Cálculo Numérico - IME/UERJ

Gabarito - Lista de Exercícios 4

Sistemas Lineares - Métodos diretos

1. (a) Soluções: $\begin{bmatrix} -0,0000990 & 0,0000098 \end{bmatrix}^T$; $\begin{bmatrix} 0,0098029 & 0,0990294 \end{bmatrix}^T$

   (b) Mau condicionamento da matriz (Por quê?)

2. Conjunto de soluções do sistema linear é infinito e está definido por:

   $S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = \frac{1}{16}(z + 13); y = \frac{1}{8}(11z - 17) \right\}$

3. Há necessidade de troca da primeira e terceira linhas.

   $(x, y, z) = (10/7, -5/3, 9/5) \approx (1,4286; -1,6667; 1,8000)$, usando 4 dígitos e arredondamento.

4. (a)

$$U = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 13/3 \end{bmatrix};$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -4/3 & 1 \end{bmatrix}$$

   (b) Devemos resolver o sistema linear $Ax = b$ com as matrizes L e U encontradas. No caso sem pivoteamento, temos $A = LU$. Assim,

$$Ax = b \Rightarrow LUx = b \Rightarrow \begin{cases} Ly = b & (1) \Rightarrow \text{Acho } y \\ Ux = y & (2) \Rightarrow \text{Acho } x \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5. (a) Devemos achar as matrizes L, U e P usando eliminação de Gauss **com pivoteamento parcial**.

$$U = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 15/4 \end{bmatrix};$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 3/4 & 1 \end{bmatrix};$$

$$P = P^{(1)}P^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) PARTE 2: Devemos resolver o sistema linear $Ax = b$ com as matrizes L, U e P encontradas.

No caso com pivoteamento, temos $PA = LU$. Assim,

$$Ax = b \Rightarrow PAx = Pb \Rightarrow LUx = Pb \Rightarrow \begin{cases} Ly = Pb \quad (1) \Rightarrow \text{Acho } y \\ Ux = y \quad (2) \Rightarrow \text{Acho } x \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/5 \\ -8/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}.$$

6. (a) $A = LU \Rightarrow A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$.

Primeiro, achamos L^{-1} por eliminação de Gauss na transformação

$$\left[\begin{array}{c:c} A & I \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{c:c} U & L^{-1} \end{array}\right]$$

de onde tiramos

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & 1 \end{bmatrix};$$

Depois, achamos achamos U^{-1} por Gauss-Jordan na transformação

$$\left[\begin{array}{c:c} U & I \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{c:c} I & U^{-1} \end{array}\right]$$

de onde tiramos

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/6 & -2/15 \\ 0 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix};$$

Assim,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/6 & -2/15 \\ 0 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Com pivoteamento parcial: $PA = LU \Rightarrow A^{-1} = U^{-1}L^{-1}P$, onde P é a matriz das permutações de linhas na matriz identidade.

Primeiro, achamos $L^{-1}P$ por eliminação de Gauss com pivoteamento parcial na transformação

$$\left[\begin{array}{c:c} A & I \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{c:c} U & L^{-1}P \end{array}\right]$$

Depois, achamos achamos U^{-1} por Gauss-Jordan na transformação

$$\left[\begin{array}{c:c} U & I \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{c:c} I & U^{-1} \end{array}\right]$$

(Faça as contas!)