Cálculo Numérico - IME/UERJ

Gabarito - Lista de Exercícios 3

Sistemas Lineares - Métodos diretos e iterativos

1. A última linha do sistema triangular é nula, portanto é satisfeita para qualquer valor de z, o que significa que o conjunto de soluções do sistema linear é infinito e está definido por:

   $S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = \frac{1}{16}(z + 13); y = \frac{1}{8}(11z - 17) \right\}$

2. Há necessidade de troca da primeira e terceira linhas.

   $(x, y, z) = (10/7, -5/3, 9/5) \approx (1,4286; -1,6667; 1,8000)$, usando 4 dígitos e arredondamento.

3. (a) (i) $X = (6/5, -1/5)^t$;

   (ii) $X = (-3/5, -2/5)^t$;

   (b)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 4/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

4. (a)

$$U = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 13/3 \end{bmatrix};$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -4/3 & 1 \end{bmatrix}$$

   (b) Devemos resolver o sistema linear $Ax = b$ com as matrizes L e U encontradas.

   No caso sem pivoteamento, temos $A = LU$. Assim,

$$Ax = b \Rightarrow LUx = b \Rightarrow \begin{cases} Ly = b & (1) \Rightarrow \text{Acho } y \\ Ux = y & (2) \Rightarrow \text{Acho } x \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5. (a) Devemos achar as matrizes L, U e P usando eliminação de Gauss **com pivoteamento parcial**.

$$U = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 15/4 \end{bmatrix};$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 3/4 & 1 \end{bmatrix};$$

$$P = P^{(1)}P^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) PARTE 2: Devemos resolver o sistema linear $Ax = b$ com as matrizes L, U e P encontradas.

No caso com pivoteamento, temos $PA = LU$. Assim,

$$Ax = b \Rightarrow PAx = Pb \Rightarrow LUx = Pb \Rightarrow \begin{cases} Ly &= Pb \quad (1) \Rightarrow \text{Acho } y \\ Ux &= y \quad (2) \Rightarrow \text{Acho } x \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/5 \\ -8/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}.$$

6. (a) $X = (0.3906, 1.2031)$;

(b) $X = (0.4023, 1.2012)$;

7. (a) **Resposta:** Devemos trocar a primeira e a terceira equações (ou a primeira e a terceira linhas da matriz A e do vetor b). Assim, obtemos:

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 0 \\ 2 & -4 & -7 \end{bmatrix}; \qquad b' = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Usando o Critério de Sassenfeld, obtemos $\beta = \max\left\{\frac{3}{4}, \frac{9}{20}, \frac{33}{70}\right\} = \frac{3}{4} < 1.$

Logo, com essa reordenação de equações, há garantia de convergência usando o método iterativo de Gauss-Seidel.

(b) **Resposta:** $X^{(1)} = (0,2575; 1,1545; -0,5861)^T$.

(c) **Resposta:** $4,5 \times 10^{-3}$.

8. (a) Sim.

(b) $X = (0.3636, 0.4545, 0.4545, 0.3636)^t$

9. Verifique que o Critério das Linhas é satisfeito.

Resolvendo o sistema pelo método de Gauss-Jacobi, uma primeira aproximação $X^{(1)}$, partindo de $X^{(0)} = (0,0,0)^t$, é dada por:

$X^{(1)} = (1.4286, -1.6667, 1.8000)^t$.

10. (a) $\alpha_1 = \dfrac{|2| + |-1| + |0|}{|1|} = \dfrac{2}{2.1} = 3 > 1 \Rightarrow$ Não satisfaz o Critério das Linhas.

(b) $\beta_1 = \alpha_1 = 3 > 1 \Rightarrow$ Não satisfaz o Critério de Sassenfeld.

(c) Resolvendo o sistema a partir de $X^{(0)} = (0,0,0,0)^t$, não há convergência em nenhum dos métodos.

(d) Permutando-se as duas primeiras equações para o sistema, o Critério de Sassenfeld é satisfeito (verifique).

(e) Resolvendo o sistema do item (d) a partir de $X^{(0)} = (0,0,0,0)^t$, obtemos a solução:

$X^* = (0.9052,\ 0.8150,\ 1.5413,\ 1.2706)^t$.