

CÁLCULO NUMÉRICO UERJ

Interpolação Polinomial de Lagrange

Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br
IME-UERJ

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Forma de Lagrange - Interpolação linear
- 3 Forma de Lagrange - Interpolação quadrática
- 4 Forma de Lagrange - Interpolação cúbica
- 5 Interpolação por polinômio de grau n
- 6 Exemplo
- 7 Bibliografia

Introdução

Suponha que $f(x)$ é uma função contínua com infinitas derivadas.

Interpolar $f(x)$ por um polinômio de grau n , $P_n(x)$, é aproximar $f(x)$ por $P_n(x)$ em $(n + 1)$ pontos distintos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, \dots , $(x_n, f(x_n))$ tais que:

$$f(x_0) = P_n(x_0),$$

$$f(x_1) = P_n(x_1),$$

$$\vdots$$

$$f(x_n) = P_n(x_n),$$

onde x_0, x_1, \dots, x_n , são chamados *nós da interpolação*.

Pode ser provado que este polinômio $P_n(x)$ sempre existe e é único.

Teorema (Existência e unicidade)

Existe um único polinômio $P_n(x)$, de grau n , tal que:

$P_n(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, desde que $x_k \neq x_j$, para todo $k \neq j$.

Forma de Lagrange - Interpolação linear

1. Reta (polinômio de grau 1)

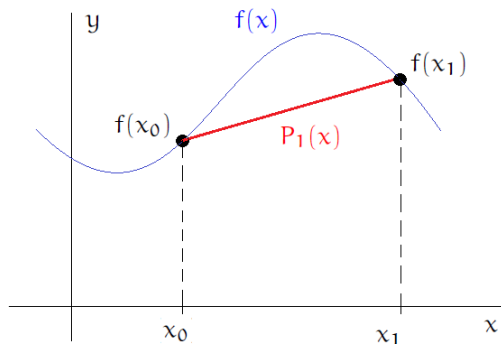


Figura: Interpolação - $P_1(x)$

Vamos interpolar $f(x)$ por uma reta $P_1(x)$ em dois pontos:
 $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$.

Ou seja,

$$P_1(x_0) = f(x_0);$$

$$P_1(x_1) = f(x_1).$$

Sabemos que a equação geral da reta é:

$$P_1(x) = ax + b$$

Então, nos nós de interpolação, temos:

$$P_1(x_0) = f(x_0) = ax_0 + b \quad (1)$$

$$P_1(x_1) = f(x_1) = ax_1 + b \quad (2)$$

Forma de Lagrange - Interpolação linear

Subtraindo (2) de (1), obtemos o coeficiente angular a da reta $P_1(x)$:

$$f(x_0) - f(x_1) = a(x_0 - x_1) \Rightarrow a = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \quad (3)$$

Para achar o coeficiente linear b , substituímos (3) na equação (1). Temos em (1),

$$f(x_0) = ax_0 + b \Rightarrow b = f(x_0) - ax_0 \quad (4)$$

Assim, substituindo o valor de a da equação (3) na equação (4), obtemos:

$$b = f(x_0) - \left(\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \right) x_0$$

Desenvolvendo esta equação com $f(x_0)$ e $f(x_1)$ em evidência, obtemos b :

$$b = \left(\frac{-x_1}{x_0 - x_1} \right) f(x_0) + \left(\frac{x_0}{x_0 - x_1} \right) f(x_1) \quad (5)$$

Forma de Lagrange - Interpolação linear

Agora, vamos substituir a e b encontrados em (3) e (5) na equação da reta. Assim, obtemos:

$$P_1(x) = ax + b$$

$$P_1(x) = \left(\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \right) x + \left(\frac{-x_1}{x_0 - x_1} \right) f(x_0) + \left(\frac{x_0}{x_0 - x_1} \right) f(x_1)$$

Organizando os termos desta equação com $f(x_0)$ e $f(x_1)$ em evidência, obtemos:

$$P_1(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) f(x_0) + \left(\frac{-x + x_0}{x_0 - x_1} \right) f(x_1)$$

Como $\frac{-x + x_0}{x_0 - x_1} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$, podemos reescrever $P_1(x)$ assim:

$$P_1(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) f(x_0) + \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) f(x_1)$$

Forma de Lagrange - Interpolação linear

$$P_1(x) = \underbrace{\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right)}_{L_0(x)} f(x_0) + \underbrace{\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)}_{L_1(x)} f(x_1)$$

Isso significa que podemos construir uma base para $P_1(x)$ formada pelos polinômios

$$L_0(x), L_1(x)$$

Forma de Lagrange - Interpolação linear

$$P_1(x) = \underbrace{\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right)}_{L_0(x)} f(x_0) + \underbrace{\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)}_{L_1(x)} f(x_1)$$

Isso significa que podemos construir uma base para $P_1(x)$ formada pelos polinômios

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Forma de Lagrange - Interpolação linear

$$P_1(x) = \underbrace{\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right)}_{L_0(x)} f(x_0) + \underbrace{\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)}_{L_1(x)} f(x_1)$$

Isso significa que podemos construir uma base para $P_1(x)$ formada pelos polinômios

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Forma de Lagrange - Interpolação linear

$$P_1(x) = \underbrace{\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right)}_{L_0(x)} f(x_0) + \underbrace{\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)}_{L_1(x)} f(x_1)$$

Isso significa que podemos construir uma base para $P_1(x)$ formada pelos polinômios

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$

que são **polinômios de Lagrange de grau 1**.

Portanto, o **polinômio interpolador de Lagrange de grau 1** será dado por:

$$P_1(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)$$

com $L_0(x)$ e $L_1(x)$ definidos acima.

Forma de Lagrange - Interpolação linear

$$P_1(x) = \underbrace{\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right)}_{L_0(x)} f(x_0) + \underbrace{\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)}_{L_1(x)} f(x_1)$$

Isso significa que podemos construir uma base para $P_1(x)$ formada pelos polinômios

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$

que são **polinômios de Lagrange de grau 1**.

Portanto, o **polinômio interpolador de Lagrange de grau 1** será dado por:

$$P_1(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)$$

com $L_0(x)$ e $L_1(x)$ definidos acima.

Forma de Lagrange - Interpolação linear

Note que

$$\begin{aligned} L_0(x_0) &= 1, L_0(x_1) = 0, \\ L_1(x_0) &= 0, L_1(x_1) = 1. \end{aligned}$$

Assim,

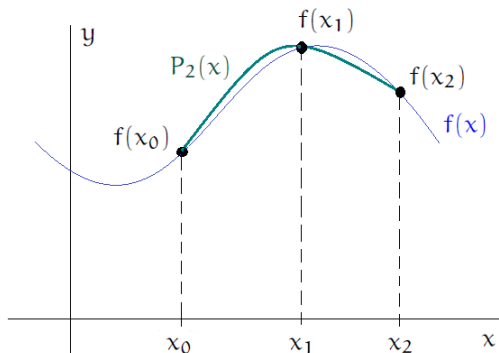
$$P_1(x_0) = \underbrace{L_0(x_0)}_1 f(x_0) + \cancel{L_1(x_0)} f(x_1) = f(x_0),$$

$$P_1(x_1) = \cancel{L_0(x_1)} f(x_0) + \underbrace{L_1(x_1)}_1 f(x_1) = f(x_1).$$

Então, $P_1(x)$ é o único polinômio de grau 1 que passa por $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$.

Forma de Lagrange - Interpolação quadrática

2. Parábola (polinômio de grau 2)



Agora, queremos interpolar $f(x)$ por um polinômio de grau 2, $P_2(x)$.

Neste caso, devemos interpolar $f(x)$ por $P_2(x)$ em três pontos:

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)).$$

Ou seja,

$$P_2(x_0) = f(x_0);$$

$$P_2(x_1) = f(x_1);$$

$$P_2(x_2) = f(x_2).$$

Figura: Interpolação - $P_2(x)$

Forma de Lagrange - Interpolação quadrática

Aplicando raciocínio análogo ao que foi feito na reta, temos que

$$P_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2),$$

onde agora $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$ formam uma **base de Lagrange de grau 2** e são definidos por:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)};$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)};$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Forma de Lagrange - Interpolação quadrática

Aplicando raciocínio análogo ao que foi feito na reta, temos que

$$P_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2),$$

onde agora $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$ formam uma **base de Lagrange de grau 2** e são definidos por:

$$L_0(x) = \frac{(x_1 - x)(x_2 - x)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)};$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x_2 - x)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)};$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Forma de Lagrange - Interpolação quadrática

Aplicando raciocínio análogo ao que foi feito na reta, temos que

$$P_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2),$$

onde agora $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$ formam uma **base de Lagrange de grau 2** e são definidos por:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)};$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)};$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Forma de Lagrange - Interpolação quadrática

Note que

$$L_0(x_0) = 1, L_0(x_1) = 0, L_0(x_2) = 0,$$

$$L_1(x_0) = 0, L_1(x_1) = 1, L_1(x_2) = 0,$$

$$L_2(x_0) = 0, L_2(x_1) = 0, L_2(x_2) = 1.$$

Assim,

$$P_2(x_0) = \underbrace{L_0(x_0)}_1 f(x_0) + \cancel{L_1(x_0)} f(x_1) + \cancel{L_2(x_0)} f(x_2) = f(x_0),$$

$$P_2(x_1) = \cancel{L_0(x_1)} f(x_0) + \underbrace{L_1(x_1)}_1 f(x_1) + \cancel{L_2(x_1)} f(x_2) = f(x_1),$$

$$P_2(x_2) = \cancel{L_0(x_2)} f(x_0) + \cancel{L_1(x_2)} f(x_1) + \underbrace{L_2(x_2)}_1 f(x_2) = f(x_2).$$

Então, $P_2(x)$ é o único polinômio de grau 2 que passa por $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$.

Forma de Lagrange - Interpolação cúbica

3. Polinômio de grau 3

Agora, queremos interpolar $f(x)$ por um polinômio de grau 3, $P_3(x)$.

Neste caso, devemos interpolar $f(x)$ por $P_3(x)$ em quatro pontos:

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3)).$$

Ou seja,

$$P_3(x_0) = f(x_0);$$

$$P_3(x_1) = f(x_1);$$

$$P_3(x_2) = f(x_2);$$

$$P_3(x_3) = f(x_3).$$

Forma de Lagrange - Interpolação cúbica

Aplicando raciocínio análogo ao que foi feito nos casos anteriores, temos que

$$P_3(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + L_3(x)f(x_3),$$

onde agora $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$, $L_3(x)$ formam uma **base de Lagrange de grau 3** e são definidos por:

$$L_0(x) = \frac{1}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_3 - x_0)};$$

$$L_1(x) = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)};$$

$$L_2(x) = \frac{1}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_3 - x_2)};$$

$$L_3(x) = \frac{1}{(x_0 - x_3)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)}.$$

Forma de Lagrange - Interpolação cúbica

Aplicando raciocínio análogo ao que foi feito nos casos anteriores, temos que

$$P_3(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + L_3(x)f(x_3),$$

onde agora $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$, $L_3(x)$ formam uma **base de Lagrange de grau 3** e são definidos por:

$$L_0(x) = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)};$$

$$L_1(x) = \frac{1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)};$$

$$L_2(x) = \frac{1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)};$$

$$L_3(x) = \frac{1}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Forma de Lagrange - Interpolação cúbica

Aplicando raciocínio análogo ao que foi feito nos casos anteriores, temos que

$$P_3(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + L_3(x)f(x_3),$$

onde agora $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$, $L_3(x)$ formam uma **base de Lagrange de grau 3** e são definidos por:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)};$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)};$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)};$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Forma de Lagrange - Interpolação cúbica

Note que

$$L_0(x_0) = 1, L_0(x_1) = 0, L_0(x_2) = 0, L_0(x_3) = 0,$$

$$L_1(x_0) = 0, L_1(x_1) = 1, L_1(x_2) = 0, L_1(x_3) = 0,$$

$$L_2(x_0) = 0, L_2(x_1) = 0, L_2(x_2) = 1, L_2(x_3) = 0,$$

$$L_3(x_0) = 0, L_3(x_1) = 0, L_3(x_2) = 0, L_3(x_3) = 1.$$

Assim,

$$P_3(x_0) = \underbrace{L_0(x_0)}_1 f(x_0) + \cancel{L_1(x_0)} f(x_1) + \cancel{L_2(x_0)} f(x_2) + \cancel{L_3(x_0)} f(x_3) = f(x_0),$$

$$P_3(x_1) = \cancel{L_0(x_1)} f(x_0) + \underbrace{L_1(x_1)}_1 f(x_1) + \cancel{L_2(x_1)} f(x_2) + \cancel{L_3(x_1)} f(x_3) = f(x_1),$$

$$P_3(x_2) = \cancel{L_0(x_2)} f(x_0) + \cancel{L_1(x_2)} f(x_1) + \underbrace{L_2(x_2)}_1 f(x_2) + \cancel{L_3(x_2)} f(x_3) = f(x_2).$$

$$P_3(x_3) = \cancel{L_0(x_3)} f(x_0) + \cancel{L_1(x_3)} f(x_1) + \underbrace{L_2(x_3)}_1 f(x_2) + \underbrace{L_3(x_3)}_1 f(x_3) = f(x_3).$$

Então, $P_3(x)$ é o único polinômio de grau 3 que passa por $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$.

Forma de Lagrange - Interpolação por polinômio de grau n

Caso geral - Construção de $P_n(x)$

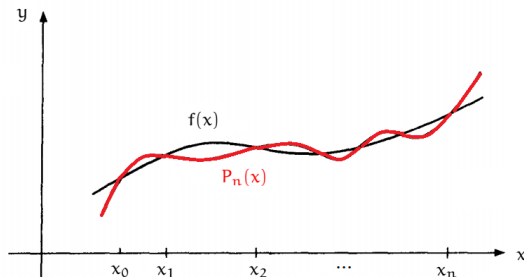


Figura: Interpolação - $P_n(x)$

Agora, queremos interpolar $f(x)$ por um polinômio de grau $n \geq 1$, $P_n(x)$.

Neste caso, devemos interpolar $f(x)$ por $P_n(x)$ em $(n + 1)$ pontos:

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n)).$$

Ou seja,

$$P_n(x_0) = f(x_0);$$

$$P_n(x_1) = f(x_1);$$

$$\vdots$$

$$P_n(x_n) = f(x_n).$$

Interpolação por polinômio de grau n

Aplicando raciocínio análogo ao que foi feito na reta, temos que

$$P_n(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + \dots + L_n(x)f(x_n),$$

onde definimos $L_k(x)$ por:

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Note que

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq k, \\ 1 & \text{se } i = k. \end{cases}$$

Assim,

$$P_n(x_i) = \cancel{L_0(x_i)}f(x_0) + \cancel{L_1(x_i)}f(x_1) + \dots + \overbrace{L_i(x_i)}^1 f(x_i) + \dots + \cancel{L_n(x_i)}f(x_n) = f(x_i),$$

para todo $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Exemplo

Dada a tabela:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

Obter $f(0.2749)$ usando interpolação quadrática de Lagrange.

O exercício pede para achar uma aproximação $f(0.2749) \approx P_2(0.2749)$.

$\Downarrow x = 0.2749$

x	0	0.1	$x_0 = 0.2$		$x_1 = 0.3$	$x_2 = 0.4$	0.5
$f(x)$	1	1.1052	1.2214	?	1.3499	1.4918	1.6487

$\Uparrow f(0.2749) = ?$

Devemos escolher três pontos da tabela x_0, x_1, x_2 tais que x_0 esteja mais próximo de 0.2749 e seja menor que 0.2749.

Neste exemplo, $x_0 = 0.2, x_1 = 0.3, x_2 = 0.4$.

Exemplo

A base de Lagrange será formada pelos seguintes polinômios de grau 2:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0.3)(x - 0.4)}{(0.2 - 0.3)(0.2 - 0.4)}$$

$$\Rightarrow L_0(0.2749) = \frac{(0.2749 - 0.3)(0.2749 - 0.4)}{(0.2 - 0.3)(0.2 - 0.4)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 0.2)(x - 0.4)}{(0.3 - 0.2)(0.3 - 0.4)}$$

$$\Rightarrow L_1(0.2749) = \frac{(0.2749 - 0.2)(0.2749 - 0.4)}{(0.3 - 0.2)(0.3 - 0.4)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 0.2)(x - 0.3)}{(0.4 - 0.2)(0.4 - 0.3)}$$

$$\Rightarrow L_2(0.2749) = \frac{(0.2749 - 0.2)(0.2749 - 0.3)}{(0.4 - 0.2)(0.4 - 0.3)}$$

Exemplo

Pela interpolação de Lagrange de grau 2, sabemos que:

$$f(x) \approx P_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2).$$

Assim, com $x = 0.2749$ e os nós de interpolação $x_0 = 0.2$, $x_1 = 0.3$, $x_2 = 0.4$, obtemos a seguinte aproximação $f(0.2749) \approx P_2(0.2749)$:

$$P_2(0.2749) = L_0(0.2749)f(0.2) + L_1(0.2749)f(0.3) + L_2(0.2749)f(0.4)$$

$$P_2(0.2749) = 1.3165.$$

Exercício 1: Obter $f(0.2749)$ usando **interpolação cúbica**.

Exercício 2: Quais são os nós de interpolação que devem ser usados para obter $f(0.2749)$ usando **interpolação de quarta ordem**?

Referências I



RUGGIERO, M.; LOPES, V.. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. Pearson, 1996, 2a. Ed.



BURDEN, R.. **Numerical Analysis**. Brooks/Cole Pub Co, 1996, 6th Edition.