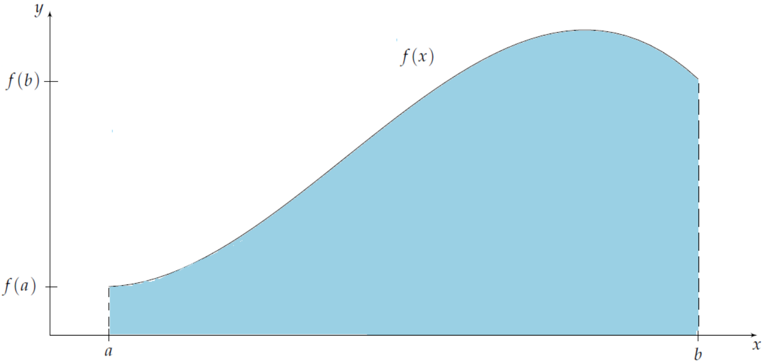
CÁLCULO NUMÉRICO
UERJ

Erros de Integração Numérica

Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br
IME-UERJ

Sumário

Erro da Regra dos Trapézios



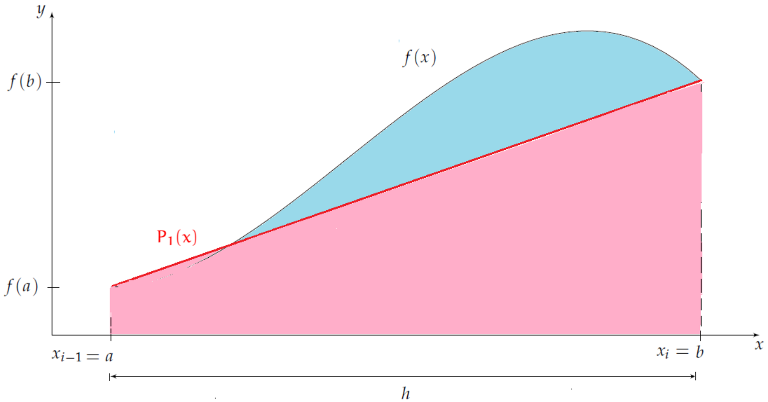
Seja $I_i = \displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$ o resultado da integral analítica de $f(x)$ sobre $[x_{i-1}, x_i]$.

Então,

$$I_i = F(x_i) - F(x_{i-1}), \tag{1}$$

onde $F(x)$ é a primitiva de $f(x)$.

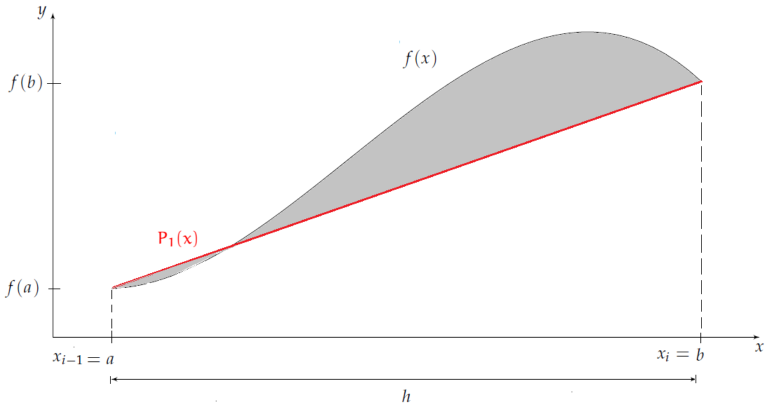
Erro da Regra dos Trapézios



Seja $T_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} P_1(x)\, dx$ o resultado da integral aproximada pela Regra dos Trapézios Simples sobre $[x_{i-1}, x_i]$. Então,

$$T_i = \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]. \tag{2}$$

Erro da Regra dos Trapézios



Denotamos

$$E_i = I_i - T_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\, f(x) - P_1(x) \,]\, dx \qquad (3)$$

o erro cometido ao se aproximar $I_i \approx T_i$.

Erro da Regra dos Trapézios

Do desenvolvimento de $F(x_{i-1})$ em (1) por Série de Taylor em torno de x_i e sabendo que $x_{i-1} - x_i = -h$, obtemos:

$$F(x_{i-1}) = F(x_i) + (x_{i-1} - x_i)F'(x_i) + \frac{(x_{i-1} - x_i)^2}{2!}F''(x_i) \quad (4)$$
$$+ \frac{(x_{i-1} - x_i)^3}{3!}F'''(x_i) + \frac{(x_{i-1} - x_i)^4}{4!}F^{(iv)}(x_i) + \dots$$
$$= F(x_i) - hF'(x_i) + \frac{h^2}{2!}F''(x_i) - \frac{h^3}{3!}F'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}F^{(iv)}(x_i) - \dots$$

Como $F'(x) = f(x)$, temos que

$$F'(x_i) = f(x_i),\ F''(x_i) = f'(x_i),\ F'''(x_i) = f''(x_i),\ F^{(iv)}(x_i) = f'''(x_i),\ \dots$$

Substituindo em (4), obtemos:

$$F(x_{i-1}) = F(x_i) - hf(x_i) + \frac{h^2}{2!}f'(x_i) - \frac{h^3}{3!}f''(x_i) + \frac{h^4}{4!}f'''(x_i) - \dots \quad (5)$$

Erro da Regra dos Trapézios

Substituindo (5) em (1), obtemos:

$$I_i = F(x_i) - \left[F(x_i) - hf(x_i) + \frac{h^2}{2!} f'(x_i) - \frac{h^3}{3!} f''(x_i) + \frac{h^4}{4!} f'''(x_i) - \dots \right] \tag{6}$$

$$= hf(x_i) - \frac{h^2}{2!} f'(x_i) + \frac{h^3}{3!} f''(x_i) - \frac{h^4}{4!} f'''(x_i) + \dots$$

Agora, do desenvolvimento de $f(x_{i-1})$ em (2) por Série de Taylor em torno de x_i, obtemos:

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) - \frac{h^3}{3!} f'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} f^{(iv)}(x_i) - \dots \tag{7}$$

Substituindo em (7) em (2), obtemos:

$$T_i = \frac{h}{2} \left[f(x_i) + \left(f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) - \frac{h^3}{3!} f'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} f^{(iv)}(x_i) - \dots \right) \right]$$

$$= \frac{h}{2} \left[2f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) - \frac{h^3}{3!} f'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} f^{(iv)}(x_i) - \dots \right]$$

Erro da Regra dos Trapézios

Logo,

$$T_i = hf(x_i) - \frac{h^2}{2}f'(x_i) + \frac{h^3}{4}f''(x_i) - \frac{h^4}{2\cdot 3!}f'''(x_i) + \frac{h^5}{2\cdot 4!}f^{(iv)}(x_i) - \dots \qquad (8)$$

Portanto, subtraindo (8) de (6), obtemos o erro $E_i = I_i - T_i$:

$$E_i = \left[\frac{h^3}{3!} - \frac{h^3}{4}\right] f''(x_i) + \left[\frac{h^4}{2\cdot 3!} - \frac{h^4}{4!}\right] f'''(x_i) + \left[\frac{h^5}{5!} - \frac{h^5}{2\cdot 4!}\right] f^{(iv)}(x_i) + \dots$$

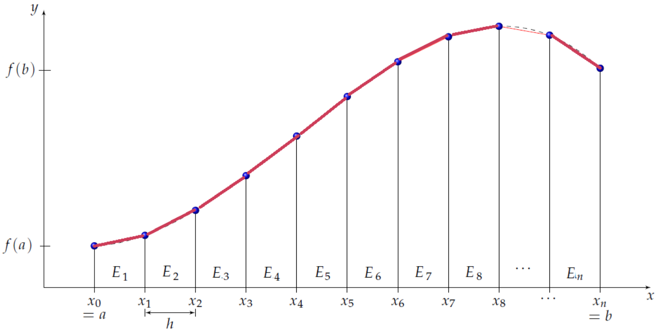
$$\Rightarrow E_i = -\frac{h^3}{12}f''(x_i) + \frac{h^4}{24}f'''(x_i) - \frac{h^5}{80}f^{(iv)}(x_i) + \dots$$

$$\Rightarrow E_i = -\frac{h^3}{12}f''(x_i) + (\text{ termos em } h^4, h^5, \dots)$$

Supondo que h é suficientemente pequeno, ou seja, que $0 < h < 1$, os termos em $h^4, h^5, \dots$ podem ser desprezados, de maneira que o erro de aproximação é:

$$E_i \approx -\frac{h^3}{12}f''(x_i) \qquad (9)$$

Erro da Regra dos Trapézios

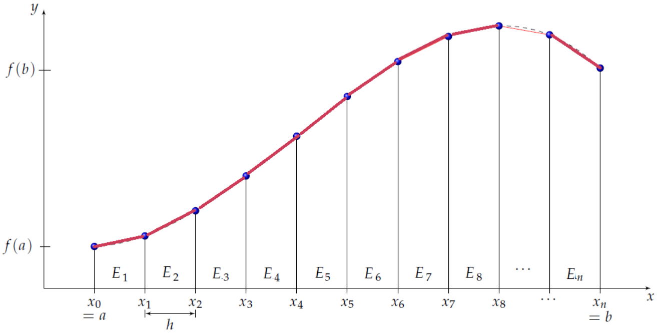


Se o erro local de aproximação no trapézio i é dado por E_i, para $i = 1, 2, \ldots, n$, então o erro global E_T cometido na Regra dos Trapézios repetida no intervalo $[a, b] = [x_0, x_n]$ é a soma:

$$E_T = E_1 + E_2 + \ldots + E_n = -\frac{h^3}{12} f''(x_1) - \frac{h^3}{12} f''(x_2) - \ldots - \frac{h^3}{12} f''(x_n)$$

$$= -\frac{h^3}{12} [f''(x_1) + f''(x_2) + \ldots + f''(x_n)]$$

Erro da Regra dos Trapézios



Em módulo,

$$|E_T| = |E_1 + E_2 + \ldots + E_n| \leq |E_1| + |E_2| + \ldots + |E_n| \tag{10}$$

$$\leq \frac{h^3}{12}\left(\, |f''(x_1)| + |f''(x_2)| + \ldots + |f''(x_n)| \, \right)$$

Erro da Regra dos Trapézios

Como $f''(x)$ é contínua em $[a, b] = [x_0, x_n]$, então é limitada neste intervalo. Logo, existe M_2 real, positivo, tal que $|f''(x)| \leq M_2$ para todo $x \in [x_0, x_n]$.

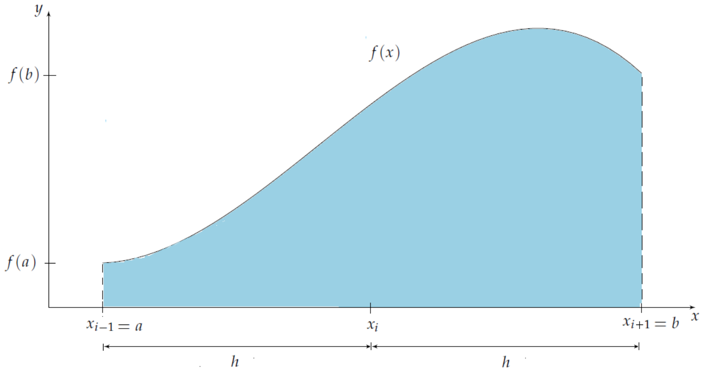
Portanto, $|f''(x_i)| \leq M_2$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Substituindo em (9), obtemos o limitante superior do erro para a Regra dos Trapézios:

Limitante superior do Erro da Regra dos Trapézios

$$|E_T| \leq \frac{h^3}{12} \cdot n \cdot M_2, \text{ onde } M_2 = \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|. \tag{11}$$

Erro da Regra (1/3) de Simpson

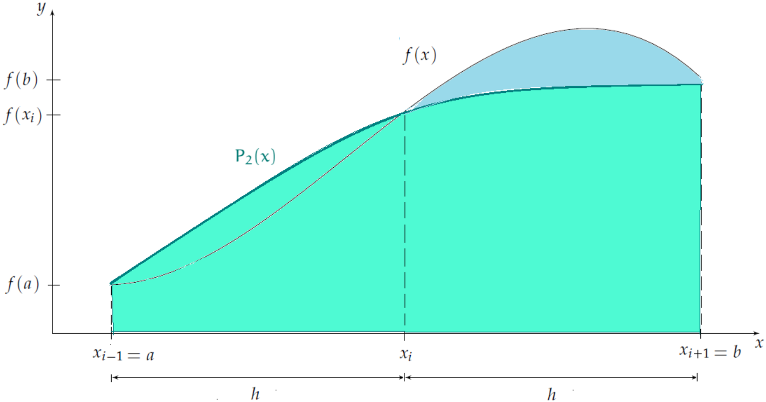


Seja $I_i' = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\, dx$ o resultado da integral analítica de $f(x)$ sobre $[x_{i-1}, x_{i+1}]$. Então,

$$I_i' = F(x_{i+1}) - F(x_{i-1}), \tag{12}$$

onde $F(x)$ é a primitiva de $f(x)$.

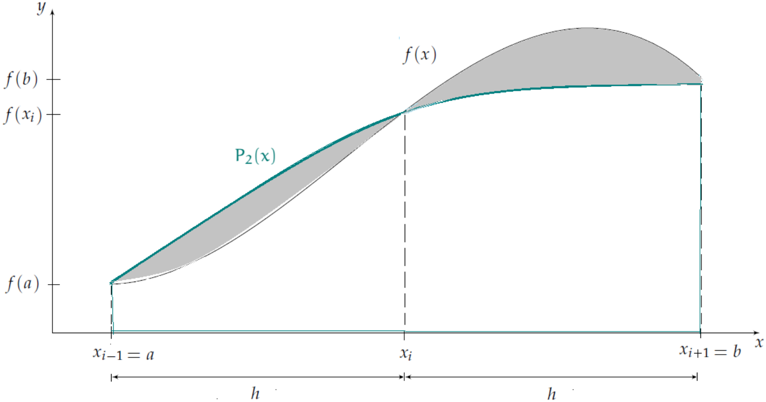
Erro da Regra (1/3) de Simpson



Seja $S_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} P_2(x)\,dx$ o resultado da integral aproximada pela Regra de Simpson Simples sobre $[x_{i-1}, x_{i+1}]$. Então,

$$S_i = \frac{h}{3}[f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})]. \tag{13}$$

Erro da Regra (1/3) de Simpson



Denotamos

$$E_i' = I_i' - S_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [\, f(x) - P_2(x) \,] \, dx \tag{14}$$

o erro cometido ao se aproximar $I_i' \approx S_i$.

Erro da Regra (1/3) de Simpson

Do desenvolvimento de $F(x_{i+1})$ em (11) por Série de Taylor em torno de x_i e sabendo que $x_{i+1} - x_i = h$, obtemos:

$$F(x_{i+1}) = F(x_i) + hF'(x_i) + \frac{h^2}{2!}F''(x_i) + \frac{h^3}{3!}F'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}F^{(iv)}(x_i) + \frac{h^5}{5!}F^{(v)}(x_i) + \ldots \tag{15}$$

Do desenvolvimento de $F(x_{i-1})$ em (11) por Série de Taylor em torno de x_i e sabendo que $x_{i-1} - x_i = -h$, obtemos:

$$F(x_{i-1}) = F(x_i) - hF'(x_i) + \frac{h^2}{2!}F''(x_i) - \frac{h^3}{3!}F'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}F^{(iv)}(x_i) - \frac{h^5}{5!}F^{(v)}(x_i) + \ldots \tag{16}$$

Como $F'(x) = f(x)$, temos que:
$F'(x_i) = f(x_i),\ F''(x_i) = f'(x_i),\ F'''(x_i) = f''(x_i),\ F^{(iv)}(x_i) = f'''(x_i),\ \ldots$

Substituindo em (15) e (16), obtemos:

$$F(x_{i+1}) = F(x_i) + hf(x_i) + \frac{h^2}{2!}f'(x_i) + \frac{h^3}{3!}f''(x_i) + \frac{h^4}{4!}f'''(x_i) + \frac{h^5}{5!}f^{(iv)}(x_i) + \ldots \tag{17}$$

$$F(x_{i-1}) = F(x_i) - hf(x_i) + \frac{h^2}{2!}f'(x_i) - \frac{h^3}{3!}f''(x_i) + \frac{h^4}{4!}f'''(x_i) - \frac{h^5}{5!}f^{(iv)}(x_i) + \ldots \tag{18}$$

Erro da Regra (1/3) de Simpson

Substituindo (17) e (18) em (12), obtemos:

$$I_i' = 2hf(x_i) + \frac{h^3}{3}f''(x_i) + \frac{2h^5}{5!}f^{(iv)}(x_i) + \dots \tag{19}$$

Agora, do desenvolvimento de $f(x_{i+1})$ e $f(x_{i-1})$ em (13) por Série de Taylor em torno de x_i, obtemos:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}f^{(iv)}(x_i) + \frac{h^5}{5!}f^{(v)}(x_i) + \dots \tag{20}$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) - \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}f^{(iv)}(x_i) - \frac{h^5}{5!}f^{(v)}(x_i) + \dots \tag{21}$$

Substituindo (20) e (21) em (13), obtemos:

$$\begin{aligned} S_i &= \frac{h}{3}\left[4f(x_i) + 2f(x_i) + h^2 f''(x_i) + \frac{h^4}{12}f^{(iv)}(x_i) + \dots\right] \qquad (22) \\ &= 2hf(x_i) + \frac{h^3}{3}f''(x_i) + \frac{h^5}{36}f^{(iv)}(x_i) + \dots \end{aligned}$$

Erro da Regra (1/3) de Simpson

Portanto, subtraindo (22) de (19), obtemos o erro $E_i' = I_i' - S_i$:

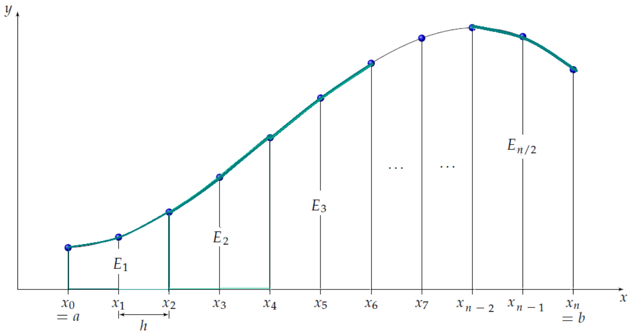
$$E_i' = \left[\frac{2h^5}{5!} - \frac{h^5}{36}\right] f^{(iv)}(x_i) + (\text{ termos em } h^7, h^9, \ldots)$$

$$\Rightarrow E_i' = -\frac{h^5}{90} f^{(iv)}(x_i) + (\text{ termos em } h^7, h^9, \ldots)$$

Supondo que h é suficientemente pequeno, ou seja, que $0 < h < 1$, os termos em $h^7, h^9, \ldots$ podem ser desprezados, de maneira que o erro de aproximação é:

$$E_i' \approx -\frac{h^5}{90} f^{(iv)}(x_i) \tag{23}$$

Erro da Regra (1/3) de Simpson

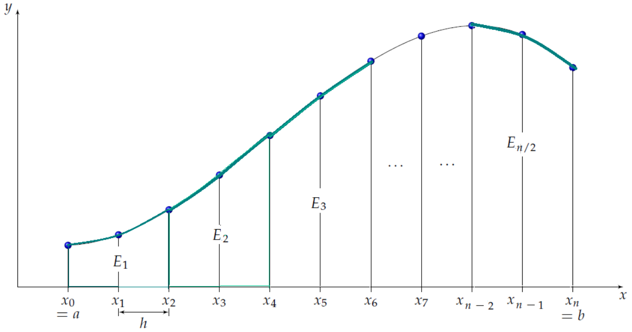


Se o erro local de aproximação da integral sob a parábola i é dado por E'_i, para $i = 1, 2, \ldots, n/2$, então o erro global E_S cometido na Regra (1/3) de Simpson repetida no intervalo $[a, b] = [x_0, x_n]$ é a soma:

$$E_S = E'_1 + E'_2 + \ldots + E'_{n/2} = -\frac{h^5}{90} f''(x_1) - \frac{h^5}{90} f''(x_3) - \ldots - \frac{h^5}{90} f''(x_{n-1})$$

$$= -\frac{h^5}{90} [f''(x_1) + f''(x_3) + \ldots + f''(x_{n-1})]$$

Erro da Regra (1/3) de Simpson



Em módulo,

$$|E_S| = |E_1' + E_2' + \ldots + E_{n/2}'| \leq |E_1'| + |E_2'| + \ldots + |E_{n/2}'| \qquad (24)$$

$$\leq \frac{h^5}{90}\left(\, |f^{(iv)}(x_1)| + |f^{(iv)}(x_3)| + \ldots + |f^{(iv)}(x_{n-1})| \, \right)$$

Erro da Regra (1/3) de Simpson

Como $f^{(iv)}(x)$ é contínua em $[a, b] = [x_0, x_n]$, então é limitada neste intervalo. Logo, existe M_4 real, positivo, tal que $|f^{(iv)}(x)| \leq M_4$ para todo $x \in [x_0, x_n]$.

Portanto, $|f^{(iv)}(x_i)| \leq M_4$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Substituindo em (24), obtemos o limitante superior do erro para a Regra (1/3) de Simpson:

Limitante superior do Erro da Regra (1/3) de Simpson

$$|E_S| \leq \frac{h^5}{90} \cdot \frac{n}{2} \cdot M_4 \Rightarrow |E_S| \leq \frac{h^5}{180} \cdot n \cdot M_4, \text{ onde } M_4 = \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(iv)}(\xi)|. \tag{25}$$

Referências I

- STARK, P. A.. **Introdução aos Métodos Numéricos**. Ed. Interciência, 1979.
- RUGGIERO, M.; LOPES, V.. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. Pearson, 1996, 2a. Ed.
- BURDEN, R.. **Numerical Analysis**. Brooks/Cole Pub Co, 1996, 6th Edition.