Cálculo Numérico - IME/UERJ

Gabarito - Lista de Exercícios 2 - Raízes de funções

1. **Resposta:** Vamos calcular os valores de $p(x)$ em pontos suficientemente próximos das raízes. Assim, temos a tabela:

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
$p(x)$	400	85,75	0	-7,8125	- 2	0	- 0,5	- 0,3125	0	1,75

Analisando o sinal de $p(x)$ para os valores da tabela, concluímos que nas proximidades da raiz $2,5$, no intervalo $(2,3)$, a função $p(x)$ não mudou de sinal. Portanto, o método da Bisseção não funciona para a raiz $2,5$.

2. $[2,3]$. Número de iterações: $k_{\min} = 10$.

3. (a) **Resposta:**

   Usando gráficos ou o Teorema do Valor Intermediário, temos duas raízes: $r_1 \in (-1,0)$ e $r_2 \in (1,2)$.

   Para r_1, uma boa aproximação inicial é $x_0 = -0,7$, enquanto para r_2, uma boa aproximação inicial é $x_0 = 1,9$.

   (b) **Resposta:**

   Pelo teorema do método do ponto fixo, há uma sequência convergente para uma raiz quando $\varphi'(x) \leq M < 1$ para todo $x \in I$, onde I é um intervalo centrado na raiz e $x_0 \in I$.

   $$|\varphi_1'(x)| = \left|\frac{e^{-2x}}{\sqrt{4-e^{-2x}}}\right| = \frac{e^{-2x}}{\sqrt{4-e^{-2x}}}$$

   Então, para as aproximações iniciais das raízes do item (a):

   $|\varphi_1'(r_1 \approx -0,7)| \approx 1,9731 > 1 \Rightarrow$ Diverge!

   $|\varphi_1'(r_2 \approx 1,9)| \approx 0,0113 < 1 \Rightarrow \varphi_1(x)$ converge para $r_2 \in (1,2)$.

   $$|\varphi_2'(x)| = \left|\frac{x}{4-x^2}\right|$$

   Então, para as aproximações iniciais das raízes do item (a):

   $|\varphi_2'(r_1 \approx -0,7)| \approx 0,1994 < 1 \Rightarrow \varphi_2(x)$ converge para $r_1 \in (-1,0)$.

   $|\varphi_2'(r_2 \approx 1,9)| \approx 4,8718 > 1 \Rightarrow$ Diverge!

   (c) Usando $x_0 = -0,5$ para a raiz negativa e $x_0 = 1,9$ para raiz positiva, os resultados para o método de Newton-Raphson com tolerância $\epsilon \leq 10^{-4}$ são:

   Raiz negativa: $r_1 \approx -0,6393$; Raiz positiva: $r_2 \approx 1,9954$.

4. (a) Usando gráficos ou Teorema do Valor Intermediário, escolha uma boa aproximação inicial no intervalo $(1,2)$. Um exemplo é $x_0 = 1,5$.
   (b) $|\varphi_1'(1,5)| \approx 1,5493 > 1$ (não converge), $|\varphi_2'(1,5)| \approx 0,2171 < 1$ (converge).
   (c) $r \approx 1,5569$
5. Como $|\varphi_1'(2)| < |\varphi_2'(2)| < 1$, logo $\varphi_1(x)$ gera sequências mais rapidamente convergentes para a raiz.

6. Resolver.