CÁLCULO NUMÉRICO
UERJ

Zeros de funções - Método do Ponto Fixo

Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br
IME-UERJ

https://github.com/rodrigolrmadureira/CalculoNumericoUERJ/

Método do Ponto Fixo (MPF)

Seja $f(x) \in C[a, b]$, onde $[a, b]$ é o intervalo que contém uma raiz r da equação $f(x) = 0$.

O **Método do Ponto Fixo (MPF)** consiste em transformar

$f(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = x$,

e a partir de uma aproximação inicial x_0, gerar uma sequência $\{x_k\}$ de aproximações para a única raiz r pela equação de recorrência

$x_{k+1} = \varphi(x_k)$,

pois a função $\varphi(x)$ é tal que:

$f(r) = 0 \Rightarrow \varphi(r) = r$.

Exemplo: $x^2 + x - 6 = 0$

Funções de iteração possíveis:

$\varphi_1(x) = 6 - x^2$

$\varphi_2(x) = \sqrt{6 - x}$

$\varphi_3(x) = \frac{6}{x} - 1$

$\varphi_4(x) = \frac{6}{x+1}$

Exemplo: $x^2 + x - 6 = 0$

Funções de iteração possíveis:

$\varphi_1(x) = 6 - x^2$

$\varphi_2(x) = \sqrt{6 - x}$

$\varphi_3(x) = \frac{6}{x} - 1$

$\varphi_4(x) = \frac{6}{x+1}$

Exemplo: $x^2 + x - 6 = 0$

Funções de iteração possíveis:

$\varphi_1(x) = 6 - x^2$

$\varphi_2(x) = \sqrt{6 - x}$

$\varphi_3(x) = \frac{6}{x} - 1$

$\varphi_4(x) = \frac{6}{x+1}$

Exemplo: $x^2 + x - 6 = 0$

Funções de iteração possíveis:

$\varphi_1(x) = 6 - x^2$
$\varphi_2(x) = \sqrt{6 - x}$
$\varphi_3(x) = \frac{6}{x} - 1$
$\varphi_4(x) = \frac{6}{x+1}$

Exemplo: $x^2 + x - 6 = 0$

Funções de iteração possíveis:

$\varphi_1(x) = 6 - x^2$

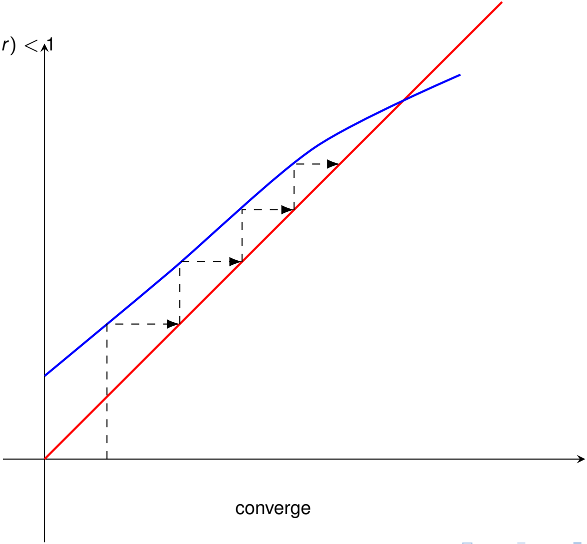
$\varphi_2(x) = \sqrt{6 - x}$

$\varphi_3(x) = \frac{6}{x} - 1$

$\varphi_4(x) = \frac{6}{x+1}$

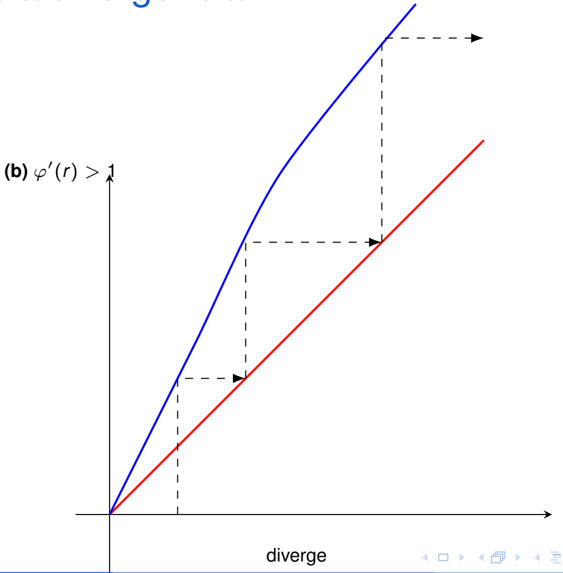
Quatro casos esquemáticos de convergência/divergência

(a) $0 < \varphi'(r) < 1$



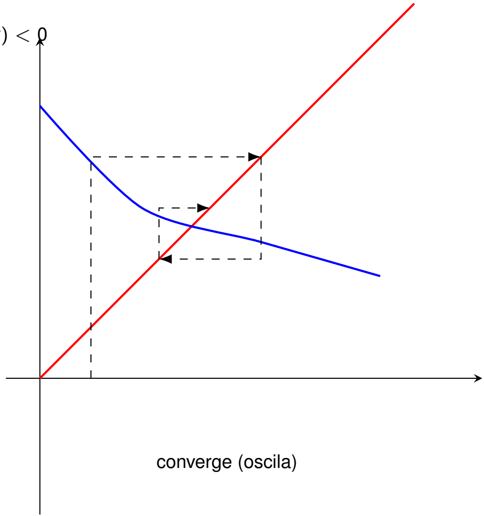
converge

Quatro casos esquemáticos de convergência/divergência



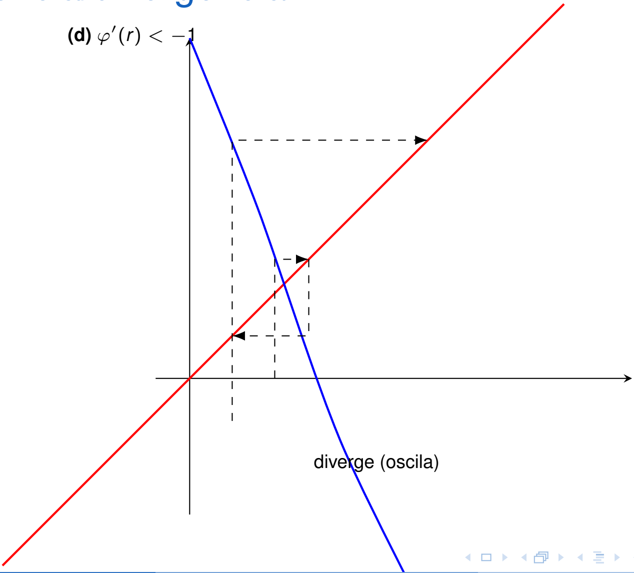
Quatro casos esquemáticos de convergência/divergência

(c) $-1 < \varphi'(r) < 0$

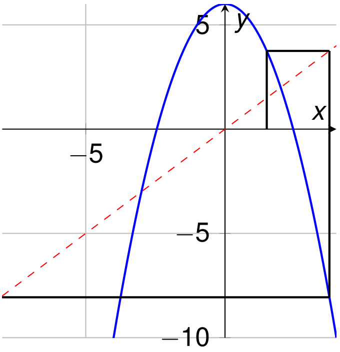


converge (oscila)

Quatro casos esquemáticos de convergência/divergência



Situação 1: $\varphi_1(x) = 6 - x^2$ (divergente)



Chute inicial: $x_0 = 1.5$.

Usando a calculadora científica:
Digite 1.5 e aperte a sequência de botões:

= Ans =

Próxima iteração:

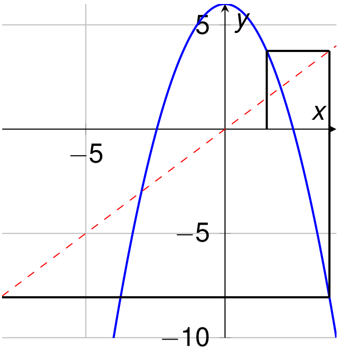
$x_1 = 6 - (1.5)^2$

Na calculadora, para escrever a expressão iterativa

$6 - x_k^2$,

o botão Ans faz o papel da variável x_k, para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Situação 1: $\varphi_1(x) = 6 - x^2$ (divergente)



Chute inicial: $x_0 = 1.5$.
Usando a calculadora científica:
Digite 1.5 e aperte a sequência de botões:

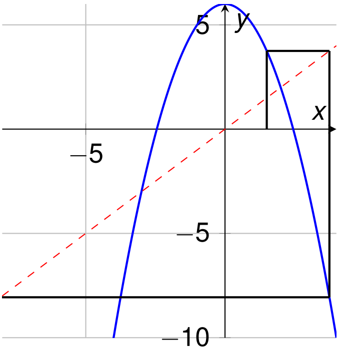
= *Ans* =

Próxima iteração:
$x_1 = 6 - (1.5)^2$
Na calculadora, para escrever a expressão iterativa

$6 - x_k^2$,

o botão *Ans* faz o papel da variável x_k, para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Situação 1: $\varphi_1(x) = 6 - x^2$ (divergente)



Chute inicial: $x_0 = 1.5$.
Usando a calculadora científica:
Digite 1.5 e aperte a sequência de botões:

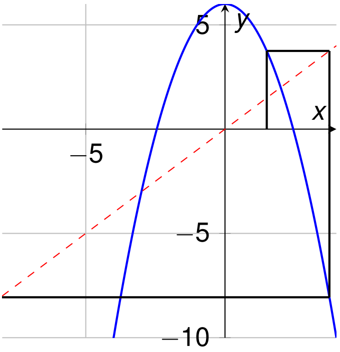
$=$ Ans $=$

Próxima iteração:
$x_1 = 6 - (1.5)^2$
Na calculadora, para escrever a expressão iterativa

$6 - x_k^2$,

o botão Ans faz o papel da variável x_k, para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Situação 1: $\varphi_1(x) = 6 - x^2$ (divergente)



Chute inicial: $x_0 = 1.5$.
Usando a calculadora científica:
Digite 1.5 e aperte a sequência de botões:

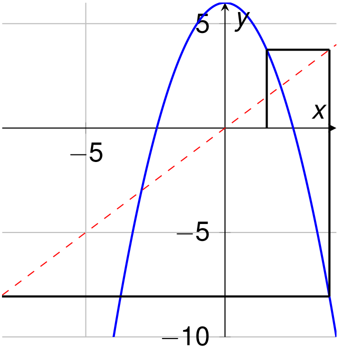
= *Ans* =

Próxima iteração:
$x_1 = 6 - (1.5)^2$
Na calculadora, para escrever a expressão iterativa

$6 - x_k^2$,

o botão *Ans* faz o papel da variável x_k, para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Situação 1: $\varphi_1(x) = 6 - x^2$ (divergente)

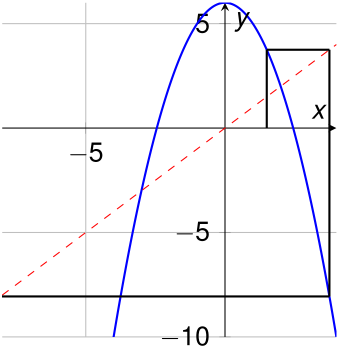


Então, aperte a sequência de botões:

6	−	*Ans*	^	2

No display da calculadora aparece: $6 - Ans^2$.
O resultado é: $x_1 = 3.75$.

Situação 1: $\varphi_1(x) = 6 - x^2$ (divergente)



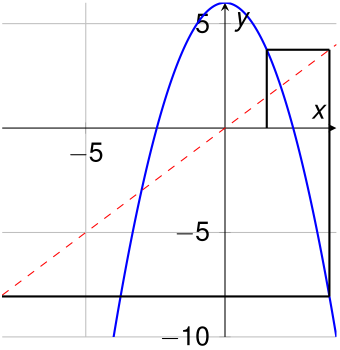
Então, aperte a sequência de botões:

6 | − | *Ans* | ^ | 2

No display da calculadora aparece: $6 - Ans^2$.

O resultado é: $x_1 = 3.75$.

Situação 1: $\varphi_1(x) = 6 - x^2$ (divergente)

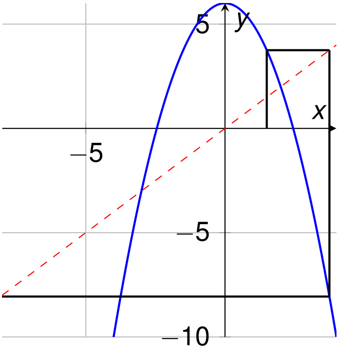


Então, aperte a sequência de botões:

6 | − | *Ans* | ^ | 2

No display da calculadora aparece: $6 - Ans^2$.
O resultado é: $x_1 = 3.75$.

Situação 1: $\varphi_1(x) = 6 - x^2$ (divergente)



A partir de agora, aperte sempre o botão $=$ para obter os resultados das próximas iterações.

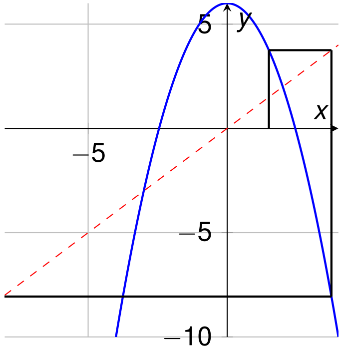
$x_2 = \varphi_1(x_1) = \varphi_1(3.75) = -8.06$

$x_3 = \varphi_1(x_2) = \varphi_1(-8.06)$
$= -59.00$

$x_4 = \varphi_1(x_3) = \varphi_1(-59)$
$= -3475.46$

Conclusão: $\{x_k\}$ diverge.

Situação 1: $\varphi_1(x) = 6 - x^2$ (divergente)



A partir de agora, aperte sempre o botão $=$ para obter os resultados das próximas iterações.

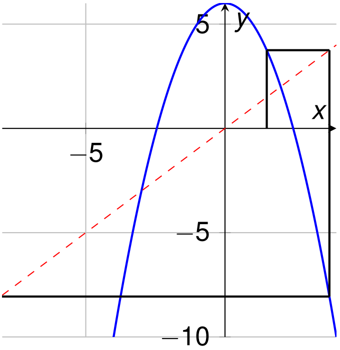
$$x_2 = \varphi_1(x_1) = \varphi_1(3.75) = -8.06$$

$$x_3 = \varphi_1(x_2) = \varphi_1(-8.06)$$
$$= -59.00$$

$$x_4 = \varphi_1(x_3) = \varphi_1(-59)$$
$$= -3475.46$$

Conclusão: $\{x_k\}$ diverge.

Situação 1: $\varphi_1(x) = 6 - x^2$ (divergente)



A partir de agora, aperte sempre o botão $=$ para obter os resultados das próximas iterações.

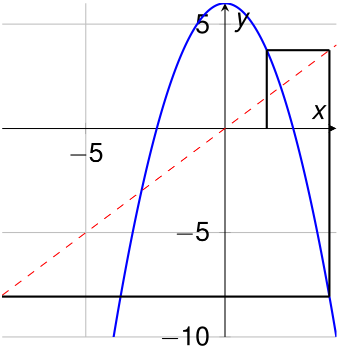
$$x_2 = \varphi_1(x_1) = \varphi_1(3.75) = -8.06$$

$$x_3 = \varphi_1(x_2) = \varphi_1(-8.06)$$
$$= -59.00$$

$$x_4 = \varphi_1(x_3) = \varphi_1(-59)$$
$$= -3475.46$$

Conclusão: $\{x_k\}$ diverge.

Situação 1: $\varphi_1(x) = 6 - x^2$ (divergente)



A partir de agora, aperte sempre o botão $\boxed{=}$ para obter os resultados das próximas iterações.

$$x_2 = \varphi_1(x_1) = \varphi_1(3.75) = -8.06$$

$$x_3 = \varphi_1(x_2) = \varphi_1(-8.06)$$

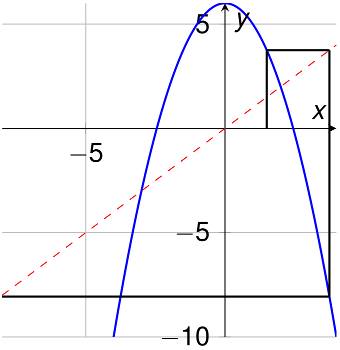
$$= -59.00$$

$$x_4 = \varphi_1(x_3) = \varphi_1(-59)$$

$$= -3475.46$$

Conclusão: $\{x_k\}$ diverge.

Situação 1: $\varphi_1(x) = 6 - x^2$ (divergente)



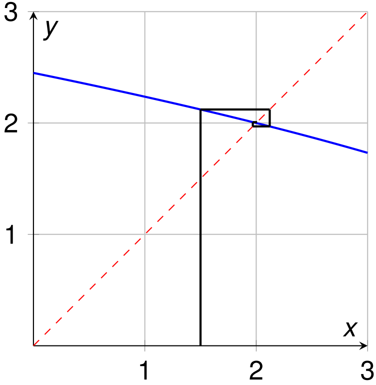
A partir de agora, aperte sempre o botão $=$ para obter os resultados das próximas iterações.

$$x_2 = \varphi_1(x_1) = \varphi_1(3.75) = -8.06$$
$$x_3 = \varphi_1(x_2) = \varphi_1(-8.06)$$
$$= -59.00$$
$$x_4 = \varphi_1(x_3) = \varphi_1(-59)$$
$$= -3475.46$$

Conclusão: $\{x_k\}$ diverge.

Situação 2: $\varphi_2(x) = \sqrt{6 - x}$ (convergente)

Agora, insira a função de iteração linear na calculadora.



$x_0 = 1.5$

$x_1 = \varphi_2(x_0) = \varphi_2(1.5) = 2.1213$

$x_2 = \varphi_2(x_1) = \varphi_2(2.1213)$
$= 1.9694$

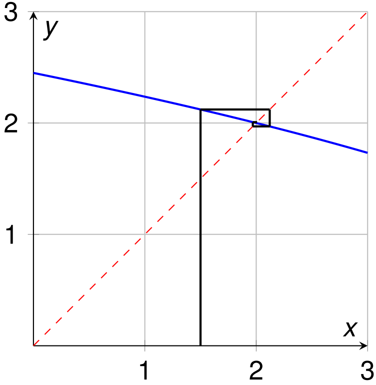
$x_3 = \varphi_2(x_2) = \varphi_2(1.9694)$
$= 2.0076$

$x_4 = \varphi_2(x_3) = \varphi_2(2.0076)$
$= 1.9981$

$x_5 = \varphi_2(x_4) = \varphi_2(1.9981)$
$= 2.0005$

Conclusão: $\{x_k\} \to 2$.

Situação 2: $\varphi_2(x) = \sqrt{6 - x}$ (convergente)



Agora, insira a função de iteração linear na calculadora.

$x_0 = 1.5$

$x_1 = \varphi_2(x_0) = \varphi_2(1.5) = 2.1213$

$x_2 = \varphi_2(x_1) = \varphi_2(2.1213)$

$= 1.9694$

$x_3 = \varphi_2(x_2) = \varphi_2(1.9694)$

$= 2.0076$

$x_4 = \varphi_2(x_3) = \varphi_2(2.0076)$

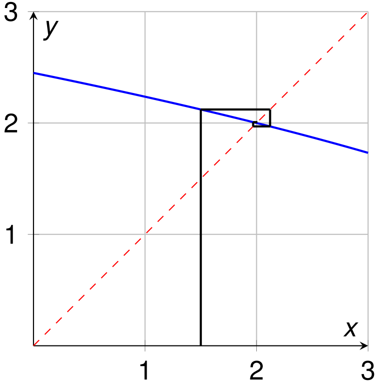
$= 1.9981$

$x_5 = \varphi_2(x_4) = \varphi_2(1.9981)$

$= 2.0005$

Conclusão: $\{x_k\} \to 2$.

Situação 2: $\varphi_2(x) = \sqrt{6 - x}$ (convergente)

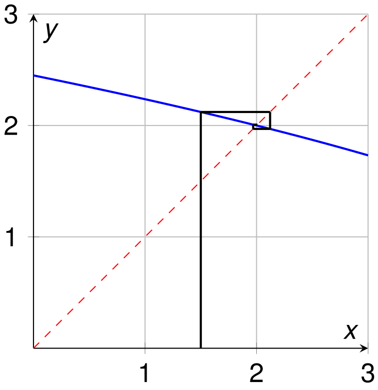


Agora, insira a função de iteração linear na calculadora.

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1.5 \\
x_1 &= \varphi_2(x_0) = \varphi_2(1.5) = 2.1213 \\
x_2 &= \varphi_2(x_1) = \varphi_2(2.1213) \\
&= 1.9694 \\
x_3 &= \varphi_2(x_2) = \varphi_2(1.9694) \\
&= 2.0076 \\
x_4 &= \varphi_2(x_3) = \varphi_2(2.0076) \\
&= 1.9981 \\
x_5 &= \varphi_2(x_4) = \varphi_2(1.9981) \\
&= 2.0005
\end{aligned}
$$

Conclusão: $\{x_k\} \to 2.$

Situação 2: $\varphi_2(x) = \sqrt{6 - x}$ (convergente)



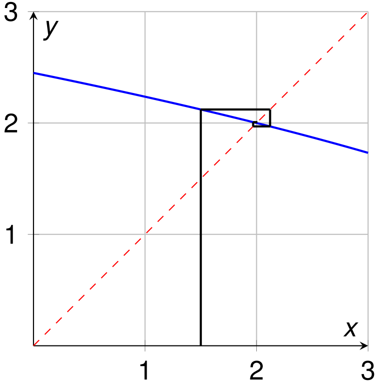
Agora, insira a função de iteração linear na calculadora.

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1.5 \\
x_1 &= \varphi_2(x_0) = \varphi_2(1.5) = 2.1213 \\
x_2 &= \varphi_2(x_1) = \varphi_2(2.1213) \\
&= 1.9694 \\
x_3 &= \varphi_2(x_2) = \varphi_2(1.9694) \\
&= 2.0076 \\
x_4 &= \varphi_2(x_3) = \varphi_2(2.0076) \\
&= 1.9981 \\
x_5 &= \varphi_2(x_4) = \varphi_2(1.9981) \\
&= 2.0005
\end{aligned}
$$

Conclusão: $\{x_k\} \to 2$.

Situação 2: $\varphi_2(x) = \sqrt{6 - x}$ (convergente)

Agora, insira a função de iteração linear na calculadora.



$$x_0 = 1.5$$

$$x_1 = \varphi_2(x_0) = \varphi_2(1.5) = 2.1213$$

$$x_2 = \varphi_2(x_1) = \varphi_2(2.1213) = 1.9694$$

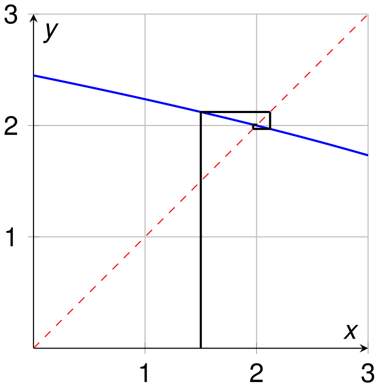
$$x_3 = \varphi_2(x_2) = \varphi_2(1.9694) = 2.0076$$

$$x_4 = \varphi_2(x_3) = \varphi_2(2.0076) = 1.9981$$

$$x_5 = \varphi_2(x_4) = \varphi_2(1.9981) = 2.0005$$

Conclusão: $\{x_k\} \to 2$.

Situação 2: $\varphi_2(x) = \sqrt{6-x}$ (convergente)

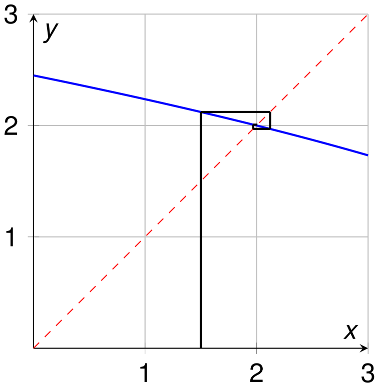


Agora, insira a função de iteração linear na calculadora.

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1.5 \\
x_1 &= \varphi_2(x_0) = \varphi_2(1.5) = 2.1213 \\
x_2 &= \varphi_2(x_1) = \varphi_2(2.1213) \\
&= 1.9694 \\
x_3 &= \varphi_2(x_2) = \varphi_2(1.9694) \\
&= 2.0076 \\
x_4 &= \varphi_2(x_3) = \varphi_2(2.0076) \\
&= 1.9981 \\
x_5 &= \varphi_2(x_4) = \varphi_2(1.9981) \\
&= 2.0005
\end{aligned}
$$

Conclusão: $\{x_k\} \to 2$.

Situação 2: $\varphi_2(x) = \sqrt{6-x}$ (convergente)

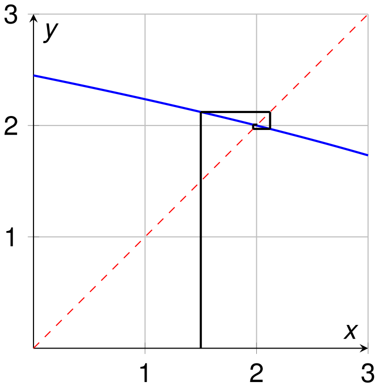


Agora, insira a função de iteração linear na calculadora.

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1.5\\
x_1 &= \varphi_2(x_0) = \varphi_2(1.5) = 2.1213\\
x_2 &= \varphi_2(x_1) = \varphi_2(2.1213)\\
&= 1.9694\\
x_3 &= \varphi_2(x_2) = \varphi_2(1.9694)\\
&= 2.0076\\
x_4 &= \varphi_2(x_3) = \varphi_2(2.0076)\\
&= 1.9981\\
x_5 &= \varphi_2(x_4) = \varphi_2(1.9981)\\
&= 2.0005
\end{aligned}
$$

Conclusão: $\{x_k\} \to 2$.

Situação 2: $\varphi_2(x) = \sqrt{6-x}$ (convergente)

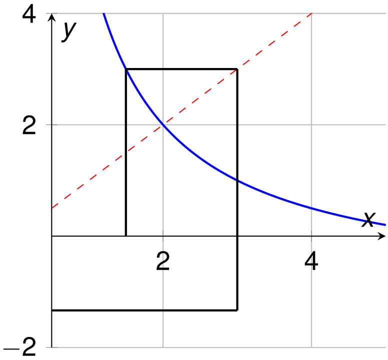


Agora, insira a função de iteração linear na calculadora.

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1.5\\
x_1 &= \varphi_2(x_0) = \varphi_2(1.5) = 2.1213\\
x_2 &= \varphi_2(x_1) = \varphi_2(2.1213)\\
&= 1.9694\\
x_3 &= \varphi_2(x_2) = \varphi_2(1.9694)\\
&= 2.0076\\
x_4 &= \varphi_2(x_3) = \varphi_2(2.0076)\\
&= 1.9981\\
x_5 &= \varphi_2(x_4) = \varphi_2(1.9981)\\
&= 2.0005
\end{aligned}$$

Conclusão: $\{x_k\} \to 2$.

Situação 3: $\varphi_3(x) = \frac{6}{x} - 1$



$x_0 = 1.5$

$x_1 = 3.00$

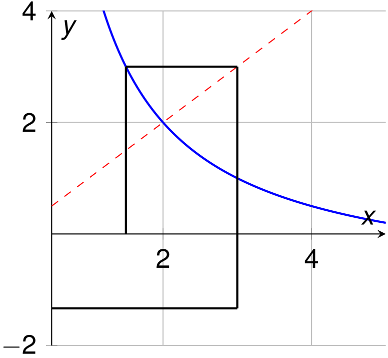
$x_2 = 1.00$

$x_3 = 5.00$

$x_4 = 0.20$

Conclusão: $\{x_k\}$ oscila e não converge.

Situação 3: $\varphi_3(x) = \frac{6}{x} - 1$



$x_0 = 1.5$

$x_1 = 3.00$

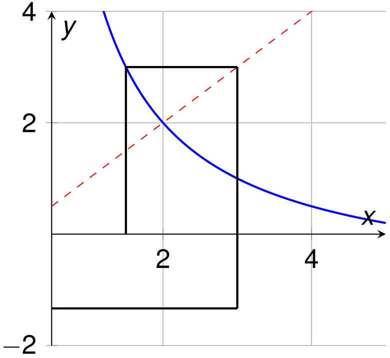
$x_2 = 1.00$

$x_3 = 5.00$

$x_4 = 0.20$

Conclusão: $\{x_k\}$ oscila e não converge.

Situação 3: $\varphi_3(x) = \frac{6}{x} - 1$



$x_0 = 1.5$

$x_1 = 3.00$

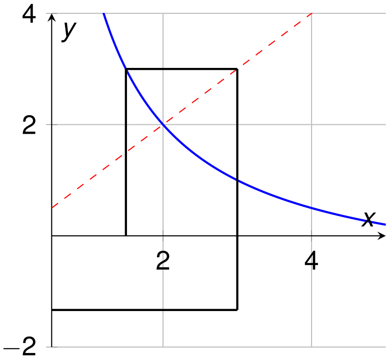
$x_2 = 1.00$

$x_3 = 5.00$

$x_4 = 0.20$

Conclusão: $\{x_k\}$ oscila e não converge.

Situação 3: $\varphi_3(x) = \frac{6}{x} - 1$



$x_0 = 1.5$

$x_1 = 3.00$

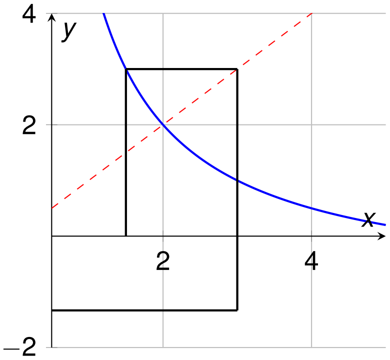
$x_2 = 1.00$

$x_3 = 5.00$

$x_4 = 0.20$

Conclusão: $\{x_k\}$ oscila e não converge.

Situação 3: $\varphi_3(x) = \frac{6}{x} - 1$



$x_0 = 1.5$

$x_1 = 3.00$

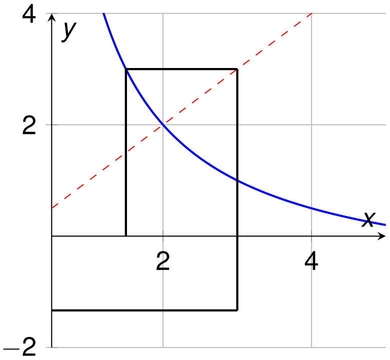
$x_2 = 1.00$

$x_3 = 5.00$

$x_4 = 0.20$

Conclusão: $\{x_k\}$ oscila e não converge.

Situação 3: $\varphi_3(x) = \frac{6}{x} - 1$



$x_0 = 1.5$

$x_1 = 3.00$

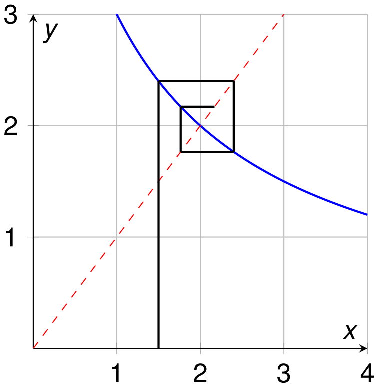
$x_2 = 1.00$

$x_3 = 5.00$

$x_4 = 0.20$

Conclusão: $\{x_k\}$ oscila e não converge.

Situação 4: $\varphi_4(x) = \frac{6}{x+1}$



$x_0 = 1.5$

$x_1 = 2.40$

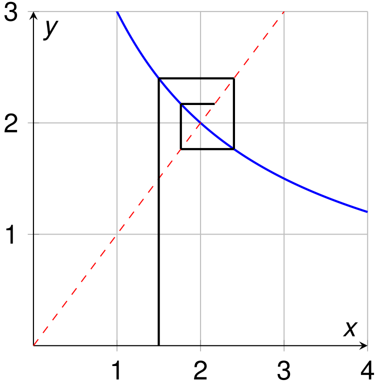
$x_2 = 1.76$

$x_3 = 2.18$

$x_4 = 1.88$

Conclusão: $\{x_k\}$ converge lentamente.

Situação 4: $\varphi_4(x) = \frac{6}{x+1}$



$x_0 = 1.5$

$x_1 = 2.40$

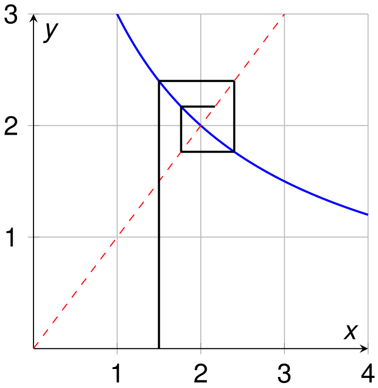
$x_2 = 1.76$

$x_3 = 2.18$

$x_4 = 1.88$

Conclusão: $\{x_k\}$ converge lentamente.

Situação 4: $\varphi_4(x) = \frac{6}{x+1}$



$x_0 = 1.5$

$x_1 = 2.40$

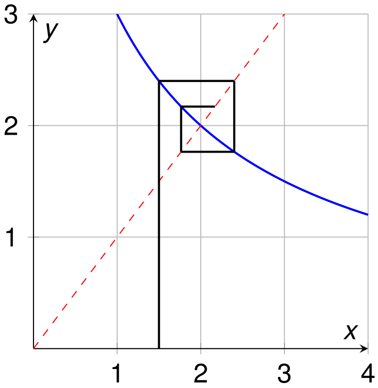
$x_2 = 1.76$

$x_3 = 2.18$

$x_4 = 1.88$

Conclusão: $\{x_k\}$ converge lentamente.

Situação 4: $\varphi_4(x) = \frac{6}{x+1}$



$x_0 = 1.5$

$x_1 = 2.40$

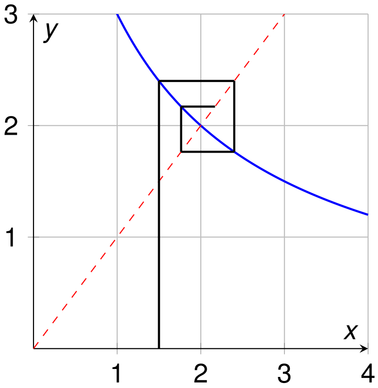
$x_2 = 1.76$

$x_3 = 2.18$

$x_4 = 1.88$

Conclusão: $\{x_k\}$ converge lentamente.

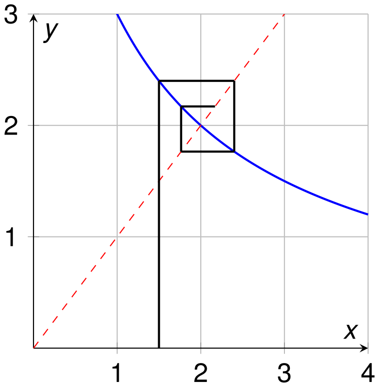
Situação 4: $\varphi_4(x) = \frac{6}{x+1}$



$x_0 = 1.5$
$x_1 = 2.40$
$x_2 = 1.76$
$x_3 = 2.18$
$x_4 = 1.88$

Conclusão: $\{x_k\}$ converge lentamente.

Situação 4: $\varphi_4(x) = \frac{6}{x+1}$



$$x_0 = 1.5$$
$$x_1 = 2.40$$
$$x_2 = 1.76$$
$$x_3 = 2.18$$
$$x_4 = 1.88$$

Conclusão: $\{x_k\}$ converge lentamente.

Resumo Comparativo dos Casos

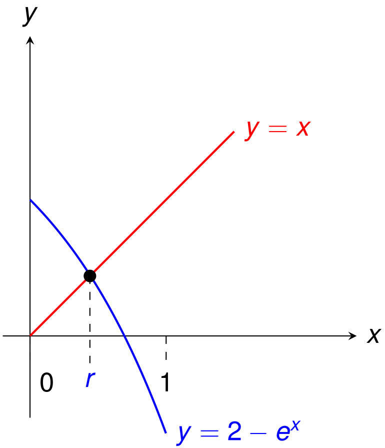
$\varphi(x)$	$\lvert\varphi'(x)\rvert$	**Conclusão**
$\varphi_1(x) = 6 - x^2$	$\lvert\varphi_1'(x)\rvert > 1$	Divergente
$\varphi_2(x) = \sqrt{6 - x}$	$\lvert\varphi_1'(x)\rvert < 1$	Convergente ($r = 2$)
$\varphi_3(x) = \frac{6}{x} - 1$	$\lvert\varphi_1'(x)\rvert > 1$	Oscilante / Não converge
$\varphi_4(x) = \frac{6}{x+1}$	$\lvert\varphi_1'(x)\rvert < 1$	Convergente (lento)

Exemplo 2

Ache a raiz da equação $f(x) = e^x + x - 2 = 0$ com tolerância $\epsilon = 10^{-3}$ usando as seguintes funções de iteração linear:

- $\varphi_1(x) = 2 - e^x$;
- $\varphi_2(x) = \ln(2 - x)$

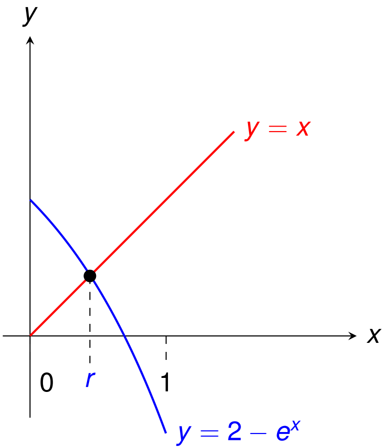
Interseção $y = x$ com $y = \varphi_1(x)$



A raiz $r \in (0, 1)$.

Pergunta: $\varphi_1(x)$ vai convergir para r?

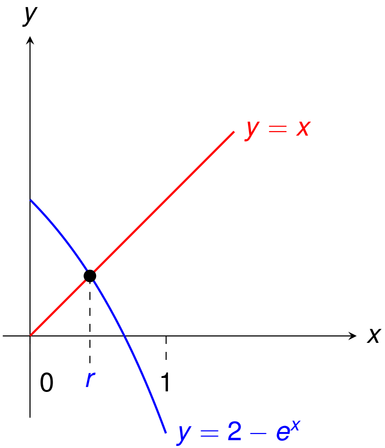
Interseção $y = x$ com $y = \varphi_1(x)$



A raiz $r \in (0, 1)$.

Pergunta: $\varphi_1(x)$ vai convergir para r?

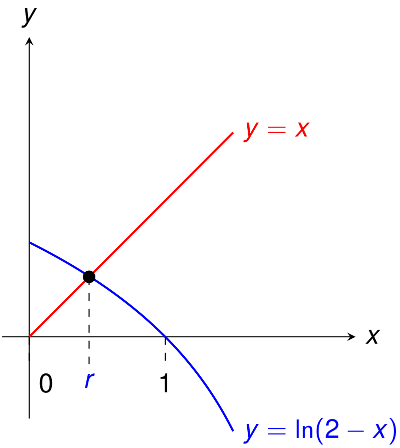
Interseção $y = x$ com $y = \varphi_1(x)$



A raiz $r \in (0, 1)$.

Pergunta: $\varphi_1(x)$ **vai convergir para** r**?**

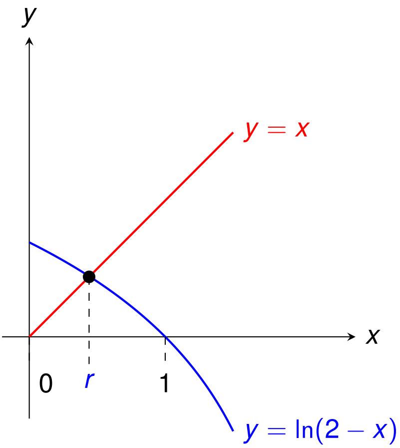
Interseção $y = x$ com $y = \varphi_2(x)$



A raiz $r \in (0, 1)$.

Pergunta: $\varphi_2(x)$ **vai convergir para** r**?**

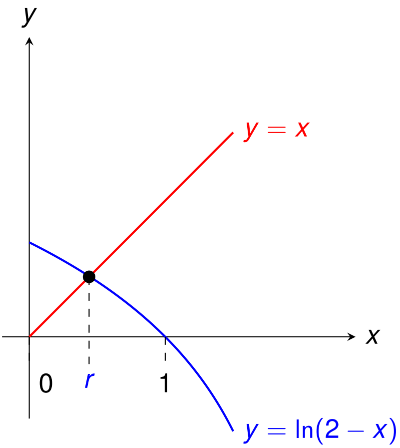
Interseção $y = x$ com $y = \varphi_2(x)$



A raiz $r \in (0, 1)$.

Pergunta: $\varphi_2(x)$ vai convergir para r?

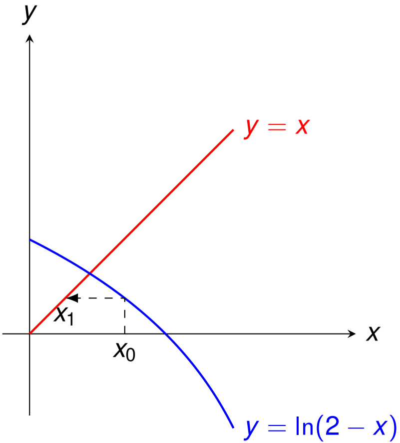
Interseção $y = x$ com $y = \varphi_2(x)$



A raiz $r \in (0, 1)$.

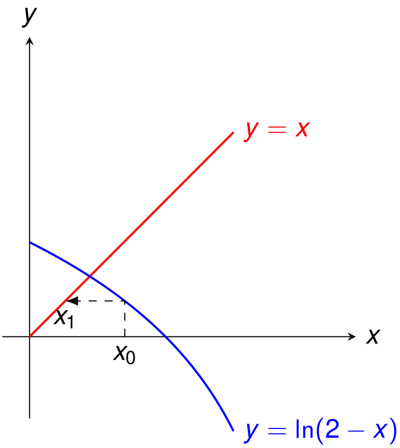
Pergunta: $\varphi_2(x)$ **vai convergir para** r**?**

Processo Iterativo (passos)



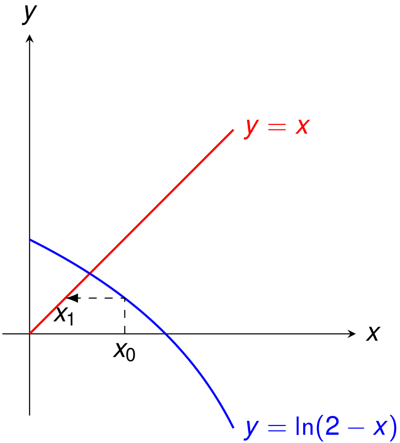
k	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$
0	0.5	—
1	0.4055	$0.0945 > \epsilon$
2	0.4666	$0.0611 > \epsilon$
3	0.4275	$0.0391 > \epsilon$
4	0.4527	$0.0252 > \epsilon$
5	0.4365	$0.0162 > \epsilon$
6	0.4469	$0.0104 > \epsilon$
7	0.4402	$0.0067 > \epsilon$
8	0.4445	$0.0043 > \epsilon$
9	0.4418	$0.0027 > \epsilon$
10	0.4435	$0.0017 > \epsilon$
11	0.4424	$0.0011 > \epsilon$
12	0.4431	$0.0007 \leq \epsilon$

Processo Iterativo (passos)



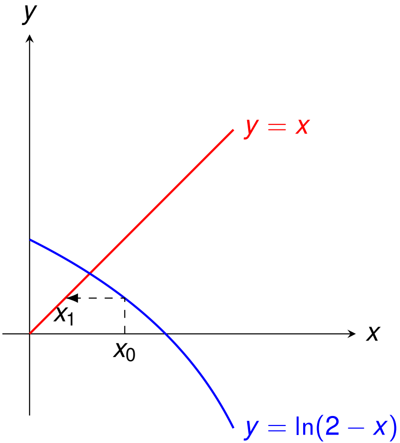
k	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$
0	0.5	—
1	0.4055	$0.0945 > \epsilon$
2	0.4666	$0.0611 > \epsilon$
3	0.4275	$0.0391 > \epsilon$
4	0.4527	$0.0252 > \epsilon$
5	0.4365	$0.0162 > \epsilon$
6	0.4469	$0.0104 > \epsilon$
7	0.4402	$0.0067 > \epsilon$
8	0.4445	$0.0043 > \epsilon$
9	0.4418	$0.0027 > \epsilon$
10	0.4435	$0.0017 > \epsilon$
11	0.4424	$0.0011 > \epsilon$
12	0.4431	$0.0007 \leq \epsilon$

Processo Iterativo (passos)



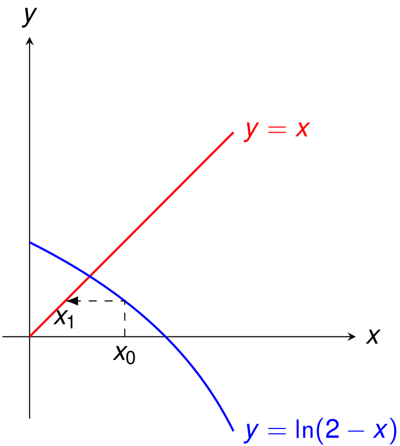
k	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$
0	0.5	—
1	0.4055	$0.0945 > \epsilon$
2	0.4666	$0.0611 > \epsilon$
3	0.4275	$0.0391 > \epsilon$
4	0.4527	$0.0252 > \epsilon$
5	0.4365	$0.0162 > \epsilon$
6	0.4469	$0.0104 > \epsilon$
7	0.4402	$0.0067 > \epsilon$
8	0.4445	$0.0043 > \epsilon$
9	0.4418	$0.0027 > \epsilon$
10	0.4435	$0.0017 > \epsilon$
11	0.4424	$0.0011 > \epsilon$
12	0.4431	$0.0007 \leq \epsilon$

Processo Iterativo (passos)



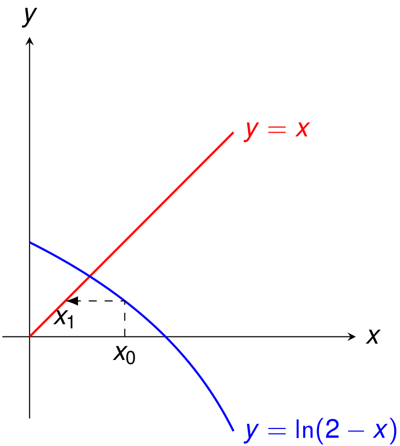
k	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$
0	0.5	—
1	0.4055	$0.0945 > \epsilon$
2	0.4666	$0.0611 > \epsilon$
3	0.4275	$0.0391 > \epsilon$
4	0.4527	$0.0252 > \epsilon$
5	0.4365	$0.0162 > \epsilon$
6	0.4469	$0.0104 > \epsilon$
7	0.4402	$0.0067 > \epsilon$
8	0.4445	$0.0043 > \epsilon$
9	0.4418	$0.0027 > \epsilon$
10	0.4435	$0.0017 > \epsilon$
11	0.4424	$0.0011 > \epsilon$
12	0.4431	$0.0007 \leq \epsilon$

Processo Iterativo (passos)



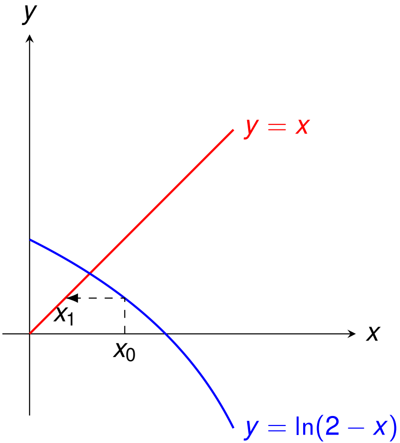
k	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$
0	0.5	—
1	0.4055	$0.0945 > \epsilon$
2	0.4666	$0.0611 > \epsilon$
3	0.4275	$0.0391 > \epsilon$
4	0.4527	$0.0252 > \epsilon$
5	0.4365	$0.0162 > \epsilon$
6	0.4469	$0.0104 > \epsilon$
7	0.4402	$0.0067 > \epsilon$
8	0.4445	$0.0043 > \epsilon$
9	0.4418	$0.0027 > \epsilon$
10	0.4435	$0.0017 > \epsilon$
11	0.4424	$0.0011 > \epsilon$
12	0.4431	$0.0007 \leq \epsilon$

Processo Iterativo (passos)



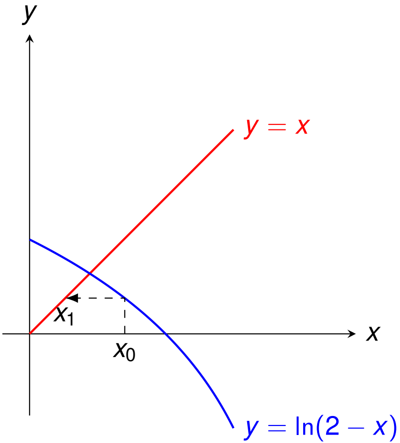
k	x_k	$\|x_k - x_{k-1}\|$
0	0.5	—
1	0.4055	$0.0945 > \epsilon$
2	0.4666	$0.0611 > \epsilon$
3	0.4275	$0.0391 > \epsilon$
4	0.4527	$0.0252 > \epsilon$
5	0.4365	$0.0162 > \epsilon$
6	0.4469	$0.0104 > \epsilon$
7	0.4402	$0.0067 > \epsilon$
8	0.4445	$0.0043 > \epsilon$
9	0.4418	$0.0027 > \epsilon$
10	0.4435	$0.0017 > \epsilon$
11	0.4424	$0.0011 > \epsilon$
12	0.4431	$0.0007 \leq \epsilon$

Processo Iterativo (passos)



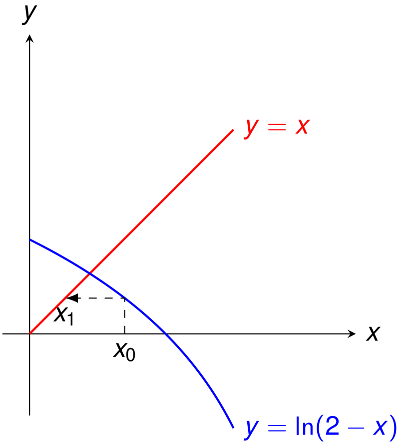
k	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$
0	0.5	—
1	0.4055	$0.0945 > \epsilon$
2	0.4666	$0.0611 > \epsilon$
3	0.4275	$0.0391 > \epsilon$
4	0.4527	$0.0252 > \epsilon$
5	0.4365	$0.0162 > \epsilon$
6	0.4469	$0.0104 > \epsilon$
7	0.4402	$0.0067 > \epsilon$
8	0.4445	$0.0043 > \epsilon$
9	0.4418	$0.0027 > \epsilon$
10	0.4435	$0.0017 > \epsilon$
11	0.4424	$0.0011 > \epsilon$
12	0.4431	$0.0007 \leq \epsilon$

Processo Iterativo (passos)



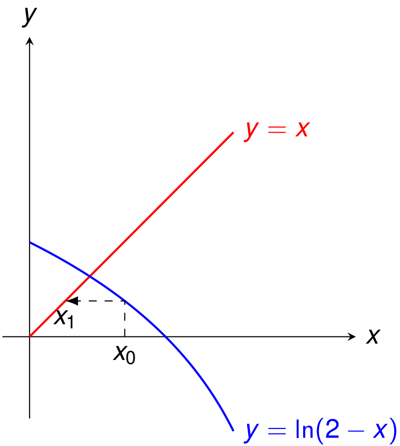
k	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
0	0.5	—
1	0.4055	$0.0945 > \epsilon$
2	0.4666	$0.0611 > \epsilon$
3	0.4275	$0.0391 > \epsilon$
4	0.4527	$0.0252 > \epsilon$
5	0.4365	$0.0162 > \epsilon$
6	0.4469	$0.0104 > \epsilon$
7	0.4402	$0.0067 > \epsilon$
8	0.4445	$0.0043 > \epsilon$
9	0.4418	$0.0027 > \epsilon$
10	0.4435	$0.0017 > \epsilon$
11	0.4424	$0.0011 > \epsilon$
12	0.4431	$0.0007 \leq \epsilon$

Processo Iterativo (passos)



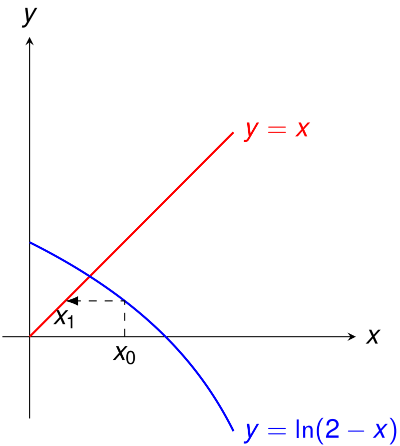
k	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
0	0.5	—
1	0.4055	$0.0945 > \epsilon$
2	0.4666	$0.0611 > \epsilon$
3	0.4275	$0.0391 > \epsilon$
4	0.4527	$0.0252 > \epsilon$
5	0.4365	$0.0162 > \epsilon$
6	0.4469	$0.0104 > \epsilon$
7	0.4402	$0.0067 > \epsilon$
8	0.4445	$0.0043 > \epsilon$
9	0.4418	$0.0027 > \epsilon$
10	0.4435	$0.0017 > \epsilon$
11	0.4424	$0.0011 > \epsilon$
12	0.4431	$0.0007 \leq \epsilon$

Processo Iterativo (passos)



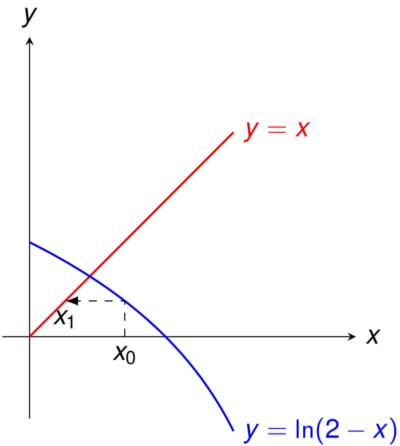
k	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$
0	0.5	—
1	0.4055	$0.0945 > \epsilon$
2	0.4666	$0.0611 > \epsilon$
3	0.4275	$0.0391 > \epsilon$
4	0.4527	$0.0252 > \epsilon$
5	0.4365	$0.0162 > \epsilon$
6	0.4469	$0.0104 > \epsilon$
7	0.4402	$0.0067 > \epsilon$
8	0.4445	$0.0043 > \epsilon$
9	0.4418	$0.0027 > \epsilon$
10	0.4435	$0.0017 > \epsilon$
11	0.4424	$0.0011 > \epsilon$
12	0.4431	$0.0007 \leq \epsilon$

Processo Iterativo (passos)



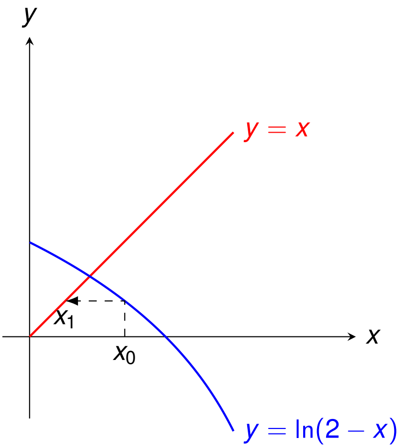
k	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$
0	0.5	—
1	0.4055	$0.0945 > \epsilon$
2	0.4666	$0.0611 > \epsilon$
3	0.4275	$0.0391 > \epsilon$
4	0.4527	$0.0252 > \epsilon$
5	0.4365	$0.0162 > \epsilon$
6	0.4469	$0.0104 > \epsilon$
7	0.4402	$0.0067 > \epsilon$
8	0.4445	$0.0043 > \epsilon$
9	0.4418	$0.0027 > \epsilon$
10	0.4435	$0.0017 > \epsilon$
11	0.4424	$0.0011 > \epsilon$
12	0.4431	$0.0007 \leq \epsilon$

Processo Iterativo (passos)



k	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$
0	0.5	—
1	0.4055	$0.0945 > \epsilon$
2	0.4666	$0.0611 > \epsilon$
3	0.4275	$0.0391 > \epsilon$
4	0.4527	$0.0252 > \epsilon$
5	0.4365	$0.0162 > \epsilon$
6	0.4469	$0.0104 > \epsilon$
7	0.4402	$0.0067 > \epsilon$
8	0.4445	$0.0043 > \epsilon$
9	0.4418	$0.0027 > \epsilon$
10	0.4435	$0.0017 > \epsilon$
11	0.4424	$0.0011 > \epsilon$
12	0.4431	$0.0007 \leq \epsilon$

Processo Iterativo (passos)



k	x_k	$\|x_k - x_{k-1}\|$
0	0.5	—
1	0.4055	$0.0945 > \epsilon$
2	0.4666	$0.0611 > \epsilon$
3	0.4275	$0.0391 > \epsilon$
4	0.4527	$0.0252 > \epsilon$
5	0.4365	$0.0162 > \epsilon$
6	0.4469	$0.0104 > \epsilon$
7	0.4402	$0.0067 > \epsilon$
8	0.4445	$0.0043 > \epsilon$
9	0.4418	$0.0027 > \epsilon$
10	0.4435	$0.0017 > \epsilon$
11	0.4424	$0.0011 > \epsilon$
12	0.4431	$0.0007 \leq \epsilon$

Convergência do MPF

Teorema (Convergência do MPF)

Seja r uma raiz da equação $f(x) = 0$, isolada num intervalo $\mathcal{I}$ centrado em r.

Seja $\varphi(x)$ uma função de iteração para a equação $f(x) = 0$.

Se

1. $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas em $\mathcal{I}$;
2. $|\varphi'(x)| \leq M < 1$, para todo $x \in \mathcal{I}$;
3. $x_0 \in \mathcal{I}$,

então a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo processo iterativo $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ converge para r.

Condição suficiente de convergência

Pelo Teorema do Valor Médio, para φ contínua e diferenciável:

$$x_{i+1} - r = \varphi'(\xi_i)\,(x_i - r)$$

para algum ξ_i entre x_i e r. Assim,

$$|e_{i+1}| = |\varphi'(\xi_i)|\,|e_i|.$$

Se $|\varphi'(x)| < 1$ em um intervalo contendo r, a iteração converge localmente para r.

Aplicando a condição aos exemplos

- Para $\varphi_2(x) = \ln(2 - x)$:

  $|\varphi_2'(x)| = |-\frac{1}{2-x}|, \quad |\varphi_2'(0.5)| \approx 0.67 < 1 \Rightarrow$ converge.

- Para $\varphi_1(x) = 2 - e^x$:

  $|\varphi_1'(x)| = |-e^x|, \quad |\varphi_1'(0.5)| \approx 1.65 > 1 \Rightarrow$ não converge.

Aplicando a condição aos exemplos

- Para $\varphi_2(x) = \ln(2 - x)$:

  $|\varphi_2'(x)| = |-\frac{1}{2-x}|, \quad |\varphi_2'(0.5)| \approx 0.67 < 1 \Rightarrow$ converge.

- Para $\varphi_1(x) = 2 - e^x$:

  $|\varphi_1'(x)| = |-e^x|, \quad |\varphi_1'(0.5)| \approx 1.65 > 1 \Rightarrow$ não converge.