Cálculo Numérico - IME/UERJ

Gabarito - Lista de Exercícios 3

Sistemas Lineares - Métodos diretos e iterativos

1. (a) (i) $X = (6/5, -1/5)^t$;

   (ii) $X = (-3/5, -2/5)^t$;

   (b)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 4/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

Primeira maneira:

Sabemos que

$UU^{-1} = I$

Como a inversa de uma matriz triangular superior também é triangular superior, logo,

$$U^{-1} = C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix}$$

Assim,

$$UU^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De onde tiramos:

$c_{11} = 1$

$c_{12} - 4c_{22} = 0$

$5c_{22} = 1 \Rightarrow c_{22} = 1/5 \Rightarrow c_{12} = 4/5$

Logo,

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4/5 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Analogamente,

$LL^{-1} = I$

A inversa de uma matriz triangular inferior também é triangular inferior. Neste caso,

$$L^{-1} = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$LL^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d_{21} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De onde tiramos:

$d_{21} = -1$

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sabemos que **sem pivoteamento parcial**:

$A = LU \Rightarrow A^{-1} = (LU)^{-1} \Rightarrow A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$

Então,

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4/5 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 4/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Segunda maneira: Usando forma escalonada por linhas para achar as inversas de L e U.

Assim,

$A = LU \Rightarrow A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$

Cálculo de U^{-1}:

$$U \mid I = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}$$

pivô $= a_{22} = 5$;

$m_{12} = \dfrac{a_{12}}{a_{22}} = -\dfrac{4}{5} \Rightarrow L_1 \leftarrow L_1 + \dfrac{4}{5}L_2$

$$U^{(1)} \mid D^{(1)} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 4/5 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}$$

Dividindo L_2 por 5, obtemos:

$$I \mid U^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}$$

Cálculo de L^{-1}:

$$L \mid I = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}$$

pivô $= a_{11} = 1$;

$m_{21} = \dfrac{a_{21}}{a_{11}} = 1 \Rightarrow L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$$I \mid L^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}$$

Portanto,

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4/5 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 4/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

2. (a)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) Sim. Resolver usando pivoteamento parcial.

3. PARTE 1: Devemos achar as matrizes L, U, P usando eliminação de Gauss **com pivoteamento parcial**.

A matriz inicial $A^{(0)}$ é a matriz dos coeficientes do sistema:

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -7 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

Na primeira coluna, verificamos qual elemento é o máximo em módulo:

$\max\limits_{i=1,2,3} |a_{i1}| = \max\{\ |2|,\ |4|,\ |-7|\ \} = 7$

Logo,

pivô $= a_{13} = -7 \Rightarrow L_1 \leftrightarrow L_3$

Ou seja, devemos trocar as linhas L_1 e L_3 de $A^{(0)}$. Assim, obtemos uma nova matriz, que chamaremos de $A'^{\ (0)}$, e a matriz $P^{(0)}$ da permutação das linhas 1 e 3 da matriz identidade:

$$A'^{\ (0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{-7} & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} ; \qquad P^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Após a troca de linhas, devemos continuar o processo de eliminação gaussiana. Agora, precisamos eliminar os elementos que estão abaixo do pivô na primeira coluna.

O novo pivô após a troca das linha L_1 e L_3 é:

$a_{11} = -7$.

O multiplicador da segunda linha em relação à linha do pivô (m_{21}) é dado por:

$m_{21} = \dfrac{a_{21}}{a_{11}} = \dfrac{4}{-7} = -\dfrac{4}{7}$

Logo, para eliminar o elemento $a_{21} = 4$, devemos efetuar a operação:

$L_2 \leftarrow L_2 - m_{21}L_1 = L_2 + \dfrac{4}{7}L_1$.

Analogamente, para eliminar o elemento $a_{31} = 2$, temos:

$m_{31} = \dfrac{a_{31}}{a_{11}} = \dfrac{2}{-7} = -\dfrac{2}{7}$

$\Rightarrow L_3 \leftarrow L_3 - m_{31}L_1 = L_3 + \dfrac{2}{7}L_1.$

Assim, obtemos uma nova matriz $A^{(1)}$ com os elementos a_{21} e a_{31} eliminados.

$$A^{(1)} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -7 & -2 & 2 \\ 0 & 6/7 & 15/7 \\ 0 & -18/7 & 25/7 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

Podemos agora guardar os multiplicadores m_{21} e m_{31} no lugar dos zeros:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} -7 & -2 & 2 \\ -4/7 & 6/7 & 15/7 \\ -2/7 & -18/7 & 25/7 \end{bmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

Vamos continuar com o processo de eliminação gaussiana esquecendo a primeira linha e a primeira coluna. Na submatriz restante, vemos que na sua primeira coluna:

$\max\limits_{i=2,3} |a_{i2}| = \max\{\ |6/7|,\ \ |-18/7|\ \} = 18/7$

Logo,

pivô $= a_{32} = -18/7 \Rightarrow L_2 \leftrightarrow L_3$

Ou seja, devemos trocar as linhas L_2 e L_3 de $A^{(1)}$. Assim, obtemos uma nova matriz, que chamaremos de $A'^{\ (1)}$, e a matriz $P^{(1)}$ da permutação das linhas 2 e 3 da matriz identidade:

$$A'^{\ (1)} = \begin{bmatrix} -7 & -2 & 2 \\ -2/7 & \mathbf{-18/7} & 25/7 \\ -4/7 & 6/7 & 15/7 \end{bmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} ; \qquad P^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Notem que os multiplicadores $m_{21} = -4/7$ e $m_{31} = -2/7$ trocaram de linhas após a troca das linhas L_2 e L_3.

Após a troca de linhas, devemos continuar o processo de eliminação gaussiana. Agora, precisamos eliminar os elementos que estão abaixo do pivô na coluna da submatriz.

O novo pivô após a troca das linha L_2 e L_3 é:

$a_{22} = -18/7$.

O multiplicador da terceira linha em relação à linha do pivô (m_{32}) é dado por:

$m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{6/7}{-18/7} = -\frac{1}{3}$

Logo, para eliminar o elemento $a_{32} = 6/7$, devemos efetuar a operação:

$L_3 \leftarrow L_3 - m_{32}L_2 = L_3 + \frac{1}{3}L_2$.

Assim, obtemos uma nova matriz $A^{(1)}$ com o elemento a_{32} eliminado e podemos guardar o multiplicador m_{32} no lugar do zero:

$$A^{(2)} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -7 & -2 & 2 \\ -2/7 & -18/7 & 25/7 \\ -4/7 & -1/3 & 10/3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

Portanto, já podemos obter as matrizes U, L e P.

A matriz triangular superior U é a matriz final $A^{(2)}$ sem os multiplicadores:

$$U = \begin{bmatrix} -7 & -2 & 2 \\ 0 & -18/7 & 25/7 \\ 0 & 0 & 10/3 \end{bmatrix};$$

A matriz triangular inferior L é a matriz com elementos iguais a 1 na diagonal principal e os multiplicadores nos mesmos lugares da matriz final $A^{(2)}$:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/7 & 1 & 0 \\ -4/7 & -1/3 & 1 \end{bmatrix};$$

A matriz P é o resultado do produto das matrizes permutações de linhas $P^{(1)}$ e $P^{(0)}$ (os termos do produto começam da última para a primeira matriz de permutação de linhas):

$$P = P^{(1)}P^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que $P^{(1)}$ é a responsável pela troca das linhas L_2 e L_3. Logo, o produto de $P^{(1)}$ por $P^{(0)}$ vai resultar na troca das linhas L_2 e L_3 de $P^{(0)}$.

PARTE 2: Devemos resolver o sistema linear $Ax = b$ com as matrizes L, U e P encontradas.

No caso com pivoteamento, temos $PA = LU$. Assim,

$$Ax = b \Rightarrow PAx = Pb \Rightarrow LUx = Pb \Rightarrow \begin{cases} Ly &= Pb \quad (1) \Rightarrow \text{Acho } y \\ Ux &= y \quad (2) \Rightarrow \text{Acho } x \end{cases}$$

(1)

$$Ly = Pb \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/7 & 1 & 0 \\ -4/7 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Logo, devemos resolver o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/7 & 1 & 0 \\ -4/7 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Por substituição direta, obtemos o vetor y:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 48/7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(2)

$$Ux = y \Rightarrow \begin{bmatrix} -7 & -2 & 2 \\ 0 & -18/7 & 25/7 \\ 0 & 0 & 10/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 48/7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Por substituição retroativa, obtemos o vetor x, que é a solução de $Ax = b$:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/5 \\ -1 \\ 6/5 \end{bmatrix}.$$

4. A última linha do sistema triangular é nula, portanto é satisfeita para qualquer valor de z, o que significa que o conjunto de soluções do sistema linear é infinito e está definido por:

   $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = \frac{1}{16}(z + 13); y = \frac{1}{8}(11z - 17)\right\}$

5. Há necessidade de troca da primeira e terceira linhas.

   $(x, y, z) = (10/7, -5/3, 9/5) \approx (1.423, -1.667, 1.800)$, usando 4 dígitos e arredondamento.

6. (a) $X = (0.3906, 1.2031)$;

   (b) $X = (0.4023, 1.2012)$;

7. (a) Sim.

   (b) $X = (0.3636, 0.4545, 0.4545, 0.3636)^t$

8. Para garantir a convergência do método, devemos efetuar trocas de linhas no sistema para satisfazer o Critério das Linhas, no caso do método de Gauss-Jacobi. Após as trocas das linhas 1 e 3, e em seguida das linhas 2 e 3, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 2.1x + y + z = 3 \\ x - 3y + z = 5 \\ 2y + 5z = 9 \end{cases}$$

   onde:

   $\alpha_1 = \frac{|1| + |1|}{|2.1|} = \frac{2}{2.1} \approx 0.9523 < 1$

   $\alpha_2 = \frac{|1| + |1|}{|-3|} = \frac{2}{3} \approx 0.6667 < 1$

   $\alpha_3 = \frac{|0| + |2|}{|5|} = \frac{2}{5} \approx 0.4 < 1$

   $\max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = 0.9523 < 1$

   Logo, o Critério das Linhas é satisfeito.

   Resolvendo o sistema pelo método de Gauss-Jacobi, uma primeira aproximação $X^{(1)}$, partindo de $X^{(0)} = (0, 0, 0)^t$, é dada por:

   $X^{(1)} = (1.4286, -1.6667, 1.8000)^t$.

9. (a) $\alpha_1 = \frac{|2| + |-1| + |0|}{|1|} = \frac{2}{2.1} = 3 > 1 \Rightarrow$ Não satisfaz o Critério das Linhas.

(b) $\beta_1 = \alpha_1 = 3 > 1 \Rightarrow$ Não satisfaz o Critério de Sassenfeld.

(c) Resolvendo o sistema a partir de $X^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^t$, não há convergência em nenhum dos métodos.

(d) Permutando-se as duas primeiras equações para o sistema, o Critério de Sassenfeld é satisfeito (verifique).

(e) Resolvendo o sistema do item (d) a partir de $X^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^t$, obtemos a solução:

$X^* = (0.9052,\ 0.8150,\ 1.5413,\ 1.2706)^t$.

10. k = 4.