CÁLCULO NUMÉRICO
UERJ/2023

02 - Série de Taylor

Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br
IME-UERJ

Sumário

Introdução

Seja $f(x)$ uma função de classe C^∞, isto é, contínua e infinitamente diferenciável em um intervalo $\mathcal{I}$. Desejamos aproximar $f(x)$ por um polinômio de grau n, $P_n(x)$, em torno de um ponto $x_0 \in \mathcal{I}$.

Vejamos o que acontece quando aproxima-se $f(x)$ pela reta $P_1(x)$ em torno de x_0.

Quando x está suficientemente próximo de x_0, temos

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Rightarrow f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P_1(x)}$$

Introdução

Seja $f(x)$ uma função de classe C^∞, isto é, contínua e infinitamente diferenciável em um intervalo $\mathcal{I}$. Desejamos aproximar $f(x)$ por um polinômio de grau n, $P_n(x)$, em torno de um ponto $x_0 \in \mathcal{I}$.

Vejamos o que acontece quando aproxima-se $f(x)$ pela reta $P_1(x)$ em torno de x_0.

Quando x está suficientemente próximo de x_0, temos

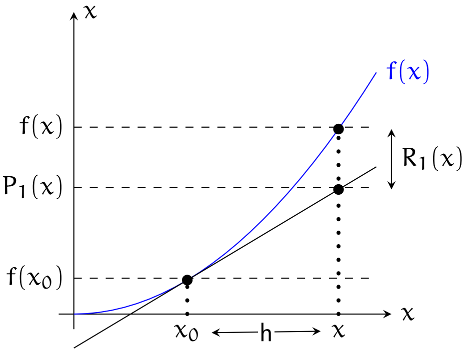
$$f'(x_0) \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Rightarrow f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P_1(x)}$$

Introdução

Seja $f(x)$ uma função de classe C^{∞}, isto é, contínua e infinitamente diferenciável em um intervalo $\mathcal{I}$. Desejamos aproximar $f(x)$ por um polinômio de grau n, $P_n(x)$, em torno de um ponto $x_0 \in \mathcal{I}$.

Vejamos o que acontece quando aproxima-se $f(x)$ pela reta $P_1(x)$ em torno de x_0.



Quando x está suficientemente próximo de x_0, temos

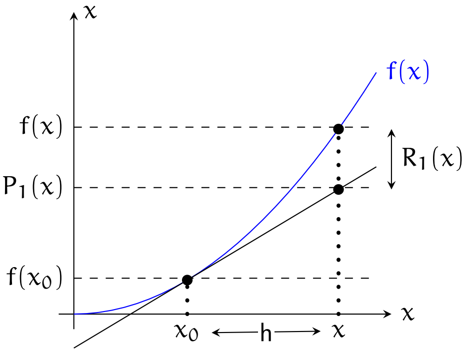
$$f'(x_0) \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Rightarrow f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P_1(x)}$$

Introdução

Seja $f(x)$ uma função de classe C^∞, isto é, contínua e infinitamente diferenciável em um intervalo $\mathcal{I}$. Desejamos aproximar $f(x)$ por um polinômio de grau n, $P_n(x)$, em torno de um ponto $x_0 \in \mathcal{I}$.

Vejamos o que acontece quando aproxima-se $f(x)$ pela reta $P_1(x)$ em torno de x_0.



Quando x está suficientemente próximo de x_0, temos

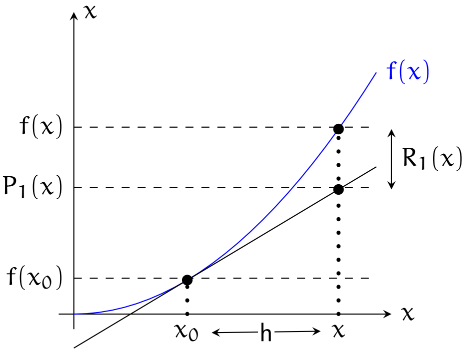
$$f'(x_0) \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Rightarrow f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P_1(x)}$$

Introdução

Seja $f(x)$ uma função de classe C^∞, isto é, contínua e infinitamente diferenciável em um intervalo $\mathcal{I}$. Desejamos aproximar $f(x)$ por um polinômio de grau n, $P_n(x)$, em torno de um ponto $x_0 \in \mathcal{I}$.

Vejamos o que acontece quando aproxima-se $f(x)$ pela reta $P_1(x)$ em torno de x_0.



Quando x está suficientemente próximo de x_0, temos

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Rightarrow f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P_1(x)}$$

Introdução

$$\Rightarrow f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P_1(x)}$$

Então, a reta $P_1(x)$ é o polinômio de grau 1

$P_1(x) = c_0 + c_1(x - x_0),$

onde $c_0 = f(x_0)$, $c_1 = f'(x_0)$.

Essa aproximação de $f(x)$ por $P_1(x)$ gera um erro de truncamento $R_1(x)$. Portanto,

$f(x) = P_1(x) + R_1(x).$

Vejamos o que acontece agora quando aproximamos $f(x)$ pelo polinômio de grau 2, $P_2(x)$, em torno de x_0.

Introdução

$$\Rightarrow f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P_1(x)}$$

Então, a reta $P_1(x)$ é o polinômio de grau 1

$$P_1(x) = c_0 + c_1(x - x_0),$$

onde $c_0 = f(x_0)$, $c_1 = f'(x_0)$.

Essa aproximação de $f(x)$ por $P_1(x)$ gera um erro de truncamento $R_1(x)$. Portanto,

$$f(x) = P_1(x) + R_1(x).$$

Vejamos o que acontece agora quando aproximamos $f(x)$ pelo polinômio de grau 2, $P_2(x)$, em torno de x_0.

Introdução

$$\Rightarrow f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P_1(x)}$$

Então, a reta $P_1(x)$ é o polinômio de grau 1

$$P_1(x) = c_0 + c_1(x - x_0),$$

onde $c_0 = f(x_0)$, $c_1 = f'(x_0)$.

Essa aproximação de $f(x)$ por $P_1(x)$ gera um erro de truncamento $R_1(x)$. Portanto,

$$f(x) = P_1(x) + R_1(x).$$

Vejamos o que acontece agora quando aproximamos $f(x)$ pelo polinômio de grau 2, $P_2(x)$, em torno de x_0.

Introdução

$$\Rightarrow f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P_1(x)}$$

Então, a reta $P_1(x)$ é o polinômio de grau 1

$$P_1(x) = c_0 + c_1(x - x_0),$$

onde $c_0 = f(x_0)$, $c_1 = f'(x_0)$.

Essa aproximação de $f(x)$ por $P_1(x)$ gera um erro de truncamento $R_1(x)$. Portanto,

$$f(x) = P_1(x) + R_1(x).$$

Vejamos o que acontece agora quando aproximamos $f(x)$ pelo polinômio de grau 2, $P_2(x)$, em torno de x_0.

Introdução

$$\Rightarrow f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P_1(x)}$$

Então, a reta $P_1(x)$ é o polinômio de grau 1

$$P_1(x) = c_0 + c_1(x - x_0),$$

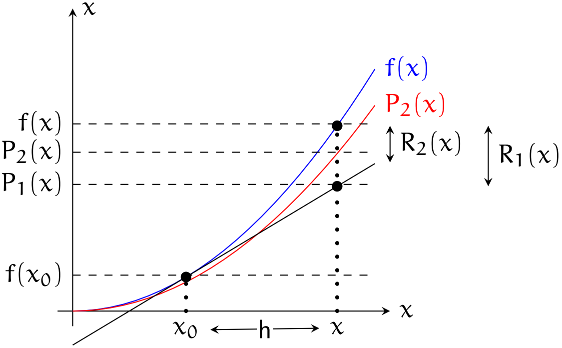
onde $c_0 = f(x_0)$, $c_1 = f'(x_0)$.

Essa aproximação de $f(x)$ por $P_1(x)$ gera um erro de truncamento $R_1(x)$. Portanto,

$$f(x) = P_1(x) + R_1(x).$$

Vejamos o que acontece agora quando aproximamos $f(x)$ pelo polinômio de grau 2, $P_2(x)$, em torno de x_0.

Introdução

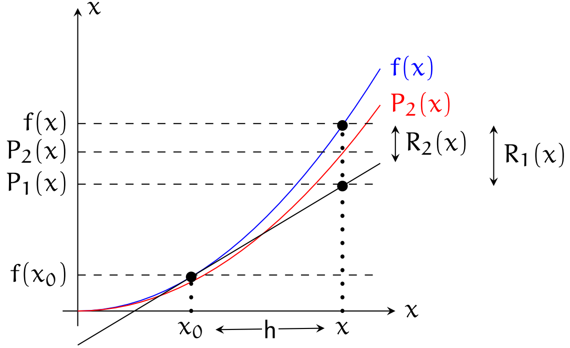


Percebe-se uma aproximação de $f(x)$ por $P_2(x)$ em torno de x_0 com erro de truncamento $R_2(x)$ ainda menor.

Assim,

$$P_2(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P_1(x)} + c_2(x - x_0)^2$$

Introdução

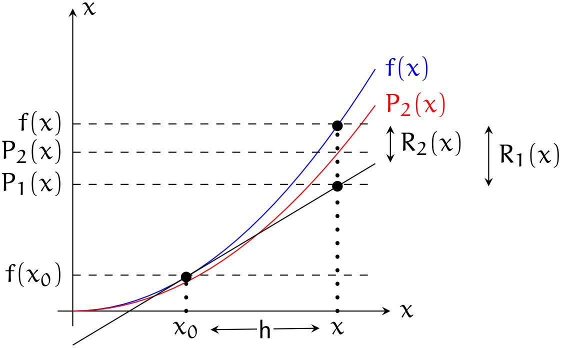


Percebe-se uma aproximação de $f(x)$ por $P_2(x)$ em torno de x_0 com erro de truncamento $R_2(x)$ ainda menor.

Assim,

$$P_2(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P_1(x)} + c_2(x - x_0)^2$$

Introdução



Percebe-se uma aproximação de $f(x)$ por $P_2(x)$ em torno de x_0 com erro de truncamento $R_2(x)$ ainda menor.

Assim,

$$P_2(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P_1(x)} + c_2(x - x_0)^2$$

Introdução

Portanto,

$$f(x) = P_2(x) + R_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + R_2(x).$$

Na sequência, ao aproximarmos $f(x)$ por $P_3(x)$ em torno de x_0 teremos um erro $R_3(x)$ ainda menor. Assim,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + R_3(x).$$

Generalizando, para aproximar $f(x)$ por $P_n(x)$ em torno de x_0, temos

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \cdots + c_n(x - x_0)^n + R_n(x),$$

onde $R_n(x) < R_{n-1}(x) < \cdots < R_3(x) < R_2(x) < R_1(x)$.

Introdução

Portanto,

$$f(x) = P_2(x) + R_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + R_2(x).$$

Na sequência, ao aproximarmos $f(x)$ por $P_3(x)$ em torno de x_0 teremos um erro $R_3(x)$ ainda menor. Assim,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + R_3(x).$$

Generalizando, para aproximar $f(x)$ por $P_n(x)$ em torno de x_0, temos

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \cdots + c_n(x - x_0)^n + R_n(x),$$

onde $R_n(x) < R_{n-1}(x) < \cdots < R_3(x) < R_2(x) < R_1(x)$.

Introdução

Portanto,

$$f(x) = P_2(x) + R_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + R_2(x).$$

Na sequência, ao aproximarmos $f(x)$ por $P_3(x)$ em torno de x_0 teremos um erro $R_3(x)$ ainda menor. Assim,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + R_3(x).$$

Generalizando, para aproximar $f(x)$ por $P_n(x)$ em torno de x_0, temos

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \cdots + c_n(x - x_0)^n + R_n(x),$$

onde $R_n(x) < R_{n-1}(x) < \cdots < R_3(x) < R_2(x) < R_1(x)$.

Introdução

Portanto,

$$f(x) = P_2(x) + R_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + R_2(x).$$

Na sequência, ao aproximarmos $f(x)$ por $P_3(x)$ em torno de x_0 teremos um erro $R_3(x)$ ainda menor. Assim,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + R_3(x).$$

Generalizando, para aproximar $f(x)$ por $P_n(x)$ em torno de x_0, temos

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \cdots + c_n(x - x_0)^n + R_n(x),$$

onde $R_n(x) < R_{n-1}(x) < \cdots < R_3(x) < R_2(x) < R_1(x)$.

Introdução

Como vimos anteriormente que $c_0 = f(x_0)$ e $c_1 = f'(x_0)$, podemos reescrever a última equação como

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \cdots + c_n(x - x_0)^n + \ldots,$$

Mas, ainda está faltando definir os coeficientes $c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots$ de $f(x)$.

É muito simples: basta aplicarmos as derivadas de $f(x)$.

A primeira derivada de $f(x)$ é dada por:

$$f'(x) = c_1 + 2\,c_2(x - x_0) + 3\,c_3(x - x_0)^2 + \cdots + n\,c_n(x - x_0)^{n-1} + \ldots$$

Ao tomarmos $x = x_0$, obtemos

$c_1 = f'(x_0)$, como já havíamos visto.

Introdução

Como vimos anteriormente que $c_0 = f(x_0)$ e $c_1 = f'(x_0)$, podemos reescrever a última equação como

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \cdots + c_n(x - x_0)^n + \ldots,$$

Mas, ainda está faltando definir os coeficientes c_2, c_3, $\ldots$, c_n, $\ldots$ de $f(x)$.

É muito simples: basta aplicarmos as derivadas de $f(x)$.

A primeira derivada de $f(x)$ é dada por:

$$f'(x) = c_1 + 2\, c_2(x - x_0) + 3\, c_3(x - x_0)^2 + \cdots + n\, c_n(x - x_0)^{n-1} + \ldots$$

Ao tomarmos $x = x_0$, obtemos

$c_1 = f'(x_0)$, como já havíamos visto.

Introdução

Como vimos anteriormente que $c_0 = f(x_0)$ e $c_1 = f'(x_0)$, podemos reescrever a última equação como

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \cdots + c_n(x - x_0)^n + \ldots,$$

Mas, ainda está faltando definir os coeficientes $c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots$ de $f(x)$.

É muito simples: basta aplicarmos as derivadas de $f(x)$.

A primeira derivada de $f(x)$ é dada por:

$$f'(x) = c_1 + 2\,c_2(x - x_0) + 3\,c_3(x - x_0)^2 + \cdots + n\,c_n(x - x_0)^{n-1} + \ldots$$

Ao tomarmos $x = x_0$, obtemos

$c_1 = f'(x_0)$, como já havíamos visto.

Introdução

Como vimos anteriormente que $c_0 = f(x_0)$ e $c_1 = f'(x_0)$, podemos reescrever a última equação como

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \cdots + c_n(x - x_0)^n + \ldots,$$

Mas, ainda está faltando definir os coeficientes c_2, c_3, ..., c_n, ... de $f(x)$.

É muito simples: basta aplicarmos as derivadas de $f(x)$.

A primeira derivada de $f(x)$ é dada por:

$$f'(x) = c_1 + 2\,c_2(x - x_0) + 3\,c_3(x - x_0)^2 + \cdots + n\,c_n(x - x_0)^{n-1} + \ldots$$

Ao tomarmos $x = x_0$, obtemos

$c_1 = f'(x_0)$, como já havíamos visto.

Introdução

Como vimos anteriormente que $c_0 = f(x_0)$ e $c_1 = f'(x_0)$, podemos reescrever a última equação como

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \cdots + c_n(x - x_0)^n + \ldots,$$

Mas, ainda está faltando definir os coeficientes c_2, c_3, ..., c_n, ... de $f(x)$.

É muito simples: basta aplicarmos as derivadas de $f(x)$.

A primeira derivada de $f(x)$ é dada por:

$$f'(x) = c_1 + 2\ c_2(x - x_0) + 3\ c_3(x - x_0)^2 + \cdots + n\ c_n(x - x_0)^{n-1} + \ldots$$

Ao tomarmos $x = x_0$, obtemos

$c_1 = f'(x_0)$, como já havíamos visto.

Introdução

A segunda derivada de $f(x)$ é dada por:

$$f''(x) = 2\ c_2 + \underbrace{3 \cdot 2}_{3!}\ c_3(x - x_0) + \cdots + n(n-1)\ c_n(x - x_0)^{n-2} + \ldots$$

Ao tomarmos $x = x_0$, obtemos

$$c_2 = \frac{f''(x_0)}{2}.$$

A terceira derivada de $f(x)$ é dada por:

$$f'''(x) = 3!\ c_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)\ c_n(x - x_0)^{n-3} + \ldots$$

Ao tomarmos $x = x_0$, obtemos

$$c_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}.$$

Introdução

A segunda derivada de $f(x)$ é dada por:

$$f''(x) = 2\,c_2 + \underbrace{3 \cdot 2}_{3!}\,c_3(x - x_0) + \cdots + n(n-1)\,c_n(x - x_0)^{n-2} + \ldots$$

Ao tomarmos $x = x_0$, obtemos

$$c_2 = \frac{f''(x_0)}{2}.$$

A terceira derivada de $f(x)$ é dada por:

$$f'''(x) = 3!\,c_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)\,c_n(x - x_0)^{n-3} + \ldots$$

Ao tomarmos $x = x_0$, obtemos

$$c_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}.$$

Introdução

A segunda derivada de $f(x)$ é dada por:

$$f''(x) = 2\ c_2 + \underbrace{3 \cdot 2}_{3!}\ c_3(x - x_0) + \cdots + n(n-1)\ c_n(x - x_0)^{n-2} + \ldots$$

Ao tomarmos $x = x_0$, obtemos

$$c_2 = \frac{f''(x_0)}{2}.$$

A terceira derivada de $f(x)$ é dada por:

$$f'''(x) = 3!\ c_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)\ c_n(x - x_0)^{n-3} + \ldots$$

Ao tomarmos $x = x_0$, obtemos

$$c_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}.$$

Introdução

A segunda derivada de $f(x)$ é dada por:

$$f''(x) = 2\ c_2 + \underbrace{3 \cdot 2}_{3!}\ c_3(x - x_0) + \cdots + n(n-1)\ c_n(x - x_0)^{n-2} + \ldots$$

Ao tomarmos $x = x_0$, obtemos

$$c_2 = \frac{f''(x_0)}{2}.$$

A terceira derivada de $f(x)$ é dada por:

$$f'''(x) = 3!\ c_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)\ c_n(x - x_0)^{n-3} + \ldots$$

Ao tomarmos $x = x_0$, obtemos

$$c_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}.$$

Série de Taylor

Logo, já podemos deduzir que o coeficiente c_n é dado por

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Portanto, o que acabamos de mostrar chama-se Série de Taylor.

Definição (Série de Taylor)

Sejam $f(x)$ uma função contínua e infinitamente diferenciável em um intervalo $\mathcal{I}$ e $x_0 \in \mathcal{I}$. A série de Taylor de $f(x)$ em torno de x_0 é uma série infinita de potências $\{P_n(x)\}$ dada por:

$$\begin{aligned} f(x) = {} & f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots \\ & + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \\ = {} & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i. \end{aligned}$$

Série de Taylor

Logo, já podemos deduzir que o coeficiente c_n é dado por

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Portanto, o que acabamos de mostrar chama-se Série de Taylor.

Definição (Série de Taylor)

Sejam $f(x)$ uma função contínua e infinitamente diferenciável em um intervalo $\mathcal{I}$ e $x_0 \in \mathcal{I}$. A série de Taylor de $f(x)$ em torno de x_0 é uma série infinita de potências $\{P_n(x)\}$ dada por:

$$\begin{aligned} f(x) = \; & f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots \\ & + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \\ = & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i. \end{aligned}$$

Série de Taylor

Logo, já podemos deduzir que o coeficiente c_n é dado por

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Portanto, o que acabamos de mostrar chama-se Série de Taylor.

Definição (Série de Taylor)

Sejam $f(x)$ uma função contínua e infinitamente diferenciável em um intervalo $\mathcal{I}$ e $x_0 \in \mathcal{I}$. A série de Taylor de $f(x)$ em torno de x_0 é uma série infinita de potências $\{P_n(x)\}$ dada por:

$$\begin{aligned} f(x) = \ & f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots \\ & + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \\ = & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i. \end{aligned}$$

Exemplos

Exemplo 1: Encontre a série de Taylor da função $f(x) = sen(x)$ em torno de 0.

Primeiro, verificamos a função e suas derivadas e depois calculamos os seus valores quando $x = x_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= sen(x) & \Rightarrow f(0) &= sen(0) &= 0;\\
f'(x) &= cos(x) & \Rightarrow f'(0) &= cos(0) &= 1;\\
f''(x) &= -sen(x) & \Rightarrow f''(0) &= -sen(0) &= 0;\\
f'''(x) &= -cos(x) & \Rightarrow f'''(0) &= -cos(0) &= -1;\\
f^{(iv)}(x) &= sen(x) & \Rightarrow f^{(iv)}(0) &= sen(0) &= 0;\\
f^{(v)}(x) &= cos(x) & \Rightarrow f^{(v)}(0) &= cos(0) &= 1;\\
f^{(vi)}(x) &= -sen(x) & \Rightarrow f^{(vi)}(0) &= -sen(0) &= 0;\\
f^{(vii)}(x) &= -cos(x) & \Rightarrow f^{(vii)}(0) &= -cos(0) &= -1;\\
(\ldots)
\end{aligned}$$

Exemplos

Exemplo 1: Encontre a série de Taylor da função $f(x) = sen(x)$ em torno de 0.

Primeiro, verificamos a função e suas derivadas e depois calculamos os seus valores quando $x = x_0 = 0$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{sen}(x) & \Rightarrow f(0) &= \operatorname{sen}(0) &= 0;\\
f'(x) &= \cos(x) & \Rightarrow f'(0) &= \cos(0) &= 1;\\
f''(x) &= -\operatorname{sen}(x) & \Rightarrow f''(0) &= -\operatorname{sen}(0) &= 0;\\
f'''(x) &= -\cos(x) & \Rightarrow f'''(0) &= -\cos(0) &= -1;\\
f^{(iv)}(x) &= \operatorname{sen}(x) & \Rightarrow f^{(iv)}(0) &= \operatorname{sen}(0) &= 0;\\
f^{(v)}(x) &= \cos(x) & \Rightarrow f^{(v)}(0) &= \cos(0) &= 1;\\
f^{(vi)}(x) &= -\operatorname{sen}(x) & \Rightarrow f^{(vi)}(0) &= -\operatorname{sen}(0) &= 0;\\
f^{(vii)}(x) &= -\cos(x) & \Rightarrow f^{(vii)}(0) &= -\cos(0) &= -1;\\
(\ldots)
\end{aligned}
$$

Exemplos

Exemplo 1: Encontre a série de Taylor da função $f(x) = sen(x)$ em torno de 0.

Primeiro, verificamos a função e suas derivadas e depois calculamos os seus valores quando $x = x_0 = 0$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= sen(x) & \Rightarrow f(0) &= sen(0) &= 0;\\
f'(x) &= cos(x) & \Rightarrow f'(0) &= cos(0) &= 1;\\
f''(x) &= -sen(x) & \Rightarrow f''(0) &= -sen(0) &= 0;\\
f'''(x) &= -cos(x) & \Rightarrow f'''(0) &= -cos(0) &= -1;\\
f^{(iv)}(x) &= sen(x) & \Rightarrow f^{(iv)}(0) &= sen(0) &= 0;\\
f^{(v)}(x) &= cos(x) & \Rightarrow f^{(v)}(0) &= cos(0) &= 1;\\
f^{(vi)}(x) &= -sen(x) & \Rightarrow f^{(vi)}(0) &= -sen(0) &= 0;\\
f^{(vii)}(x) &= -cos(x) & \Rightarrow f^{(vii)}(0) &= -cos(0) &= -1;\\
(\ldots)
\end{aligned}
$$

Exemplos

A série de Taylor é dada por:

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{f^{(iv)}(0)}{4!}(x-0)^4 + \dots$$

Note que as derivadas de ordem par são iguais a zero e as derivadas de ordem ímpar alternam o sinal quando $x = 0$.

Então, a série de Taylor para $sen(x)$ em torno de $x_0 = 0$ é dada por:

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!}x^{2i+1}. \end{aligned}$$

Exemplos

A série de Taylor é dada por:

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{f^{(iv)}(0)}{4!}(x-0)^4 + \dots$$

Note que as derivadas de ordem par são iguais a zero e as derivadas de ordem ímpar alternam o sinal quando $x = 0$.

Então, a série de Taylor para $sen(x)$ em torno de $x_0 = 0$ é dada por:

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!}x^{2i+1}. \end{aligned}$$

Exemplos

A série de Taylor é dada por:

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{f^{(iv)}(0)}{4!}(x-0)^4 + \dots$$

Note que as derivadas de ordem par são iguais a zero e as derivadas de ordem ímpar alternam o sinal quando $x = 0$.

Então, a série de Taylor para $sen(x)$ em torno de $x_0 = 0$ é dada por:

$$f(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \dots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!}x^{2i+1}.$$

Exemplos

A série de Taylor é dada por:

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{f^{(iv)}(0)}{4!}(x-0)^4 + \dots$$

Note que as derivadas de ordem par são iguais a zero e as derivadas de ordem ímpar alternam o sinal quando $x = 0$.

Então, a série de Taylor para $sen(x)$ em torno de $x_0 = 0$ é dada por:

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!}x^{2i+1}. \end{aligned}$$

Exemplos

Como as ordens das potências da série são ímpares, só podemos ter aproximações de $sen(x)$ por polinômios de graus ímpares.

Quando aproximamos $sen(x)$ por um polinômio de grau 1, $P_1(x)$, temos:

$f(x) \approx P_1(x) = x,$

Quando aproximamos $sen(x)$ por um polinômio de grau 3, $P_3(x)$, temos:

$f(x) \approx P_3(x) = x - \dfrac{x^3}{3!}.$

Quando aproximamos $sen(x)$ por um polinômio de grau 5, $P_5(x)$, temos:

$f(x) \approx P_5(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}.$

Quando aproximamos $sen(x)$ por um polinômio de grau 7, $P_7(x)$, temos:

$f(x) \approx P_7(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!}, \ldots$ e assim por diante.

Exemplos

Como as ordens das potências da série são ímpares, só podemos ter aproximações de $sen(x)$ por polinômios de graus ímpares.

Quando aproximamos $sen(x)$ por um polinômio de grau 1, $P_1(x)$, temos:

$f(x) \approx P_1(x) = x,$

Quando aproximamos $sen(x)$ por um polinômio de grau 3, $P_3(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}.$$

Quando aproximamos $sen(x)$ por um polinômio de grau 5, $P_5(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Quando aproximamos $sen(x)$ por um polinômio de grau 7, $P_7(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}, \ldots \text{ e assim por diante.}$$

Exemplos

Como as ordens das potências da série são ímpares, só podemos ter aproximações de $sen(x)$ por polinômios de graus ímpares.

Quando aproximamos $sen(x)$ por um polinômio de grau 1, $P_1(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_1(x) = x,$$

Quando aproximamos $sen(x)$ por um polinômio de grau 3, $P_3(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}.$$

Quando aproximamos $sen(x)$ por um polinômio de grau 5, $P_5(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Quando aproximamos $sen(x)$ por um polinômio de grau 7, $P_7(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}, \ldots$$ e assim por diante.

Exemplos

Como as ordens das potências da série são ímpares, só podemos ter aproximações de $sen(x)$ por polinômios de graus ímpares.

Quando aproximamos $sen(x)$ por um polinômio de grau 1, $P_1(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_1(x) = x,$$

Quando aproximamos $sen(x)$ por um polinômio de grau 3, $P_3(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}.$$

Quando aproximamos $sen(x)$ por um polinômio de grau 5, $P_5(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Quando aproximamos $sen(x)$ por um polinômio de grau 7, $P_7(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}, \ldots$$ e assim por diante.

Exemplos

Como as ordens das potências da série são ímpares, só podemos ter aproximações de $sen(x)$ por polinômios de graus ímpares.

Quando aproximamos $sen(x)$ por um polinômio de grau 1, $P_1(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_1(x) = x,$$

Quando aproximamos $sen(x)$ por um polinômio de grau 3, $P_3(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}.$$

Quando aproximamos $sen(x)$ por um polinômio de grau 5, $P_5(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Quando aproximamos $sen(x)$ por um polinômio de grau 7, $P_7(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}, \; \ldots$$ e assim por diante.

Exemplos

Como as ordens das potências da série são ímpares, só podemos ter aproximações de $sen(x)$ por polinômios de graus ímpares.

Quando aproximamos $sen(x)$ por um polinômio de grau 1, $P_1(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_1(x) = x,$$

Quando aproximamos $sen(x)$ por um polinômio de grau 3, $P_3(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}.$$

Quando aproximamos $sen(x)$ por um polinômio de grau 5, $P_5(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Quando aproximamos $sen(x)$ por um polinômio de grau 7, $P_7(x)$, temos:

$$f(x) \approx P_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}, \ \dots$$ e assim por diante.

Exemplos

Exemplo 1b Calcule $sen(0,35)$ aproximando-o de um polinômio de grau 3 em torno de 0.

No slide anterior, tomando $x = 0,35$, temos:

$$P_3(0,35) = 0,35 - \frac{(0,35)^3}{3!} \approx 0,34285.$$

Logo, o erro de truncamento cometido nessa aproximação, em módulo, é:

$$|R_3(0,35)| = |sen(0,35) - P_3(0,35)| \approx 5 \times 10^{-5}.$$

Exemplos

Exemplo 1b Calcule $sen(0,35)$ aproximando-o de um polinômio de grau 3 em torno de 0.

No slide anterior, tomando $x = 0,35$, temos:

$$P_3(0,35) = 0,35 - \frac{(0,35)^3}{3!} \approx 0,34285.$$

Logo, o erro de truncamento cometido nessa aproximação, em módulo, é:

$$|R_3(0,35)| = |sen(0,35) - P_3(0,35)| \approx 5 \times 10^{-5}.$$

Exemplos

Exemplo 1b Calcule $sen(0,35)$ aproximando-o de um polinômio de grau 3 em torno de 0.

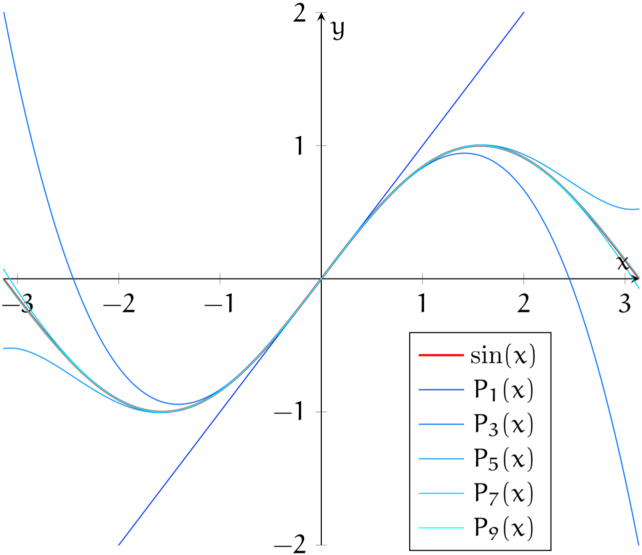
No slide anterior, tomando $x = 0,35$, temos:

$$P_3(0,35) = 0,35 - \frac{(0,35)^3}{3!} \approx 0,34285.$$

Logo, o erro de truncamento cometido nessa aproximação, em módulo, é:

$$|R_3(0,35)| = |sen(0,35) - P_3(0,35)| \approx 5 \times 10^{-5}.$$

Exemplos



Erro de truncamento da série de Taylor

Vimos anteriormente que $f(x)$ pode ser reescrito como

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

ou seja, a soma de sua aproximação por $P_n(x)$ com o valor residual $R_n(x)$, dado por:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + \frac{f^{(n+2)}(x_0)}{(n+2)!}(x - x_0)^{n+2} + \dots$$

Taylor também mostrou que o somatório infinito acima equivale a

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}$$

onde $\xi \in (x_0, x)$, se $x \geq x_0$ ou $\xi \in (x, x_0)$, se $x \leq x_0$. Isso é o mesmo que dizer $|x_0 - \xi| \leq |x - x_0|$.

Este valor residual é o erro de truncamento cometido ao se aproximar $f(x)$ por um polinômio de grau n, $P_n(x)$, em torno de x_0 na série de Taylor.

Erro de truncamento da série de Taylor

Vimos anteriormente que $f(x)$ pode ser reescrito como

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

ou seja, a soma de sua aproximação por $P_n(x)$ com o valor residual $R_n(x)$, dado por:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + \frac{f^{(n+2)}(x_0)}{(n+2)!}(x - x_0)^{n+2} + \dots$$

Taylor também mostrou que o somatório infinito acima equivale a

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}$$

onde $\xi \in (x_0, x)$, se $x \geq x_0$ ou $\xi \in (x, x_0)$, se $x \leq x_0$. Isso é o mesmo que dizer $|x_0 - \xi| \leq |x - x_0|$.

Este valor residual é o erro de truncamento cometido ao se aproximar $f(x)$ por um polinômio de grau n, $P_n(x)$, em torno de x_0 na série de Taylor.

Erro de truncamento da série de Taylor

Vimos anteriormente que $f(x)$ pode ser reescrito como

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

ou seja, a soma de sua aproximação por $P_n(x)$ com o valor residual $R_n(x)$, dado por:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + \frac{f^{(n+2)}(x_0)}{(n+2)!}(x - x_0)^{n+2} + \dots$$

Taylor também mostrou que o somatório infinito acima equivale a

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}$$

onde $\xi \in (x_0, x)$, se $x \geq x_0$ ou $\xi \in (x, x_0)$, se $x \leq x_0$. Isso é o mesmo que dizer $|x_0 - \xi| \leq |x - x_0|$.

Este valor residual é o erro de truncamento cometido ao se aproximar $f(x)$ por um polinômio de grau n, $P_n(x)$, em torno de x_0 na série de Taylor.

Erro de truncamento da série de Taylor

Vimos anteriormente que $f(x)$ pode ser reescrito como

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

ou seja, a soma de sua aproximação por $P_n(x)$ com o valor residual $R_n(x)$, dado por:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + \frac{f^{(n+2)}(x_0)}{(n+2)!}(x-x_0)^{n+2} + \dots$$

Taylor também mostrou que o somatório infinito acima equivale a

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}$$

onde $\xi \in (x_0, x)$, se $x \geq x_0$ ou $\xi \in (x, x_0)$, se $x \leq x_0$. Isso é o mesmo que dizer $|x_0 - \xi| \leq |x - x_0|$.

Este valor residual é o erro de truncamento cometido ao se aproximar $f(x)$ por um polinômio de grau n, $P_n(x)$, em torno de x_0 na série de Taylor.

Erro de truncamento da série de Taylor

Definição (Erro de truncamento de uma série de Taylor)

O erro de truncamento de uma série de Taylor ao aproximar $f(x)$ por um polinômio de grau n, $P_n(x)$, em torno de x_0 é dado por

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)},$$

onde $\xi \in (x_0, x)$ ou $\xi \in (x, x_0)$. Ou seja, $|x_0 - \xi| \leq |x - x_0|$.

Limitante superior do erro de truncamento

Como geralmente o ponto ξ não é conhecido exatamente, usa-se na prática uma cota superior do erro de truncamento dada por

Definição (Limitante ou cota superior do erro de truncamento de uma série de Taylor)

$$|R_n(x)| \leq |\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|x - x_0|^{(n+1)},$$

onde $M_{n+1} = \max_{|x_0-\xi|\leq|x-x_0|} |f^{(n+1)}(\xi)|$

Lembre-se de que

$M_{n+1} = \max_{|x_0-\xi|\leq|x-x_0|} |f^{(n+1)}(\xi)|$ é o mesmo que $\max |f^{(n+1)}(\xi)|$ quando $x_0 < \xi < x$ ou $x < \xi < x_0$.

Limitante superior do erro de truncamento

Como geralmente o ponto ξ não é conhecido exatamente, usa-se na prática uma cota superior do erro de truncamento dada por

Definição (Limitante ou cota superior do erro de truncamento de uma série de Taylor)

$$|R_n(x)| \leq |\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|x - x_0|^{(n+1)},$$

onde $M_{n+1} = \max_{|x_0-\xi|\leq|x-x_0|} |f^{(n+1)}(\xi)|$

Lembre-se de que

$M_{n+1} = \max_{|x_0-\xi|\leq|x-x_0|} |f^{(n+1)}(\xi)|$ é o mesmo que $\max |f^{(n+1)}(\xi)|$ quando $x_0 < \xi < x$ ou $x < \xi < x_0$.

Limitante superior do erro de truncamento

Exemplo 2: Encontre um limitante superior do erro para o cálculo de $sen(0,35)$, em torno do ponto $x0 = 0$, aproximando a função por um polinômio de grau 3.

Na aproximação de $sen(x)$ por $P_3(x)$, temos:

$$sen(x) = P_3(x) + R_3(x),$$

onde

$$R_3(x) = \frac{f^{(iv)}(\xi)}{4!}x^4.$$

Calculando $f^{(iv)}(\xi)$ para $\xi = 0$ e $\xi = 0,35$, obtemos

$$f^{(iv)}(0) = sen(0) = 0;\ f^{(iv)}(0,35) = sen(0,35) \approx 0,3429.$$

Então,
$M_4 = \max_{0<\xi<0,35} \mid f^{(4)}(\xi) \mid = 0,3429$

$$\Rightarrow \mid R_3(0,35) \mid \leq \frac{M_4}{4!} \mid 0,35 - 0 \mid^4 = \frac{0,3429}{4!} \mid 0,35 \mid^4 \approx 2,1440 \times 10^{-4}.$$

Limitante superior do erro de truncamento

Exemplo 2: Encontre um limitante superior do erro para o cálculo de $sen(0,35)$, em torno do ponto $x0 = 0$, aproximando a função por um polinômio de grau 3.

Na aproximação de $sen(x)$ por $P_3(x)$, temos:

$$sen(x) = P_3(x) + R_3(x),$$

onde

$$R_3(x) = \frac{f^{(iv)}(\xi)}{4!}x^4.$$

Calculando $f^{(iv)}(\xi)$ para $\xi = 0$ e $\xi = 0,35$, obtemos

$$f^{(iv)}(0) = sen(0) = 0; \; f^{(iv)}(0,35) = sen(0,35) \approx 0,3429.$$

Então,
$M_4 = \max_{0<\xi<0,35} | f^{(4)}(\xi) | = 0,3429$

$$\Rightarrow | R_3(0,35) | \leq \frac{M_4}{4!} | 0,35 - 0 |^4 = \frac{0,3429}{4!} | 0,35 |^4 \approx 2,1440 \times 10^{-4}.$$

Limitante superior do erro de truncamento

Exemplo 2: Encontre um limitante superior do erro para o cálculo de $sen(0,35)$, em torno do ponto $x0 = 0$, aproximando a função por um polinômio de grau 3.

Na aproximação de $sen(x)$ por $P_3(x)$, temos:

$$sen(x) = P_3(x) + R_3(x),$$

onde

$$R_3(x) = \frac{f^{(iv)}(\xi)}{4!}x^4.$$

Calculando $f^{(iv)}(\xi)$ para $\xi = 0$ e $\xi = 0,35$, obtemos

$f^{(iv)}(0) = sen(0) = 0$; $f^{(iv)}(0,35) = sen(0,35) \approx 0,3429.$

Então,
$M_4 = \max_{0<\xi<0,35} | f^{(4)}(\xi) | = 0,3429$

$$\Rightarrow | R_3(0,35) | \leq \frac{M_4}{4!} | 0,35 - 0 |^4 = \frac{0,3429}{4!} | 0,35 |^4 \approx 2,1440 \times 10^{-4}.$$

Limitante superior do erro de truncamento

Exemplo 2: Encontre um limitante superior do erro para o cálculo de $sen(0,35)$, em torno do ponto $x0 = 0$, aproximando a função por um polinômio de grau 3.

Na aproximação de $sen(x)$ por $P_3(x)$, temos:

$sen(x) = P_3(x) + R_3(x)$,

onde

$$R_3(x) = \frac{f^{(iv)}(\xi)}{4!}x^4.$$

Calculando $f^{(iv)}(\xi)$ para $\xi = 0$ e $\xi = 0,35$, obtemos

$f^{(iv)}(0) = sen(0) = 0$; $f^{(iv)}(0,35) = sen(0,35) \approx 0,3429$.

Então,
$M_4 = \max_{0<\xi<0,35} \mid f^{(4)}(\xi) \mid = 0,3429$

$$\Rightarrow \mid R_3(0,35) \mid \leq \frac{M_4}{4!} \mid 0,35 - 0 \mid^4 = \frac{0,3429}{4!} \mid 0,35 \mid^4 \approx 2,1440 \times 10^{-4}.$$

Limitante superior do erro de truncamento

Exemplo 2: Encontre um limitante superior do erro para o cálculo de $sen(0,35)$, em torno do ponto $x0 = 0$, aproximando a função por um polinômio de grau 3.

Na aproximação de $sen(x)$ por $P_3(x)$, temos:

$$sen(x) = P_3(x) + R_3(x),$$

onde

$$R_3(x) = \frac{f^{(iv)}(\xi)}{4!}x^4.$$

Calculando $f^{(iv)}(\xi)$ para $\xi = 0$ e $\xi = 0,35$, obtemos

$$f^{(iv)}(0) = sen(0) = 0;\ f^{(iv)}(0,35) = sen(0,35) \approx 0,3429.$$

Então,
$M_4 = \max_{0<\xi<0,35} | f^{(4)}(\xi) | = 0,3429$

$$\Rightarrow | R_3(0,35) | \leq \frac{M_4}{4!}| 0,35 - 0 |^4 = \frac{0,3429}{4!}| 0,35 |^4 \approx 2,1440 \times 10^{-4}.$$

Limitante superior do erro de truncamento

Exemplo 2: Encontre um limitante superior do erro para o cálculo de $sen(0,35)$, em torno do ponto $x0 = 0$, aproximando a função por um polinômio de grau 3.

Na aproximação de $sen(x)$ por $P_3(x)$, temos:

$sen(x) = P_3(x) + R_3(x)$,

onde

$$R_3(x) = \frac{f^{(iv)}(\xi)}{4!}x^4.$$

Calculando $f^{(iv)}(\xi)$ para $\xi = 0$ e $\xi = 0,35$, obtemos

$f^{(iv)}(0) = sen(0) = 0$; $f^{(iv)}(0,35) = sen(0,35) \approx 0,3429$.

Então,
$M_4 = \max_{0<\xi<0,35} \mid f^{(4)}(\xi) \mid = 0,3429$

$$\Rightarrow \mid R_3(0,35) \mid \leq \frac{M_4}{4!} \mid 0,35 - 0 \mid^4 = \frac{0,3429}{4!} \mid 0,35 \mid^4 \approx 2,1440 \times 10^{-4}.$$

Limitante superior do erro de truncamento

Vimos anteriormente que $|R_3(0,35)| \approx 5 \times 10^{-5}$. Logo, este erro está compatível com o limitante (ou a cota) superior do erro de truncamento encontrado, pois $5 \times 10^{-5} < 2,1440 \times 10^{-4}$.

Exemplo 3: Qual deve ser o grau mínimo do polinômio de Taylor para obter uma aproximação de $sen(0,35)$ em torno de $x_0 = 0$ com erro inferior a 10^{-8}?

O limitante do erro para a aproximação de uma função $f(x)$ por um polinômio de grau n da série de Taylor em torno de $x_0 = 0$ é calculado por

$$|R_n(x)| \leq \frac{\max\limits_{\xi \in (0,0,35)} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Com $x = 0.35$, temos

$$|R_n(0.35)| \leq \frac{\max\limits_{\xi \in (0,0,35)} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} (0,35)^{n+1}.$$

Limitante superior do erro de truncamento

Vimos anteriormente que $|R_3(0,35)| \approx 5 \times 10^{-5}$. Logo, este erro está compatível com o limitante (ou a cota) superior do erro de truncamento encontrado, pois $5 \times 10^{-5} < 2,1440 \times 10^{-4}$.

Exemplo 3: Qual deve ser o grau mínimo do polinômio de Taylor para obter uma aproximação de $sen(0,35)$ em torno de $x_0 = 0$ com erro inferior a 10^{-8}?

O limitante do erro para a aproximação de uma função $f(x)$ por um polinômio de grau n da série de Taylor em torno de $x_0 = 0$ é calculado por

$$|R_n(x)| \leq \frac{\max\limits_{\xi \in (0,0,35)} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Com $x = 0.35$, temos

$$|R_n(0.35)| \leq \frac{\max\limits_{\xi \in (0,0,35)} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} (0,35)^{n+1}.$$

Limitante superior do erro de truncamento

Vimos anteriormente que $|R_3(0,35)| \approx 5 \times 10^{-5}$. Logo, este erro está compatível com o limitante (ou a cota) superior do erro de truncamento encontrado, pois $5 \times 10^{-5} < 2,1440 \times 10^{-4}$.

Exemplo 3: Qual deve ser o grau mínimo do polinômio de Taylor para obter uma aproximação de $sen(0,35)$ em torno de $x_0 = 0$ com erro inferior a 10^{-8}?

O limitante do erro para a aproximação de uma função $f(x)$ por um polinômio de grau n da série de Taylor em torno de $x_0 = 0$ é calculado por

$$|R_n(x)| \leq \frac{\max\limits_{\xi \in (0,0,35)} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Com $x = 0.35$, temos

$$|R_n(0.35)| \leq \frac{\max\limits_{\xi \in (0,0,35)} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} (0,35)^{n+1}.$$

Limitante superior do erro de truncamento

Vimos anteriormente que $|R_3(0,35)| \approx 5 \times 10^{-5}$. Logo, este erro está compatível com o limitante (ou a cota) superior do erro de truncamento encontrado, pois $5 \times 10^{-5} < 2,1440 \times 10^{-4}$.

Exemplo 3: Qual deve ser o grau mínimo do polinômio de Taylor para obter uma aproximação de $sen(0,35)$ em torno de $x_0 = 0$ com erro inferior a 10^{-8}?

O limitante do erro para a aproximação de uma função $f(x)$ por um polinômio de grau n da série de Taylor em torno de $x_0 = 0$ é calculado por

$$|R_n(x)| \leq \frac{\max\limits_{\xi \in (0,0,35)} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Com $x = 0.35$, temos

$$|R_n(0.35)| \leq \frac{\max\limits_{\xi \in (0,0,35)} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} (0,35)^{n+1}.$$

Limitante superior do erro de truncamento

Vimos anteriormente que $sen(x)$, em torno de $x_0 = 0$, é aproximada por uma série de Taylor cujas potências possuem grau ímpar, pois as derivadas de ordem par quando $x_0 = 0$ são todas nulas:

$$|f^0(0)| = |f''(0)| = |f^{(iv)}(0)| = |f^{(vi)}(0)| = \cdots = |sen(0)| = 0,$$

e as derivadas de ordem ímpar quando $x_0 = 0$ são, em módulo:

$$|f'(0)| = |f'''(0)| = |f^{(v)}(0)| = |f^{(vii)}(0)| = \cdots = |\cos(0)| = 1$$

Se $|f^{(n+1)}(\xi)| = |sen(\xi)|$, então:

$$M_{n+1} = \max_{\xi \in (0,0,35)} \{|sen(0)|, |sen(0,35)|\} = \max\{0;\ 0,3429\} = 0,3429.$$

Se $|f^{(n+1)}(\xi)| = |\cos(\xi)|$, então:

$$M_{n+1} = \max_{\xi \in (0,0,35)} \{|\cos(0)|, |\cos(0,35)|\} = \max\{1;\ 0,9394\} = 1 > 0,3429.$$

$$\Rightarrow M_{n+1} = \max_{\xi \in (0,0,35)} |f^{(n+1)}(\xi)| = 1.$$

Limitante superior do erro de truncamento

Vimos anteriormente que $sen(x)$, em torno de $x_0 = 0$, é aproximada por uma série de Taylor cujas potências possuem grau ímpar, pois as derivadas de ordem par quando $x_0 = 0$ são todas nulas:

$$|f^0(0)| = |f''(0)| = |f^{(iv)}(0)| = |f^{(vi)}(0)| = \cdots = |sen(0)| = 0,$$

e as derivadas de ordem ímpar quando $x_0 = 0$ são, em módulo:

$$|f'(0)| = |f'''(0)| = |f^{(v)}(0)| = |f^{(vii)}(0)| = \cdots = |\cos(0)| = 1$$

Se $|f^{(n+1)}(\xi)| = |sen(\xi)|$, então:

$$M_{n+1} = \max_{\xi \in (0,0,35)} \{|sen(0)|, |sen(0,35)|\} = \max\{0;\ 0,3429\} = 0,3429.$$

Se $|f^{(n+1)}(\xi)| = |\cos(\xi)|$, então:

$$M_{n+1} = \max_{\xi \in (0,0,35)} \{|\cos(0)|, |\cos(0,35)|\} = \max\{1;\ 0,9394\} = 1 > 0,3429.$$

$$\Rightarrow M_{n+1} = \max_{\xi \in (0,0,35)} |f^{(n+1)}(\xi)| = 1.$$

Limitante superior do erro de truncamento

Vimos anteriormente que $sen(x)$, em torno de $x_0 = 0$, é aproximada por uma série de Taylor cujas potências possuem grau ímpar, pois as derivadas de ordem par quando $x_0 = 0$ são todas nulas:

$$|f^0(0)| = |f''(0)| = |f^{(iv)}(0)| = |f^{(vi)}(0)| = \cdots = |sen(0)| = 0,$$

e as derivadas de ordem ímpar quando $x_0 = 0$ são, em módulo:

$$|f'(0)| = |f'''(0)| = |f^{(v)}(0)| = |f^{(vii)}(0)| = \cdots = |cos(0)| = 1$$

Se $|f^{(n+1)}(\xi)| = |sen(\xi)|$, então:

$$M_{n+1} = \max_{\xi \in (0, 0,35)} \{|sen(0)|, |sen(0,35)|\} = \max\{0;\ 0,3429\} = 0,3429.$$

Se $|f^{(n+1)}(\xi)| = |cos(\xi)|$, então:

$$M_{n+1} = \max_{\xi \in (0, 0,35)} \{|cos(0)|, |cos(0,35)|\} = \max\{1;\ 0,9394\} = 1 > 0,3429.$$

$$\Rightarrow M_{n+1} = \max_{\xi \in (0, 0,35)} |f^{(n+1)}(\xi)| = 1.$$

Limitante superior do erro de truncamento

Vimos anteriormente que $sen(x)$, em torno de $x_0 = 0$, é aproximada por uma série de Taylor cujas potências possuem grau ímpar, pois as derivadas de ordem par quando $x_0 = 0$ são todas nulas:

$$|f^0(0)| = |f''(0)| = |f^{(iv)}(0)| = |f^{(vi)}(0)| = \cdots = |sen(0)| = 0,$$

e as derivadas de ordem ímpar quando $x_0 = 0$ são, em módulo:

$$|f'(0)| = |f'''(0)| = |f^{(v)}(0)| = |f^{(vii)}(0)| = \cdots = |cos(0)| = 1$$

Se $|f^{(n+1)}(\xi)| = |sen(\xi)|$, então:

$$M_{n+1} = \max_{\xi \in (0, 0,35)} \{|sen(0)|, |sen(0,35)|\} = \max\{0;\ 0,3429\} = 0,3429.$$

Se $|f^{(n+1)}(\xi)| = |cos(\xi)|$, então:

$$M_{n+1} = \max_{\xi \in (0, 0,35)} \{|cos(0)|, |cos(0,35)|\} = \max\{1;\ 0,9394\} = 1 > 0,3429.$$

$$\Rightarrow M_{n+1} = \max_{\xi \in (0, 0,35)} |f^{(n+1)}(\xi)| = 1.$$

Limitante superior do erro de truncamento

Vimos anteriormente que $sen(x)$, em torno de $x_0 = 0$, é aproximada por uma série de Taylor cujas potências possuem grau ímpar, pois as derivadas de ordem par quando $x_0 = 0$ são todas nulas:

$$|f^0(0)| = |f''(0)| = |f^{(iv)}(0)| = |f^{(vi)}(0)| = \cdots = |sen(0)| = 0,$$

e as derivadas de ordem ímpar quando $x_0 = 0$ são, em módulo:

$$|f'(0)| = |f'''(0)| = |f^{(v)}(0)| = |f^{(vii)}(0)| = \cdots = |cos(0)| = 1$$

Se $|f^{(n+1)}(\xi)| = |sen(\xi)|$, então:

$$M_{n+1} = \max_{\xi \in (0,0,35)} \{|sen(0)|, |sen(0,35)|\} = \max\{0;\ 0,3429\} = 0,3429.$$

Se $|f^{(n+1)}(\xi)| = |cos(\xi)|$, então:

$$M_{n+1} = \max_{\xi \in (0,0,35)} \{|cos(0)|, |cos(0,35)|\} = \max\{1;\ 0,9394\} = 1 > 0,3429.$$

$$\Rightarrow M_{n+1} = \max_{\xi \in (0,0,35)} |f^{(n+1)}(\xi)| = 1.$$

Limitante superior do erro de truncamento

Vimos anteriormente que $sen(x)$, em torno de $x_0 = 0$, é aproximada por uma série de Taylor cujas potências possuem grau ímpar, pois as derivadas de ordem par quando $x_0 = 0$ são todas nulas:

$$|f^0(0)| = |f''(0)| = |f^{(iv)}(0)| = |f^{(vi)}(0)| = \cdots = |sen(0)| = 0,$$

e as derivadas de ordem ímpar quando $x_0 = 0$ são, em módulo:

$$|f'(0)| = |f'''(0)| = |f^{(v)}(0)| = |f^{(vii)}(0)| = \cdots = |\cos(0)| = 1$$

Se $|f^{(n+1)}(\xi)| = |sen(\xi)|$, então:

$$M_{n+1} = \max_{\xi \in (0,0,35)} \{|sen(0)|, |sen(0,35)|\} = \max\{0;\ 0,3429\} = 0,3429.$$

Se $|f^{(n+1)}(\xi)| = |\cos(\xi)|$, então:

$$M_{n+1} = \max_{\xi \in (0,0,35)} \{|\cos(0)|, |\cos(0,35)|\} = \max\{1;\ 0,9394\} = 1 > 0,3429.$$

$$\Rightarrow M_{n+1} = \max_{\xi \in (0,0,35)} |f^{(n+1)}(\xi)| = 1.$$

Limitante superior do erro de truncamento

Logo, para o limitante superior do erro de truncamento ser menor que 10^{-8}, temos:

$$|R_{n+1}(0,35)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(0,35)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}(0,35)^{n+1} < 10^{-8}.$$

Testando a calculadora para valores ímpares $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$, encontramos

$|R_1(0.35)\ | \leq 0,06125$ (maior que 10^{-8}).

$|R_3(0.35)\ | \leq 6,2526 \times 10^{-4}$ (maior que 10^{-8}).

$|R_5(0.35)\ | \leq 2,5531 \times 10^{-6}$ (maior que 10^{-8}).

$|R_7(0.35)\ | \leq 5,585 \times 10^{-9} < 10^{-8}$.

$\Rightarrow n_{min} = 7$.

Observação 1

As **séries de Maclaurin** são um caso particular da Série de Taylor, considerando a centralização da aproximação em torno de $x_0 = 0$, como vimos no exemplo.

Limitante superior do erro de truncamento

Logo, para o limitante superior do erro de truncamento ser menor que 10^{-8}, temos:

$$|R_{n+1}(0,35)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(0,35)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}(0,35)^{n+1} < 10^{-8}.$$

Testando a calculadora para valores ímpares $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$, encontramos

$|R_1(0.35)\ | \leq 0,06125$ (maior que 10^{-8}).

$|R_3(0.35)\ | \leq 6,2526 \times 10^{-4}$ (maior que 10^{-8}).

$|R_5(0.35)\ | \leq 2,5531 \times 10^{-6}$ (maior que 10^{-8}).

$|R_7(0.35)\ | \leq 5,585 \times 10^{-9} < 10^{-8}$.

$\Rightarrow n_{min} = 7$.

Observação 1

As **séries de Maclaurin** são um caso particular da Série de Taylor, considerando a centralização da aproximação em torno de $x_0 = 0$, como vimos no exemplo.

Limitante superior do erro de truncamento

Logo, para o limitante superior do erro de truncamento ser menor que 10^{-8}, temos:

$$|R_{n+1}(0,35)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(0,35)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}(0,35)^{n+1} < 10^{-8}.$$

Testando a calculadora para valores ímpares $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$, encontramos

$|R_1(0.35)| \leq 0,06125$ (maior que 10^{-8}).

$|R_3(0.35)| \leq 6,2526 \times 10^{-4}$ (maior que 10^{-8}).

$|R_5(0.35)| \leq 2,5531 \times 10^{-6}$ (maior que 10^{-8}).

$|R_7(0.35)| \leq 5,585 \times 10^{-9} < 10^{-8}$.

$\Rightarrow n_{min} = 7$.

Observação 1

As **séries de Maclaurin** são um caso particular da Série de Taylor, considerando a centralização da aproximação em torno de $x_0 = 0$, como vimos no exemplo.

Limitante superior do erro de truncamento

Logo, para o limitante superior do erro de truncamento ser menor que 10^{-8}, temos:

$$|R_{n+1}(0,35)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(0,35)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}(0,35)^{n+1} < 10^{-8}.$$

Testando a calculadora para valores ímpares $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$, encontramos

$|R_1(0.35)| \leq 0,06125$ (maior que 10^{-8}).

$|R_3(0.35)| \leq 6,2526 \times 10^{-4}$ (maior que 10^{-8}).

$|R_5(0.35)| \leq 2,5531 \times 10^{-6}$ (maior que 10^{-8}).

$|R_7(0.35)| \leq 5,585 \times 10^{-9} < 10^{-8}$.

$\Rightarrow n_{min} = 7$.

Observação 1

As **séries de Maclaurin** são um caso particular da Série de Taylor, considerando a centralização da aproximação em torno de $x_0 = 0$, como vimos no exemplo.

Limitante superior do erro de truncamento

Logo, para o limitante superior do erro de truncamento ser menor que 10^{-8}, temos:

$$|R_{n+1}(0,35)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(0,35)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}(0,35)^{n+1} < 10^{-8}.$$

Testando a calculadora para valores ímpares $n = 1, 3, 5, 7, \ldots,$ encontramos

$|R_1(0.35)| \leq 0,06125$ (maior que 10^{-8}).

$|R_3(0.35)| \leq 6,2526 \times 10^{-4}$ (maior que 10^{-8}).

$|R_5(0.35)| \leq 2,5531 \times 10^{-6}$ (maior que 10^{-8}).

$|R_7(0.35)| \leq 5,585 \times 10^{-9} < 10^{-8}$.

$\Rightarrow n_{min} = 7$.

Observação 1

As **séries de Maclaurin** são um caso particular da Série de Taylor, considerando a centralização da aproximação em torno de $x_0 = 0$, como vimos no exemplo.

Limitante superior do erro de truncamento

Logo, para o limitante superior do erro de truncamento ser menor que 10^{-8}, temos:

$$|R_{n+1}(0,35)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(0,35)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}(0,35)^{n+1} < 10^{-8}.$$

Testando a calculadora para valores ímpares $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$, encontramos

$|R_1(0.35)| \leq 0,06125$ (maior que 10^{-8}).

$|R_3(0.35)| \leq 6,2526 \times 10^{-4}$ (maior que 10^{-8}).

$|R_5(0.35)| \leq 2,5531 \times 10^{-6}$ (maior que 10^{-8}).

$|R_7(0.35)| \leq 5,585 \times 10^{-9} < 10^{-8}$.

$\Rightarrow n_{min} = 7.$

Observação 1

As **séries de Maclaurin** são um caso particular da Série de Taylor, considerando a centralização da aproximação em torno de $x_0 = 0$, como vimos no exemplo.

Limitante superior do erro de truncamento

Logo, para o limitante superior do erro de truncamento ser menor que 10^{-8}, temos:

$$|R_{n+1}(0,35)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(0,35)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}(0,35)^{n+1} < 10^{-8}.$$

Testando a calculadora para valores ímpares $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$, encontramos

$|R_1(0.35)\ | \leq 0,06125$ (maior que 10^{-8}).

$|R_3(0.35)\ | \leq 6,2526 \times 10^{-4}$ (maior que 10^{-8}).

$|R_5(0.35)\ | \leq 2,5531 \times 10^{-6}$ (maior que 10^{-8}).

$|R_7(0.35)\ | \leq 5,585 \times 10^{-9} < 10^{-8}$.

$\Rightarrow n_{\min} = 7.$

Observação 1

As **séries de Maclaurin** são um caso particular da Série de Taylor, considerando a centralização da aproximação em torno de $x_0 = 0$, como vimos no exemplo.

Limitante superior do erro de truncamento

Logo, para o limitante superior do erro de truncamento ser menor que 10^{-8}, temos:

$$|R_{n+1}(0,35)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(0,35)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}(0,35)^{n+1} < 10^{-8}.$$

Testando a calculadora para valores ímpares $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$, encontramos

$|R_1(0.35)| \leq 0,06125$ (maior que 10^{-8}).

$|R_3(0.35)| \leq 6,2526 \times 10^{-4}$ (maior que 10^{-8}).

$|R_5(0.35)| \leq 2,5531 \times 10^{-6}$ (maior que 10^{-8}).

$|R_7(0.35)| \leq 5,585 \times 10^{-9} < 10^{-8}$.

$\Rightarrow n_{\min} = 7.$

Observação 1

As **séries de Maclaurin** são um caso particular da Série de Taylor, considerando a centralização da aproximação em torno de $x_0 = 0$, como vimos no exemplo.

Limitante superior do erro de truncamento

Logo, para o limitante superior do erro de truncamento ser menor que 10^{-8}, temos:

$$|R_{n+1}(0,35)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(0,35)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}(0,35)^{n+1} < 10^{-8}.$$

Testando a calculadora para valores ímpares $n = 1, 3, 5, 7, \ldots,$ encontramos

$|R_1(0.35)| \leq 0,06125$ (maior que 10^{-8}).

$|R_3(0.35)| \leq 6,2526 \times 10^{-4}$ (maior que 10^{-8}).

$|R_5(0.35)| \leq 2,5531 \times 10^{-6}$ (maior que 10^{-8}).

$|R_7(0.35)| \leq 5,585 \times 10^{-9} < 10^{-8}$.

$\Rightarrow n_{min} = 7.$

Observação 1

As **séries de Maclaurin** são um caso particular da Série de Taylor, considerando a centralização da aproximação em torno de $x_0 = 0$, como vimos no exemplo.

Limitante superior do erro de truncamento

Logo, para o limitante superior do erro de truncamento ser menor que 10^{-8}, temos:

$$|R_{n+1}(0,35)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(0,35)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}(0,35)^{n+1} < 10^{-8}.$$

Testando a calculadora para valores ímpares $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$, encontramos

$|R_1(0.35)\ | \leq 0,06125$ (maior que 10^{-8}).

$|R_3(0.35)\ | \leq 6,2526 \times 10^{-4}$ (maior que 10^{-8}).

$|R_5(0.35)\ | \leq 2,5531 \times 10^{-6}$ (maior que 10^{-8}).

$|R_7(0.35)\ | \leq 5,585 \times 10^{-9} < 10^{-8}$.

$\Rightarrow n_{\text{min}} = 7$.

Observação 1

As **séries de Maclaurin** são um caso particular da Série de Taylor, considerando a centralização da aproximação em torno de $x_0 = 0$, como vimos no exemplo.

Exercícios

1. Encontre a série de Maclaurin da função $f(x) = e^x$ (isto é, encontre a série de Taylor da função $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$).
2. Encontre uma aproximação para $P_7(2)$.
3. Encontre o grau mínimo de $P_n(2)$ para obter um erro de truncamento menor que 10^{-4}.

- Santos, Vitoriano R.B. **Curso de Cálculo Numérico**, Rio de Janeiro, LTC, 4a. Ed., 1982.
- Burden, Faires **Numerical Analysis**, 7th edition, Thomson Learning, 2001.
- Lima, Elon Lages **Curso de Análise Vol. 1**, 15a. edição, IMPA, 2019.