CÁLCULO NUMÉRICO
UERJ

Interpolação Polinomial - Forma de Newton

Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br
IME-UERJ

Sumário

1. Forma de Newton
   - Operador diferenças divididas
   - Construção da tabela de diferenças divididas
2. Erro de interpolação
   - Estimativa do erro para $f(x)$ conhecido
   - Estimativa do erro para $f(x)$ desconhecido usando Forma de Newton
3. Bibliografia

Forma de Lagrange

Vimos anteriormente que a forma de Lagrange é dada por

$$P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \ldots + y_n L_n(x),$$

onde definimos $y_k = f(x_k)$ e as funções base $L_k(x)$, para $k = 0, 1, \ldots, n$, por:

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)} = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i},$$

onde

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq k, \\ 1 & \text{se } i = k. \end{cases}$$

Desvantagem: ao adicionar novos pontos de interpolação, deveremos recalcular os polinômios $L_k(x)$.

Forma de Lagrange

Vimos anteriormente que a forma de Lagrange é dada por

$$P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \ldots + y_n L_n(x),$$

onde definimos $y_k = f(x_k)$ e as funções base $L_k(x)$, para $k = 0, 1, \ldots, n$, por:

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)} = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i},$$

onde

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq k, \\ 1 & \text{se } i = k. \end{cases}$$

Desvantagem: ao adicionar novos pontos de interpolação, deveremos recalcular os polinômios $L_k(x)$.

Exemplo

Dada a tabela:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

Obter $f(0.2749)$ **usando interpolação quadrática de Lagrange.**

O exercício pede para achar uma aproximação $f(0.2749) \approx P_2(0.2749)$.

$\Downarrow x = 0.2749$

x	0	0.1	$x_0 = 0.2$		$x_1 = 0.3$	$x_2 = 0.4$	0.5
$f(x)$	1	1.1052	1.2214	?	1.3499	1.4918	1.6487

$\Uparrow f(0.2749) = ?$

Devemos escolher três pontos da tabela x_0, x_1, x_2 tais que x_0 esteja mais próximo de 0.2749 e seja menor que 0.2749.

Neste exemplo, $x_0 = 0.2$, $x_1 = 0.3$, $x_2 = 0.4$.

Exemplo

Dada a tabela:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

Obter $f(0.2749)$ **usando interpolação quadrática de Lagrange**.

O exercício pede para achar uma aproximação $f(0.2749) \approx P_2(0.2749)$.

$\Downarrow x = 0.2749$

x	0	0.1	$x_0 = 0.2$		$x_1 = 0.3$	$x_2 = 0.4$	0.5
$f(x)$	1	1.1052	1.2214	?	1.3499	1.4918	1.6487

$\Uparrow f(0.2749) = ?$

Devemos escolher três pontos da tabela x_0, x_1, x_2 tais que x_0 esteja mais próximo de 0.2749 e seja menor que 0.2749.

Neste exemplo, $x_0 = 0.2$, $x_1 = 0.3$, $x_2 = 0.4$.

Exemplo

A base de Lagrange será formada pelos seguintes polinômios de grau 2:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0.3)(x - 0.4)}{(0.2 - 0.3)(0.2 - 0.4)}$$

$$\Rightarrow L_0(0.2749) = \frac{(0.2749 - 0.3)(0.2749 - 0.4)}{(0.2 - 0.3)(0.2 - 0.4)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 0.2)(x - 0.4)}{(0.3 - 0.2)(0.3 - 0.4)}$$

$$\Rightarrow L_1(0.2749) = \frac{(0.2749 - 0.2)(0.2749 - 0.4)}{(0.3 - 0.2)(0.3 - 0.4)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 0.2)(x - 0.3)}{(0.4 - 0.2)(0.4 - 0.3)}$$

$$\Rightarrow L_2(0.2749) = \frac{(0.2749 - 0.2)(0.2749 - 0.3)}{(0.4 - 0.2)(0.4 - 0.3)}$$

Exemplo

Assim, obtemos:

$P_2(0.2749) = L_0(0.2749)f(0.2) + L_1(0.2749)f(0.3) + L_2(0.2749)f(0.4)$

$P_2(0.2749) = 1.3164$.

Mas, e para obter, por exemplo, $f(0.2749)$ usando **interpolação cúbica**?

Adicionamos o nó $x_3 = 0.5$ ao conjunto de nós de interpolação e obtemos:
$x_0 = 0.2$, $x_1 = 0.3$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.5$.

Porém, não poderemos mais reaproveitar $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$ calculados na interpolação quadrática, pois são **polinômios de grau** 2.

Exemplo

Assim, obtemos:

$P_2(0.2749) = L_0(0.2749)f(0.2) + L_1(0.2749)f(0.3) + L_2(0.2749)f(0.4)$

$P_2(0.2749) = 1.3164$.

Mas, e para obter, por exemplo, $f(0.2749)$ usando **interpolação cúbica**?

Adicionamos o nó $x_3 = 0.5$ ao conjunto de nós de interpolação e obtemos:
$x_0 = 0.2$, $x_1 = 0.3$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.5$.

Porém, não poderemos mais reaproveitar $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$ calculados na interpolação quadrática, pois são **polinômios de grau** 2.

Exemplo

Agora, deveremos recalcular os polinômios da base, que são de **grau** 3:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \frac{(x - 0.3)(x - 0.4)(x - 0.5)}{(0.2 - 0.3)(0.2 - 0.4)(0.2 - 0.5)}$$

$$\Rightarrow L_0(0.2749) = \frac{(0.2749 - 0.3)(0.2749 - 0.4)(0.2749 - 0.5)}{(0.2 - 0.3)(0.2 - 0.4)(0.2 - 0.5)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{(x - 0.2)(x - 0.4)(x - 0.5)}{(0.3 - 0.2)(0.3 - 0.4)(0.3 - 0.5)}$$

$$\Rightarrow L_1(0.2749) = \frac{(0.2749 - 0.2)(0.2749 - 0.4)(0.2749 - 0.5)}{(0.3 - 0.2)(0.3 - 0.4)(0.3 - 0.5)}$$

Exemplo

Agora, deveremos recalcular os polinômios da base, que são de **grau** 3:

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{(x - 0.2)(x - 0.3)(x - 0.5)}{(0.4 - 0.2)(0.4 - 0.3)(0.4 - 0.5)}$$

$$\Rightarrow L_2(0.2749) = \frac{(0.2749 - 0.2)(0.2749 - 0.3)(0.2749 - 0.5)}{(0.4 - 0.2)(0.4 - 0.3)(0.4 - 0.5)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(x - 0.2)(x - 0.3)(x - 0.4)}{(0.5 - 0.2)(0.5 - 0.3)(0.5 - 0.4)}$$

$$\Rightarrow L_2(0.2749) = \frac{(0.2749 - 0.2)(0.2749 - 0.3)(0.2749 - 0.4)}{(0.5 - 0.2)(0.5 - 0.3)(0.5 - 0.4)}$$

Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} P_3(0.2749) = {} & L_0(0.2749)f(0.2) + L_1(0.2749)f(0.3) + L_2(0.2749)f(0.4) \\ & + L_3(0.2749)f(0.5) = 1.3164 \end{aligned}$$

A vantagem da próxima forma de interpolação, **Forma de Newton**, é que podemos adicionar novos pontos de dados ao polinômio interpolador sem a necessidade de recalcular todo o polinômio.

Exemplo

Agora, deveremos recalcular os polinômios da base, que são de **grau** 3:

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{(x - 0.2)(x - 0.3)(x - 0.5)}{(0.4 - 0.2)(0.4 - 0.3)(0.4 - 0.5)}$$

$$\Rightarrow L_2(0.2749) = \frac{(0.2749 - 0.2)(0.2749 - 0.3)(0.2749 - 0.5)}{(0.4 - 0.2)(0.4 - 0.3)(0.4 - 0.5)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(x - 0.2)(x - 0.3)(x - 0.4)}{(0.5 - 0.2)(0.5 - 0.3)(0.5 - 0.4)}$$

$$\Rightarrow L_2(0.2749) = \frac{(0.2749 - 0.2)(0.2749 - 0.3)(0.2749 - 0.4)}{(0.5 - 0.2)(0.5 - 0.3)(0.5 - 0.4)}$$

Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} P_3(0.2749) = {} & L_0(0.2749)f(0.2) + L_1(0.2749)f(0.3) + L_2(0.2749)f(0.4) \\ & + L_3(0.2749)f(0.5) = 1.3164 \end{aligned}$$

A vantagem da próxima forma de interpolação, **Forma de Newton**, é que podemos adicionar novos pontos de dados ao polinômio interpolador sem a necessidade de recalcular todo o polinômio.

Forma de Newton

A forma de Newton para um polinômio de grau n que interpola uma função $f(x)$ em $n+1$ pontos distintos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, ..., $(x_n, f(x_n))$ é dada por:

$$P_n(x) = d_0 N_0(x) + d_1 N_1(x) + d_2 N_2(x) + \ldots + d_n N_n(x),$$

onde as funções bases são dadas por:

$$
\begin{aligned}
N_0(x) &= 1;\\
N_1(x) &= x - x_0;\\
N_2(x) &= (x - x_0)(x - x_1);\\
N_3(x) &= (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2);\\
&\ldots\\
N_n(x) &= (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

e os coeficientes d_k, para $k = 0, 1, \ldots, n$, são as **diferenças divididas de ordem k.**

Forma de Newton

Os coeficientes d_k são calculados usando o **operador diferenças divididas**, definido por:

$d_0 = f[x_0] = f(x_0)$ (Ordem zero)

$$d_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \text{ (Ordem 1)}$$

$$d_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

(Ordem 2)

$$d_3 = f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} \text{ (Ordem 3)}$$

$\ldots$

$$d_n = f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \text{ (Ordem n)}$$

Forma de Newton

A melhor maneira de calcular as diferenças divididas $d_0, d_1, \ldots, d_n$ é construindo a seguinte tabela:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	...	Ordem n
x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$			
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		
		$f[x_2, x_3]$		(...)	$f[x_0, x_1, ...x_n]$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$		
		$f[x_3, x_4]$			
...	...	...	...	...	...
			$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	...	
		$f[x_{n-1}, x_n]$		...	
x_n	$f[x_n]$			...	

Forma de Newton

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	...	Ordem n
x_0	$f[x_0] = d_0$				
		$f[x_0, x_1] = d_1$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2] = d_2$		
		$f[x_1, x_2]$			
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		
		$f[x_2, x_3]$		(...)	$f[x_0, x_1, ...x_n] = d_n$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$		
		$f[x_3, x_4]$			
...	...	...	...	...	...
			$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	...	
		$f[x_{n-1}, x_n]$		...	
x_n	$f[x_n]$			...	

$$P_n(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + d_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$
$$+ \ldots + d_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Forma de Newton

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	...	Ordem n
x_0	$f[x_0] = d_0$				
		$f[x_0, x_1] = d_1$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2] = d_2$		
		$f[x_1, x_2]$			
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		
		$f[x_2, x_3]$		(...)	$f[x_0, x_1, ...x_n] = d_n$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$		
		$f[x_3, x_4]$			
...	...	...	...	...	...
			$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	...	
		$f[x_{n-1}, x_n]$		...	
x_n	$f[x_n]$			...	

$$
\begin{aligned}
P_n(x) = {} & d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + d_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
& + \ldots + d_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

Forma de Newton

Retornando ao exemplo, dada a tabela:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

Obter $f(0.2749)$ usando interpolação quadrática de Newton.

Vamos construir a seguinte tabela de diferenças divididas:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
0	1			
0.1	1.1052			
0.2	1.2214			
0.3	1.3499			
0.4	1.4918			
0.5	1.6487			

Forma de Newton

Retornando ao exemplo, dada a tabela:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

Obter $f(0.2749)$ **usando interpolação quadrática de Newton.**
Vamos construir a seguinte tabela de diferenças divididas:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
0	1			
0.1	1.1052			
0.2	1.2214			
0.3	1.3499			
0.4	1.4918			
0.5	1.6487			

Forma de Newton

Retornando ao exemplo, dada a tabela:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

Obter $f(0.2749)$ **usando interpolação quadrática de Newton.**
Vamos construir a seguinte tabela de diferenças divididas:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
0	1			
		1.0520		
0.1	1.1052			
0.2	1.2214			
0.3	1.3499			
0.4	1.4918			
0.5	1.6487			

Forma de Newton

Retornando ao exemplo, dada a tabela:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

Obter $f(0.2749)$ **usando interpolação quadrática de Newton.**

Vamos construir a seguinte tabela de diferenças divididas:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
0	1			
		1.0520		
0.1	1.1052			
		1.1620		
0.2	1.2214			
0.3	1.3499			
0.4	1.4918			
0.5	1.6487			

Forma de Newton

Retornando ao exemplo, dada a tabela:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

Obter $f(0.2749)$ **usando interpolação quadrática de Newton.**

Vamos construir a seguinte tabela de diferenças divididas:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
0	1			
		1.0520		
0.1	1.1052			
		1.1620		
0.2	1.2214			
		1.2850		
0.3	1.3499			
0.4	1.4918			
0.5	1.6487			

Forma de Newton

Retornando ao exemplo, dada a tabela:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

Obter $f(0.2749)$ **usando interpolação quadrática de Newton.**

Vamos construir a seguinte tabela de diferenças divididas:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
0	1			
		1.0520		
0.1	1.1052			
		1.1620		
0.2	1.2214			
		1.2850		
0.3	1.3499			
		1.4190		
0.4	1.4918			
0.5	1.6487			

Forma de Newton

Retornando ao exemplo, dada a tabela:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

Obter $f(0.2749)$ **usando interpolação quadrática de Newton.**

Vamos construir a seguinte tabela de diferenças divididas:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
0	1			
		1.0520		
0.1	1.1052			
		1.1620		
0.2	1.2214			
		1.2850		
0.3	1.3499			
		1.4190		
0.4	1.4918			
		1.5690		
0.5	1.6487			

Forma de Newton

Retornando ao exemplo, dada a tabela:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

Obter $f(0.2749)$ **usando interpolação quadrática de Newton.**
Vamos construir a seguinte tabela de diferenças divididas:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
0	1			
		1.0520		
0.1	1.1052		$0,5500$	
		1.1620		
0.2	1.2214			
		1.2850		
0.3	1.3499			
		1.4190		
0.4	1.4918			
		1.5690		
0.5	1.6487			

Forma de Newton

Retornando ao exemplo, dada a tabela:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

Obter $f(0.2749)$ **usando interpolação quadrática de Newton.**

Vamos construir a seguinte tabela de diferenças divididas:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
0	1			
		1.0520		
0.1	1.1052		0,5500	
		1.1620		
0.2	1.2214		0.6150	
		1.2850		
0.3	1.3499			
		1.4190		
0.4	1.4918			
		1.5690		
0.5	1.6487			

Forma de Newton

Retornando ao exemplo, dada a tabela:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

Obter $f(0.2749)$ **usando interpolação quadrática de Newton.**
Vamos construir a seguinte tabela de diferenças divididas:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
0	1			
		1.0520		
0.1	1.1052		$0,5500$	
		1.1620		
0.2	1.2214		0.6150	
		1.2850		
0.3	1.3499		0.6700	
		1.4190		
0.4	1.4918			
		1.5690		
0.5	1.6487			

Forma de Newton

Retornando ao exemplo, dada a tabela:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

Obter $f(0.2749)$ **usando interpolação quadrática de Newton.**

Vamos construir a seguinte tabela de diferenças divididas:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
0	1			
		1.0520		
0.1	1.1052		0, 5500	
		1.1620		
0.2	1.2214		0.6150	
		1.2850		
0.3	1.3499		0.6700	
		1.4190		
0.4	1.4918		0.7500	
		1.5690		
0.5	1.6487			

Forma de Newton

Retornando ao exemplo, dada a tabela:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

Obter $f(0.2749)$ **usando interpolação quadrática de Newton.**

Vamos construir a seguinte tabela de diferenças divididas:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
0	1			
		1.0520		
0.1	1.1052		$0,5500$	
		1.1620		0.2167
0.2	1.2214		0.6150	
		1.2850		
0.3	1.3499		0.6700	
		1.4190		
0.4	1.4918		0.7500	
		1.5690		
0.5	1.6487			

Forma de Newton

Retornando ao exemplo, dada a tabela:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

Obter $f(0.2749)$ **usando interpolação quadrática de Newton.**
Vamos construir a seguinte tabela de diferenças divididas:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
0	1			
		1.0520		
0.1	1.1052		$0,5500$	
		1.1620		0.2167
0.2	1.2214		0.6150	
		1.2850		0.1833
0.3	1.3499		0.6700	
		1.4190		
0.4	1.4918		0.7500	
		1.5690		
0.5	1.6487			

Forma de Newton

Retornando ao exemplo, dada a tabela:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

Obter $f(0.2749)$ **usando interpolação quadrática de Newton.**
Vamos construir a seguinte tabela de diferenças divididas:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
0	1			
		1.0520		
0.1	1.1052		0,5500	
		1.1620		0.2167
0.2	1.2214		0.6150	
		1.2850		0.1833
0.3	1.3499		0.6700	
		1.4190		0.2667
0.4	1.4918		0.7500	
		1.5690		
0.5	1.6487			

Forma de Newton

Retornando ao exemplo, dada a tabela:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

Note que 0.2749 está entre os nós de interpolação $x_0 = 0.2$ e $x_1 = 0.3$.
Logo, os nós de interpolação escolhidos são: $x_0 = 0.2$, $x_1 = 0.3$, $x_2 = 0.4$.

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
0	1			
		1.0520		
0.1	1.1052		$0,5500$	
		1.1620		0.2167
$x_0 = 0.2$	$d_0 = 1.2214$		0.6150	
$\rightarrow 0.2749$		$d_1 = 1.2850$		0.1833
$x_1 = 0.3$	1.3499		$d_2 = 0.6700$	
		1.4190		0.2667
$x_2 = 0.4$	1.4918		0.7500	
		1.5690		
0.5	1.6487			

Forma de Newton

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
0	1			
		1.0520		
0.1	1.1052		0, 5500	
		1.1620		0.2167
$x_0 = 0.2$	$d_0 = 1.2214$		0.6150	
$\rightarrow 0.2749$		$d_1 = 1.2850$		0.1833
$x_1 = 0.3$	1.3499		$d_2 = 0.6700$	
		1.4190		0.2667
$x_2 = 0.4$	1.4918		0.7500	
		1.5690		
0.5	1.6487			

Logo, o polinômio de grau 2 na Forma de Newton é dado por:

$$P_2(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(0.2749) \approx P_2(0.2749) &= 1.2214 + 1.2850(0.2749 - 0.2) \\ &+ 0.6700(0.2749 - 0.2)(0.2749 - 0.3) \\ &\approx 1.3164 \end{aligned}$$

Erro de Interpolação

Teorema (Erro de interpolação para polinômio de grau n, $P_n(x)$)

Sejam $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$, $(n+1)$ *pontos.*

Seja $f(x)$ *com derivadas até ordem* $(n+1)$ *para todo* $x \in [x_0, x_n]$

O erro em qualquer ponto $x \in [x_0, x_n]$ *é dado por*

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!},$$

onde $\xi_x \in (x_0, x_n)$.

Erro de Interpolação

Corolário: Limitante superior para o erro de interpolação de $P_n(x)$

$$|E_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)| \frac{M_{n+1}}{(n+1)!},$$

onde $M_{n+1} = \max\limits_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|$

Erro de Interpolação

Retornando ao exemplo, dada a tabela:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x) = e^x$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

Obter o limitante superior do erro da aproximação $f(0.2749) \approx P_2(0.2749)$.

O limitante superior do erro de interpolação para um polinômio de grau 2 é dado por:

$$|E_2(x)| = |f(x) - P_2(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)| \frac{M_3}{3!},$$

onde $M_2 = \max\limits_{x \in [x_0, x_2]} |f'''(x)|$

Erro de Interpolação

Retornando ao exemplo, dada a tabela:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x) = e^x$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

Obter o limitante superior do erro da aproximação
$f(0.2749) \approx P_2(0.2749)$.

O limitante superior do erro de interpolação para um polinômio de grau 2 é dado por:

$$|E_2(x)| = |f(x) - P_2(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)| \frac{M_3}{3!},$$

onde $M_2 = \max\limits_{x \in [x_0, x_2]} |f'''(x)|$

Erro de Interpolação

Exemplo:

x	0	0.1	$x_0 = 0.2$	$\Downarrow$ 0.2749	$x_1 = 0.3$	$x_2 = 0.4$	0.5
e^x	1	1.1052	1.2214		1.3499	1.4918	1.6487

Logo,

$$|E_2(0.2749)| = |f(0.2749) - P_2(0.2749)|$$
$$\leq |(0.2749 - 0.2)(0.2749 - 0.3)(0.2749 - 0.4)| \frac{M_3}{3!},$$

onde

$$M_3 = \max_{x \in [0.2, 0.4]} |f'''(x)| = \max_{x \in [0.2, 0.4]} |e^x| = \max\{|e^{0.2}|, |e^{0.4}|\} \approx 1.4918.$$

$$\Rightarrow |E_2(0.2749)| \leq |(0.2749 - 0.2)(0.2749 - 0.3)(0.2749 - 0.4)| \frac{1.4918}{6}$$
$$\leq 5.8475 \times 10^{-5}.$$

Erro de Interpolação - Forma de Newton

Estimativa para o erro

Na maioria das vezes, a função $f(x)$ é dada somente na forma de tabela.

Imagine que no exemplo anterior, não soubéssemos que $f(x) = e^x$.
Como vamos calcular o erro de interpolação sem essa informação?

Na forma de Newton, é feita a aproximação:

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \approx \text{máx} \mid \text{diferenças divididas de ordem } (n+1) \mid$$

no intervalo $[x_0, x_n]$.

Estimativa de erro de interpolação para $P_n(x)$ - Forma de Newton

$$|E_n(x)| \approx |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|(\text{máx}|\text{diferenças divididas de ordem } n+1|)$$

Erro de Interpolação - Forma de Newton

Estimativa para o erro

Na maioria das vezes, a função $f(x)$ é dada somente na forma de tabela.

Imagine que no exemplo anterior, não soubéssemos que $f(x) = e^x$.
Como vamos calcular o erro de interpolação sem essa informação?

Na forma de Newton, é feita a aproximação:

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \approx \text{máx} \mid \text{diferenças divididas de ordem } (n+1) \mid$$

no intervalo $[x_0, x_n]$.

Estimativa de erro de interpolação para $P_n(x)$ - Forma de Newton

$$|E_n(x)| \approx |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|(\text{máx}|\text{diferenças divididas de ordem } n+1|)$$

Erro de Interpolação - Forma de Newton

Estimativa para o erro

Na maioria das vezes, a função $f(x)$ é dada somente na forma de tabela.

Imagine que no exemplo anterior, não soubéssemos que $f(x) = e^x$.
Como vamos calcular o erro de interpolação sem essa informação?

Na forma de Newton, é feita a aproximação:

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \approx \text{máx} \mid \text{diferenças divididas de ordem } (n+1) \mid$$

no intervalo $[x_0, x_n]$.

Estimativa de erro de interpolação para $P_n(x)$ - Forma de Newton

$$|E_n(x)| \approx |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|(\text{máx}|\text{diferenças divididas de ordem } n+1|)$$

Forma de Newton

Retornando ao exemplo:

Queremos encontrar a estimativa de erro $E_2(0.2749)$.

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
0	1			
		1.0520		
0.1	1.1052		0,5500	
		1.1620		0.2167
0.2	1.2214		0.6150	
		1.2850		0.1833
0.3	1.3499		0.6700	
		1.4190		0.2667
0.4	1.4918		0.7500	
		1.5690		
0.5	1.6487			

Logo,

$|E_2(x)| \approx |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)|(\text{máx}|\text{diferenças divididas de ordem 3}|)$

$$\Rightarrow |E_2(0.2749)| \approx |(0.2749 - 0.2)(0.2749 - 0.3)(0.2749 - 0.4)||0.2667|)$$
$$\approx 6.2716 \times 10^{-5}$$

Interpolação Inversa

Condição: f tem que ser uma função bijetiva. Ou seja, f possui inversa.

$y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y) = g(y)$

Ou seja, fazemos $x = g(y) = P_n(y)$

No exemplo que vimos, achamos uma aproximação para $f(0.2749) \approx P_2(0.2749)$.

x	0	0.1	$x_0 = 0.2$	0.2749	$x_1 = 0.3$	$x_2 = 0.4$	0.5
$f(x)$	1	1.1052	1.2214	1.3164	1.3499	1.4918	1.6487
				$\Uparrow f(0.2749)$			

Poderia ter sido pedida uma aproximação para x tal que $f(x) \approx 1.3164$. Basta trocar as linhas da tabela acima:

y	1	1.1052	$y_0 = 1.2214$	1.3164	$y_1 = 1.3499$	$y_2 = 1.4918$
$x = g(y)$	0	0.1	0.2	?	0.3	0.4

Interpolação Inversa

Condição: f tem que ser uma função bijetiva. Ou seja, f possui inversa.

$y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y) = g(y)$

Ou seja, fazemos $x = g(y) = P_n(y)$

No exemplo que vimos, achamos uma aproximação para $f(0.2749) \approx P_2(0.2749)$.

x	0	0.1	$x_0 = 0.2$	0.2749	$x_1 = 0.3$	$x_2 = 0.4$	0.5
$f(x)$	1	1.1052	1.2214	1.3164	1.3499	1.4918	1.6487

$\Uparrow f(0.2749)$

Poderia ter sido pedida uma aproximação para x tal que $f(x) \approx 1.3164$. Basta trocar as linhas da tabela acima:

y	1	1.1052	$y_0 = 1.2214$	1.3164	$y_1 = 1.3499$	$y_2 = 1.4918$
$x = g(y)$	0	0.1	0.2	?	0.3	0.4

Interpolação Inversa

Condição: f tem que ser uma função bijetiva. Ou seja, f possui inversa.

$y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y) = g(y)$

Ou seja, fazemos $x = g(y) = P_n(y)$

No exemplo que vimos, achamos uma aproximação para
$f(0.2749) \approx P_2(0.2749)$.

x	0	0.1	$x_0 = 0.2$	0.2749	$x_1 = 0.3$	$x_2 = 0.4$	0.5
$f(x)$	1	1.1052	1.2214	1.3164	1.3499	1.4918	1.6487
				$\Uparrow f(0.2749)$			

Poderia ter sido pedida uma aproximação para x tal que $f(x) \approx 1.3164$.
Basta trocar as linhas da tabela acima:

y	1	1.1052	$y_0 = 1.2214$	1.3164	$y_1 = 1.3499$	$y_2 = 1.4918$
$x = g(y)$	0	0.1	0.2	?	0.3	0.4

Interpolação Inversa

y	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
1	0			
1.1052	0.1			
1.2214	0.2			
1.3499	0.3			
1.4918	0.4			
1.6487	0.5			

Interpolação Inversa

y	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
1	0			
		0.9506		
1.1052	0.1			
1.2214	0.2			
1.3499	0.3			
1.4918	0.4			
1.6487	0.5			

Interpolação Inversa

y	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
1	0			
		0.9506		
1.1052	0.1			
		0.8606		
1.2214	0.2			
1.3499	0.3			
1.4918	0.4			
1.6487	0.5			

Interpolação Inversa

y	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
1	0			
		0.9506		
1.1052	0.1			
		0.8606		
1.2214	0.2			
		0.7782		
1.3499	0.3			
1.4918	0.4			
1.6487	0.5			

Interpolação Inversa

y	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
1	0			
		0.9506		
1.1052	0.1			
		0.8606		
1.2214	0.2			
		0.7782		
1.3499	0.3			
		0.7047		
1.4918	0.4			
1.6487	0.5			

Interpolação Inversa

y	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
1	0			
		0.9506		
1.1052	0.1			
		0.8606		
1.2214	0.2			
		0.7782		
1.3499	0.3			
		0.7047		
1.4918	0.4			
		0.6373		
1.6487	0.5			

Interpolação Inversa

y	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
1	0			
		0.9506		
1.1052	0.1		-0.4064	
		0.8606		
1.2214	0.2			
		0.7782		
1.3499	0.3			
		0.7047		
1.4918	0.4			
		0.6373		
1.6487	0.5			

Interpolação Inversa

y	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
1	0			
		0.9506		
1.1052	0.1		−0.4064	
		0.8606		
1.2214	0.2		−0.3366	
		0.7782		
1.3499	0.3			
		0.7047		
1.4918	0.4			
		0.6373		
1.6487	0.5			

Interpolação Inversa

y	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
1	0			
		0.9506		
1.1052	0.1		-0.4064	
		0.8606		
1.2214	0.2		-0.3366	
		0.7782		
1.3499	0.3		-0.2718	
		0.7047		
1.4918	0.4			
		0.6373		
1.6487	0.5			

Interpolação Inversa

y	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
1	0			
		0.9506		
1.1052	0.1		−0.4064	
		0.8606		
1.2214	0.2		−0.3366	
		0.7782		
1.3499	0.3		−0.2718	
		0.7047		
1.4918	0.4		−0.2255	
		0.6373		
1.6487	0.5			

Interpolação Inversa

y	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
1	0			
		0.9506		
1.1052	0.1		-0.4064	
		0.8606		0.1995
1.2214	0.2		-0.3366	
		0.7782		
1.3499	0.3		-0.2718	
		0.7047		
1.4918	0.4		-0.2255	
		0.6373		
1.6487	0.5			

Interpolação Inversa

y	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
1	0			
		0.9506		
1.1052	0.1		-0.4064	
		0.8606		0.1995
1.2214	0.2		-0.3366	
		0.7782		0.1678
1.3499	0.3		-0.2718	
		0.7047		
1.4918	0.4		-0.2255	
		0.6373		
1.6487	0.5			

Interpolação Inversa

y	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
1	0			
		0.9506		
1.1052	0.1		−0.4064	
		0.8606		0.1995
1.2214	0.2		−0.3366	
		0.7782		0.1678
1.3499	0.3		−0.2718	
		0.7047		0.1084
1.4918	0.4		−0.2255	
		0.6373		
1.6487	0.5			

Interpolação Inversa

y	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
1	0			
		0.9506		
1.1052	0.1		-0.4064	
		0.8606		0.1995
$y_0 = 1.2214$	$d_0 = 0.2$		-0.3366	
$\rightarrow 1.3164$		$d_1 = 0.7782$		0.1678
$y_1 = 1.3499$	0.3		$d_2 = -0.2718$	
		0.7047		0.1084
$y_2 = 1.4918$	0.4		-0.2255	
		0.6373		
1.6487	0.5			

Logo, o polinômio de grau 2 na Forma de Newton é dado por:

$$x = P_2(y) = d_0 + d_1(y - y_0) + d_2(y - y_0)(y - y_1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_2(1.3164) &= 0.2 + 0.7782(1.3164 - 1.2214) \\ &\quad - 0.2718(1.3164 - 1.2214)(1.3164 - 1.3499) \\ &\approx 0.2748 \end{aligned}$$

Interpolação Inversa

y	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
1	0			
		0.9506		
1.1052	0.1		-0.4064	
		0.8606		**0.1995**
$y_0 = 1.2214$	$d_0 = 0.2$		-0.3366	
$\rightarrow 1.3164$		$d_1 = 0.7782$		0.1678
$y_1 = 1.3499$	0.3		$d_2 = -0.2718$	
		0.7047		0.1084
$y_2 = 1.4918$	0.4		-0.2255	
		0.6373		
1.6487	0.5			

A estimativa de erro é dada por:

$$
\begin{aligned}
|E_2(1.3164)| &= |(1.3164 - 1.2214)(1.3164 - 1.3499)(1.3164 - 1.4918)||0.1995| \\
&\approx 1.1135 \times 10^{-4}
\end{aligned}
$$

Forma de Newton

Exercício:

Dada a tabela:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

(a) Obtenha uma aproximação para $f(0.2749)$ usando **interpolação cúbica de Newton**. Ou seja, calcule $P_3(0.2749)$.

(b) Obtenha uma estimativa para $E_3(0.2749)$.

Referências I

RUGGIERO, M.; LOPES, V.. **Cálculo Numérico**: Aspectos Teóricos e Computacionais. Pearson, 1996, 2a. Ed.

BURDEN, R.. **Numerical Analysis**. Brooks/Cole Pub Co, 1996, 6th Edition.