

Cálculo Numérico - IME/UERJ  
Gabarito - Lista de Exercícios 3  
Sistemas Lineares - Métodos diretos e iterativos

1. (a) (i)  $X = (6/5, -1/5)^t$ ;  
(ii)  $X = (-3/5, -2/5)^t$ ;  
(b)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 4/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

**Primeira maneira:**

Sabemos que

$$UU^{-1} = I$$

Como a inversa de uma matriz triangular superior também é triangular superior, logo,

$$U^{-1} = C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix}$$

Assim,

$$UU^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De onde tiramos:

$$c_{11} = 1$$

$$c_{12} - 4c_{22} = 0$$

$$5c_{22} = 1 \Rightarrow c_{22} = 1/5 \Rightarrow c_{12} = 4/5$$

Logo,

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4/5 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Analogamente,

$$LL^{-1} = I$$

A inversa de uma matriz triangular inferior também é triangular inferior. Neste caso,

$$L^{-1} = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$LL^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d_{21} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De onde tiramos:

$$d_{21} = -1$$

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sabemos que **sem pivoteamento parcial**:

$$A = LU \Rightarrow A^{-1} = (LU)^{-1} \Rightarrow A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$$

Então,

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4/5 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 4/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

**Segunda maneira:** Usando forma escalonada por linhas para achar as inversas de  $L$  e  $U$ .

Assim,

$$A = LU \Rightarrow A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$$

Cálculo de  $U^{-1}$ :

$$U \mid I = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}$$

$$\text{pivô} = a_{22} = 5;$$

$$m_{12} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = -\frac{4}{5} \Rightarrow L_1 \leftarrow L_1 + \frac{4}{5}L_2$$

$$U^{(1)} \mid D^{(1)} = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 4/5 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}$$

Dividindo  $L_2$  por 5, obtemos:

$$I \mid U^{-1} = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}$$

Cálculo de  $L^{-1}$ :

$$L \mid I = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}$$

$$\text{pivô} = a_{11} = 1;$$

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = 1 \Rightarrow L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$I \mid L^{-1} = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}$$

Portanto,

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1} = \left[ \begin{array}{cc} 1 & 4/5 \\ 0 & 1/5 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} 1/5 & 4/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{array} \right]$$

**Terceira maneira:**

$$LU \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} | & | \\ d_1 & d_2 \\ | & | \end{bmatrix}}_{D=A^{-1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | \\ I_1 & I_2 \\ | & | \end{bmatrix}}_I$$

onde

$$d_1 = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{bmatrix}; \quad d_2 = \begin{bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \end{bmatrix};$$

$$I_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad I_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, resolvemos 4 sistemas:

$$LUd_1 = I_1 \underbrace{\Rightarrow}_{Ud_1=y_1} \begin{cases} Ly_1 = I_1 & (1) \Rightarrow \text{Acho } y_1 \\ Ud_1 = y_1 & (2) \Rightarrow \text{Acho } d_1 \end{cases}.$$

$$d_1 = \begin{bmatrix} 1/5 \\ -1/5 \end{bmatrix}.$$

$$LUd_2 = I_2 \underbrace{\Rightarrow}_{Ud_2=y_2} \begin{cases} Ly_2 = I_2 & (3) \Rightarrow \text{Acho } y_2 \\ Ud_2 = y_2 & (4) \Rightarrow \text{Acho } d_2 \end{cases}.$$

$$d_2 = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 1/5 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 4/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

2. (a)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) Sim. Resolver usando pivoteamento parcial.

3.  $X = (6/5, -1, 6/5)^t$ ;

4. A última linha do sistema triangular é nula, portanto é satisfeita para qualquer valor de  $z$ , o que significa que o conjunto de soluções do sistema linear é infinito e está definido por:

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \frac{1}{16}(z + 13); y = \frac{1}{8}(11z - 17) \right\}$$

5. Há necessidade de troca da primeira e terceira linhas.

$(x, y, z) = (10/7, -5/3, 9/5) \approx (1.423, -1.667, 1.800)$ , usando 4 dígitos e arredondamento.

6. (a)  $X = (0.3906, 1.2031)$ ;

(b)  $X = (0.4023, 1.2012)$ ;

7. (a) Sim.

(b)  $X = (0.3636, 0.4545, 0.4545, 0.3636)^t$

8. Para garantir a convergência do método, devemos efetuar trocas de linhas no sistema para satisfazer o Critério das Linhas, no caso do método de Gauss-Jacobi. Após as trocas das linhas 1 e 3, e em seguida das linhas 2 e 3, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 2.1x + y + z = 3 \\ x - 3y + z = 5 \\ 2y + 5z = 9 \end{cases}$$

onde:

$$\alpha_1 = \frac{|1| + |1|}{|2.1|} = \frac{2}{2.1} \approx 0.9523 < 1$$

$$\alpha_2 = \frac{|1| + |1|}{|-3|} = \frac{2}{3} \approx 0.6667 < 1$$

$$\alpha_3 = \frac{|0| + |2|}{|5|} = \frac{2}{5} \approx 0.4 < 1$$

$$\max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = 0.9523 < 1$$

Logo, o Critério das Linhas é satisfeito.

Resolvendo o sistema pelo método de Gauss-Jacobi, uma primeira aproximação  $X^{(1)}$ , partindo de  $X^{(0)} = (0, 0, 0)^t$ , é dada por:

$$X^{(1)} = (1.4286, -1.6667, 1.8000)^t.$$

9. (a)  $\alpha_1 = \frac{|2| + |-1| + |0|}{|1|} = \frac{2}{2.1} = 3 > 1 \Rightarrow$  Não satisfaz o Critério das Linhas.
- (b)  $\beta_1 = \alpha_1 = 3 > 1 \Rightarrow$  Não satisfaz o Critério de Sassenfeld.
- (c) Resolvendo o sistema a partir de  $X^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^t$ , não há convergência em nenhum dos métodos.
- (d) Permutando-se as duas primeiras equações, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 & = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 & = 1 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 & = 1 \\ -x_3 + 2x_4 & = 1 \end{cases}$$

onde:

$$\beta_1 = \frac{|-1| + |0| + |0|}{|2|} = 0.5 < 1$$

$$\beta_2 = \frac{0.5|1| + |-1| + |0|}{|2|} = 0.75 < 1$$

$$\beta_3 = \frac{0.5|0| + 0.75|-1| + |-1|}{|2|} = 0.875 < 1$$

$$\beta_4 = \frac{0.5|0| + 0.75|0| + 0.875|-1|}{|2|} = 0.4375 < 1$$

$$\max\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\} = 0.875 < 1$$

Logo, o Critério de Sassenfeld é satisfeito.

- (e) Resolvendo o sistema do item (d) a partir de  $X^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^t$ , obtemos a solução:

$$X^* = (0.9052, 0.8150, 1.5413, 1.2706)^t.$$

10.

$$\begin{cases} 7x_1 + kx_2 - 2x_3 & = 5 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 & = 5 \\ -x_1 + x_2 + kx_3 & = 5 \end{cases}$$

Para que o Critério de Sassenfeld seja satisfeito com  $k$  positivo:

$$\beta_1 = \frac{|k| + |-2|}{|7|} = \frac{|k| + 2}{7} < 1 \Rightarrow |k| < 5 \Rightarrow 0 < k < 5 \quad (1)$$

$$\beta_2 = \frac{\beta_1|-2| + |1|}{|4|} = \frac{\left(\frac{|k|+2}{7}\right)2 + 1}{4} = \frac{2|k|+11}{28} < 1 \Rightarrow 0 < k < \frac{17}{2} = 8.5 \quad (2)$$

$$\beta_3 = \frac{\beta_1|-1| + \beta_2|1|}{|k|} = \frac{\left(\frac{|k|+2}{7}\right) + \left(\frac{2|k|+11}{28}\right)}{|k|} < 1 \Rightarrow k > \frac{19}{22} \approx 0.8636 \quad (3)$$

Fazendo a interseção de (1), (2) e (3), obtemos que  $k$  pertence ao intervalo  $(0.8636, 5)$ . Logo, o maior inteiro positivo neste intervalo é  $k = 4$ .