Curso de Cálculo Numérico

Professor Raymundo de Oliveira

| *Home* | Programa | Exercícios | Provas | Professor | Links |

Capítulo 5 - Birge Vieta

Cálculo de Raízes Reais de um Polinômio

Introdução

Não se precisa de Cálculo Numérico para calcular as raízes de uma equação do segundo grau. É de todos conhecida a fórmula $-b \pm(\mathbf{b^2} - 4ac)/2a$.
Entretanto, se temos polinônios de ordem maior que 2, as dificuldades aumentam. Há soluções para casos particulares, como as biquadradas, faltando soluções analíticas gerais para polinômios de ordem elevada.
O problema é enfrentado com o Método de Newton, já apresentado, onde se usa a expressão $xi+1 = xi - f(xi) / f'(xi)$.
Para cálculo do valor de f(xi) e f ' (xi) , usa-se o algoritmo de Ruffini ou Briot-Ruffini, com o objetivo de minimizar os cálculos necessários, permitindo maior precisão.

Algoritmo de Briot-Ruffini.

Para se calcular o valor de um polinômio num ponto x0 , faz-se a divisão de P(x) por x – x0 e acha-se o resto R, da divisão.
R = p(x0) .

Vejamos: seja Q(x) o quociente da divisão de P(x) por $x - x_0$.
Tem-se: $P(x) = (x - x_0)\, Q(x) + R$.

$P(x_0) = (x_0 - x_0)\, Q(x_0) + R$. Logo: $R = P(x_0)$.

Seja o dividendo $P(x) = a_4\, \mathbf{x^4} + a_3\, \mathbf{x^3} + a_2\, \mathbf{x^2} + a_1\, x + a_0$

e o quociente $Q(x) = b_4\, \mathbf{x^3} + b_3\, \mathbf{x^2} + b_2\, x + b_1$, sendo R o resto.

$P(x) = (x - x_0)\, Q(x) + R$, logo:

$a_4\, \mathbf{x^4} + a_3\, \mathbf{x^3} + a_2\, \mathbf{x^2} + a_1\, x + a_0 = (x - x_0)\, (b_4\, \mathbf{x^3} + b_3\, \mathbf{x^2} + b_2\, x + b_1) + R =$
$= b_4\, \mathbf{x^4} + (b_3 - x_0\, b_4)\, \mathbf{x^3} + (b_2 - x_0\, b_3)\, \mathbf{x^2} + (b_1 - x_0\, b_2)\, x + (R - x_0\, b_1)$

Tratando-se de identidade de polinômios, pois essa igualdade vale para qualquer valor de x , tem-se:

$b_4 = a_4$
$b_3 - x_0\, b_4 = a_3$ ou $b_3 = a_3 + x_0 b_4$
$b_2 - x_0\, b_3 = a_2$ ou $b_2 = a_2 + x_0 b_3$
$b_1 - x_0\, b_2 = a_1$ ou $b_1 = a_1 + x_0 b_2$
$R - x_0\, b_1 = a_0$ ou $R = a_0 + x_0 b_1$

	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
x_0	b_4	b_3	b_2	b_1	R

Dessa forma tem-se o quociente Q(x) e o valor de $P(x_0) = R$.Cálculo das raízesVoltemos ao cálculo das raízes do polinômio, pelo método de Newton-Raphson.Partindo de x_0 , vamos calcular $x_1 = x_0 - P(x_0)/P'(x_0)$, onde $P(x_0)$ e $P'(x_0)$ serão calculados usando-se Briot-Ruffini.
Entretanto, lembrando que $P(x) = (x-x_0)Q(x) + R$, tem-se que :
$P'(x) = (x-x_0)Q'(x) + Q(x)$ e logo, $P'(x_0) = (x_0 - x_0)Q'(x_0) + Q(x_0) = Q(x_0)$
Assim, $P'(x_0) = Q(x_0)$.
Logo, $x_1 = x_0 - P(x_0)/Q(x_0)$.
Quando se calcula $R = P(x_0)$, logo abaixo da linha está o Q(x). Assim, basta repetir a operação que se fez com o P(x), para o Q(x), cujo grau é o de P(x) menos 1, e se terá, à direita,

$R^* = Q(x_0) = P'(x_0)$, da mesma maneira como se calculou o R, anterior.

	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
x_0	b_4	b_3	b_2	b_1	R
x_0	c_4	c_3	c_2	R*	

Assim, $x_1 = x_0 - R/R^*$.

Repetindo-se o processo, tem-se: $x_{i+1} = x_i - R / R^*$, até que $| x_{i+1} - x_i | < e$, onde e é a tolerância.
Este método para cálculo de raízes de polinômios, usando-se o algoritmo de Briot-Ruffini, associado ao método de Newton-Raphson, recebe o nome de Método de Birge-Vieta.Vejamos um exemplo numérico:

Calcular as raízes reais de $P(x) = \mathbf{x^3} - 6\mathbf{x^2} - 45x + 50 = 0$

Seja $x_0 = 0$

	1	-6	-45	50
0	1	-6	-45	R=50
0	1	-6	R*=-45	

$x_1 = 0 - 50 / (-45) = 1{,}11$

	1	-6	-45	50
1,11	1	-4,89	-50,43	R=-5,98
1,11	1	-3,78	R*=-54,63	

$x_2 = 1{,}11 - (-5{,}98)/(-54{,}63) = 1{,}00$

	1	-6	-45	50
1,00	1	-5	-50	R=0
1,00	1			

Sendo R= 0, a primeira raiz vale 1,00.

r_1= 1,00

Na verdade, não se tinha chegado a exatamente R = 1,00, mas a R = 1,00058, que, sendo aproximado para duas casas, vale 1,00.
Por outro lado, se colocássemos 1,00058 o valor de P(1,00058) não daria exatamente 0, mas - 0,0023.
Neste caso, os números foram escolhidos para que dessem resultados próximos a valores inteiros, daí o 1,00.
Na vida real, isso raramente acontece, os valores serão fracionários e os resultados não serão exatos.

Vamos procurar as duas outras raízes.

Sendo P(x) = $(x-x_i)$ Q(x) + R, quando R $\approx$ 0 , tem-se que $r_1 \approx x_i$. Chegamos à primeira raiz.

Assim, P(x) $\approx$ (x – r_1) Q(x).
As demais raízes de P(x) serão raízes de Q(x), tem será um polinômio 1 grau inferior a P(x).
Resta procurar as raízes de Q(x) que teremos as demais raízes de P(x).
Tomam-se os coeficiente de Q(x) e passamos esses coeficientes para a linha de cima do quadro de Briot-Ruffini e recomeçamos.

	1	-5	-50
1,00	1	-4	R = -54
1,00	1	R* = -3	

Toma-se como x_0 o valor encontrado para a raiz, isto é: 1,00 .
x_1 = 1,00 – (-54) / (-3) = -17,00

	1	-5	-50
-17,00	1	-22,00	R = 324,00
-17,00	1	R* = -39,00	

x_2 = -17,00 – 324,00/(-39,00) = -8,69

	1	-5	-50
-8,69	1	-13,69	R = 68,97
-8,69	1	R* = -22,38	

x_3 = -8,69 – 68,97 / (-22,38) = -5,61

	1	-5	-50
-5,61	1	-10,61	R = 9,53
-5,61	1	R* = -16,22	

x_4 = -5,61 – 9,53 / (-16,22) = -5,02

	1	-5	-50
-5,02	1	-10,02	R = 0,30
-5,02	1	R* = -15,04	

x_4 = -5,02 – 0,30 / (-15,04) = -5,00

	1	-5	-50
-5,00	1	-10,00	R = 0,00
-5,00	1		

r_2 = -5,00

A última raiz está no polinômio que sobrou em Q(x), isto é: x – 10,0 = 0 .

	1	-10,00
-5,00	1	R = -15,00
-5,00	R* = 1	

Toma-se x_0 = -5,0 .
x_1 = -5,0 – (-15,00) / 1 = 10,00

	1	-10,00
10,00	1	R = 0,00
10,00	1	

Logo r_3 = 10,00

As três raízes são: **- 5 , 1 e 10 .**

Se você tiver dúvidas sobre a matéria, meu e-mail é:

raymundo.oliveira@terra.com.br

Home | Programa |
Exercícios | Provas |
Professor | Links |