

# Cálculo Numérico - IME/UERJ

## Lista de Exercícios 3

### Sistemas Lineares - Métodos diretos e iterativos

1. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Resolva o sistema  $Ax = b$  usando decomposição  $LU$  para:

(i)  $b = (2, 1)^t$ ;

(ii)  $b = (1, -1)^t$ .

(b) Ache a inversa de  $A$ , ou seja,  $A^{-1}$ , usando decomposição  $LU$ .

2. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule  $A^{-1}$  usando fatoração  $LU$ .

(b) É possível calcular  $A^{-1}$  usando fatoração  $LU$  usando pivoteamento parcial?  
No caso afirmativo, calculá-la.

3. Sejam a matriz  $A$  e o vetor  $b$  dados por:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -7 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Resolva o sistema linear  $Ax = b$  usando fatoração  $LU$  com pivoteamento parcial.

4. Tente resolver o seguinte sistema pela eliminação de Gauss. O que acontece? O que se pode concluir?

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 8 \\ 4x + 2y - 3z = -1 \\ 6x + 7y - 10z = -10 \end{cases}$$

5. Dado o sistema:

$$\begin{cases} 2y + 5z = 9 \\ x - 3y + z = 5 \\ 2.1x + y + z = 3 \end{cases}$$

É possível resolvê-lo usando o método de Gauss? Justifique a resposta. No caso afirmativo aplique o algoritmo, caso contrário use o método de Gauss com pivoteamento parcial.

6. Faça o gráfico do seguinte sistema linear

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ -x + 2y = 2 \end{cases}$$

e resolva pelos métodos:

- (a) Gauss-Jacobi com tolerância  $\epsilon = 0.04$ . Marque as iterações no gráfico.
- (b) Gauss-Seidel com tolerância  $\epsilon = 0.04$ . Marque as iterações no gráfico e compare com o item (a).

7. Dado o sistema

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Verifique se o Critério de Sassenfeld é satisfeito.
- (b) Resolva por Gauss-Seidel, se possível, com tolerância  $\epsilon \leq 10^{-4}$ .

8. Dado o sistema:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 5 \\ 2y + 5z = 9 \\ 2.1x + y + z = 3 \end{cases}$$

Calcule, pelo método de Gauss-Seidel uma primeira aproximação  $X^{(1)}$ , partindo de  $X^{(0)} = (0, 0, 0)^t$  e usando o sistema de forma tal que a convergência do método esteja garantida.

9. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 & = 1 \\ 2x_1 - x_2 & = 1 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 & = 1 \\ -x_3 + 2x_4 & = 1 \end{cases}$$

- (a) Mostre que este sistema não satisfaz o Critério das Linhas.
- (b) Mostre que este sistema não satisfaz o Critério de Sassenfeld.
- (c) O que se pode afirmar sobre a convergência dos métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel quando aplicados a este sistema?
- (d) Mostre que o sistema obtido permutando-se as duas primeiras equações satisfaz o Critério de Sassenfeld.
- (e) Usando o método de Gauss-Seidel, determine a solução aproximada do sistema com a permutação sugerida no item anterior e erro

$$\|x^{k+1} - x^k\|_\infty = \max_{i=1,\dots,4} |x_i^{k+1} - x_i^k| \leq \epsilon = 1 \cdot 10^{-3}$$

10. Encontre o valor do maior inteiro  $k$  positivo tal que no sistema linear abaixo fique garantida a convergência do método de Gauss-Seidel pelo critério de Sassenfeld. Justifique.

$$\begin{cases} 7x_1 + kx_2 - 2x_3 & = 5 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 & = 5 \\ -x_1 + x_2 + kx_3 & = 5 \end{cases}$$