Cálculo Numérico - IME/UERJ

Lista de Exercícios 2

Série de Taylor e Raízes de funções

1. Numa calculadora aproxima-se o valor de $e^x$, para todo $x \in [-1, 1]$, pelo valor do polinomio de Taylor de grau 3, obtido através da expansão de $e^x$ em série de Taylor em torno do ponto $x_0 = 0$.
   (a) Qual a aproximação de $e^{0.5}$ fornecida pela calculadora?
   (b) Utilizando a expressão do erro cometido ao se aproximar a função $e^x$ pela sua expansão em série de Taylor, forneça um limitante superior para o erro cometido no item (a).

2. Seja $f(x) = \ln(x + 1)$.
   (a) Obtenha a série de Taylor ao redor de 0 para $f(x)$.
   (b) Obtenha o polinômio de Taylor de terceira ordem ao redor de 0 da função $f(x)$ do item anterior e calcule $P_3(0.5)$. Qual o erro verdadeiro cometido?
   (c) Encontre a expressão analítica para o erro de truncamento $R_3(x)$ e estime o erro máximo em módulo ao se usar $P_3(0.5)$ para aproximar $f(0.5)$. Mostre que o resultado é compatível com o erro que foi encontrado no item (b).
   (d) Determine o número mínimo de termos que deve ter o polinômio de Taylor para que $\ln(1.5)$ seja calculado com um erro de truncamento menor que $10^{-8}$.

3. Seja $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
   (a) Calcule a série de Taylor ao redor de 8.
   (b) Determine um limitante inferior e outro superior do erro de truncamento para o polinômio de Taylor de ordem 4 de $f(x)$ em $x = 10$ ao redor de 8.
   (c) Obtenha uma aproximação de 0.1 usando o polinômio de ordem 4 e verifique que o erro cometido fica entre os limites encontrados em (b).
   (d) Calcule a expressão binária de 0.1 a partir de (a).
   (e) Determine uma aproximação binária de 0.1 a partir de (b).
   (f) De que ordem deve ser o polinômio de Taylor para obter uma aproximação de $0,1$ com erro inferior a $10^{-8}$?

4. Calcule uma aproximação de $x^* = \sqrt[3]{25}$ com uma tolerância $\xi = 10^{-4}$ pelo método da Bisseção.

5. Determine uma aproximação da raiz da equação $x + \log(x) = 0$ com tolerância $\xi = 0.001$ pelo método da Bisseção no intervalo $[0.1, 0.6]$.

6. Considere o método da bisseção. Quantas iterações são necessárias para encontrar uma aproximação da solução de $x - 0,5(\text{sen}(x) + \cos(x)) = 0$ com 3 casas decimais corretas sendo $[0, 1]$ o intervalo inicial?

7. Considere o polinômio $p(x) = (x-1)(x-2,5)^2(x-4)^3$ Quais zeros não podem ser determinadas usando o método da bisseção? Justifique a sua resposta.

8. Determine um intervalo $[a, b]$ para iniciar o cálculo de $\ln(10)$ usando o método da bisseção. Explique. Quantas iterações são necessárias para obter $\ln(10)$ com erro menor ou igual a $10^{-3}$?

9. Determine um intervalo $(a, b)$ e uma função de iteração $\varphi(x)$ associada, de tal forma que $\forall x_0 \in (a, b)$, a função de iteração gere uma sequência convergente para a(s) raiz(es) de cada uma das funções abaixo, usando o método iterativo linear (MIL) com tolerancia $\xi \leq 1 \cdot 10^{-3}$ .
   (a) $f_1(x) = \sqrt{x} - e^{-x}$.
   (b) $f_2(x) = \ln(x) - x + 2$.
   (c) $f_3(x) = e^{x/2} - x^3$.
   (d) $f_4(x) = \text{sen}(x) - x^2$.
   (e) $f_5(x) = x/4 - \cos(x)$.

10. A equação $x^2 - 7x + 12 = 0$ tem 3 e 4 como raízes. Considere a função de iteração dada por $\varphi(x) = x^2 - 6x + 12$. Determine o intervalo $(a, b)$, onde para qualquer que seja $x_0$ escolhido a sequência $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge para a raiz $x = 3$. Mostre que a convergência é quadrática.

11. As funções de iterações $\varphi_1(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 4$ e $\varphi_2(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2.5x + 5$ geram sequências convergentes para a raiz $x = 2$, para qualquer aproximação inicial $x_0 \in (1.5, 3)$. Qual das duas funções geram sequências mais rapidamente convergentes para esta raiz? Justifique a resposta.

12. Para determinar a raiz quadrada de um número $c \geq 0$, basta resolver a equação $x^2 - c = 0$. E possível determinar sua raiz quadrada usando a função de iteração $\varphi(x) = c/x$? Justifique a resposta.

13. Determine as raízes do exercício 9, usando o Método de Newton-Raphson.

14. Os zeros da função $f(x) = x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 60x$ são: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ e $x_4 = 5$.

    (a) Calcule uma iteração do método de Newton-Raphson a partir de $x_0 = 2$. A sequência parece convergir para que raiz?

    (b) Repita o processo a partir de $x_0 = 1$. O que acontece neste caso?

    (c) É possível aplicar o método da bisseção no intervalo $[2, 3.5]$? Justifique a resposta. No caso afirmativo, obtenha o número de iterações a partir da qual obtém-se uma aproximação de a menos de 0.001.

15. O zero da função $f(x) = \text{arctg}(x)$ é $x^* = 0$. Considere o método de Newton-Raphson. Verifique se:

    (a) o ponto inicial é $x_0 = 1.3917452$, então temos a sequência de iterações $x_1 = -1.3917; x_2 = 1.3917; x_3 = -1.3917; \ldots$

    (b) o ponto inicial é $x_0 = 1.3$, então a sequência converge a $x^*$.

    (c) $x_0 = 1.5$, então a sequência diverge.

16. Calcular as raízes dos polinômios abaixo, por Birge-Vieta, usando uma casa decimal.

    (a) $P(x) = x^3 - 21x^2 + 95x - 75 = 0$.

    (b) $P(x) = x^4 - 18x^3 + 97x^2 - 180x + 100 = 0$.

17. Seja $x = \xi$ uma raiz de $f(x)$, tal que $f'(\xi) \neq 0$ e $f''(\xi) = 0$. Mostre que neste caso o Método de Newton-Raphson tem convergência cúbica.

18. **(Segundo trabalho extra - Valendo 1,0 ponto)**

    (Raízes múltiplas) Considere $f(x) = (x - 1)^2$

    (a) Aplique o método de Newton-Raphson para $f$ com tolerância $\epsilon = 10^{-4}$. Calcule a taxa de convergência baseada nos erros computados.

    (b) Aplique o método de Newton modificado a seguir e verifique o que acontece:

    $$x_{k+1} = x_k - 2\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \; k = 0, 1, \ldots$$

    (c) Prove que a ordem de convergência do método do item (b) é quadrática, ou seja, prove que:

    $$e_{k+1} \approx \frac{f'''(r)}{6f''(r)} e_k^2, \text{ onde } e_k = |x_k - r|.$$

    **Dicas:**

    Use aproximação por série de Taylor de $f(x_k)$ em torno de $r$ e depois faça a sua primeira derivada, $f'(x_k)$. Use também $\left(1 + \frac{e_k}{2}\frac{f'''(r)}{f''(r)}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{e_k}{2}\frac{f'''(r)}{f''(r)}$.