Cálculo Numérico - IME/UERJ

Lista de Exercícios 3 - Sistemas Lineares - Métodos diretos e iterativos

1. Tente resolver o seguinte sistema pela eliminação de Gauss. O que acontece? O que se pode concluir?

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 8 \\ 4x + 2y - 3z = -1 \\ 6x + 7y - 10z = -10 \end{cases}$$

2. Dado o sistema:

$$\begin{cases} 2y + 5z = 9 \\ x - 3y + z = 5 \\ 2.1x + y + z = 3 \end{cases}$$

É possível resolvê-lo usando o método de Gauss? Justifique a resposta. No caso afirmativo aplique o algoritmo, caso contrário use o método de Gauss com pivoteamento parcial.

3. Seja a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Resolva o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ usando decomposição $\mathbf{LU}$ para:
      (i) $\mathbf{b} = (2, 1)^T$;
      (ii) $\mathbf{b} = (1, -1)^T$.
   (b) Ache a inversa de $\mathbf{A}$, ou seja, A^{-1}, usando decomposição $\mathbf{LU}$.

4. Sejam a matriz $\mathbf{A}$ e o vetor $\mathbf{b}$ dados por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -6 & -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Agora, são pedidos os seguintes itens:

   (a) Determine as matrizes $\mathbf{L}$ e $\mathbf{U}$ da decomposição $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$.
   (b) Resolva o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ usando a fatoração $\mathbf{LU}$ encontrada no item (a).

5. Sejam a matriz $\mathbf{A}$ e o vetor $\mathbf{b}$ dados por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

   Agora, são pedidos os seguintes itens:

   (a) Determine as matrizes $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$ e $\mathbf{P}$ da decomposição $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$ usando pivoteamento parcial.

   (b) Resolva o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ usando a fatoração $\mathbf{LU}$ encontrada no item (b).

6. Faça o gráfico do seguinte sistema linear

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ -x + 2y = 2 \end{cases}$$

   e resolva pelos métodos:

   (a) Gauss-Jacobi com tolerância $\epsilon = 0.04$. Marque as iterações no gráfico.

   (b) Gauss-Seidel com tolerância $\epsilon = 0.04$. Marque as iterações no gráfico e compare com o item (a).

7. Considere o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ para:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -7 \\ 3 & -5 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Reordene as equações convenientemente de modo que haja garantia de convergência para o método de Gauss-Seidel através do Critério de Sassenfeld. Justifique.

   (b) Para o sistema reformulado no item (a), calcule apenas uma iteração usando o método de Gauss-Seidel a partir de $X^{(0)} = (0,26; 1,15; -0,59)^T$.

   (c) Determine o erro cometido na iteração do item (b) usando a norma do máximo.

8. Dado o sistema

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Verifique se o Critério de Sassenfeld é satisfeito.

(b) Resolva por Gauss-Seidel, se possível, com tolerância $\epsilon \leq 10^{-4}$.

9. Dado o sistema:

$$\begin{cases} x & - & 3y & + & z & = & 5 \\ & & 2y & + & 5z & = & 9 \\ 2.1x & + & y & + & z & = & 3 \end{cases}$$

Calcule, pelo método de Gauss-Seidel uma primeira aproximação $X^{(1)}$, partindo de $X^{(0)} = (0,0,0)^t$ e usando o sistema de forma tal que a convergência do método esteja garantida.

10. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & & & = & 1 \\ & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ & & & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \end{cases}$$

(a) Mostre que este sistema não satisfaz o Critério das Linhas.

(b) Mostre que este sistema não satisfaz o Critério de Sassenfeld.

(c) O que se pode afirmar sobre a convergência dos métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel quando aplicados a este sistema?

(d) Mostre que o sistema obtido permutando-se as duas primeiras equações satisfaz o Critério de Sassenfeld.

(e) Usando o método de Gauss-Seidel, determine a solução aproximada do sistema com a permutação sugerida no item anterior e erro na norma do máximo

$\|x^{k+1} - x^k\|_\infty = \max\limits_{i=1,\dots,4} |x_i^{k+1} - x_i^k| \leq \epsilon = 1 \cdot 10^{-3}$