CÁLCULO NUMÉRICO
UERJ

Interpolação Polinomial de Lagrange

Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br
IME-UERJ

Sumário

Introdução

Suponha que $f(x)$ é uma função contínua com infinitas derivadas.

Interpolar $f(x)$ por um polinômio de grau n, $P_n(x)$, é aproximar $f(x)$ por $P_n(x)$ em $(n+1)$ pontos distintos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, ..., $(x_n, f(x_n))$ tais que:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= P_n(x_0), \\ f(x_1) &= P_n(x_1), \\ &\vdots \\ f(x_n) &= P_n(x_n), \end{aligned}$$

onde x_0, x_1, ..., x_n, são chamados *nós da interpolação*.

Pode ser provado que este polinômio $P_n(x)$ sempre existe e é único.

Teorema (Existência e unicidade)

Existe um único polinômio $P_n(x)$, de grau n, tal que:
$P_n(x_k) = f(x_k), k = 0, 1, 2, \ldots, n$, desde que $x_k \neq x_j$, para todo $k \neq j$.

Forma de Lagrange - Interpolação linear

1. Reta (polinômio de grau 1)

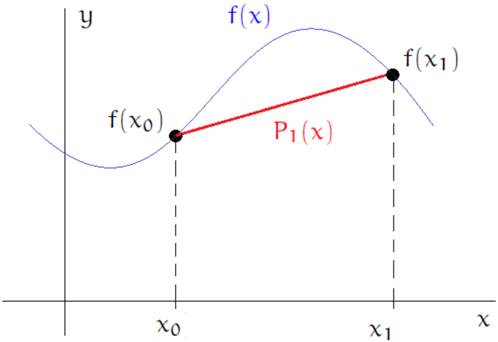

Figura: Interpolação - $P_1(x)$

Vamos interpolar $f(x)$ por uma reta $P_1(x)$ em dois pontos: $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$.

Ou seja,
$P_1(x_0) = f(x_0)$;
$P_1(x_1) = f(x_1)$.

Sabemos que a equação geral da reta é:
$P_1(x) = ax + b$

Então, nos nós de interpolação, temos:
$P_1(x_0) = f(x_0) = ax_0 + b$ (1)
$P_1(x_1) = f(x_1) = ax_1 + b$ (2)

Forma de Lagrange - Interpolação linear

Subtraindo (2) de (1), obtemos o coeficiente angular a da reta $P_1(x)$:

$$f(x_0) - f(x_1) = a(x_0 - x_1) \Rightarrow a = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \text{ (3)}$$

Para achar o coeficiente linear b, substituímos (3) na equação (1). Temos em (1),

$$f(x_0) = ax_0 + b \Rightarrow b = f(x_0) - ax_0 \text{ (4)}$$

Assim, substituindo o valor de a da equação (3) na equação (4), obtemos:

$$b = f(x_0) - \left(\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}\right) x_0$$

Desenvolvendo esta equação com $f(x_0)$ e $f(x_1)$ em evidência, obtemos b:

$$b = \left(\frac{-x_1}{x_0 - x_1}\right) f(x_0) + \left(\frac{x_0}{x_0 - x_1}\right) f(x_1) \text{ (5)}$$

Forma de Lagrange - Interpolação linear

Agora, vamos substituir a e b encontrados em (3) e (5) na equação da reta. Assim, obtemos:

$$P_1(x) = ax + b$$

$$P_1(x) = \left(\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}\right) x + \left(\frac{-x_1}{x_0 - x_1}\right) f(x_0) + \left(\frac{x_0}{x_0 - x_1}\right) f(x_1)$$

Organizando os termos desta equação com $f(x_0)$ e $f(x_1)$ em evidência, obtemos:

$$P_1(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) f(x_0) + \left(\frac{-x + x_0}{x_0 - x_1}\right) f(x_1)$$

Como $\dfrac{-x + x_0}{x_0 - x_1} = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$, podemos reescrever $P_1(x)$ assim:

$$P_1(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) f(x_0) + \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) f(x_1)$$

Forma de Lagrange - Interpolação linear

$$P_1(x) = \underbrace{\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)}_{L_0(x)} f(x_0) + \underbrace{\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)}_{L_1(x)} f(x_1)$$

Isso significa que podemos construir uma base para $P_1(x)$ formada pelos polinômios

$L_0(x)$, $L_1(x)$

Forma de Lagrange - Interpolação linear

$$P_1(x) = \underbrace{\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)}_{L_0(x)} f(x_0) + \underbrace{\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)}_{L_1(x)} f(x_1)$$

Isso significa que podemos construir uma base para $P_1(x)$ formada pelos polinômios

$$L_0(x) = \frac{}{x_0 -}, \; L_1(x) = \frac{}{x_1 -}$$

Forma de Lagrange - Interpolação linear

$$P_1(x) = \underbrace{\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)}_{L_0(x)} f(x_0) + \underbrace{\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)}_{L_1(x)} f(x_1)$$

Isso significa que podemos construir uma base para $P_1(x)$ formada pelos polinômios

$$L_0(x) = \frac{\quad}{x_0 - x_1},\; L_1(x) = \frac{\quad}{x_1 - x_0}$$

Forma de Lagrange - Interpolação linear

$$P_1(x) = \underbrace{\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)}_{L_0(x)} f(x_0) + \underbrace{\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)}_{L_1(x)} f(x_1)$$

Isso significa que podemos construir uma base para $P_1(x)$ formada pelos polinômios

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \; L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$

que são **polinômios de Lagrange de grau 1**.

Portanto, o **polinômio interpolador de Lagrange de grau 1** será dado por:

$$P_1(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)$$

com $L_0(x)$ e $L_1(x)$ definidos acima.

Forma de Lagrange - Interpolação linear

$$P_1(x) = \underbrace{\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)}_{L_0(x)} f(x_0) + \underbrace{\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)}_{L_1(x)} f(x_1)$$

Isso significa que podemos construir uma base para $P_1(x)$ formada pelos polinômios

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1},\ L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$

que são **polinômios de Lagrange de grau 1**.

Portanto, o **polinômio interpolador de Lagrange de grau 1** será dado por:

$$P_1(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)$$

com $L_0(x)$ e $L_1(x)$ definidos acima.

Forma de Lagrange - Interpolação linear

Note que

$L_0(x_0) = 1$, $L_0(x_1) = 0$,
$L_1(x_0) = 0$, $L_1(x_1) = 1$.

Assim,

$$P_1(x_0) = \underbrace{L_0(x_0)}_{1} f(x_0) + \cancelto{0}{L_1(x_0)} f(x_1) = f(x_0),$$

$$P_1(x_1) = \cancelto{0}{L_0(x_1)} f(x_0) + \underbrace{L_1(x_1)}_{1} f(x_1) = f(x_1).$$

Então, $P_1(x)$ é o único polinômio de grau 1 que passa por $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$.

Forma de Lagrange - Interpolação quadrática

2. Parábola (polinômio de grau 2)

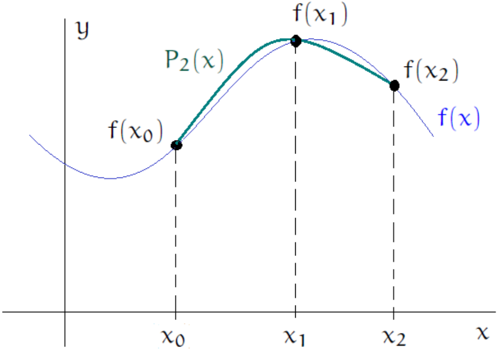

Figura: Interpolação - $P_2(x)$

Agora, queremos interpolar $f(x)$ por um polinômio de grau 2, $P_2(x)$.

Neste caso, devemos interpolar $f(x)$ por $P_2(x)$ em três pontos:

$(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$.

Ou seja,

$$P_2(x_0) = f(x_0);$$
$$P_2(x_1) = f(x_1);$$
$$P_2(x_2) = f(x_2).$$

Forma de Lagrange - Interpolação quadrática

Aplicando raciocínio análogo ao que foi feito na reta, temos que

$$P_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2),$$

onde agora $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$ formam uma **base de Lagrange de grau 2** e são definidos por:

$$L_0(x) = \frac{}{(x_0 -)(x_0 -)};$$

$$L_1(x) = \frac{}{(x_1 -)(x_1 -)};$$

$$L_2(x) = \frac{}{(x_2 -)(x_2 -)}.$$

Forma de Lagrange - Interpolação quadrática

Aplicando raciocínio análogo ao que foi feito na reta, temos que

$$P_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2),$$

onde agora $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$ formam uma **base de Lagrange de grau 2** e são definidos por:

$$L_0(x) = \frac{}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)};$$

$$L_1(x) = \frac{}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)};$$

$$L_2(x) = \frac{}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Forma de Lagrange - Interpolação quadrática

Aplicando raciocínio análogo ao que foi feito na reta, temos que

$$P_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2),$$

onde agora $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$ formam uma **base de Lagrange de grau 2** e são definidos por:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)};$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)};$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Forma de Lagrange - Interpolação quadrática

Note que

$L_0(x_0) = 1,\ L_0(x_1) = 0,\ L_0(x_2) = 0,$
$L_1(x_0) = 0,\ L_1(x_1) = 1,\ L_1(x_2) = 0,$
$L_2(x_0) = 0,\ L_2(x_1) = 0,\ L_2(x_2) = 1.$

Assim,

$$P_2(x_0) = \underbrace{L_0(x_0)}_{1} f(x_0) + \cancelto{0}{L_1(x_0)} f(x_1) + \cancelto{0}{L_2(x_0)} f(x_2) = f(x_0),$$

$$P_2(x_1) = \cancelto{0}{L_0(x_1)} f(x_0) + \underbrace{L_1(x_1)}_{1} f(x_1) + \cancelto{0}{L_2(x_1)} f(x_2) = f(x_1),$$

$$P_2(x_2) = \cancelto{0}{L_0(x_2)} f(x_0) + \cancelto{0}{L_1(x_2)} f(x_1) + \underbrace{L_2(x_2)}_{1} f(x_2) = f(x_2).$$

Então, $P_2(x)$ é o único polinômio de grau 2 que passa por $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$.

Forma de Lagrange - Interpolação cúbica

3. Polinômio de grau 3

Agora, queremos interpolar $f(x)$ por um polinômio de grau 3, $P_3(x)$.

Neste caso, devemos interpolar $f(x)$ por $P_3(x)$ em quatro pontos:

$(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$.

Ou seja,

$P_3(x_0) = f(x_0)$;
$P_3(x_1) = f(x_1)$;
$P_3(x_2) = f(x_2)$;
$P_3(x_3) = f(x_3)$.

Forma de Lagrange - Interpolação cúbica

Aplicando raciocínio análogo ao que foi feito nos casos anteriores, temos que

$$P_3(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + L_3(x)f(x_3),$$

onde agora $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$, $L_3(x)$ formam uma **base de Lagrange de grau 3** e são definidos por:

$$L_0(x) = \frac{}{(x_0 - \ )(x_0 - \ )(x_0 - \ )};$$

$$L_1(x) = \frac{}{(x_1 - \ )(x_1 - \ )(x_1 - \ )};$$

$$L_2(x) = \frac{}{(x_2 - \ )(x_2 - \ )(x_2 - \ )};$$

$$L_3(x) = \frac{}{(x_3 - \ )(x_3 - \ )(x_3 - \ )}.$$

Forma de Lagrange - Interpolação cúbica

Aplicando raciocínio análogo ao que foi feito nos casos anteriores, temos que

$$P_3(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + L_3(x)f(x_3),$$

onde agora $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$, $L_3(x)$ formam uma **base de Lagrange de grau 3** e são definidos por:

$$L_0(x) = \frac{}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)};$$

$$L_1(x) = \frac{}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)};$$

$$L_2(x) = \frac{}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)};$$

$$L_3(x) = \frac{}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Forma de Lagrange - Interpolação cúbica

Aplicando raciocínio análogo ao que foi feito nos casos anteriores, temos que

$$P_3(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + L_3(x)f(x_3),$$

onde agora $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$, $L_3(x)$ formam uma **base de Lagrange de grau 3** e são definidos por:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)};$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)};$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)};$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

Forma de Lagrange - Interpolação cúbica

Note que

$L_0(x_0) = 1,\ L_0(x_1) = 0,\ L_0(x_2) = 0,\ L_0(x_3) = 0,$
$L_1(x_0) = 0,\ L_1(x_1) = 1,\ L_1(x_2) = 0,\ L_1(x_3) = 0,$
$L_2(x_0) = 0,\ L_2(x_1) = 0,\ L_2(x_2) = 1,\ L_2(x_3) = 0,$
$L_3(x_0) = 0,\ L_3(x_1) = 0,\ L_3(x_2) = 0,\ L_3(x_3) = 1.$

Assim,

$$P_3(x_0) = \underbrace{L_0(x_0)}_{1} f(x_0) + \cancelto{0}{L_1(x_0)} f(x_1) + \cancelto{0}{L_2(x_0)} f(x_2) + \cancelto{0}{L_3(x_0)} f(x_3) = f(x_0),$$

$$P_3(x_1) = \cancelto{0}{L_0(x_1)} f(x_0) + \underbrace{L_1(x_1)}_{1} f(x_1) + \cancelto{0}{L_2(x_1)} f(x_2) + \cancelto{0}{L_3(x_1)} f(x_3) = f(x_1),$$

$$P_3(x_2) = \cancelto{0}{L_0(x_2)} f(x_0) + \cancelto{0}{L_1(x_2)} f(x_1) + \underbrace{L_2(x_2)}_{1} f(x_2) + \cancelto{0}{L_3(x_2)} f(x_3) = f(x_2).$$

$$P_3(x_3) = \cancelto{0}{L_0(x_3)} f(x_0) + \cancelto{0}{L_1(x_3)} f(x_1) + \underbrace{L_2(x_3)}_{1} f(x_2) + \underbrace{L_3(x_3)}_{1} f(x_3) = f(x_3).$$

Então, $P_3(x)$ é o único polinômio de grau 3 que passa por $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$.

Forma de Lagrange - Interpolação por polinômio de grau n

Caso geral - Construção de $P_n(x)$

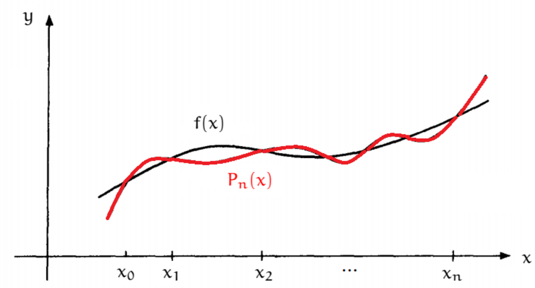

Figura: Interpolação - $P_n(x)$

Agora, queremos interpolar $f(x)$ por um polinômio de grau $n \geq 1$, $P_n(x)$.

Neste caso, devemos interpolar $f(x)$ por $P_n(x)$ em $(n+1)$ pontos:

$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots,$
$(x_n, f(x_n))$.

Ou seja,

$$P_n(x_0) = f(x_0);$$
$$P_n(x_1) = f(x_1);$$
$$\vdots$$
$$P_n(x_n) = f(x_n).$$

Interpolação por polinômio de grau n

Aplicando raciocínio análogo ao que foi feito na reta, temos que

$$P_n(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + \ldots + L_n(x)f(x_n),$$

onde definimos $L_k(x)$ por:

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)} = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

Note que

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq k, \\ 1 & \text{se } i = k. \end{cases}$$

Assim,

$$P_n(x_i) = \cancelto{0}{L_0(x_i)}f(x_0) + \cancelto{0}{L_1(x_i)}f(x_1) + \ldots + \overbrace{L_i(x_i)}^{1} f(x_i) + \ldots + \cancelto{0}{L_n(x_i)}f(x_n) = f(x_i),$$

para todo $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Exemplo

Dada a tabela:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

Obter $f(0.2749)$ **usando interpolação quadrática de Lagrange**.

O exercício pede para achar uma aproximação $f(0.2749) \approx P_2(0.2749)$.

				$\Downarrow x = 0.2749$			
x	0	0.1	$x_0 = 0.2$		$x_1 = 0.3$	$x_2 = 0.4$	0.5
$f(x)$	1	1.1052	1.2214	?	1.3499	1.4918	1.6487
				$\Uparrow f(0.2749) = ?$			

Devemos escolher três pontos da tabela x_0, x_1, x_2 tais que x_0 esteja mais próximo de 0.2749 e seja menor que 0.2749.

Neste exemplo, $x_0 = 0.2$, $x_1 = 0.3$, $x_2 = 0.4$.

Exemplo

A base de Lagrange será formada pelos seguintes polinômios de grau 2:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0.3)(x - 0.4)}{(0.2 - 0.3)(0.2 - 0.4)}$$

$$\Rightarrow L_0(0.2749) = \frac{(0.2749 - 0.3)(0.2749 - 0.4)}{(0.2 - 0.3)(0.2 - 0.4)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 0.2)(x - 0.4)}{(0.3 - 0.2)(0.3 - 0.4)}$$

$$\Rightarrow L_1(0.2749) = \frac{(0.2749 - 0.2)(0.2749 - 0.4)}{(0.3 - 0.2)(0.3 - 0.4)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 0.2)(x - 0.3)}{(0.4 - 0.2)(0.4 - 0.3)}$$

$$\Rightarrow L_2(0.2749) = \frac{(0.2749 - 0.2)(0.2749 - 0.3)}{(0.4 - 0.2)(0.4 - 0.3)}$$

Exemplo

Pela interpolação de Lagrange de grau 2, sabemos que:

$f(x) \approx P_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$.

Assim, com $x = 0.2749$ e os nós de interpolação $x_0 = 0.2$, $x_1 = 0.3$, $x_2 = 0.4$, obtemos a seguinte aproximação $f(0.2749) \approx P_2(0.2749)$:

$P_2(0.2749) = L_0(0.2749)f(0.2) + L_1(0.2749)f(0.3) + L_2(0.2749)f(0.4)$

$P_2(0.2749) = 1.3165$.

Exercício 1: Obter $f(0.2749)$ usando **interpolação cúbica**.

Exercício 2: Quais são os nós de interpolação que devem ser usados para obter $f(0.2749)$ usando **interpolação de quarta ordem**?

Referências I

RUGGIERO, M.; LOPES, V.. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. Pearson, 1996, 2a. Ed.

BURDEN, R.. **Numerical Analysis**. Brooks/Cole Pub Co, 1996, 6th Edition.