

CÁLCULO NUMÉRICO UERJ

Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Ordinárias

Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br
IME-UERJ

Sumário

- 1 Solução numérica de um problema de valor inicial (PVI)
- 2 Método de Euler
 - Erro local e erro acumulado
- 3 Método de Euler melhorado (Runge-Kutta de Ordem 2)
 - Erro local e erro acumulado
- 4 Bibliografia

Introdução

Estudaremos métodos numéricos para problemas de valor inicial (PVI) formulados da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

em que f é uma função das variáveis x (variável independente) e $y = y(x)$ (variável dependente de x).

A equação

$$y(x_0) = y_0,$$

com x_0 e y_0 dados, é chamada **condição inicial**.

A solução de um PVI, quando existe, é uma função y , que depende de x e satisfaz a condição inicial.

Assumiremos que o PVI possui **uma única solução**.

Ideia dos Métodos Numéricos para PVI

Os métodos numéricos para a resolução de um PVI fornecem uma estimativa para $y(x)$ em pontos x_1, x_2, \dots, x_n .

Por simplicidade, assumiremos que os pontos são igualmente espaçados, ou seja,

$$x_{k+1} = x_k + h, \quad \forall k = 0, 1, \dots, n-1,$$

em que $h > 0$ é chamado tamanho do **passo**.

Denotaremos por y_k a estimativa de $y(x_k)$, ou seja,

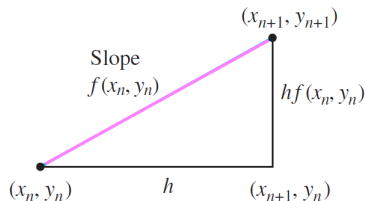
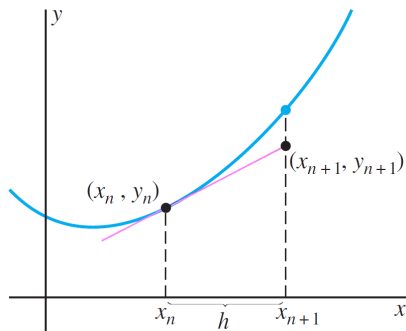
$$y_k \approx y(x_k), \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Temos um **método de passo simples** ou *passo um* se y_k é determinado usando apenas y_{k-1} . Caso contrário, temos um **método de passo múltiplo**.

Veremos dois **métodos de passo simples**:

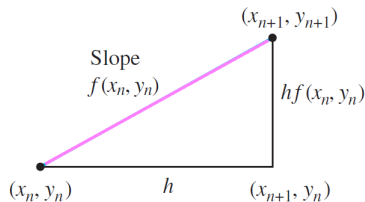
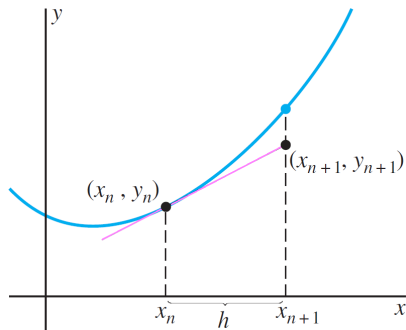
- **Método de Euler**
- **Método de Euler melhorado (Runge-Kutta de 2a. Ordem)**

Ideia do Método de Euler



Em cada ponto (x_n, y_n) , $n = 0, 1, \dots, n-1$, traçamos a reta tangente do gráfico de $y(x)$ ou da família $y(x) + C$, onde C é uma constante real, até o ponto (x_{n+1}, y_{n+1}) .

Ideia do Método de Euler

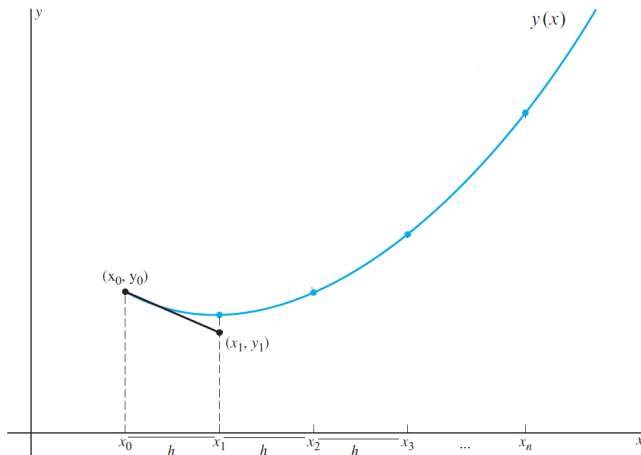


Note que:

$$y'(x) = f(x, y) \Rightarrow f(x_n, y_n) = y'(x_n, y_n) = \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$$

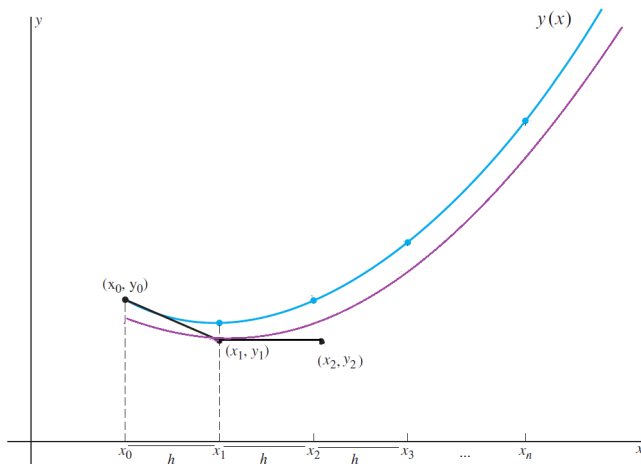
$$\Rightarrow y_{n+1} - y_n = h f(x_n, y_n) \Rightarrow y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n), \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

Ideia do Método de Euler



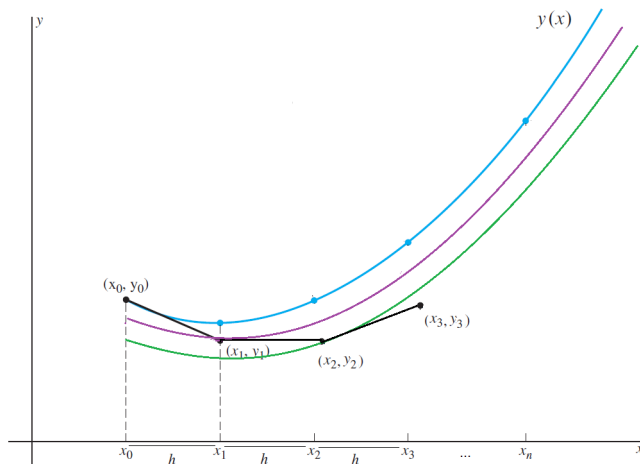
$$f(x_0, y_0) = y'(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{h} \Rightarrow y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0)$$

Ideia do Método de Euler



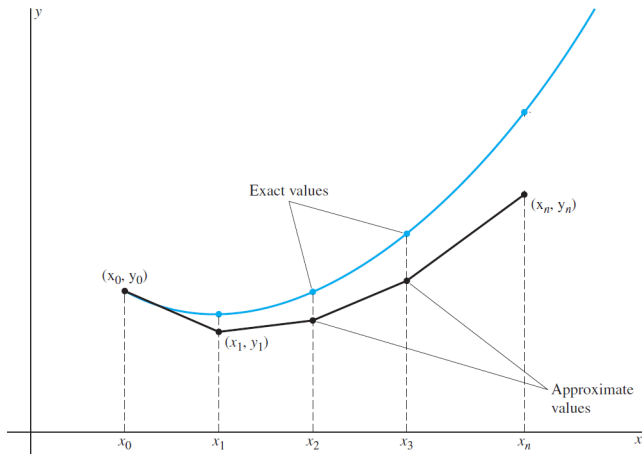
$$f(x_1, y_1) = y'(x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{h} \Rightarrow y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1)$$

Ideia do Método de Euler



$$f(x_2, y_2) = y'(x_2) = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_3 - y_2}{h} \Rightarrow y_3 = y_2 + h f(x_2, y_2)$$

Ideia do Método de Euler



De modo geral, para $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$,

$$f(x_k, y_k) = y'(x_k) = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{y_{k+1} - y_k}{h} \Rightarrow y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k)$$

Método de Euler

Método de Euler - Algoritmo

Dado o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

O **Método de Euler com passo** h consiste em se aplicar a fórmula iterativa

$$y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

para calcular aproximações sucessivas $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ para os valores verdadeiros $y(x_1), y(x_2), y(x_3), \dots, y(x_n)$ da solução exata $y(x)$ nos pontos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, respectivamente.

Método de Euler

Exemplo 1: Aplique o Método de Euler para encontrar uma solução aproximada para o PVI:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x + y, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

com passo $h = 0,1$, onde $x \in [0, 1]$.

Solução:

Aqui, $f(x, y) = x + y$, de modo que a fórmula iterativa do Método de Euler se torna:

$$y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k) \Rightarrow y_{k+1} = y_k + h (x_k + y_k), \quad \forall k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Começando com $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, as três primeiras aproximações são dadas por:

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) \Rightarrow y_1 = 1 + 0,1 \cdot (0 + 1) = 1,1000$$

$$y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1) \Rightarrow y_2 = 1,1 + 0,1 \cdot (0,1 + 1,1) = 1,2200$$

$$y_3 = y_2 + h f(x_2, y_2) \Rightarrow y_3 = 1,2200 + 0,1 \cdot (0,2 + 1,2200) = 1,3620$$

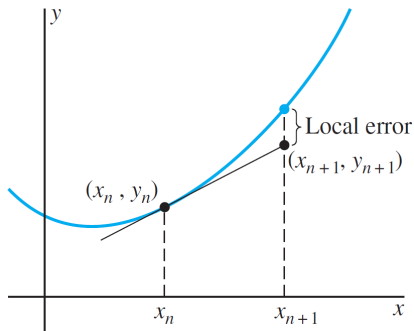
Método de Euler

Como $h = (x_n - x_0)/n = 0,1 \Rightarrow (1 - 0)/n = 0,1 \Rightarrow n = 1/0,1 = 10$, a tabela a seguir mostra os valores aproximados obtidos em todos os $n = 10$ passos.

Obs.: A solução exata é $y(x) = 2e^x - x - 1$.

k	x_k	y_k	$y(x_k)$	$ y(x_k) - y_k $
0	0,0	1,0000	1,0000	0,0000
1	0,1	1,1000	1,1103	0,0103
2	0,2	1,2200	1,2428	0,0228
3	0,3	1,3620	1,3997	0,0377
4	0,4	1,5282	1,5836	0,0554
5	0,5	1,7210	1,7974	0,0764
6	0,6	1,9431	2,0442	0,1011
7	0,7	2,1974	2,3275	0,1301
8	0,8	2,4872	2,6511	0,1639
9	0,9	2,8159	3,0192	0,2033
10	1,0	3,1875	3,4366	0,2491

Erro local - Método de Euler



Em cada iteração k , o Método de Euler possui um erro local dado por:

$$E_k = y(x_k) - y_k, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Problema: nem sempre é possível obter a solução exata $y(x_k)$ para poder calcular o erro absoluto $|E_k|$.

Exemplo: $y'(x) = e^{-x^2} \Rightarrow$ Não conseguimos encontrar a primitiva de e^{-x^2} .

Erro local - Método de Euler

Solução: Podemos estimar o erro absoluto $|E_k| = |y(x_k) - y_k|$ usando **Série de Taylor**:

Série de Taylor - Definição

Se y for suficientemente suave, a **Série de Taylor** de **ordem** m de $y(x)$ em **torno de** x_k é dada por:

$$y(x) = P_m(x) + R_m(x),$$

onde

$$P_m(x) = y(x_k) + y'(x_k)(x - x_k) + y''(x_k)\frac{(x - x_k)^2}{2!} + \dots + y^{(m)}(x_k)\frac{(x - x_k)^m}{m!}$$

é o **polinômio de Taylor de ordem (grau) m** ,

$$R_m(x) = y^{(m+1)}(\xi)\frac{(x - x_k)^{m+1}}{(m+1)!}, \text{ com } \xi \in (x_k, x)$$

é o **erro de truncamento local da série** para a aproximação $y(x) \approx P_k(x)$.

Erro local - Método de Euler

Em particular, o **Método de Euler** é um **método de Série de Taylor de ordem 1**.

Com efeito, se $y = y(x)$ for suficientemente suave, então a série de Taylor de ordem 1 centrada em x_k é dada por:

$$y(x) = y(x_k) + y'(x_k)(x - x_k) + y''(\xi) \frac{(x - x_k)^2}{2!}, \text{ com } \xi \in (x_k, x)$$

Pegando $x = x_{k+1}$ e sabendo que $h = x_{k+1} - x_k$ e $y'(x_k) = f(x_k, y(x_k))$, obtemos:

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h f(x_k, y(x_k)) + y''(\xi) \frac{h^2}{2!}, \text{ com } \xi \in (x_k, x_{k+1})$$

Assumindo $y_k = y(x_k)$, obtemos:

$$y(x_{k+1}) = y_k + h f(x_k, y_k) + y''(\xi) \frac{h^2}{2!}, \text{ com } \xi \in (x_k, x_{k+1})$$

Lembrando que no método de Euler, $y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k)$, obtemos:

$$y(x_{k+1}) = y_{k+1} + y''(\xi) \frac{h^2}{2!}, \text{ com } \xi \in (x_k, x_{k+1})$$

Erro local - Método de Euler

Da última equação, concluímos que no método de Euler, o erro entre a solução exata e a aproximada no ponto x_{k+1} é dado por:

$$E_{k+1} = y(x_{k+1}) - y_{k+1} = y''(\xi) \frac{h^2}{2!}, \text{ com } \xi \in (x_k, x_{k+1}),$$

para todo $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Em módulo, podemos calcular:

Limitante superior do erro absoluto local - Método de Euler

Considerando E_k o erro cometido pela aproximação $y(x_k) \approx y_k$ usando o Método de Euler,

$$|E_k| \leq M_2 \frac{h^2}{2!}, \text{ onde } M_2 = \max_{\xi \in (x_{k-1}, x_k)} |y''(\xi)|,$$

para todo $k = 1, \dots, n$.

Erro local - Método de Euler

Voltando ao exemplo anterior: seja o PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x + y, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

com passo $h = 0,1$, onde $x \in [0, 1]$.

Sabendo que a solução exata é $y(x) = 2e^x - x - 1$, encontre um limitante superior do erro local no ponto $x = 1$ usando o Método de Euler.

Solução: Sabendo que o passo é $h = 0,1$ e também que o índice k do nó x_k é dado por:

$$h = \frac{x_k - x_0}{k} \Rightarrow k = \frac{x_k - x_0}{h} = \frac{1 - 0}{0,1} = 10,$$

o limitante superior do erro no ponto $x_k = x_{10} = 1$ neste caso é dado por:

$$|E_{10}| \leq M_2 \frac{h^2}{2!}, \text{ onde } M_2 = \max_{\xi \in (x_9, x_{10})} |y''(\xi)|,$$

Erro local - Método de Euler

O enunciado diz que a solução exata é $y(x) = 2e^x - x - 1$. Logo, a segunda derivada é dada por:

$$y''(x) = 2e^x$$

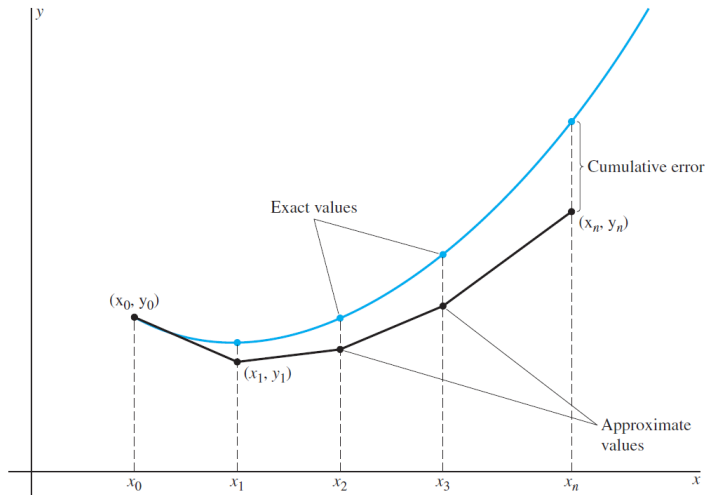
Agora, podemos calcular M_2 . Sabendo que $x_9 = x_{10} - h = 1 - 0,1 = 0,9$, obtemos:

$$M_2 = \max_{\xi \in (0,9;1)} |y''(\xi)| = \max\{|2e^{0,9}|, |2e^1|\} = |2e^1| \approx 5,4366$$

Portanto, o **limitante superior do erro local** em $x = 1$ é:

$$|E_{10}| \leq (5,4366) \frac{(0,1)^2}{2!} \approx 0,0272$$

Erro total - Método de Euler



O **erro total** ou **erro acumulado** é dado pela **soma de todos os erros locais** E_1, E_2, \dots, E_n .

Erro total - Método de Euler

Vimos que o erro local no ponto x_k é dado por:

$$E_k = y(x_k) - y_k = y''(\xi_k) \frac{h^2}{2!}, \text{ com } \xi_k \in (x_{k-1}, x_k),$$

para todo $k = 1, \dots, n$.

Fazendo a soma dos erros locais para $k = 1, \dots, n$, obtemos:

$$\begin{aligned} E_{Total} &= E_1 + E_2 + \dots + E_n = y''(\xi_1) \frac{h^2}{2!} + y''(\xi_2) \frac{h^2}{2!} + \dots + y''(\xi_n) \frac{h^2}{2!} \\ &= \frac{h^2}{2!} [y''(\xi_1) + y''(\xi_2) + \dots + y''(\xi_n)] \end{aligned}$$

Em módulo, usando desigualdade triangular, obtemos:

$$\begin{aligned} |E_{Total}| &= |E_1 + E_2 + \dots + E_n| \leq |E_1| + |E_2| + \dots + |E_n| \\ &\leq \frac{h^2}{2!} [|y''(\xi_1)| + |y''(\xi_2)| + \dots + |y''(\xi_n)|] \end{aligned}$$

Erro total - Método de Euler

Considerando que $y''(x)$ é contínua no intervalo $[x_0, x_n]$, então é limitada neste intervalo. Logo, existe M_2 real, positivo tal que $|y''(x)| \leq M_2$ para todo $x \in [x_0, x_n]$.

Portanto, para todo $k = 1, \dots, n$,

$$|y''(\xi_k)| \leq M_2, \text{ onde } M_2 = \max_{\xi \in [x_0, x_n]} |y''(\xi)|.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |E_{Total}| &\leq \frac{h^2}{2!} [|y''(\xi_1)| + |y''(\xi_2)| + \dots + |y''(\xi_n)|] \\ &\leq \frac{h^2}{2!} [n \cdot M_2] = \frac{h^2}{2!} \left[\frac{x_n - x_0}{h} \cdot M_2 \right] = \frac{h}{2} [(x_n - x_0) \cdot M_2] \end{aligned}$$

Limitante superior do erro absoluto total - Método de Euler

$$|E_{Total}| \leq \frac{h}{2} (x_n - x_0) \cdot M_2, \text{ onde } M_2 = \max_{\xi \in [x_0, x_n]} |y''(\xi)|.$$

Erro total - Método de Euler

Voltando ao exemplo anterior: seja o PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x + y, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

com passo $h = 0,1$, onde $x \in [0, 1]$.

(a) Sabendo que a solução exata é $y(x) = 2e^x - x - 1$, encontre um limitante superior do erro total no ponto $x = 1$ usando o Método de Euler.

Solução: Sabendo que $h = 0,1$, $x_0 = 0$, $x_n = 1$ e $y''(x) = 2e^x$, temos:

$$M_2 = \max_{\xi \in [0,1]} |y''(\xi)| = \max\{|2e^0|, |2e^1|\} = |2e^1| \approx 5,4366$$

Logo,

$$|E_{Total}| \leq \frac{0,1}{2} [(1 - 0) \cdot 5,4366] \approx 0,2718$$

No primeiro exemplo, vimos que: $|y(1) - y_{10}| \approx 0,2491 < 0,2718$ (OK!)

Erro total - Método de Euler

(b) Agora, encontre um limitante superior do erro total no ponto $x = 0,5$ usando o Método de Euler.

Solução: Sabendo que $h = 0,1$, $x_0 = 0$, $x_n = 0,5$ e $y''(x) = 2e^x$, temos:

$$M_2 = \max_{\xi \in [0;0,5]} |y''(\xi)| = \max\{|2e^0|, |2e^{0,5}|\} = |2e^{0,5}| \approx 3,2974$$

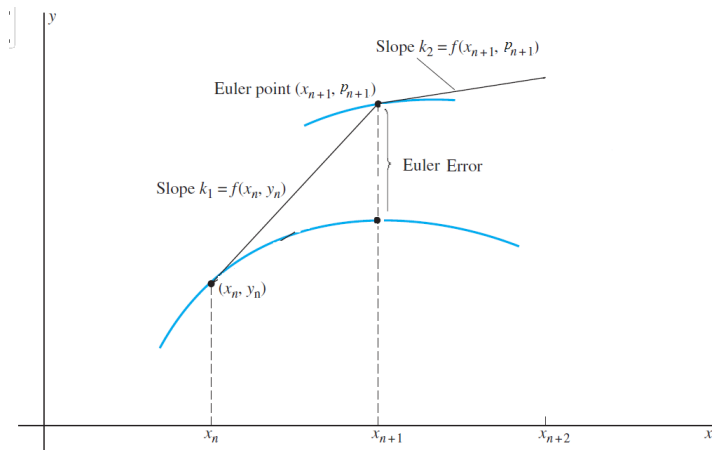
Logo,

$$|E_{Total}| \leq \frac{0,1}{2} [(0,5 - 0) \cdot 3,2974] \approx 0,0824$$

No primeiro exemplo, vimos que: $|y(0,5) - y_5| \approx 0,0764 < 0,0824$ (OK!)

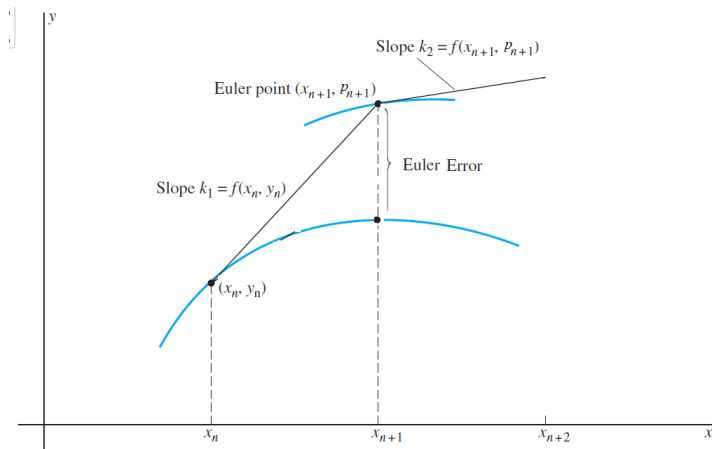
Exercício: Encontre um limitante superior do erro total nos demais pontos x_k usando o Método de Euler e compare com seus respectivos erros absolutos.

Método de Euler melhorado



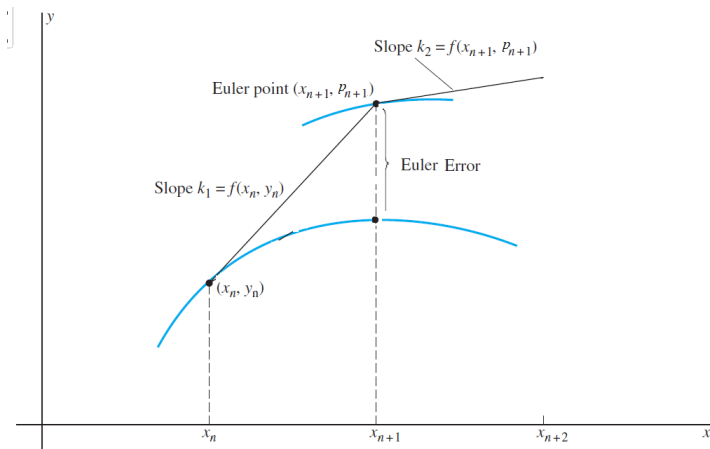
O **Método de Euler melhorado** ou **Runge-Kutta de Ordem 2 (RK2)** visa diminuir o erro do Método de Euler.

Método de Euler melhorado



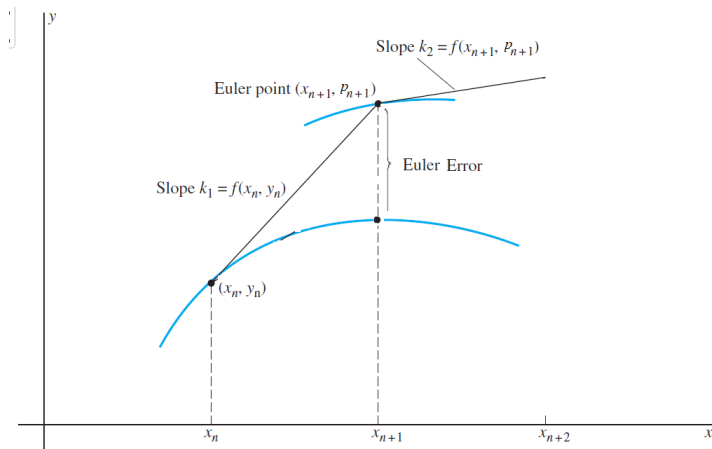
Primeiro, traçamos uma reta tangente à curva $y(x)$ no ponto (x_n, y_n) e obtemos a primeira inclinação: $K_1 = y'(x_n) = f(x_n, y_n)$

Método de Euler melhorado



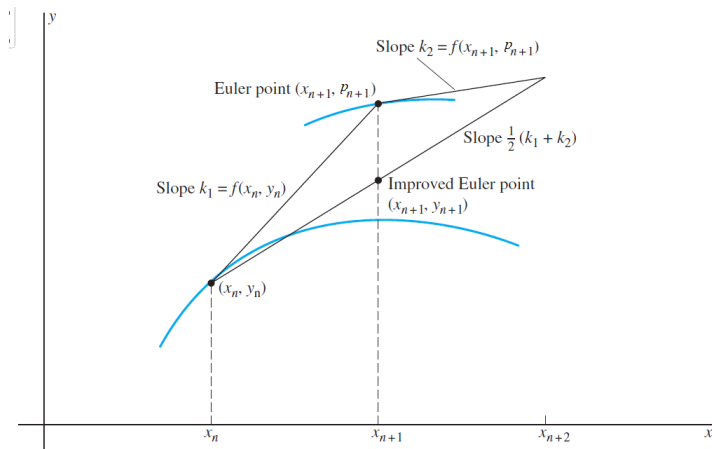
Em seguida, achamos um **preditor** p_{n+1} , que vai prever o valor aproximado de $y(x_{n+1})$ pelo método de Euler: $p_{n+1} = y_n + h K_1 = y_n + h f(x_n, y_n)$.

Método de Euler melhorado



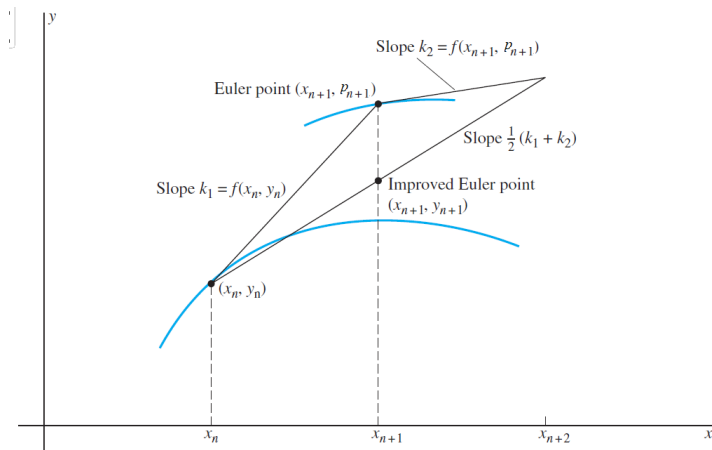
Depois, traçamos uma reta tangente à outra curva da família $y(x) + C$ no ponto (x_{n+1}, p_{n+1}) , cuja inclinação é dada por: $K_2 = y'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, p_{n+1})$.

Método de Euler melhorado



Agora, para diminuir o erro do Método de Euler, fazemos a média das inclinações: $(K_1 + K_2)/2$.

Método de Euler melhorado



Finalmente, calculamos o **corretor** y_{n+1} usando a média das inclinações:

$$y_{n+1} = y_n + h(K_1 + K_2)/2.$$

Logo, o **Método de Euler melhorado** é um método **preditor-corretor**.

Método de Euler melhorado

Método de Euler melhorado - Algoritmo

Dado o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), & y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

O **Método de Euler melhorado com passo h** consiste em se aplicar as seguintes fórmulas iterativas para $k = 0, 1, \dots, n - 1$:

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x_k, y_k), \\ p_{k+1} &= y_k + h K_1 \text{ (preditor)}, \\ K_2 &= f(x_{k+1}, p_{k+1}), \\ y_{k+1} &= y_k + h \left(\frac{K_1 + K_2}{2} \right) \text{ (corretor)} \end{aligned}$$

para calcular aproximações sucessivas $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ para os valores verdadeiros $y(x_1), y(x_2), y(x_3), \dots, y(x_n)$ da solução exata $y(x)$ nos pontos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, respectivamente.

Método de Euler melhorado

Exemplo 2: Aplique o Método de Euler melhorado para encontrar uma solução aproximada para o PVI do Exemplo 1:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x + y, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

com passo $h = 0,1$, onde $x \in [0, 1]$.

Solução:

Aqui, $f(x, y) = x + y$, de modo que as fórmulas iterativas do Método de Euler melhorado se tornam para $k = 0, 1, \dots, n - 1$:

$$\begin{aligned} K_1 &= x_k + y_k, \\ p_{k+1} &= y_k + h K_1 \text{ (preditor)}, \\ K_2 &= f(x_{k+1}, p_{k+1}), \\ y_{k+1} &= y_k + h \left(\frac{K_1 + K_2}{2} \right) \text{ (corretor)} \end{aligned}$$

Método de Euler melhorado

Começando com $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, as quatro primeiras aproximações são dadas por:

- Cálculo de y_1 :

$$K_1 = x_0 + y_0 = 0 + 1 = 1,$$

$$p_1 = y_0 + h K_1 = 1 + 0,1 \cdot 1 = 1,1000 \text{ (preditor),}$$

$$K_2 = f(x_1, p_1) = x_1 + p_1 = 0,1 + 1,1 = 1,2,$$

$$y_1 = y_0 + h (K_1 + K_2)/2 = 1 + (0,1) (1 + 1,2)/2 = 1,1100 \text{ (corretor)}$$

- Cálculo de y_2 :

$$K_1 = x_1 + y_1 = 0,1 + 1,11 = 1,2100$$

$$p_2 = y_1 + h K_1 = 1,11 + 0,1 \cdot 1,21 = 1,2310,$$

$$K_2 = f(x_2, p_2) = x_2 + p_2 = 0,2 + 1,2310 = 1,4310,$$

$$y_2 = y_1 + h (K_1 + K_2)/2 = 1,11 + (0,1) (1,21 + 1,431)/2 = 1,2421$$

Método de Euler melhorado

- Cálculo de y_3 :

$$K_1 = x_2 + y_2 = 0,2 + 1,2421 = 1,4421$$

$$p_3 = y_2 + h K_1 = 1,2421 + 0,1 \cdot 1,4421 = 1,3863,$$

$$K_2 = f(x_3, p_3) = x_3 + p_3 = 0,3 + 1,3863 = 1,6863,$$

$$y_3 = y_2 + h (K_1 + K_2)/2 = 1,2421 + (0,1) (1,4421 + 1,6863)/2 = 1,3985$$

- Cálculo de y_4 :

$$K_1 = x_3 + y_3 = 0,3 + 1,3985 = 1,6985$$

$$p_4 = y_3 + h K_1 = 1,3985 + 0,1 \cdot 1,6985 = 1,5684,$$

$$K_2 = f(x_4, p_4) = x_4 + p_4 = 0,4 + 1,5684 = 1,9684,$$

$$y_4 = y_3 + h (K_1 + K_2)/2 = 1,3985 + (0,1) (1,6985 + 1,9684)/2 = 1,5818$$

Método de Euler melhorado

Como $h = (x_n - x_0)/n = 0,1 \Rightarrow (1 - 0)/n = 0,1 \Rightarrow n = 1/0,1 = 10$, a tabela a seguir mostra os valores aproximados obtidos em todos os $n = 10$ passos.

Obs.: A solução exata é $y(x) = 2e^x - x - 1$.

k	x_k	y_k	$y(x_k)$	$ y(x_k) - y_k $
0	0,0	1,0000	1,0000	0,0000
1	0,1	1,1100	1,1103	0,0003
2	0,2	1,2421	1,2428	0,0007
3	0,3	1,3985	1,3997	0,0012
4	0,4	1,5818	1,5836	0,0018
5	0,5	1,7949	1,7974	0,0025
6	0,6	2,0409	2,0442	0,0033
7	0,7	2,3231	2,3275	0,0044
8	0,8	2,6456	2,6511	0,0055
9	0,9	3,0124	3,0192	0,0068
10	1,0	3,4282	3,4366	0,0084

Erro local - Método de Euler melhorado

Euler melhorado é um **método de Série de Taylor de ordem 2**.

Com efeito, se $y = y(x)$ for suficientemente suave, então a série de Taylor de ordem 2 centrada em x_k é dada por:

$$y(x) = y(x_k) + y'(x_k)(x - x_k) + y''(x_k) \frac{(x - x_k)^2}{2!} + y'''(\xi) \frac{(x - x_k)^3}{3!}, \text{ com } \xi \in (x_k, x)$$

Pegando $x = x_{k+1}$ e sabendo que $h = x_{k+1} - x_k$ e $y'(x_k) = f(x_k, y(x_k))$, obtemos:

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h f(x_k, y_k) + y''(x_k) \frac{h^2}{2!} + y'''(\xi) \frac{h^3}{3!}, \text{ com } \xi \in (x_k, x_{k+1})$$

Assumindo $y_k = y(x_k)$, obtemos:

$$y(x_{k+1}) = y_k + h f(x_k, y_k) + y''(x_k) \frac{h^2}{2!} + y'''(\xi) \frac{h^3}{3!}, \text{ com } \xi \in (x_k, x_{k+1})$$

Erro local - Método de Euler melhorado

Note que pela Regra da Cadeia, temos que:

$$y''(x) = (y'(x))' = \frac{d}{dx} y'(x) = \frac{d}{dx} f(x, y(x)) = f_x + f_y y'(x) = f_x + f_y f$$

Substituindo este resultado na equação anterior, obtemos:

$$y(x_{k+1}) = y_k + h f(x_k, y_k) + \frac{h^2}{2!} [f_x + f_y f(x_k, y_k)] + y'''(\xi) \frac{h^3}{3!}, \quad (1)$$

com $\xi \in (x_k, x_{k+1})$

Sabemos do Método de Euler melhorado que:

$$y_{k+1} = y_k + h \left(\frac{K_1 + K_2}{2} \right) = y_k + h \left[\frac{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, p_{k+1})}{2} \right],$$

onde

$$f(x_{k+1}, p_{k+1}) = f(x_{k+1}, y_k + h f(x_k, y_k))$$

será desenvolvido por Taylor de ordem 1.

Erro local - Método de Euler melhorado

Aproximação de Taylor de ordem 1 em duas variáveis

Se a função f possui derivadas contínuas de ordem 1, a aproximação de Taylor de $f(x_k + h, y_k + s)$ em torno de (x_k, y_k) é dada por:

$$f(x_k + h, y_k + s) = f(x_k, y_k) + f_x(x_k, y_k) \cdot h + f_y(x_k, y_k) \cdot s + \frac{1}{2!} (h^2 \cdot f_{xx} + 2hs \cdot f_{xy} + s^2 \cdot f_{yy}) \Big|_{x=\xi_k, y=\eta_k},$$

onde $\xi_k \in (x_k, x_k + h)$, $\eta_k \in (y_k, y_k + s)$.

Logo, por desenvolvimento de Taylor, onde $s = h f(x_k, y_k)$, obtemos:

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}, p_{k+1}) &= f(x_{k+1}, y_k + h f(x_k, y_k)) = f(x_k + h, y_k + h f(x_k, y_k)) \\ &= f(x_k, y_k) + h f_x + h f(x_k, y_k) f_y \\ &\quad + \frac{1}{2!} (h^2 \cdot f_{xx} + 2h \cdot h f(x_k, y_k) \cdot f_{xy} + (h f(x_k, y_k))^2 \cdot f_{yy}) \Big|_{x=\xi_k, y=\eta_k} \end{aligned}$$

Erro local - Método de Euler melhorado

$$f(x_{k+1}, p_{k+1}) = f(x_k, y_k) + h f_x + h f(x_k, y_k) f_y + \underbrace{\frac{1}{2!} (h^2 \cdot f_{xx} + 2h^2 f(x_k, y_k) \cdot f_{xy} + h^2 \cdot (f(x_k, y_k))^2 \cdot f_{yy})}_{\mathcal{O}(h^2), \text{ pois } f(x_k, y_k) \text{ é constante.}} \Big|_{x=\xi_k, y=\eta_k}$$

Logo,

$$f(x_{k+1}, p_{k+1}) = f(x_k, y_k) + h f_x + h f(x_k, y_k) f_y + \mathcal{O}(h^2)$$

Substituindo este resultado na equação de Euler melhorado, obtemos:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h \left[\frac{f(x_k, y_k) + f(x_k, y_k) + h f_x + h f(x_k, y_k) f_y + \mathcal{O}(h^2)}{2} \right] \\ &= y_k + h \left[\frac{2f(x_k, y_k) + h f_x + h f(x_k, y_k) f_y + \mathcal{O}(h^2)}{2} \right] \\ \Rightarrow y_{k+1} &= y_k + h f(x_k, y_k) + \frac{h^2}{2} [f_x + f(x_k, y_k) f_y] + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$

Erro local - Método de Euler melhorado

Este resultado de y_{k+1} está nas parcelas anteriores ao erro de truncamento $y'''(\xi)(h^3/3!)$ no lado direito da Eq. (1). Logo, a Eq. (1) se torna:

$$y(x_{k+1}) = y_{k+1} + y'''(\xi) \frac{h^3}{3!}, \text{ com } \xi \in (x_k, x_{k+1})$$

$$\Rightarrow E_{k+1} = y(x_{k+1}) - y_{k+1} = y'''(\xi) \frac{h^3}{3!}, \text{ com } \xi \in (x_k, x_{k+1})$$

Em módulo, podemos calcular:

Limitante superior do erro absoluto local - Método de Euler melhorado

Considerando E_k o erro cometido pela aproximação $y(x_k) \approx y_k$ usando o Método de Euler melhorado,

$$|E_k| \leq M_3 \frac{h^3}{3!}, \text{ onde } M_3 = \max_{\xi \in (x_{k-1}, x_k)} |y'''(\xi)|,$$

para todo $k = 1, \dots, n$.

Erro total - Método de Euler melhorado

Como o erro total é a soma dos erros locais de E_1, E_2, \dots, E_n , o limitante superior do erro total do Método de Euler melhorado é dado por:

$$\begin{aligned} |E_{Total}| &= |E_1 + E_2 + \dots + E_n| \leq |E_1| + |E_2| + \dots + |E_n| \\ &\leq n \cdot M_3 \frac{h^3}{3!} = \left(\frac{x_n - x_0}{h} \right) \cdot M_3 \frac{h^3}{3!} = (x_n - x_0) \cdot M_3 \frac{h^2}{3!} \end{aligned}$$

Limitante superior do erro absoluto total - Método de Euler melhorado

$$|E_{Total}| \leq \frac{h^2}{6} (x_n - x_0) \cdot M_3, \text{ onde } M_3 = \max_{\xi \in [x_0, x_n]} |y'''(\xi)|.$$

Erro total - Método de Euler melhorado

Voltando ao exemplo anterior: seja o PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x + y, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

com passo $h = 0,1$, onde $x \in [0, 1]$.

(a) Sabendo que a solução exata é $y(x) = 2e^x - x - 1$, encontre um limitante superior do erro total no ponto $x = 1$ usando o Método de Euler melhorado.

Solução: Sabendo que $h = 0,1$, $x_0 = 0$, $x_n = 1$ e $y'''(x) = 2e^x$, temos:

$$M_3 = \max_{\xi \in [0,1]} |y'''(\xi)| = \max\{|2e^0|, |2e^1|\} = |2e^1| \approx 5,4366$$

Logo,

$$|E_{Total}| \leq \frac{(0,1)^2}{6} \cdot (1 - 0) \cdot 5,4366 \approx 0,0091$$

Vimos que no método de Euler melhorado:

$$|y(1) - y_{10}| \approx 0,0084 < 0,0091 \text{ (OK!)}$$

Erro total - Método de Euler melhorado

(b) Agora, encontre um limitante superior do erro total no ponto $x = 0,5$ usando o Método de Euler melhorado.

Solução: Sabendo que $h = 0,1$, $x_0 = 0$, $x_n = 0,5$ e $y'''(x) = 2e^x$, temos:

$$M_3 = \max_{\xi \in [0;0,5]} |y'''(\xi)| = \max\{|2e^0|, |2e^{0,5}|\} = |2e^{0,5}| \approx 3,2974$$

Logo,

$$|E_{Total}| \leq \frac{(0,1)^2}{6} \cdot (0,5 - 0) \cdot 3,2974 \approx 0,0027$$

Vimos no método de Euler melhorado que:

$$|y(0,5) - y_5| \approx 0,0025 < 0,0027 \text{ (OK!)}$$

Exercício: Encontre um limitante superior do erro total nos demais pontos x_k usando o Método de Euler e compare com seus respectivos erros absolutos.

Referências I



EDWARDS, C.H; PENNEY, D. E., **Differential Equations and Boundary Value Problems - Computing and Modeling**, 5th ed., Pearson, 2015.



EDWARDS, C.H; PENNEY, D. E., **Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems**, 6th ed., Pearson, 2014.



BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C., **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**, 10a. ed., Rio de Janeiro, LTC - Livros Técnicos e Científicos, 2015.



RUGGIERO, M.; LOPES, V.. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. Pearson, 1996, 2a. Ed.



BURDEN, R.. **Numerical Analysis**. Brooks/Cole Pub Co, 1996, 6th Edition.