Cálculo Numérico - IME/UERJ

Gabarito - Lista de Exercícios 3

Sistemas Lineares - Métodos diretos e iterativos

1. (a) (i) $X = (6/5, -1/5)^t$;

   (ii) $X = (-3/5, -2/5)^t$;

   (b)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 4/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

2. (a)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

   (b) Sim. Resolver usando pivoteamento parcial.

3. $X = (6/5, -1, 6/5)^t$;

4. A última linha do sistema triangular é nula, portanto é satisfeita para qualquer valor de z, o que significa que o conjunto de soluções do sistema linear é infinito e está definido por:

   $S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = \frac{1}{16}(z + 13); y = \frac{1}{8}(11z - 17) \right\}$

5. Há necessidade de troca da primeira e terceira linhas.

   $(x, y, z) = (10/7, -5/3, 9/5) \approx (1.423, -1.667, 1.800)$, usando 4 dígitos e arredondamento.

6. (a) $X = (0.3906, 1.2031)$;

   (b) $X = (0.4023, 1.2012)$;

7. (a) Sim.

   (b) $X = (0.3636, 0.4545, 0.4545, 0.3636)^t$

8. Para garantir a convergência do método, devemos efetuar trocas de linhas no sistema para satisfazer o Critério das Linhas, no caso do método de Gauss-Jacobi. Após as trocas das linhas 1 e 3, e em seguida das linhas 2 e 3, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 2.1x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & - & 3y & + & z & = & 5 \\ & & 2y & + & 5z & = & 9 \end{cases}$$

onde:

$\alpha_1 = \dfrac{|1| + |1|}{|2.1|} = \dfrac{2}{2.1} \approx 0.9523 < 1$

$\alpha_2 = \dfrac{|1| + |1|}{|-3|} = \dfrac{2}{3} \approx 0.6667 < 1$

$\alpha_3 = \dfrac{|0| + |2|}{|5|} = \dfrac{2}{5} \approx 0.4 < 1$

$\max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = 0.9523 < 1$

Logo, o Critério das Linhas é satisfeito.

Resolvendo o sistema pelo método de Gauss-Jacobi, uma primeira aproximação $X^{(1)}$, partindo de $X^{(0)} = (0, 0, 0)^t$, é dada por:

$X^{(1)} = (1.4286, -1.6667, 1.8000)^t$.

9. (a) $\alpha_1 = \dfrac{|2| + |-1| + |0|}{|1|} = \dfrac{2}{2.1} = 3 > 1 \Rightarrow$ Não satisfaz o Critério das Linhas.

   (b) $\beta_1 = \alpha_1 = 3 > 1 \Rightarrow$ Não satisfaz o Critério de Sassenfeld.

   (c) Resolvendo o sistema a partir de $X^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^t$, não há convergência em nenhum dos métodos.

   (d) Permutando-se as duas primeiras equações, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 & - & x_2 & & & & & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & = & 1 \\ & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ & & & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \end{cases}$$

   onde:

   $\beta_1 = \dfrac{|-1| + |0| + |0|}{|2|} = 0.5 < 1$

   $\beta_2 = \dfrac{0.5|1| + |-1| + |0|}{|2|} = 0.75 < 1$

   $\beta_3 = \dfrac{0.5|0| + 0.75|-1| + |-1|}{|2|} = 0.875 < 1$

$$\beta_4 = \frac{0.5|0| + 0.75|0| + 0.875|-1|}{|2|} = 0.4375 < 1$$

$\max\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\} = 0.875 < 1$

Logo, o Critério de Sassenfeld é satisfeito.

(e) Resolvendo o sistema do item (d) a partir de $X^{(0)} = (0,0,0,0)^t$, obtemos a solução:

$X^* = (0.9052,\ 0.8150,\ 1.5413,\ 1.2706)^t$.

10.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcc} 7x_1 & + & kx_2 & - & 2x_3 & = & 5 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ -x_1 & + & x_2 & + & kx_3 & = & 5 \end{array} \right.$$

Para que o Critério de Sassenfeld seja satisfeito com k positivo:

$$\beta_1 = \frac{|k| + |-2|}{|7|} = \frac{|k|+2}{7} < 1 \Rightarrow |k| < 5 \Rightarrow 0 < k < 5 \qquad (1)$$

$$\beta_2 = \frac{\beta_1|-2| + |1|}{|4|} = \frac{\left(\frac{|k|+2}{7}\right)2 + 1}{4} = \frac{2|k|+11}{28} < 1 \Rightarrow 0 < k < \frac{17}{2} = 8.5 \qquad (2)$$

$$\beta_3 = \frac{\beta_1|-1| + \beta_2|1|}{|k|} = \frac{\left(\frac{|k|+2}{7}\right) + \left(\frac{2|k|+11}{28}\right)}{|k|} < 1 \Rightarrow k > \frac{19}{22} \approx 0.8636 \qquad (3)$$

Fazendo a interseção de (1), (2) e (3), obtemos que k pertence ao intervalo $(0.8636, 5)$. Logo, o maior inteiro positivo neste intervalo é $k = 4$.