Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Computação

Integração numérica

Prof. Renato Pimentel

2021/1

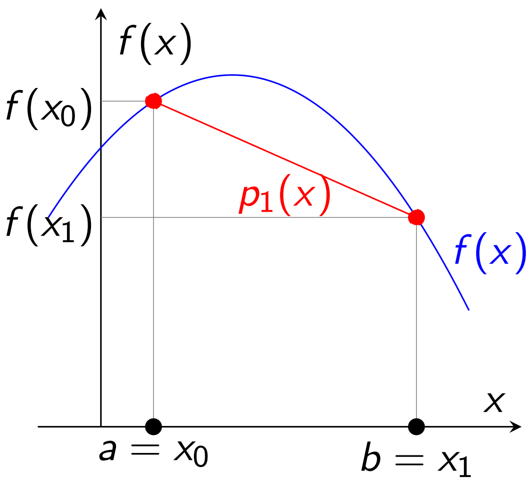
Sumário

- Em determinadas situações, integrais são difíceis, ou mesmo impossíveis de se resolver analiticamente.
  Exemplo: o valor de $f(x)$ é conhecido apenas em alguns pontos, num intervalo $[a, b]$. Como não se conhece a expressão analítica de $f(x)$, não é possível calcular

$$\int_a^b f(x)dx$$

- Em tais casos: forma de obtenção de uma aproximação para a integral de $f(x)$ num intervalo $[a, b]$: **Métodos numéricos**.

- **Ideia básica da integração numérica**: substituição da função $f(x)$ por um **polinômio** que a aproxime razoavelmente no intervalo $[a, b]$.
- **Integração numérica de uma função $f(x)$ num intervalo $[a, b]$**: cálculo da área delimitada por essa função, recorrendo à **interpolação polinomial**, como forma de obtenção de um polinômio – $p_n(x)$.



- As fórmulas terão a expressão abaixo:

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \cdots + A_n f(x_n)\,,$$

$$x_i \in [a, b], i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$$

- **Fórmulas de integração** (fórmulas de quadratura):

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)\,. \qquad (1)$$

  - $x_0, \ldots, x_n$: $n + 1$ pontos conhecidos, pertencentes ao intervalo $[a, b]$ (**nós de integração**).
  - $A_0, \ldots, A_n$: coeficientes a determinar, independentes de $f(x)$ (**pesos**).
- Do Cálculo, a integral definida (de Riemann) de f contínua em $[a, b]$ é

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x\,, \qquad \Delta x = (b-a)/n\,.$$

O uso desta técnica decorre do fato de:

- Por vezes, $f(x)$ ser uma função muito difícil de integrar, contrariamente a um polinômio;
- conhecer-se o resultado analítico do integral, mas seu cálculo ser somente aproximado;
- a única informação sobre $f(x)$ ser um conjunto de pares ordenados.

Métodos de integração numérica mais utilizados

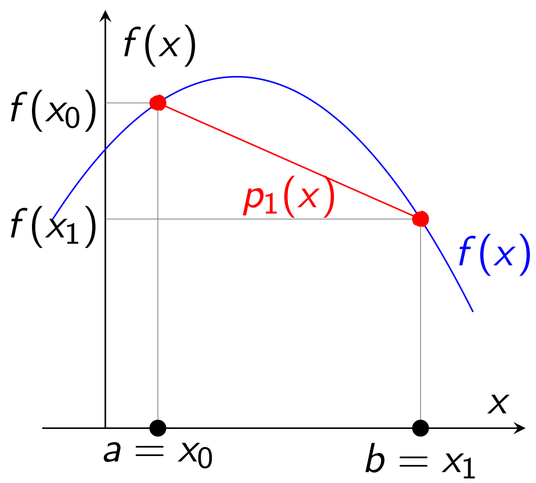
Fórmulas de Newton-Cotes

Ideia de **polinômio** que **interpole** $f(x)$ em nós de integração em $[a, b]$ que sejam **igualmente espaçados**:
Intervalo $[a, b]$ particionado em n subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$,
$i = 0, 1, \dots, n-1$, de comprimento $h = (b-a)/n = x_{i+1} - x_i$.

- Fórmulas de Newton-Cotes fechadas ($x_0 = a$ e $x_n = b$):
  - **Regra dos trapézios**;
  - **Regra 1/3 de Simpson**.
- Fórmulas de Newton-Cotes abertas:
  - Nós de integração x_i têm de pertencer ao intervalo aberto de a até b.

Regra dos trapézios

- **Regra dos trapézios simples:** consiste em considerar um polinômio de primeiro grau que aproxima uma função $f(x)$, ou seja, $n = 1$.
- Este polinômio terá a forma $p_1(x) = a_0 + a_1 x$ e trata-se da equação da reta que une dois pontos: $(a = x_0, f(x_0))$ e $(b = x_1, f(x_1))$.



- **Área do trapézio:** dada por

$$A = h\frac{T+t}{2}\,,$$

onde h = altura do trapézio, T = base maior e t = base menor.

- De acordo com o gráfico:

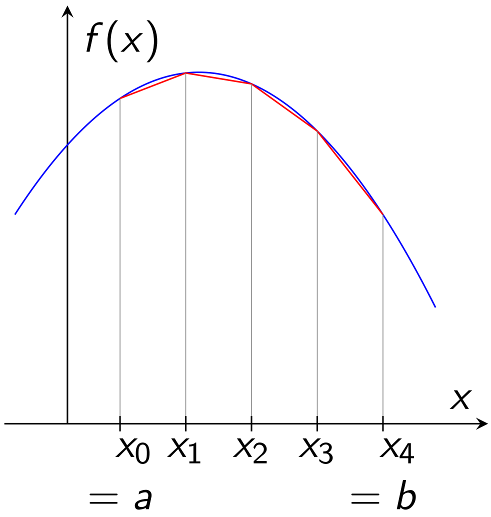
$$\begin{aligned} h &= b - a = x_1 - x_0\,, \\ T &= f(a) = f(x_0)\,, \\ t &= f(b) = f(x_1)\,. \end{aligned}$$

- Logo,

$$\int_a^b f(x)dx \approx T_1(f) = \frac{x_1 - x_0}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right]\,. \qquad (2)$$

- Intervalo $[a, b]$ relativamente pequeno:
  - aproximação do valor do integral é aceitável.
- Intervalo $[a, b]$ de grande amplitude:
  - Aproximação defasada.
  - Pode-se subdividi-lo em n sub-intervalos, e em cada um a função é aproximada por uma função linear.
  - A amplitude dos sub-intervalos será $h = (b - a)/n$.
  - A integral no intervalo é dado pela soma dos integrais definidos pelos sub-intervalos.
  - Regra dos trapézios simples aplicada aos sub-intervalos.
  - Uso da **Regra dos Trapézios Composta (Repetida)**: soma da área de n trapézios, cada qual definido pelo seu sub-intervalo.

- Intervalo $[a, b]$ de grande amplitude.
- Soma da área de n trapézios, cada qual definido pelo seu sub-intervalo.



- Fórmula:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx T_n(f) = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \cdots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)] \ .$$

- Como somente os termos $f(x_0)$ e $f(x_n)$ não se repetem, esta fórmula pode ser simplificada em:

$$I(f) \approx T_n(f) = \frac{h}{2}\{f(x_0) + 2[f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})] + f(x_n)\} = \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)) \ .$$

Estimar o valor de $\int_0^4 (1+x^2)^{-1/2} dx$, com valores tabelados como abaixo:

x_i	$f_i = (1+x_i^2)^{-1/2}$
0,0	1,00000
0,5	0,89445
1,0	0,70711
1,5	0,55475
2,0	0,44722
2,5	0,37138
3,0	0,31623
3,5	0,27473
4,0	0,24254

- Regra dos trapézios simples – 2 pontos ($x_0 = 0,0$ e $x_1 = 4,0$):

$$T_1(f) = \frac{x_1 - x_0}{2}(f_0 + f_1) = 2(1,00000 + 0,24254) = 2,48508\,.$$

- Regra dos trapézios composta – 3 pontos ($x_0 = 0,0$, $x_1 = 2,0$ e $x_2 = 4,0$; $h = (4,0 - 0,0)/2 = 2,0$):

$$T_2(f) = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + f_2) = (1,00000 + 2 \times 0,44722 + 0,24254) = 2,1369\,.$$

- Regra dos trapézios composta – 9 pontos ($x_0 = 0,0$, $x_1 = 0,5$, $\ldots$, $x_8 = 4,0$; $h = (4,0 - 0,0)/8 = 0,5$):

$$T_8(f) = \frac{h}{2}[f_0 + 2(f_1 + f_2 + \cdots + f_7) + f_8] = \cdots = 2,0936\,.$$

- A aproximação $T_8(f)$ é melhor, uma vez que $I = 2,0947125472\ldots$

- Foi visto ao se estudar o erro pela interpolação polinomial que

$$f(x) = p_1(x) + (x - x_0)(x - x_1)\frac{f''(\xi_x)}{2}\,, \qquad \xi_x \in (x_0, x_1)\,.$$

- Ao se integrar ambos os lados no intervalo $[x_0, x_1]$:

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} p_1(x)dx + \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1)\frac{f''(\xi_x)}{2}dx \\ &= T_1(f) + E_T\,, \end{aligned}$$

onde ξ_x varia com o valor de x, e assim

$$E_T = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1)f''(\xi_x)dx\,. \tag{3}$$

- Seja $g(x) = (x - x_0)(x - x_1)$. Observa-se que $\forall x \in (x_0, x_1)$, $g(x) < 0$.
- Supondo-se $f''(x)$ contínua em $[x_0, x_1]$, existem valores reais p e P tais que $p \le f''(x) \le P$. Logo, $p \le f''(\xi_x) \le P$ e, como $g(x) \le 0$,

$$pg(x) \ge g(x)f''(\xi_x) \ge Pg(x)\,.$$

(o sinal de desigualdade é trocado ao se multiplicar a inequação por $g(x)$). Integrando-se a a mesma no intervalo $[x_0, x_1]$:

$$P\underbrace{\int_{x_0}^{x_1} g(x)dx}_{<0} \le \int_{x_0}^{x_1} g(x)f''(\xi_x)dx \le p\underbrace{\int_{x_0}^{x_1} g(x)dx}_{<0}\,,$$

o que leva a

$$p \le \underbrace{\frac{\int_{x_0}^{x_1} g(x)f''(\xi_x)dx}{\int_{x_0}^{x_1} g(x)dx}}_{=A} \le P\,.$$

Teorema do valor médio para integrais

Se $f''(x)$ é contínua em $[x_0, x_1]$, como suposto, e $p \leq A \leq P$, então existe $c \in [x_0, x_1]$ tal que $f''(c) = A$, i.e.

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x) f''(\xi_x) dx = f''(c) \int_{x_0}^{x_1} g(x) dx \,.$$

- Portanto, o erro cometido E_T – Eq. (3) – é tal que

$$E_T = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} g(x) f''(\xi_x) dx = \frac{1}{2} f''(c) \int_{x_0}^{x_1} g(x) dx, \; c \in [x_0, x_1] \,.$$

- Como (**exercício**) $\int_{x_0}^{x_1} g(x) dx = \frac{-h^3}{6}$, onde $h = x_1 - x_0$,

$$E_T = -\frac{h^3}{12} f''(c), \; c \in [x_0, x_1] \,.$$

- As considerações vistas são para o caso da regra dos trapézios simples.
- No caso da regra dos trapézios composta:

$$\begin{aligned} I(f) = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{h}{2} \left(f(x_i) + f(x_{i+1}) \right) - \frac{h^3}{12} f''(c_i) \right] \\ &= \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x_i) + f(x_{i+1}) \right) - \frac{h^3}{12} \sum_{i=0}^{n-1} f''(c_i) \\ &= T_n(f) + E_T \,, \end{aligned}$$

onde agora $h = (b - a)/n = (x_n - x_0)/n$.

Estimativa do erro

- Supondo que f'' é contínua em $[a, b]$, uma generalização do teorema do valor intermediário garante que existe $\xi_x \in (a, b)$ tal que

$$E_T = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=0}^{n-1} f''(c_i) = -nf''(\xi_x)\frac{h^3}{12}\,.$$

- Ainda, pela mesma hipótese de continuidade de $f''(x)$ em $[a, b]$, existe $M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$. Como $n = (b-a)/h$,

$$|E_T| = |I(f) - T_n(f)| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M_2\,.$$

- **Observação:** como na estimativa acima, eliminou-se n, a desigualdade independe do número de pontos, sendo válida tanto para a regra dos trapézios simples quanto para a composta.

Exemplo

Dado $I(f) = \int_0^1 e^x dx$:

1. Aproxime $I(f)$ usando a regra do trapézio com 10 subintervalos. Estime o erro cometido.
2. Qual o número de subdivisões de modo que o erro seja inferior a 10^{-3}?

Solução:

1. $x_i = 0,1i$, $i = 0, 1, \ldots, 10$ dividem $[0,1]$ em 10 subintervalos, com $h = 0,1$. Pela regra dos trapézios composta:

$$T_{10}(f) = \frac{0,1}{2}\left(e^0 + 2e^{0,1} + \cdots + 2e^{0,9} + e\right) = 1,719713\,.$$

Neste caso, a solução exata é conhecida, dada por

$$I(f) = \int_0^1 e^x dx = e^1 - 1 \approx 1,718282\,,$$

de modo que $|E_T| = |I(f) - T_{10}(f)| = 0,001431$. Usando-se a estimativa, uma vez que $M_2 = \max_{0\le x\le 1} |e^x| = e$:

$$0,001431 = |E_T| \le \frac{b-a}{12}h^2M_2 = \frac{1,0-0,0}{12}(0,1)^2 e = 0,002265\,.$$

(neste caso, foi possível calcular $|E_T|$ porque o valor da integral é conhecido).

2. Para que $|E_T| = |I(f) - T_n(f)| < 10^{-3}$:
Dado que $|E_T| \le \dfrac{b-a}{12}h^2M_2$, basta considerar $\dfrac{b-a}{12}h^2M_2 < 10^{-3}$:

$$\frac{b-a}{12}h^2M_2 = \frac{e}{12}h^2 < 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad h < \sqrt{\frac{12\times 10^{-3}}{e}}\,.$$

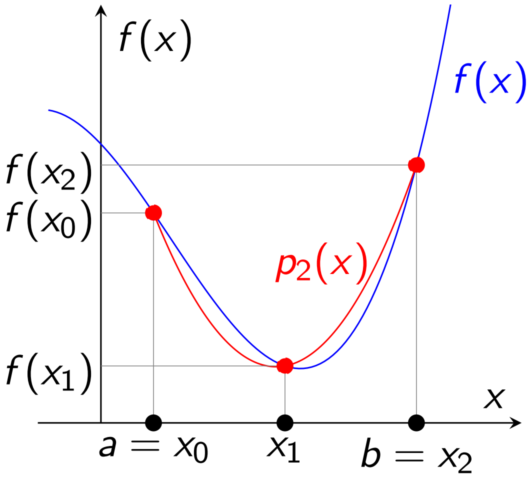
Uma vez que $n = (b-a)/h$:

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{1}{h} > \sqrt{\frac{e}{12\times 10^{-3}}} = 15,03759\,.$$

Como $n > 15,03759$ e $n \in \mathbb{N}$, o número de subdivisões deverá ser pelo menos 16 ($n \ge 16$).

Regra 1/3 de Simpson

- **Regra 1/3 de Simpson simples**: considera-se um **polinômio de segundo grau** $p_2(x)$ que aproxima uma função $f(x)$.
- Tal polinômio é a equação da parábola que passa por três pontos igualmente espaçados $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$.



- A regra dos trapézios simples pode ser deduzida considerando-se a fórmula de Lagrange para $n = 1$: encontra-se o polinômio $p_1(x)$ que interpola os 2 pontos $x_0 = a$, $x_1 = b$ com pesos $A_i = \int_a^b L_i(x)dx$, $i = 0, 1$ – vide Eq. (1). L_i são os polinômios de Lagrange.
- Na **regra 1/3 de Simpson**, novamente pode se usar fórmula de Lagrange para $n = 2$, para encontrar o polinômio $p_2(x)$ que interpola $f(x)$ nos pontos $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + h = (a + b)/2$ e $x_2 = x_0 + 2h = b$:

$$A_0 = \int_a^b L_0(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} dx = \frac{h}{3},$$
$$A_1 = \int_a^b L_1(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} dx = \frac{4h}{3},$$
$$A_2 = \int_a^b L_2(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} dx = \frac{h}{3}.$$

(é possível resolver as integrais acima com a mudança de variáveis $x - x_0 = zh$, de forma que $dx = hdz$ e $x = x_0 + zh$).

Regra 1/3 de Simpson simples

- Logo, pela regra 1/3 de Simpson:

$$I(f) \approx S_2^{(1/3)}(f) = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] .$$

  - Note que $S_2^{(1/3)}(f) = \int_a^b p_2(x)dx$.
- Supondo-se $f^{(4)}$ contínua em $[a, b] = [x_0, x_2]$, o erro da fórmula de Simpson é

$$E_S = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(c),\ c \in [x_0, x_2] .$$

Regra 1/3 de Simpson composta

- Similar ao visto para a regra dos trapézios composta: intervalo $[a, b]$ de grande amplitude, tornando inviável o uso de apenas 3 nós de integração – E_S pode ser muito alto.
- Consideram-se $n + 1$ nós de integração igualmente espaçados no intervalo $[a, b]$, com n **par**.
- Aplica-se a regra 1/3 de Simpson em cada **par de subintervalos** $[x_{2i-2}, x_{2i}]$, para $i = 1, \ldots, n/2$.

- Em cada par de subintervalos:

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\right] + \left[-\frac{h^5}{90} f^{(4)}(c_i)\right],$$
$$c_i \in [x_{2i-2}, x_{2i}],\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{n}{2}.$$

- Logo,

$$\begin{aligned}
I(f) = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx &= \sum_{i=1}^{n/2} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx \\
&= \sum_{i=1}^{n/2} \left\{ \frac{h}{3}\left[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(c_i) \right\} \\
&= \frac{h}{3} \sum_{i=1}^{n/2} \left[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\right] - \frac{h^5}{90} \sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(c_i) \\
&= S_n^{(1/3)}(f) + E_S\,.
\end{aligned}$$

Concluindo, a fórmula da regra 1/3 de Simpson composta é dada por

$$\begin{aligned}
S_n^{(1/3)}(f) &= \frac{h}{3} \sum_{i=1}^{n/2} \left[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\right] \\
&= \frac{h}{3}\Big[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots \\
&\qquad + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big]\,.
\end{aligned}$$

Estimativa do erro

- Similar ao visto previamente para a regra dos trapézios, supondo que a derivada de quarta ordem de $f(x)$, $f^{(4)}$, seja contínua em $[a, b]$, uma generalização do teorema do valor intermediário garante que existe $\xi_x \in (a, b)$ tal que

$$E_S = -\frac{h^5}{90} \sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(c_i) = -\frac{n}{2} f^{(4)}(\xi_x) \frac{h^5}{90} \,.$$

- Ainda, existe $M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$. Como $n = (b-a)/h$,

$$|E_S| = |I(f) - S_n^{(1/3)}(f)| \leq \frac{(b-a)}{180} h^4 M_4 \,.$$

Exemplo

Dado $I(f) = \int_0^1 e^x dx$:

1. Aproxime $I(f)$ usando a regra 1/3 de Simpson com 10 subintervalos. Estime o erro cometido.
2. Qual o número de subdivisões de modo que o erro seja inferior a 10^{-3}?

Solução:

1. $x_i = 0,1i$, $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ 10$, dividem $[0,1]$ em 10 subintervalos, com $h = 0,1$. Pela regra 1/3 de Simpson composta:

$$S_{10}^{(1/3)}(f) = \frac{0,1}{3}\Big(e^0 + 4e^{0,1} + 2e^{0,2} + \ldots$$
$$+ 2e^{0,8} + 4e^{0,9} + e\Big) = 1,7183\,.$$

O erro é dado por $|E_S| = |I(f) - S_{10}^{(1/3)}(f)| = 9,5347 \times 10^{-7}$.
Usando-se a estimativa, uma vez que $M_4 = \max_{0\le x\le 1}|e^x| = e$:

$$|E_T| \le \frac{b-a}{180}h^4 M_4 = \frac{1,0-0,0}{180}(0,1)^4 e = 1,51016 \times 10^{-6}\,.$$

De fato, $|E_T| = 9,5347 \times 10^{-7} < 1,51016 \times 10^{-6}$.

2. Para que $|E_S| = |I(f) - S_n^{(1/3)}(f)| < 10^{-3}$:
Dado que $|E_S| \le \dfrac{b-a}{180}h^4 M_4$, basta considerar $\dfrac{b-a}{180}h^4 M_4 < 10^{-3}$:

$$\frac{b-a}{180}h^4 M_4 = \frac{e}{180}h^4 < 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad h < \sqrt[4]{\frac{180 \times 10^{-3}}{e}}\,.$$

Uma vez que $n = (b-a)/h$:

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{1}{h} > \sqrt[4]{\frac{e}{180 \times 10^{-3}}} = 1,9713\,.$$

Como $n > 1,9713$ e $n/2 \in \mathbb{N}$ (deve ser par), o número de subdivisões deverá ser pelo menos 2. $(n = 2,\ 4,\ \ldots)$.

Regra 3/8 de Simpson

- Na **regra 3/8 de Simpson**, expande-se o grau do polinômio para $n = 3$:
  para estimar a integral de $f(x)$, aproxima-se a mesma, via interpolação, por um polinômio de grau no máximo 3 $p_3(x)$ – interpolação cúbica – que passa por quatro pontos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ e $(x_3, f(x_3))$, igualmente espaçados por uma distância h.
- No caso simples, em que $x_0 = a$ e $x_3 = b$:

$$\int_{a=x_0}^{b=x_1} f(x)dx \approx \int_{a=x_0}^{b=x_1} p_3(x)dx = \sum_{i=0}^{3} A_i f(x_i)\,.$$

- Os pesos A_i podem ser obtidos por Lagrange ($A_i = \int_a^b L_i dx$, $i = 0, \ldots, 3$), e são dados por

$$A_0 = \frac{3h}{8}\,, \qquad A_1 = \frac{9h}{8}\,, \qquad A_2 = \frac{9h}{8}\,, \qquad A_3 = \frac{3h}{8}\,.$$

- Logo, pela regra 3/8 de Simpson:

$$I(f) \approx S_3^{(3/8)}(f) = \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]\,.$$

- A **regra 3/8 de Simpson composta** considera $n+1$ pontos $x_0, \ldots, x_n$ igualmente espaçados com espaçamento h entre si com $n \bmod 3 = 0$ (o número de subintervalos n deve ser **múltiplo de 3**), de modo que aplica-se a regra 3/8 de Simpson simples a cada **trio de subintervalos** $[x_{3i-3}, x_{3i}]$, para $i = 1, \ldots, n/3$. Obtém-se

$$\begin{aligned} I(f) = S_n^{(3/8)} &= \frac{3h}{8}\sum_{i=1}^{n/3}\left[f(x_{3i-3}) + 3f(x_{3i-2}) + 3f(x_{3i-1}) + f(x_{3i})\right] \\ &= \frac{3h}{8}\Big[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) + 3f(x_4) + \ldots \\ &\qquad + 2f(x_{n-3}) + 3f(x_{n-2}) + 3f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big]\,. \end{aligned}$$

Teorema geral do erro

- Seja $f(x) \in C^{n+2}[a, b]$ – i.e., as derivadas de f até ordem $n+2$ são contínuas em $[a, b]$.
- Seja n o grau do polinômio que interpola $f(x)$ em pontos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ (caso simples).
- Então, o **erro na integração numérica** E_n pelas fórmulas de Newton-Cotes, é:
  1. Se n é ímpar:
  $$E_n = \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \int_0^n u(u-1)\ldots(u-n)du, \; \xi_x \in [a, b] \, ;$$
  2. Se n é par:
  $$E_n = \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi_x)}{(n+2)!} \int_0^n \left(u - \frac{n}{2}\right) u(u-1)\ldots(u-n)du, \; \xi_x \in [a, b] \, .$$

Exercícios I

1. Calcular usando a regra do trapézio composta:
$$\int_0^{1,2} e^x \cos x dx \, .$$
Considere os dados da tabela:

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
e^x	1	1,221	1,492	1,822	2,226	2,718	3,3220
$\cos x$	1	0,980	0,921	0,825	0,697	0,540	0,362

2. Repita o exercício anterior, usando a regra 1/3 de Simpson:
   - simples (nos pontos $0, 0,6, 1,2$);
   - composta.
3. Repita o exercício 1, usando a regra 3/8 de Simpson composta.
4. Para os itens 1 e 2, estime os erros obtidos.
5. A velocidade vertical de um foguete lançado verticalmente do chão é tabelada como a seguir:

Exercícios II

$t\,(s)$	0	5	10	15	20
$v\,(m/s)$	0	18,47	54,89	104,12	161,06

Usando a regra 1/3 de Simpson, calcular a altura da foguete após 20 segundos.

6. Determine a distância entre x_i e x_{i+1}, para que se possa avaliar $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$ com erro inferior a $\varepsilon = 10^{-5}$ pela regra 1/3 de Simpson.
7. Faça a dedução da regra dos trapézios simples – $T_1(f)$, dada pela Eq. (2) – usando a fórmula de Lagrange. Considere uma função $f(x)$ cujos valores sejam conhecidos em 2 pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$, onde se deseja saber qual o valor da integral definida de f no intervalo definido por tais pontos.
8. Usando o teorema geral do erro, obtenha a expressão do erro para o caso simples (em que o número de intervalos é $n = 3$) da regra 3/8 de Simpson.

Exercícios III

9. Considerando que $M_4 = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$, estime, a partir da expressão obtida no item anterior, qual o limitante superior do módulo do erro obtido quando se usa a regra 3/8 de Simpson sobre n pontos (composta), para n múltiplo de 3.
10. Calcule o erro obtido ao se usar a regra 3/8 de Simpson ao empregá-la no cálculo numérico da integral do exercício 1.
11. Determine a distância entre x_i e x_{i+1}, para que se possa avaliar $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$ com erro inferior a $\varepsilon = 10^{-5}$ pela regra 3/8 de Simpson.

1. FRANCO, N. B. *Cálculo numérico*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.
2. RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. 2ª. ed. São Paulo: Makron Books. 1996.
3. VALLE, M. E. *MS211 – Cálculo Numérico. Aula 18 — Integração Numérica*. Disponível em: http://www.ime.unicamp.br/~valle/Teaching/MS211/Aula18.pdf. Acesso em: 23 de mar. de 2021

Os materiais de parte desta seção foram gentilmente cedidos por Mauricio C. Escarpinati (FACOM/UFU)
Adaptações: Renato Pimentel, FACOM/UFU