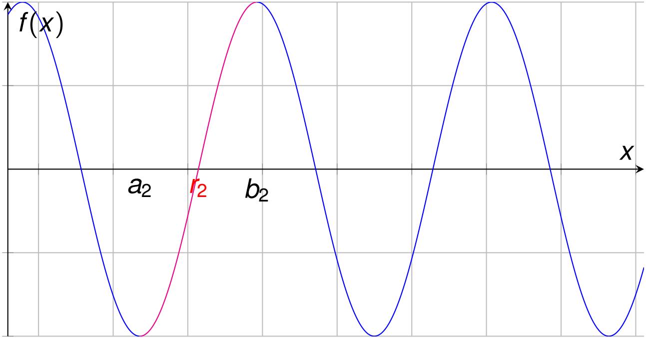
Problema

Neste gráfico, note que pelo TVI, se $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$, então $r_1 \in (a_1, b_1)$.



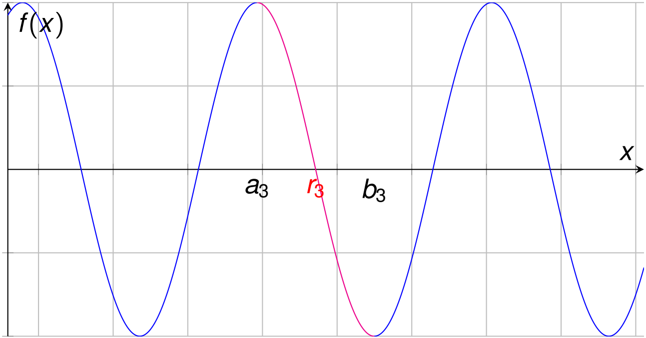
Problema

Se $f(a_2) \cdot f(b_2) < 0$, então $r_2 \in (a_2, b_2)$.



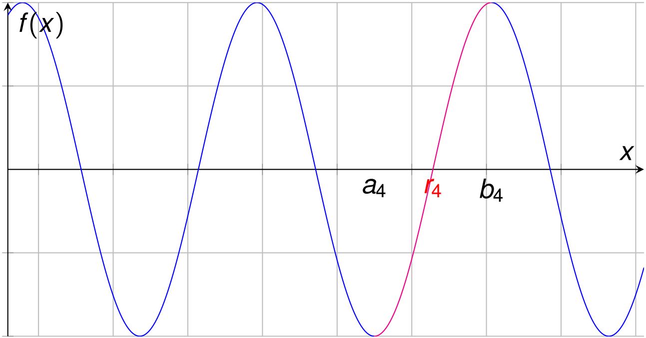
Problema

Se $f(a_3) \cdot f(b_3) < 0$, então $r_3 \in (a_3, b_3)$.



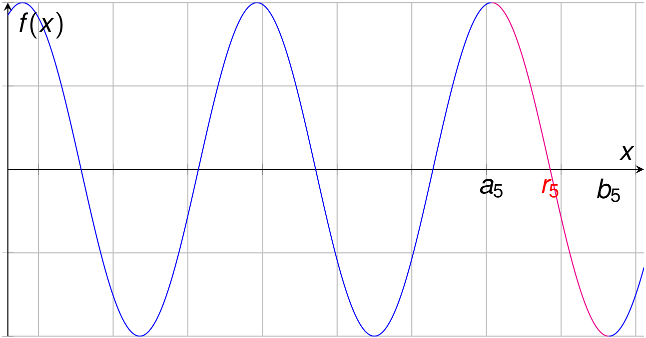
Problema

Se $f(a_4) \cdot f(b_4) < 0$, então $r_4 \in (a_4, b_4)$.



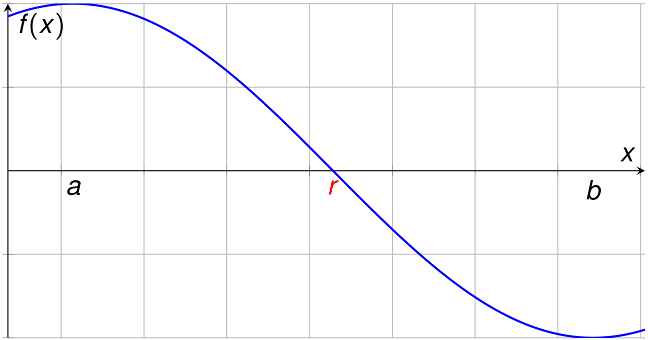
Problema

Se $f(a_5) \cdot f(b_5) < 0$, então $r_5 \in (a_5, b_5)$.



Problema

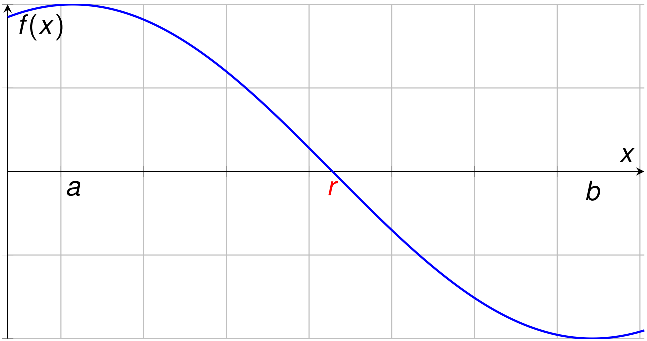
Vamos calcular uma aproximação para a raiz $r \in (a, b)$.



Como $f(a) \cdot f(b) < 0$, pelo TVI, existe uma raiz $r \in (a, b)$.

Problema

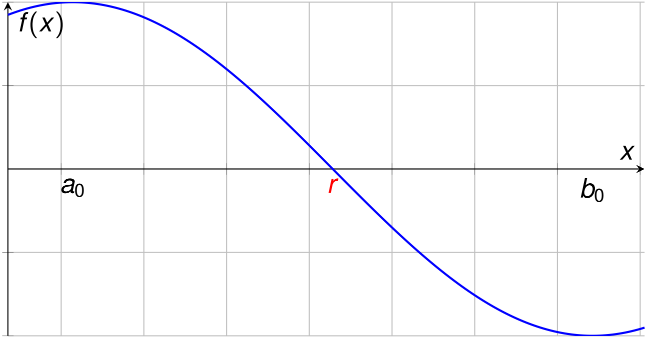
Vamos calcular uma aproximação para a raiz $r \in (a, b)$.



Como $f(a) \cdot f(b) < 0$, pelo TVI, existe uma raiz $r \in (a, b)$.

Problema

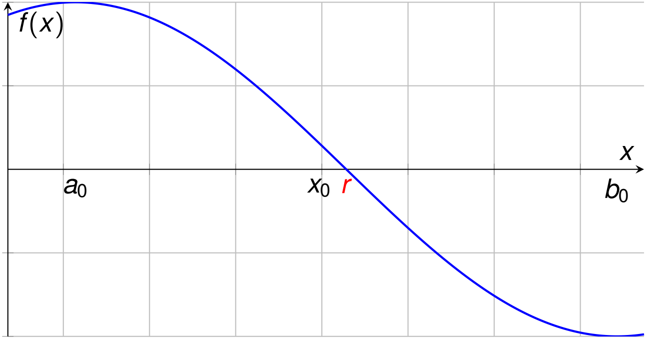
Vamos calcular uma aproximação para a raiz $r \in (a, b)$.



Vou denotar $a_0 = a$ e $b_0 = b$. Assim, $r \in (a_0, b_0)$.

Problema

Vamos calcular uma aproximação para a raiz $r \in (a, b)$.



Começo as iterações:

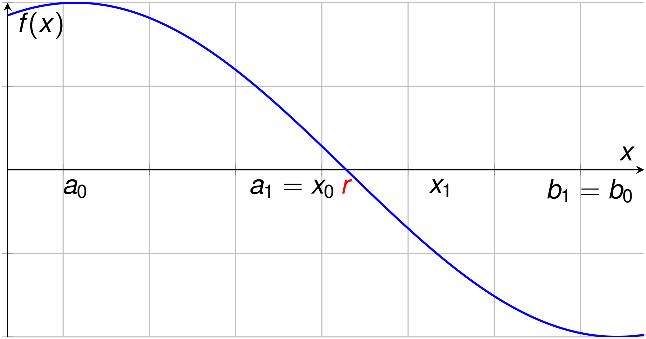
$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

Análise do sinal da função:

$f(x_0) > 0$, $f(a_0) > 0$, $f(b_0) < 0 \Rightarrow$ Pelo TVI, $f(x_0) \cdot f(b_0) < 0 \Rightarrow r \in (x_0, b_0)$.

Problema

Vamos calcular uma aproximação para a raiz $r \in (a, b)$.



Vou denotar $a_1 = x_0$ e $b_1 = b_0$. Assim, $r \in (a_1, b_1)$.

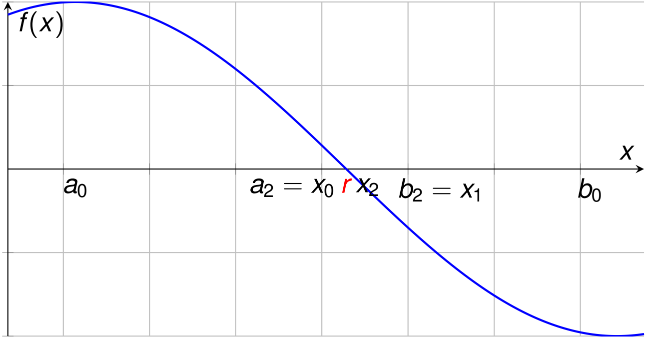
$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

Análise do sinal da função:

$f(x_1) < 0$, $f(a_1) > 0$, $f(b_1) < 0 \Rightarrow$ Pelo TVI, $f(x_1) \cdot f(a_1) < 0 \Rightarrow r \in (a_1, x_1)$.

Problema

Vamos calcular uma aproximação para a raiz $r \in (a, b)$.



Vou denotar $a_2 = x_0$ e $b_2 = x_1$. Assim, $r \in (a_2, b_2)$.

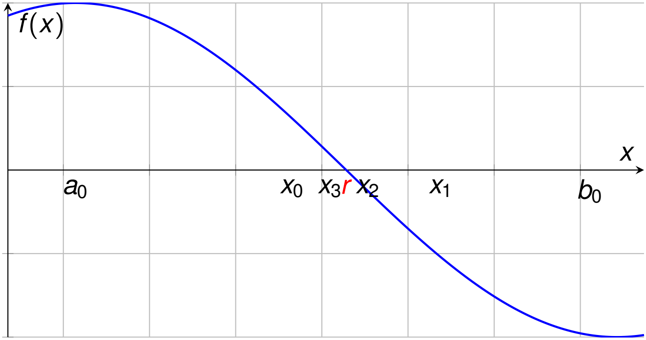
$$x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$$

Análise do sinal da função:

$f(x_2) < 0$, $f(a_2) > 0$, $f(b_2) < 0 \Rightarrow$ Pelo TVI, $f(x_2) \cdot f(a_2) < 0 \Rightarrow r \in (a_2, x_2)$.

Problema

Vamos calcular uma aproximação para a raiz $r \in (a, b)$.



Vou denotar $a_3 = x_0$ e $b_3 = x_2$. Assim, $r \in (a_3, b_3)$.

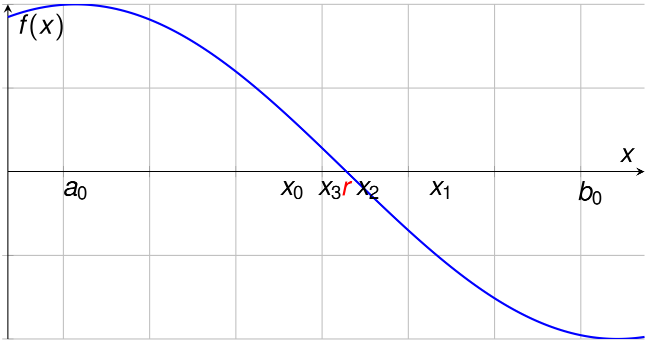
$$x_3 = \frac{a_3 + b_3}{2}$$

Análise do sinal da função:

$f(x_3) > 0$, $f(a_3) > 0$, $f(b_3) < 0 \Rightarrow$ Pelo TVI, $f(x_3) \cdot f(b_3) < 0 \Rightarrow r \in (x_3, b_3)$.

Problema

Vamos calcular uma aproximação para a raiz $r \in (a, b)$.

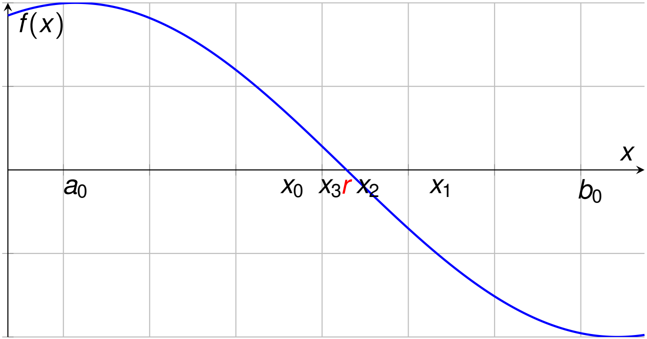


Observamos que a sequência de aproximações $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ está convergindo para a raiz r.

Critério de Parada: numa dada iteração k, tal que $b_k - a_k < \epsilon$, onde ϵ é a tolerância de erro desejada.

Problema

Vamos calcular uma aproximação para a raiz $r \in (a, b)$.



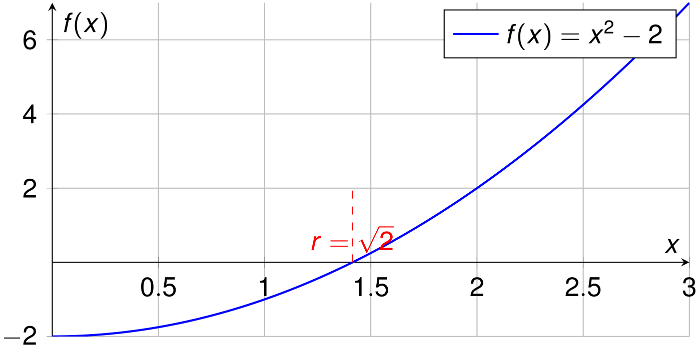
Observamos que a sequência de aproximações $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ está convergindo para a raiz r.

Critério de Parada: numa dada iteração k, tal que $b_k - a_k < \epsilon$, onde ϵ é a tolerância de erro desejada.

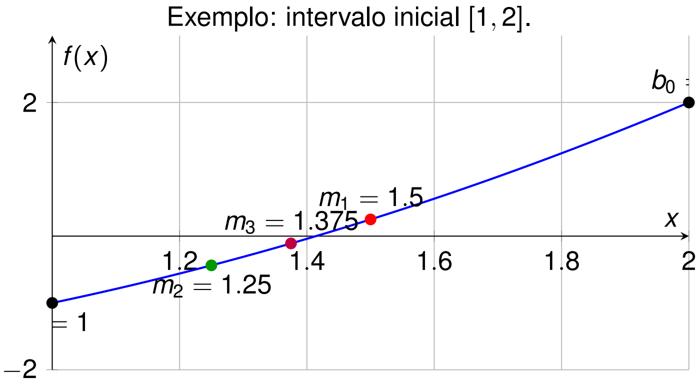
Ideia do Método da Bisseção

1. Escolher intervalo inicial $[a, b]$ com $f(a)f(b) < 0$.
2. Calcular o ponto médio $m = \frac{a+b}{2}$.
3. Verificar o sinal de $f(m)$ para decidir o novo subintervalo.
4. Repetir até que o comprimento do intervalo seja menor que a tolerância desejada ($b_k - a_k < \epsilon$).

Exemplo 1: $f(x) = x^2 - 2$



Iterações do Método da Bisseção



Exemplo 2

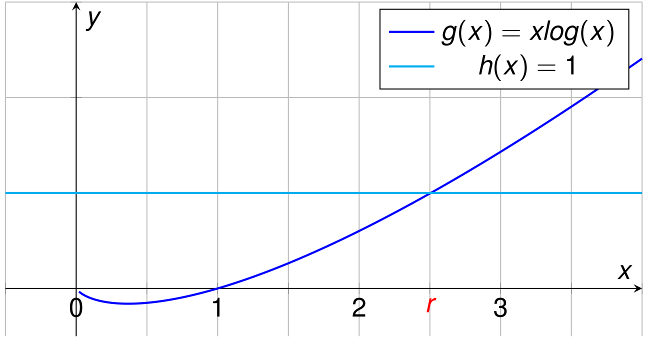
Ache a raiz de $f(x) = x\log(x) - 1$ no intervalo $(2, 3)$ com tolerância $\epsilon = 0,001 = 10^{-3}$ pelo método da Bisseção.

$$f(x) = 0 \Rightarrow x\log(x) - 1 = 0 \Rightarrow \underbrace{x\log(x)}_{g(x)} = \underbrace{1}_{h(x)}$$

Pelo TVI, $f(2) = 2\log(2) - 1 \approx -0,3979 < 0$;
$f(3) = 3\log(3) - 1 \approx 0,4314 > 0$
$\Rightarrow f(2)\cdot f(3) < 0 \Rightarrow r \in (2, 3)$.

Exemplo 2

Ache a raiz de $f(x) = x\log(x) - 1$ no intervalo $(2, 3)$ com tolerância $\epsilon = 0,001 = 10^{-3}$ pelo método da Bisseção.

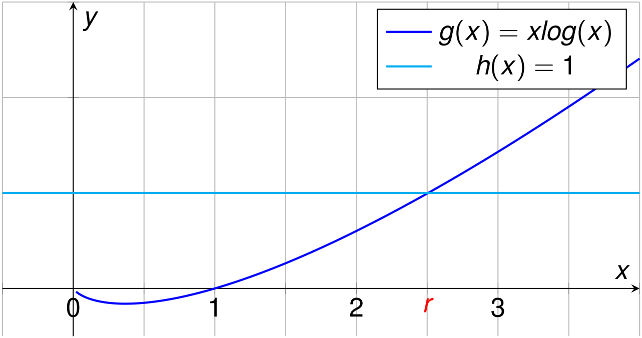


$$f(x) = 0 \Rightarrow x\log(x) - 1 = 0 \Rightarrow \underbrace{x\log(x)}_{g(x)} = \underbrace{1}_{h(x)}$$

Pelo TVI, $f(2) = 2\log(2) - 1 \approx -0,3979 < 0$;
$f(3) = 3\log(3) - 1 \approx 0,4314 > 0$
$\Rightarrow f(2) \cdot f(3) < 0 \Rightarrow r \in (2, 3)$.

Exemplo 2

Ache a raiz de $f(x) = x\log(x) - 1$ no intervalo $(2, 3)$ com tolerância $\epsilon = 0,001 = 10^{-3}$ pelo método da Bisseção.

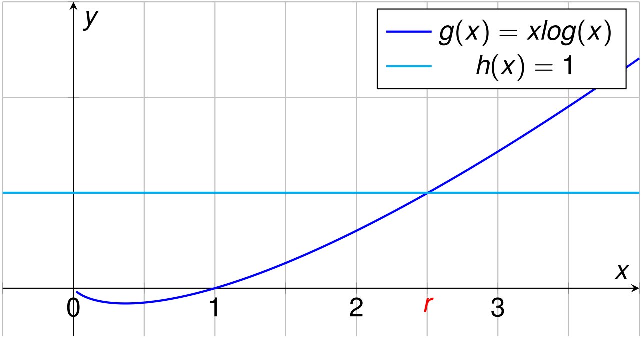


$$f(x) = 0 \Rightarrow x\log(x) - 1 = 0 \Rightarrow \underbrace{x\log(x)}_{g(x)} = \underbrace{1}_{h(x)}$$

Pelo TVI, $f(2) = 2\log(2) - 1 \approx -0,3979 < 0$;
$f(3) = 3\log(3) - 1 \approx 0,4314 > 0$
$\Rightarrow f(2) \cdot f(3) < 0 \Rightarrow r \in (2, 3)$.

Exemplo 2

Ache a raiz de $f(x) = x\log(x) - 1$ no intervalo $(2,3)$ com tolerância $\epsilon = 0,001 = 10^{-3}$ pelo método da Bisseção.



$$f(x) = 0 \Rightarrow x\log(x) - 1 = 0 \Rightarrow \underbrace{x\log(x)}_{g(x)} = \underbrace{1}_{h(x)}$$

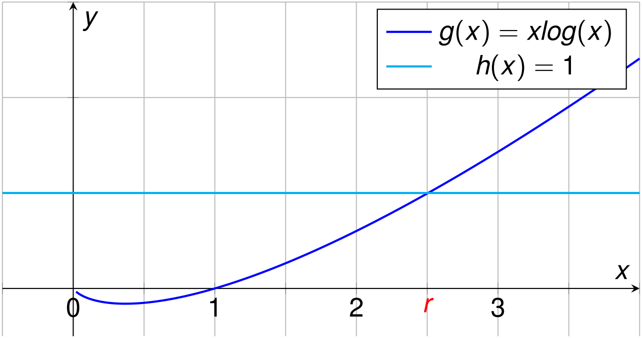
Pelo TVI, $f(2) = 2\log(2) - 1 \approx -0,3979 < 0$;

$f(3) = 3\log(3) - 1 \approx 0,4314 > 0$

$\Rightarrow f(2)\cdot f(3) < 0 \Rightarrow r \in (2,3)$.

Exemplo 2

Ache a raiz de $f(x) = x\log(x) - 1$ no intervalo $(2,3)$ com tolerância $\epsilon = 0,001 = 10^{-3}$ pelo método da Bisseção.



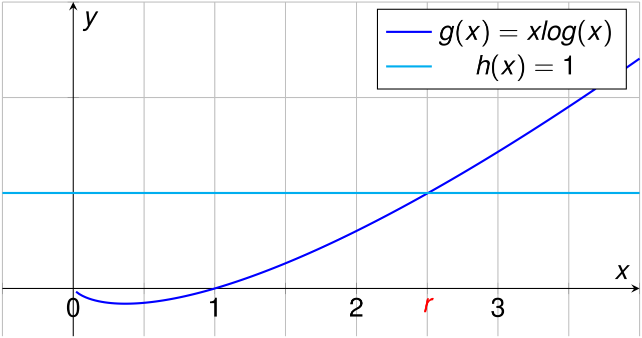
$$f(x) = 0 \Rightarrow x\log(x) - 1 = 0 \Rightarrow \underbrace{x\log(x)}_{g(x)} = \underbrace{1}_{h(x)}$$

Pelo TVI, $f(2) = 2\log(2) - 1 \approx -0,3979 < 0$;
$f(3) = 3\log(3) - 1 \approx 0,4314 > 0$

$\Rightarrow f(2)\cdot f(3) < 0 \Rightarrow r \in (2,3)$.

Exemplo 2

Ache a raiz de $f(x) = x\log(x) - 1$ no intervalo $(2, 3)$ com tolerância $\epsilon = 0,001 = 10^{-3}$ pelo método da Bisseção.



$$f(x) = 0 \Rightarrow x\log(x) - 1 = 0 \Rightarrow \underbrace{x\log(x)}_{g(x)} = \underbrace{1}_{h(x)}$$

Pelo TVI, $f(2) = 2\log(2) - 1 \approx -0,3979 < 0$;
$f(3) = 3\log(3) - 1 \approx 0,4314 > 0$
$\Rightarrow f(2) \cdot f(3) < 0 \Rightarrow r \in (2, 3)$.

Exemplo

Iterações:

1. $x_0 = \dfrac{2+3}{2} = 2,5$

$$\begin{cases} f(2,5) \approx -0,0052 < 0; \\ f(2) \approx -0,3979 < 0; \\ f(3) \approx 0,4314 > 0 \Rightarrow r \in (2,5;3) \Rightarrow 3 - 2,5 = 0,5 > \epsilon = 10^{-3}. \end{cases}$$

2. $x_1 = \dfrac{2,5+3}{2} = 2,75$

$$\begin{cases} f(2,75) \approx 0,2082 > 0; \\ f(2,5) \approx -0,0052 < 0; \\ f(3) \approx 0,4314 > 0; \Rightarrow r \in (2,5;2,75) \Rightarrow 2,75 - 2,5 = 0,25 > \epsilon = 10^{-3}. \end{cases}$$

Exemplo

Iterações:

1. $x_0 = \dfrac{2+3}{2} = 2,5$

$$\begin{cases} f(2,5) \approx -0,0052 < 0; \\ f(2) \approx -0,3979 < 0; \\ f(3) \approx 0,4314 > 0 \Rightarrow r \in (2,5;3) \Rightarrow 3 - 2,5 = 0,5 > \epsilon = 10^{-3}. \end{cases}$$

2. $x_1 = \dfrac{2,5+3}{2} = 2,75$

$$\begin{cases} f(2,75) \approx 0,2082 > 0; \\ f(2,5) \approx -0,0052 < 0; \\ f(3) \approx 0,4314 > 0; \Rightarrow r \in (2,5;2,75) \Rightarrow 2,75 - 2,5 = 0,25 > \epsilon = 10^{-3}. \end{cases}$$

Exemplo

Iterações:

1. $x_0 = \dfrac{2+3}{2} = 2,5$

$$\begin{cases} f(2,5) \approx -0,0052 < 0; \\ f(2) \approx -0,3979 < 0; \\ f(3) \approx 0,4314 > 0 \Rightarrow r \in (2,5;3) \Rightarrow 3 - 2,5 = 0,5 > \epsilon = 10^{-3}. \end{cases}$$

2. $x_1 = \dfrac{2,5+3}{2} = 2,75$

$$\begin{cases} f(2,75) \approx 0,2082 > 0; \\ f(2,5) \approx -0,0052 < 0; \\ f(3) \approx 0,4314 > 0; \Rightarrow r \in (2,5;2,75) \Rightarrow 2,75 - 2,5 = 0,25 > \epsilon = 10^{-3}. \end{cases}$$

Exemplo

Iterações:

1. $$x_0 = \frac{2+3}{2} = 2,5$$

$$\begin{cases} f(2,5) \approx -0,0052 < 0; \\ f(2) \approx -0,3979 < 0; \\ f(3) \approx 0,4314 > 0 \Rightarrow r \in (2,5;3) \Rightarrow 3 - 2,5 = 0,5 > \epsilon = 10^{-3}. \end{cases}$$

2. $$x_1 = \frac{2,5+3}{2} = 2,75$$

$$\begin{cases} f(2,75) \approx 0,2082 > 0; \\ f(2,5) \approx -0,0052 < 0; \\ f(3) \approx 0,4314 > 0; \Rightarrow r \in (2,5;2,75) \Rightarrow 2,75 - 2,5 = 0,25 > \epsilon = 10^{-3}. \end{cases}$$

Exemplo

Iterações:

1. $x_0 = \dfrac{2+3}{2} = 2,5$

$$\begin{cases} f(2,5) \approx -0,0052 < 0; \\ f(2) \approx -0,3979 < 0; \\ f(3) \approx 0,4314 > 0 \Rightarrow r \in (2,5;3) \Rightarrow 3 - 2,5 = 0,5 > \epsilon = 10^{-3}. \end{cases}$$

2. $x_1 = \dfrac{2,5+3}{2} = 2,75$

$$\begin{cases} f(2,75) \approx 0,2082 > 0; \\ f(2,5) \approx -0,0052 < 0; \\ f(3) \approx 0,4314 > 0; \Rightarrow r \in (2,5;2,75) \Rightarrow 2,75 - 2,5 = 0,25 > \epsilon = 10^{-3}. \end{cases}$$

Exemplo

Iterações:

1. $x_0 = \dfrac{2+3}{2} = 2,5$

$$\begin{cases} f(2,5) \approx -0,0052 < 0; \\ f(2) \approx -0,3979 < 0; \\ f(3) \approx 0,4314 > 0 \Rightarrow r \in (2,5;3) \Rightarrow 3 - 2,5 = 0,5 > \epsilon = 10^{-3}. \end{cases}$$

2. $x_1 = \dfrac{2,5+3}{2} = 2,75$

$$\begin{cases} f(2,75) \approx 0,2082 > 0; \\ f(2,5) \approx -0,0052 < 0; \\ f(3) \approx 0,4314 > 0; \ \Rightarrow r \in (2,5;2,75) \Rightarrow 2,75 - 2,5 = 0,25 > \epsilon = 10^{-3}. \end{cases}$$

Exemplo

Iterações:

1. $x_0 = \dfrac{2+3}{2} = 2,5$

$$\begin{cases} f(2,5) \approx -0,0052 < 0; \\ f(2) \approx -0,3979 < 0; \\ f(3) \approx 0,4314 > 0 \Rightarrow r \in (2,5;3) \Rightarrow 3 - 2,5 = 0,5 > \epsilon = 10^{-3}. \end{cases}$$

2. $x_1 = \dfrac{2,5+3}{2} = 2,75$

$$\begin{cases} f(2,75) \approx 0,2082 > 0; \\ f(2,5) \approx -0,0052 < 0; \\ f(3) \approx 0,4314 > 0; \Rightarrow r \in (2,5;2,75) \Rightarrow 2,75 - 2,5 = 0,25 > \epsilon = 10^{-3}. \end{cases}$$

Exemplo

Iterações:

1. $x_2 = \dfrac{2,5 + 2,75}{2} = 2,625$

$$\begin{cases} f(2,625) \approx 0,1002 > 0; \\ f(2,5) \approx -0,0052 < 0; \\ f(2,75) \approx 0,2082 > 0 \Rightarrow r \in (2,5; 2,625) \Rightarrow 2,625 - 2,5 = 0,125 > \epsilon = 10^{-3} \end{cases}$$

$\vdots$

... e continuamos as iterações até $x_9 \approx 2,5068$,

onde $b_{10} - a_{10} \approx 0,9766 \times 10^{-3} < \epsilon$.

Exemplo

Iterações:

1. $x_2 = \dfrac{2,5 + 2,75}{2} = 2,625$

$$\begin{cases} f(2,625) \approx 0,1002 > 0; \\ f(2,5) \approx -0,0052 < 0; \\ f(2,75) \approx 0,2082 > 0 \Rightarrow r \in (2,5; 2,625) \Rightarrow 2,625 - 2,5 = 0,125 > \epsilon = 10^{-3} \end{cases}$$

$\vdots$

... e continuamos as iterações até $x_9 \approx 2,5068$,

onde $b_{10} - a_{10} \approx 0,9766 \times 10^{-3} < \epsilon$.

Exemplo

Iterações:

1. $x_2 = \dfrac{2,5 + 2,75}{2} = 2,625$

$$\begin{cases} f(2,625) \approx 0,1002 > 0; \\ f(2,5) \approx -0,0052 < 0; \\ f(2,75) \approx 0,2082 > 0 \Rightarrow r \in (2,5; 2,625) \Rightarrow 2,625 - 2,5 = 0,125 > \epsilon = 10^{-3} \end{cases}$$

$\vdots$

... e continuamos as iterações até $x_9 \approx 2,5068$,

onde $b_{10} - a_{10} \approx 0,9766 \times 10^{-3} < \epsilon$.

Exemplo

Iterações:

1. $x_2 = \dfrac{2,5 + 2,75}{2} = 2,625$

$$\begin{cases} f(2,625) \approx 0,1002 > 0; \\ f(2,5) \approx -0,0052 < 0; \\ f(2,75) \approx 0,2082 > 0 \Rightarrow r \in (2,5; 2,625) \Rightarrow 2,625 - 2,5 = 0,125 > \epsilon = 10^{-3} \end{cases}$$

$\vdots$

... e continuamos as iterações até $x_9 \approx 2,5068$,

onde $b_{10} - a_{10} \approx 0,9766 \times 10^{-3} < \epsilon$.

Algoritmo da Bisseção

Entrada

Função f, intervalo $[a, b]$, tolerância ϵ.

Iteração

Enquanto $b - a > 2\epsilon$:

1. $m \leftarrow \frac{a+b}{2}$.
2. Se $f(a)f(m) < 0$, faça $b \leftarrow m$; caso contrário, $a \leftarrow m$.

Saída

Aproximação da raiz: $\tilde{x} = \frac{a+b}{2}$.

Erro e Convergência

- Após n iterações, o intervalo tem comprimento $\frac{b-a}{2^n}$.
- O erro é limitado por

$$|r - \tilde{x}_n| \leq \frac{b-a}{2^n}.$$

- Para garantir erro menor que ϵ, basta que o número de iterações n seja tal que:

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \leq \epsilon \Rightarrow n \geq \left\lceil \log_2\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right) \right\rceil.$$

Conclusão

- O método da Bisseção é simples, robusto e garante convergência.
- A convergência é lenta (ordem linear).
- É amplamente usado para obter aproximações iniciais seguras.

- Santos, Vitoriano R.B. **Curso de Cálculo Numérico**, Rio de Janeiro, LTC, 4a. Ed., 1982.
- Burden, Faires **Numerical Analysis**, 7th edition, Thomson Learning, 2001.