

# CÁLCULO NUMÉRICO UERJ

## Integração Numérica

Rodrigo Madureira  
rodrigo.madureira@ime.uerj.br  
IME-UERJ

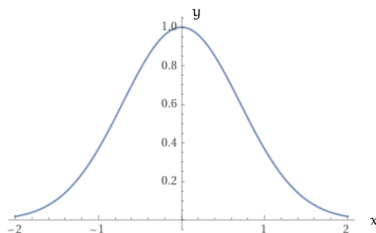
# Sumário

- 1 Introdução
- 2 Regra dos Trapézios
- 3 Regra (1/3) de Simpson
- 4 Erros das regras de Trapézios e Simpson
- 5 Bibliografia

# Introdução

**Motivação:** Tente resolver a integral definida a seguir:

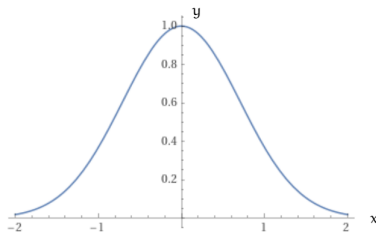
$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = ?$$



# Introdução

**Motivação:** Tente resolver a integral definida a seguir:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = ?$$

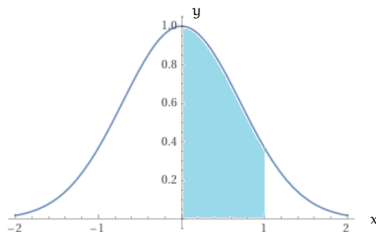


Essa integral não tem primitiva em termos de funções elementares!

# Introdução

**Motivação:** Tente resolver a integral definida a seguir:

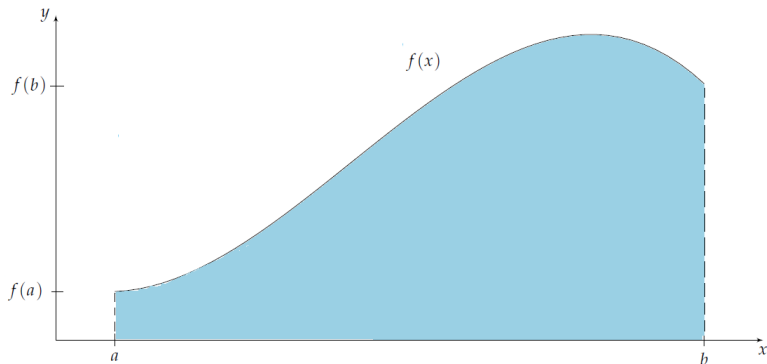
$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = ?$$



Essa integral não tem primitiva em termos de funções elementares!  
Mas ela tem um valor numérico bem definido, que corresponde à área em azul acima!

# Introdução

## Integral definida de uma função

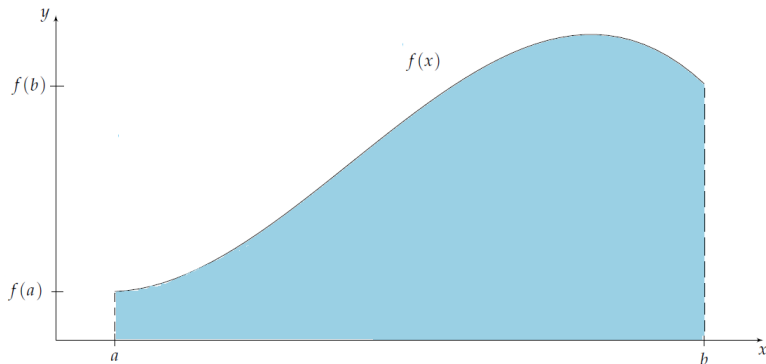


**Solução analítica:**

$$\text{Área} = \int_a^b f(x) dx$$

# Introdução

## Integral definida de uma função



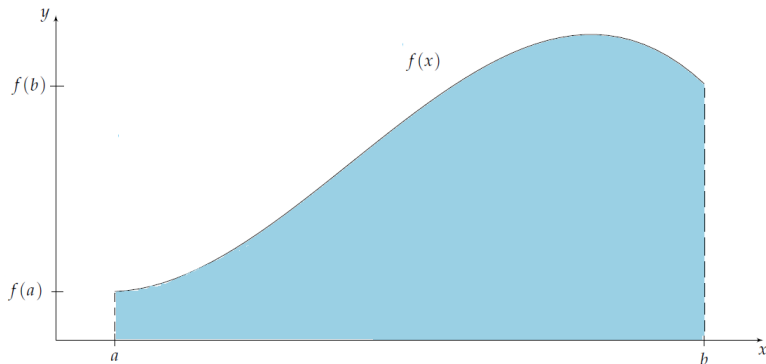
**Solução analítica:**

$$\text{Área} = \int_a^b f(x) dx$$

**Mas, e quando a primitiva de  $f(x)$  é desconhecida?**

# Introdução

## Integral definida de uma função



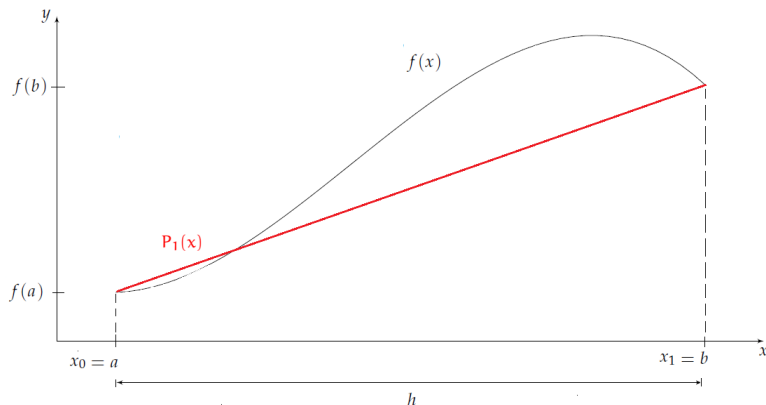
**Mas, e quando a primitiva de  $f(x)$  é desconhecida?**

### Solução numérica:

- Regra dos Trapézios
- Regra (1/3) de Simpson

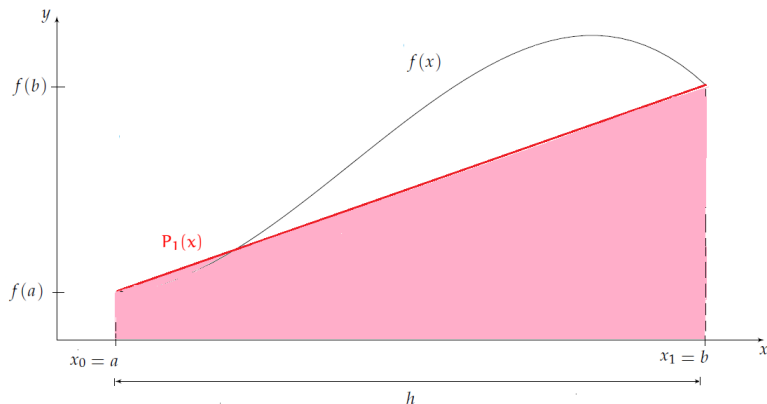


# Regra dos Trapézios



No intervalo  $[a, b]$ , aproximamos a curva da função  $f(x)$  por uma reta  $P_1(x)$ .

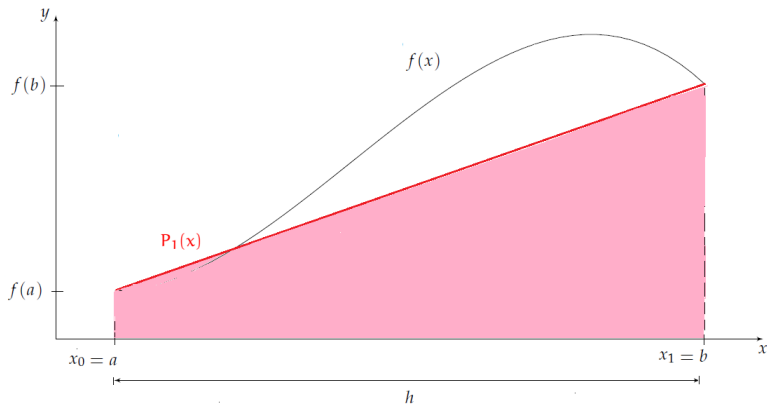
# Regra dos Trapézios



No intervalo  $[a, b]$ , aproximamos a curva da função  $f(x)$  por uma reta  $P_1(x)$ .  
Assim, aproximamos a integral:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x)dx.$$

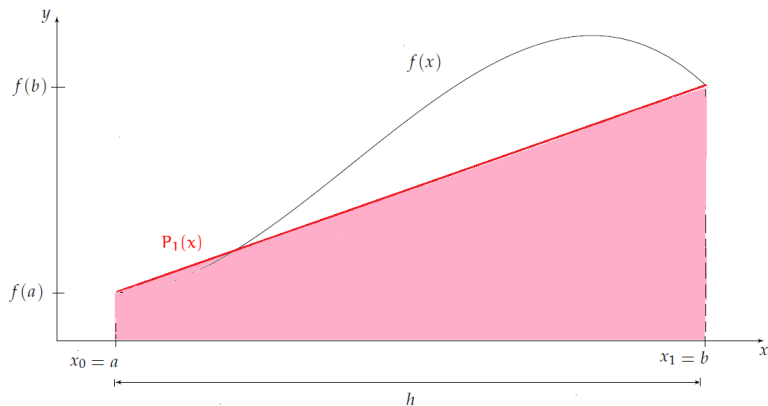
# Regra dos Trapézios



No intervalo  $[a, b]$ , aproximamos a curva da função  $f(x)$  por uma reta  $P_1(x)$ .  
Assim, aproximamos a integral:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_1(x) dx = \text{Área do Trapézio.}$$

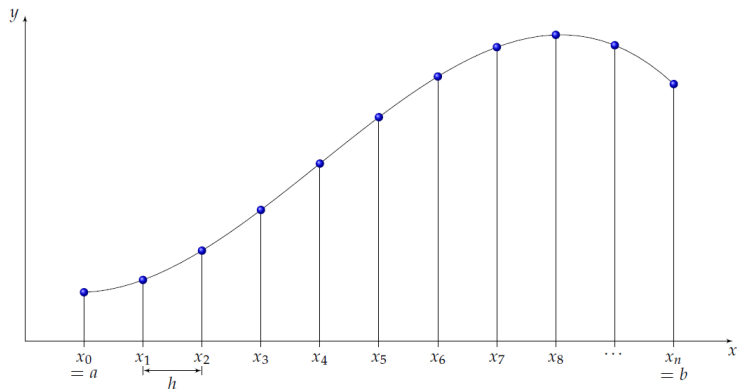
# Regra dos Trapézios



Logo, obtemos a **Regra dos Trapézios simples**:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_{a=x_0}^{b=x_1} P_1(x) dx = (f(a) + f(b)) \left( \frac{b-a}{2} \right) = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)].$$

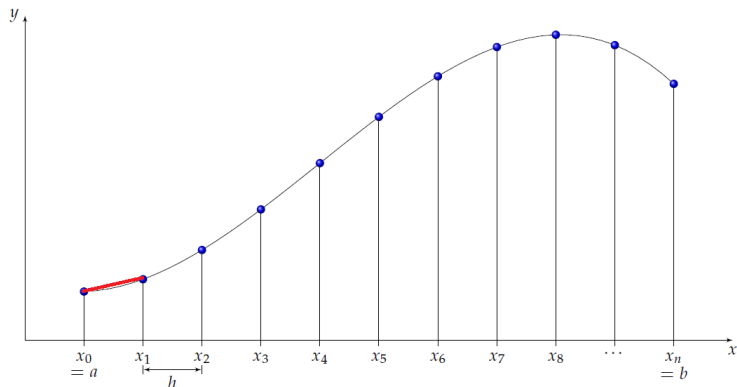
# Regra dos Trapézios



Para aumentar a precisão da integral, precisamos dividir o intervalo  $[a, b]$  em muitos subintervalos de mesmo tamanho  $h$ .

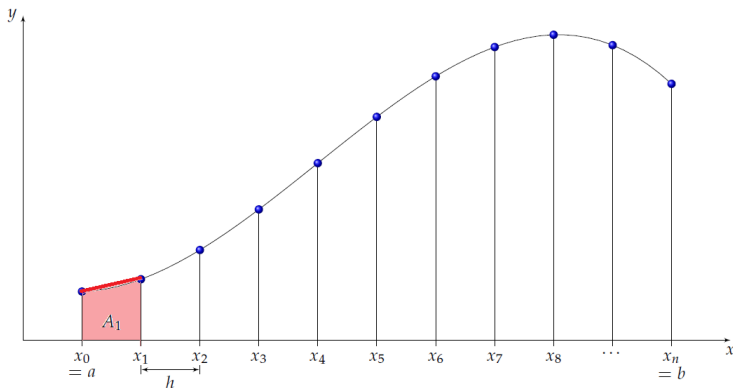
Com  $n$  subintervalos  $[x_{i-1}, x_i]$ , onde  $i = 1, 2, \dots, n$ , temos  $h = \frac{b-a}{n}$ .

# Regra dos Trapézios



Em cada subintervalo, aproximo a curva  $f(x)$  de uma reta.  
 No subintervalo  $[x_0, x_1]$ , aproximo  $f(x)$  por  $P_1(x)$ .

# Regra dos Trapézios

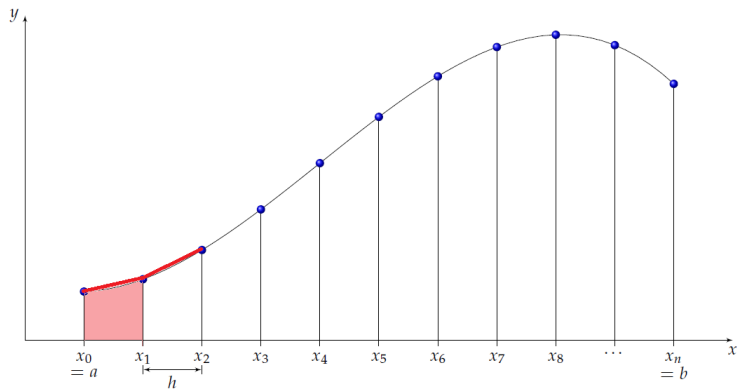


Em cada subintervalo, aproximo a curva  $f(x)$  de uma reta.  
No subintervalo  $[x_0, x_1]$ , aproximo  $f(x)$  por  $P_1(x)$ .

A área do trapézio sob  $P_1(x)$  em  $[x_0, x_1]$  é dada por:

$$A_1 = \int_{x_0}^{x_1} P_1(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)].$$

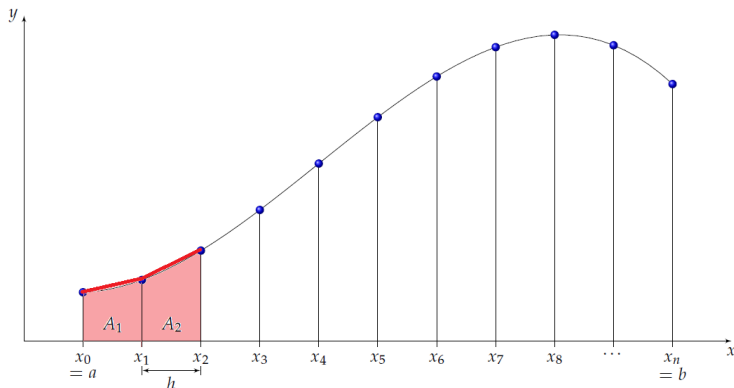
# Regra dos Trapézios



No subintervalo  $[x_1, x_2]$ , aproximo  $f(x)$  por  $P_1(x)$ .



# Regra dos Trapézios

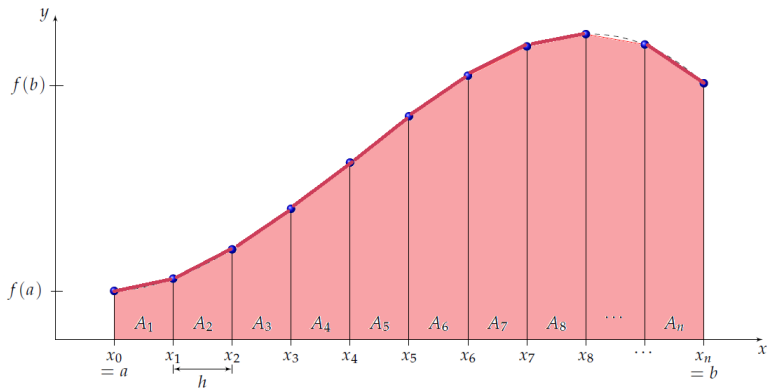


No subintervalo  $[x_1, x_2]$ , aproximo  $f(x)$  por  $P_1(x)$ .

A área do trapézio sob  $P_1(x)$  em  $[x_1, x_2]$  é dada por:

$$A_2 = \int_{x_1}^{x_2} P_1(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_1) + f(x_2)].$$

# Regra dos Trapézios



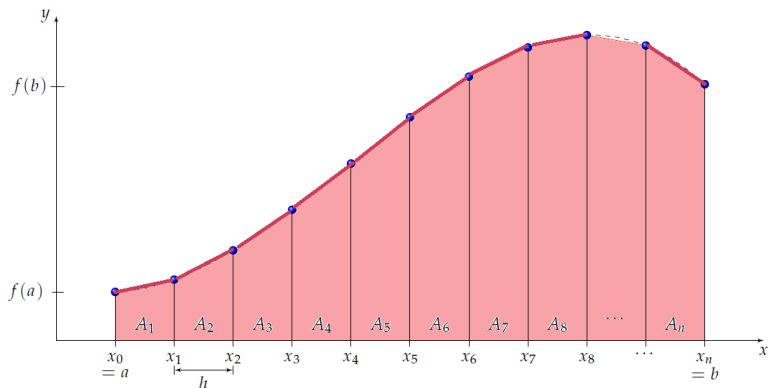
Continuando até o subintervalo  $[x_{n-1}, x_n]$ , a integral aproximada é dada por:

$$\int_{a=x_0}^{b=x_n} f(x) dx \approx A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n,$$

onde  $A_i$  é a área do trapézio  $i$ , dada por:

$$A_i = (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \frac{h}{2}, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

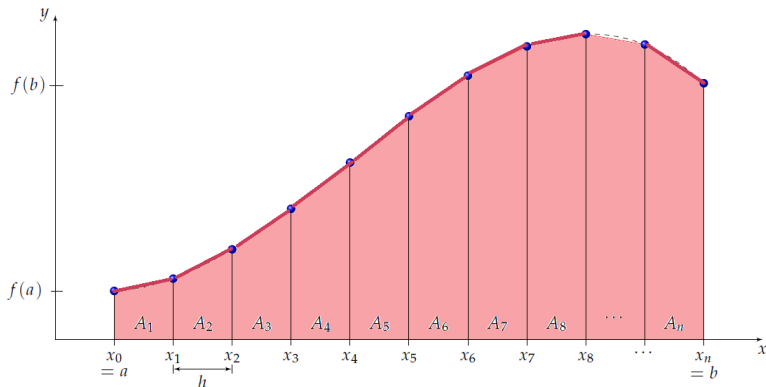
# Regra dos Trapézios



Assim,

$$\int_{a=x_0}^{b=x_n} f(x) dx \approx (f(x_0) + f(x_1)) \frac{h}{2} + (f(x_1) + f(x_2)) \frac{h}{2} + \dots + (f(x_{n-1}) + f(x_n)) \frac{h}{2}.$$

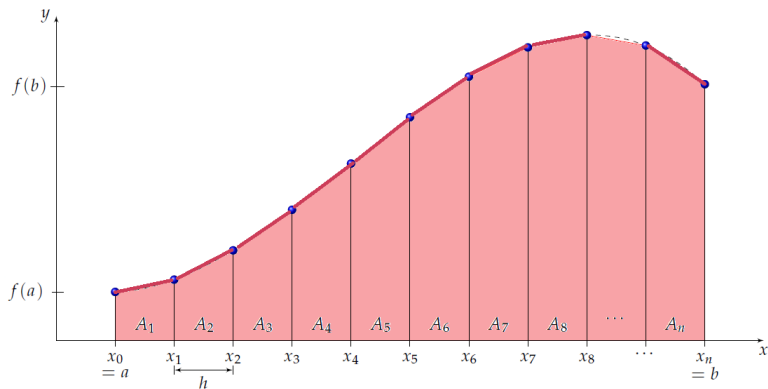
# Regra dos Trapézios



Colocando  $\frac{h}{2}$  em evidência, temos:

$$\int_{a=x_0}^{b=x_n} f(x) \approx \frac{h}{2} [(f(x_0) + f(x_1)) + (f(x_1) + f(x_2)) + \dots + (f(x_{n-1}) + f(x_n))].$$

# Regra dos Trapézios

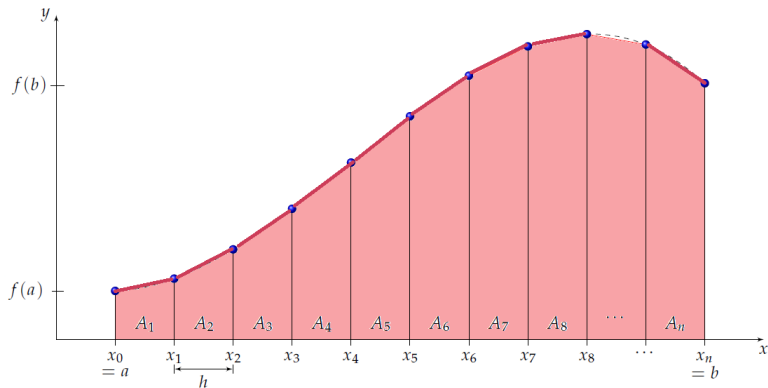


Logo,

$$\int_{a=x_0}^{b=x_n} f(x) \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

**Esta é a Regra dos Trapézios repetida.**

# Regra dos Trapézios

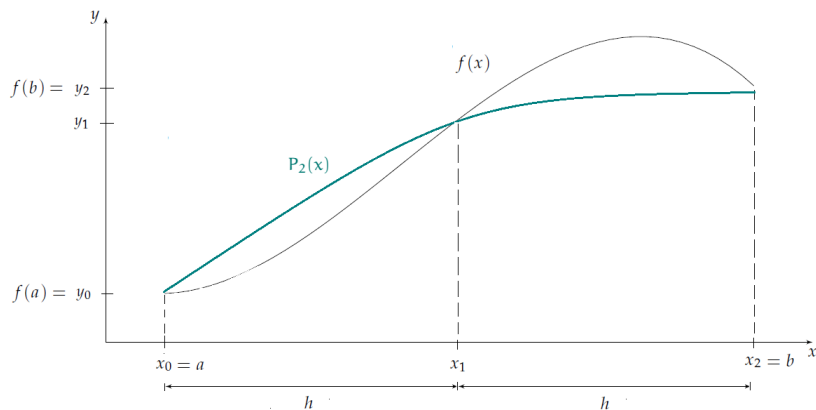


Logo,

$$\int_{a=x_0}^{b=x_n} f(x) \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2)) + \dots + f(x_{n-1})) + f(x_n)].$$

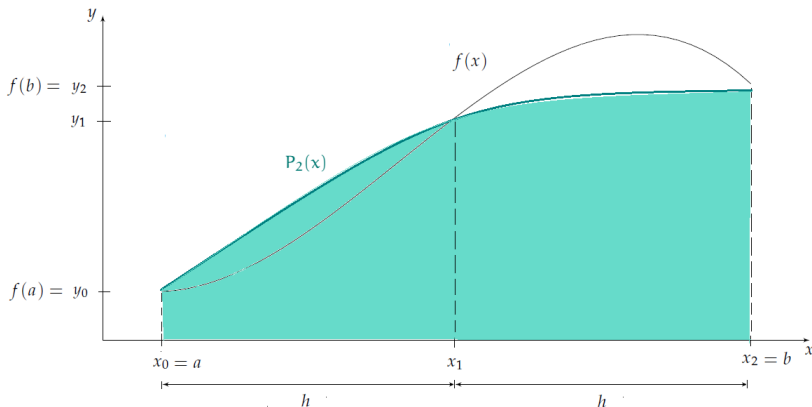
**Esta é a Regra dos Trapézios repetida.**

# Regra de 1/3 Simpson



No intervalo  $[a, b]$ , aproximamos a curva da função  $f(x)$  por uma parábola  $P_2(x)$ .

# Regra (1/3) de Simpson



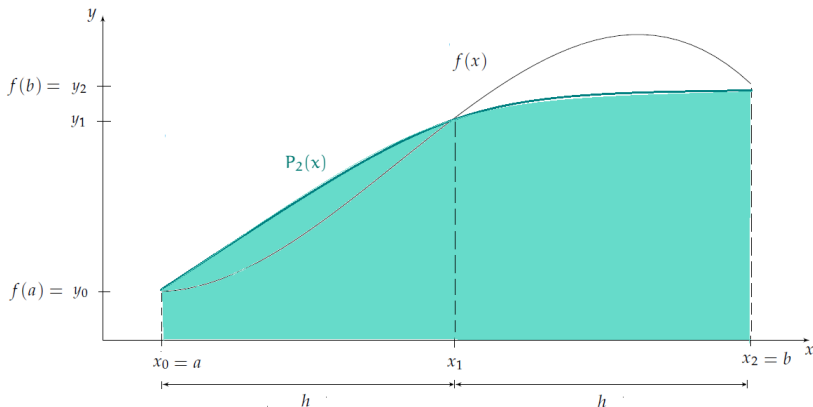
No intervalo  $[a, b]$ , aproximamos a curva da função  $f(x)$  por uma parábola  $P_2(x)$ .

Assim, aproximamos a integral:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_2(x) dx.$$



# Regra (1/3) de Simpson

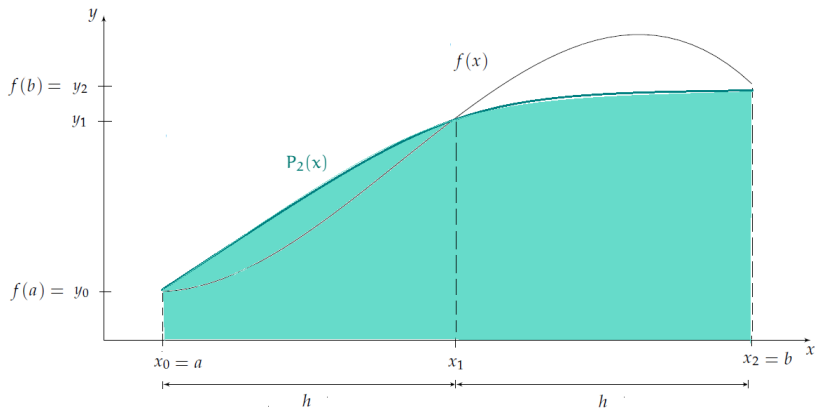


Sabemos do estudo de interpolação quadrática que:

$$P_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2), \text{ onde}$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}; L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}; L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

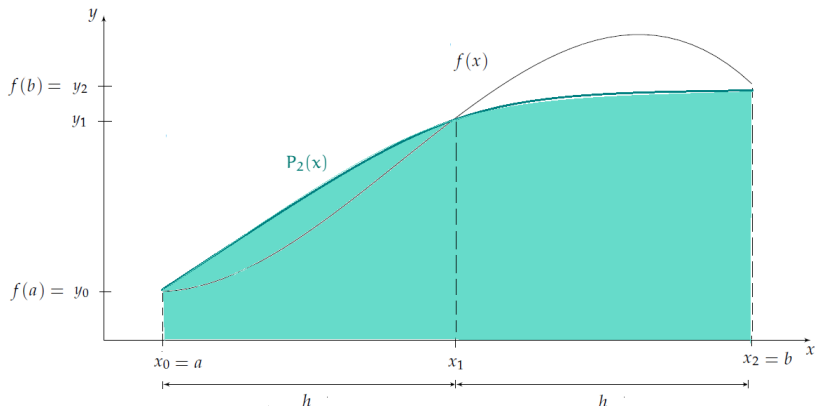
# Regra (1/3) de Simpson



Assim,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_2(x) dx = \int_{a=x_0}^{b=x_2} [L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)] dx.$$

# Regra (1/3) de Simpson



Assim,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_2(x) dx = \int_a^b \left[ \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) \right] dx.$$

# Regra (1/3) de Simpson

Cálculo das parcelas da integral:

**1a. parcela do lado direito de**  $\int_a^b P_2(x) dx$ :

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) dx &= \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) dx \\ &= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)(x - x_2) dx. \end{aligned}$$

Sabendo que  $x_1 - x_0 = h \Rightarrow x_0 - x_1 = -h$  e  $x_2 - x_0 = 2h \Rightarrow x_0 - x_2 = -2h$ , temos que  $(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) = (-h)(-2h) = 2h^2$ .

Substituindo na equação, obtemos:

$$\frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)(x - x_2) dx = \frac{f(x_0)}{2h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)(x - x_2) dx.$$

Podemos resolver essa última integral em azul de forma mais simples usando mudança de variável.

# Regra (1/3) de Simpson

Mudança de variável de  $x \in [x_0, x_2]$  para  $t \in [0, 2]$ :



As distâncias de um ponto à origem são proporcionais nas duas retas. Logo,

$$\frac{x - x_0}{x_2 - x_0} = \frac{t - 0}{2 - 0} = \frac{t}{2} \Rightarrow \frac{x - x_0}{2h} = \frac{t}{2} \Rightarrow x = x_0 + ht$$

Logo,

$$\frac{dx}{dt} = h \Rightarrow dx = hdt; \quad (1)$$

$$x - x_1 = (x_0 + ht) - x_1 = (x_0 - x_1) + ht = -h + ht = h(t - 1); \quad (2)$$

$$x - x_2 = (x_0 + ht) - x_2 = (x_0 - x_2) + ht = -2h + ht = h(t - 2); \quad (3)$$

# Regra (1/3) de Simpson

Substituindo (1), (2) e (3) na integral em azul, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x_0)}{2h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)(x - x_2) dx &= \frac{f(x_0)}{2h^2} \int_0^2 h(t - 1)h(t - 2)h dt \\
 &= \frac{f(x_0)}{2h^2} h^3 \int_0^2 (t - 1)(t - 2) dt = f(x_0) \frac{h}{2} \int_0^2 (t - 1)(t - 2) dt. \\
 &= f(x_0) \frac{h}{2} \int_0^2 (t^2 - 3t + 2) dt = f(x_0) \frac{h}{2} \left[ \frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t \right]_0^2 \\
 &= f(x_0) \frac{h}{2} \left[ \frac{8}{3} - \frac{3 \cdot 4}{2} + 4 \right] = f(x_0) \frac{h}{2} \left[ \frac{8}{3} - 2 \right] = f(x_0) \frac{h}{2} \left[ \frac{2}{3} \right] = \frac{h}{3} f(x_0) \\
 \Rightarrow \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) dx &= \frac{h}{3} f(x_0).
 \end{aligned}$$

# Regra (1/3) de Simpson

De forma análoga, as outras duas parcelas da integral  $\int_a^b P_2(x)dx$  ficam:

$$\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) dx = \frac{4h}{3} f(x_1);$$

$$\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) dx = \frac{h}{3} f(x_2).$$

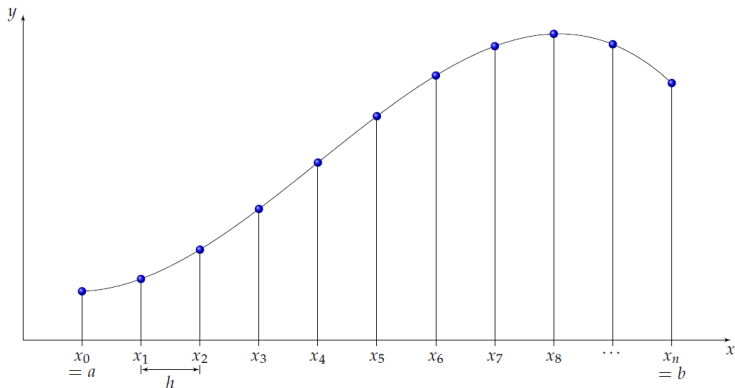
Logo, somando as parcelas,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_2(x) dx = \frac{h}{3} f(x_0) + \frac{4h}{3} f(x_1) + \frac{h}{3} f(x_2)$$

E assim, obtemos a **Regra (1/3) de Simpson simples**:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_2(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

# Regra (1/3) de Simpson

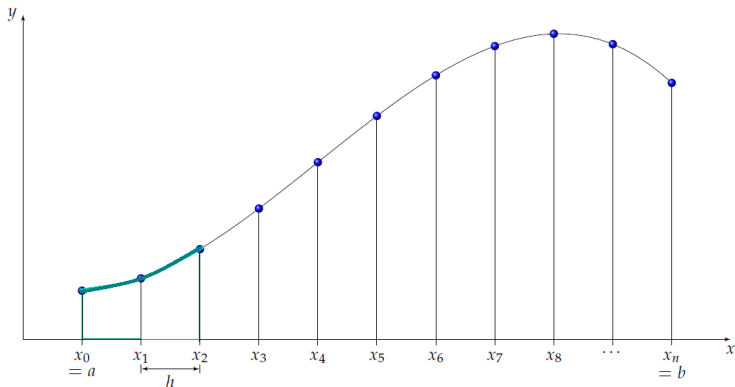


Para aumentar a precisão da integral, precisamos dividir o intervalo  $[a, b]$  em muitos subintervalos de mesmo tamanho  $h$ .

Com  $n$  subintervalos  $[x_{i-1}, x_i]$ , onde  $i = 1, 2, \dots, n$ , temos  $h = \frac{b-a}{n}$ .



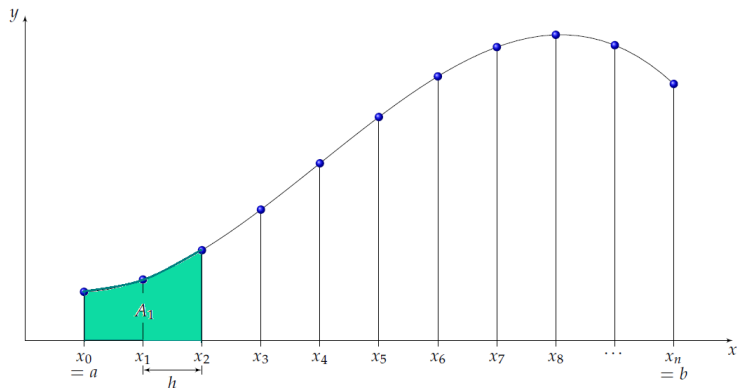
# Regra (1/3) de Simpson



Para aproximar uma curva  $f(x)$  de uma parábola  $P_2(x)$ , precisamos de 3 nós de interpolação.

No subintervalo  $[x_0, x_2]$ , aproximo  $f(x)$  por  $P_2(x)$ , passando por 3 nós:  
 $x_0, x_1, x_2$ .

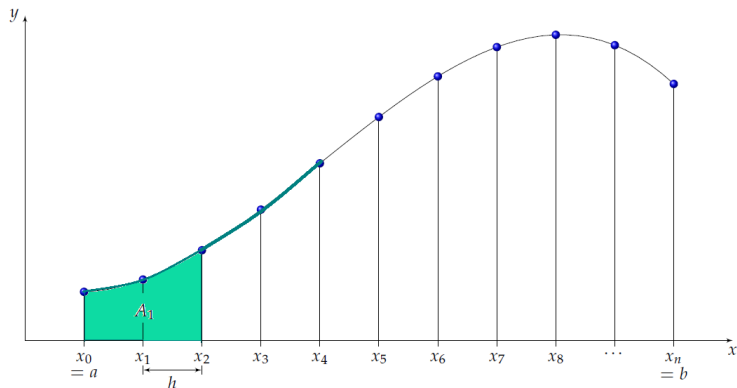
# Regra (1/3) de Simpson



Sob essa parábola, achamos a área

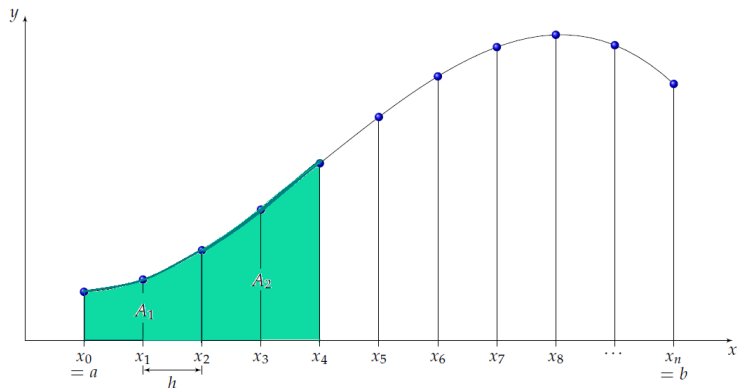
$$A_1 = \int_{x_0}^{x_2} P_2(x) = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)].$$

# Regra (1/3) de Simpson



No subinterval  $[x_2, x_4]$ , aproximo  $f(x)$  por  $P_2(x)$ , passando por 3 nós:  
 $x_2, x_3, x_4$ .

# Regra (1/3) de Simpson

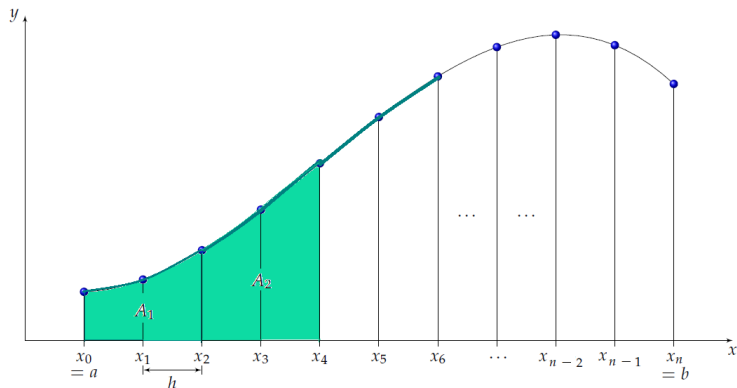


No subintervalo  $[x_2, x_4]$ , aproximo  $f(x)$  por  $P_2(x)$ , passando por 3 nós:  
 $x_2, x_3, x_4$ .

Sob essa parábola, achamos a área

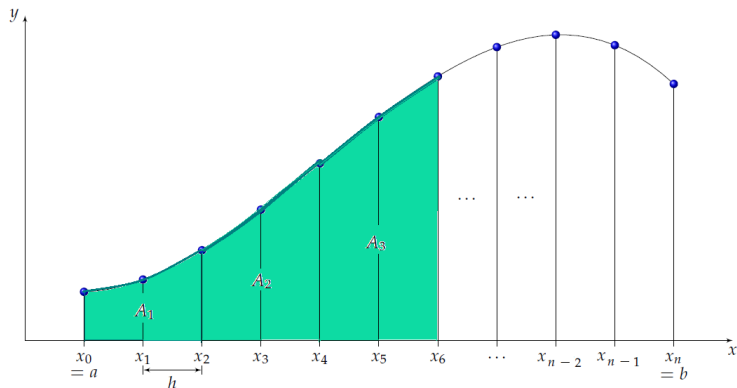
$$A_2 = \int_{x_2}^{x_4} P_2(x) = \frac{h}{3} [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)].$$

# Regra (1/3) de Simpson



No subintervalo  $[x_4, x_6]$ , aproximo  $f(x)$  por  $P_2(x)$ , passando por 3 nós:  
 $x_4, x_5, x_6$ .

# Regra (1/3) de Simpson

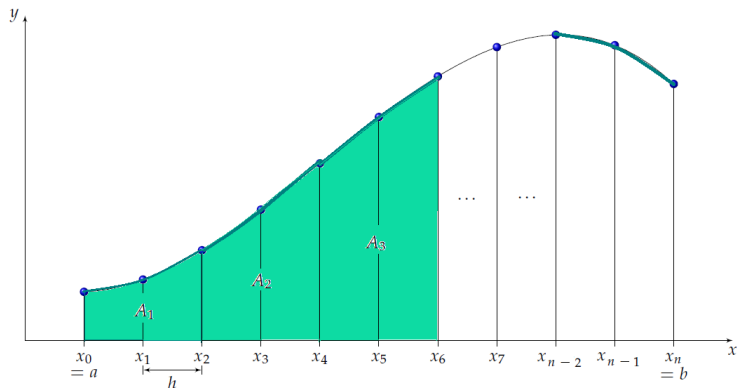


No subintervalo  $[x_4, x_6]$ , aproximo  $f(x)$  por  $P_2(x)$ , passando por 3 nós:  
 $x_4, x_5, x_6$ .

Sob essa parábola, achamos a área

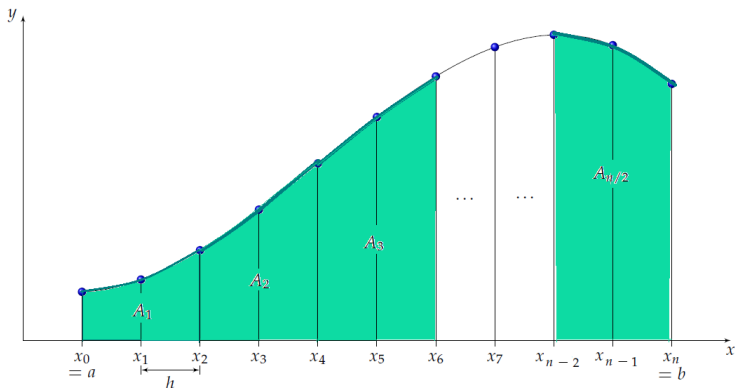
$$A_3 = \int_{x_4}^{x_6} P_2(x) = \frac{h}{3} [f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)].$$

# Regra (1/3) de Simpson



Continuando o processo até o subintervalo  $[x_{n-2}, x_n]$ , aproximo  $f(x)$  por  $P_2(x)$ , passando por 3 nós:  $x_{n-2}, x_{n-1}, x_n$ .

# Regra (1/3) de Simpson



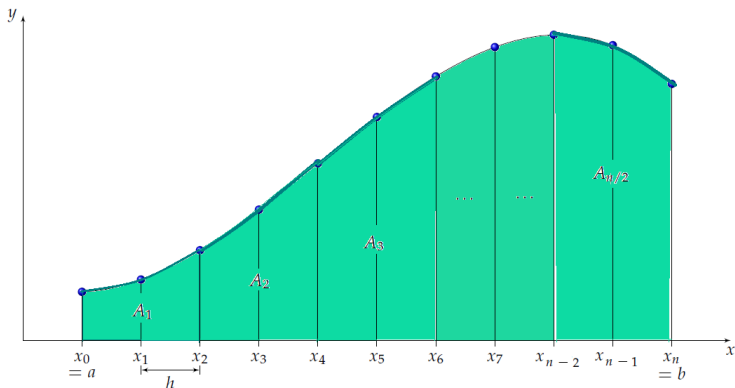
Continuando o processo até o subintervalo  $[x_{n-2}, x_n]$ , aproximo  $f(x)$  por  $P_2(x)$ , passando por 3 nós:  $x_{n-2}, x_{n-1}, x_n$ .

Sob essa parábola, achamos a área

$$A_{n/2} = \int_{x_{n-2}}^{x_n} P_2(x) = \frac{h}{3} [f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$



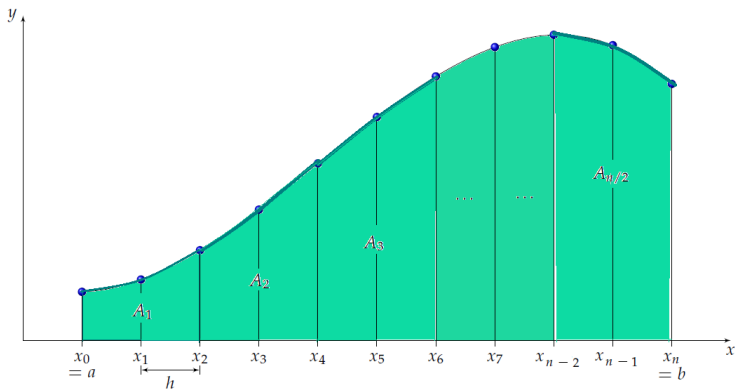
# Regra (1/3) de Simpson



Portanto, a integral no intervalo  $[a, b] = [x_0, x_n]$  é aproximada pela soma das áreas:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_2(x)dx = A_1 + A_2 + A_3 + \dots A_{n/2}.$$

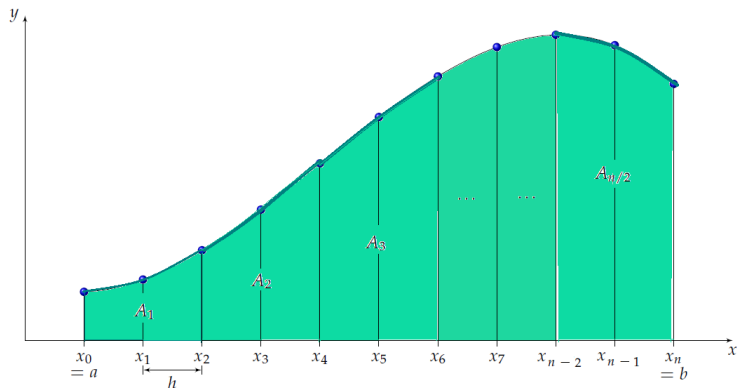
# Regra (1/3) de Simpson



Logo,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_2(x) dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{3}[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] \\ + \frac{h}{3}[f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)] + \dots + \frac{h}{3}[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

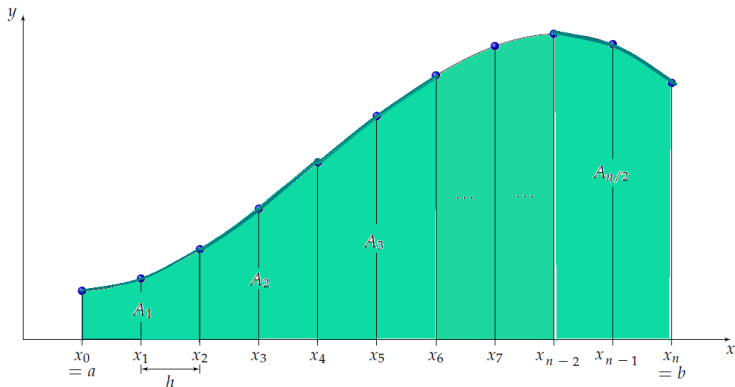
# Regra (1/3) de Simpson



Colocando  $\frac{h}{3}$  em evidência, temos:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_2(x)dx = \frac{h}{3}([f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + [f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)] + \dots + [f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]).$$

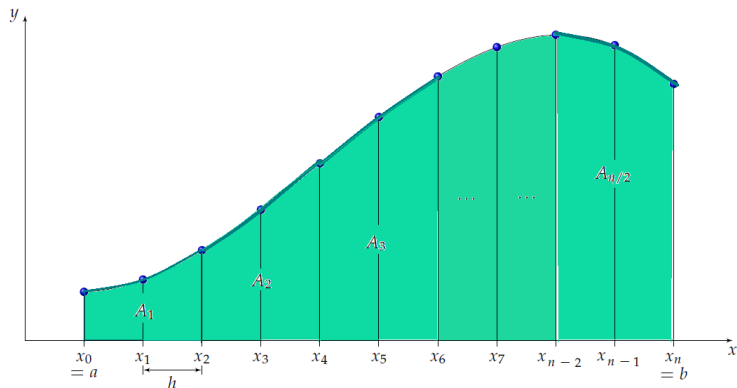
# Regra (1/3) de Simpson



Colocando  $\frac{h}{3}$  em evidência, obtemos:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_2(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + 2f(x_6) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

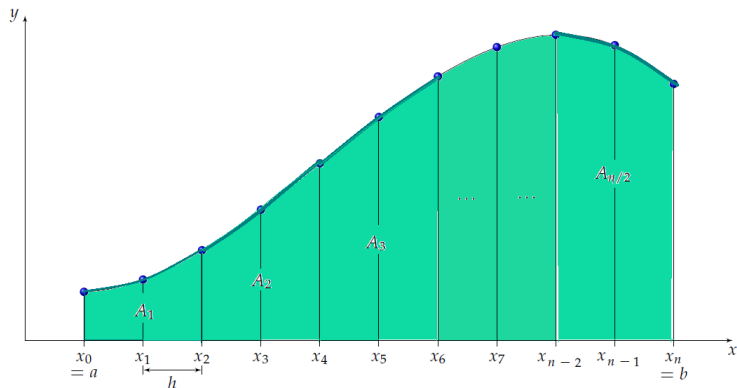
# Regra (1/3) de Simpson



Esta é a **Regra de Simpson repetida**:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_2(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + 2f(x_6) + \dots + 4f(x_{n-3}) + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

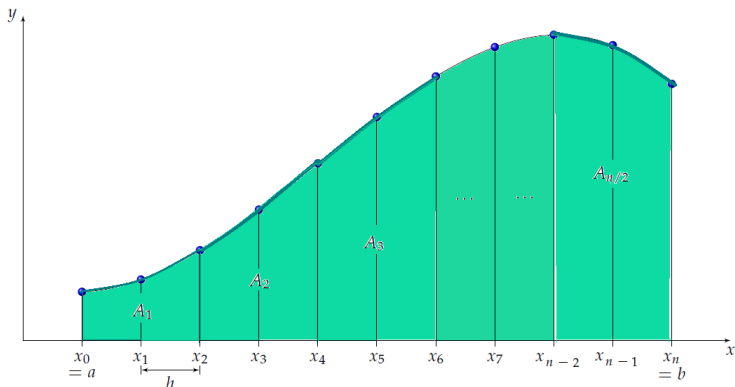
# Regra (1/3) de Simpson



Esta é a **Regra de Simpson repetida**:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_2(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + \dots + f(x_{n-1})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + \dots + f(x_{n-2})) + f(x_n)].$$

# Regra (1/3) de Simpson



Note que para cada área  $A_i$ , usamos 2 subintervalos:  $[x_{2i-2}, x_{2i-1}]$  e  $[x_{2i-1}, x_{2i}]$ , para  $i = 1, 2, 3, \dots, \frac{n}{2}$ .

Portanto, o número total de subintervalos na Regra de Simpson **deve ser par!**

# Erros das regras de Trapézios e (1/3) de Simpson

## Erro global da Regra dos Trapézios

$$E_{TR} = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi),$$

sendo  $\xi$  uma constante (desconhecida), tal que  $a \leq \xi \leq b$ .

Como não conhecemos  $\xi$ , podemos delimitar o erro:

## Limitante superior do erro da Regra dos Trapézios

$$|E_{TR}| \leq \frac{|b-a|^3}{12n^2} M_2,$$

$$\text{onde } M_2 = \max_{a \leq \xi \leq b} |f''(\xi)|$$



# Erros das regras de Trapézios e Simpson

## Erro global da Regra (1/3) de Simpson

$$E_S = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(iv)}(\xi),$$

sendo  $\xi$  uma constante (desconhecida), tal que  $a \leq \xi \leq b$ , e **n deve ser par**.

Como não conhecemos  $\xi$ , podemos delimitar o erro:

## Limitante superior do erro da Regra (1/3) de Simpson

$$|E_S| \leq \frac{|b-a|^5}{180n^4} M_4,$$

onde  $M_4 = \max_{a \leq \xi \leq b} |f^{(iv)}(\xi)|.$

# Exemplos

## Exemplo 1 (Regra dos Trapézios):

Considere a integral definida  $\int_0^1 e^x dx$ .

- (a) Estime o valor da integral usando a Regra dos Trapézios repetida com 10 subintervalos.
- (b) Qual o número **mínimo**  $n$  de subintervalos que devemos usar para que o erro cometido seja menor que  $10^{-3}$ ?

# Exemplos

## Solução:

Ⓐ Com  $n = 10$ , temos  $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0,1$ .

Como  $f(x) = e^x$ , obtemos pela Regra dos Trapézios:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &\approx \frac{0,1}{2} [f(0) + 2 \cdot f(0,1) + 2 \cdot f(0,2) + 2 \cdot f(0,3) + 2 \cdot f(0,4) + 2 \cdot f(0,5) \\ &\quad + 2 \cdot f(0,6) + 2 \cdot f(0,7) + 2 \cdot f(0,8) + 2 \cdot f(0,9) + f(1)] \\ \Rightarrow \int_0^1 e^x dx &\approx \frac{0,1}{2} [e^0 + 2 \cdot e^{0,1} + 2 \cdot e^{0,2} + 2 \cdot e^{0,3} + 2 \cdot e^{0,4} + 2 \cdot e^{0,5} \\ &\quad + 2 \cdot e^{0,6} + 2 \cdot e^{0,7} + 2 \cdot e^{0,8} + 2 \cdot e^{0,9} + e^1] \\ &\approx 1,7197. \end{aligned}$$

**Obs.: Solução analítica**

$$\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 \approx 1,7183 \Rightarrow E_{\text{abs}} \approx |1,7197 - 1,7183| \approx 0,0014.$$

# Exemplos

(b) Número mínimo de subintervalos  $n$  para que  $|E_{TR}| < 10^{-3}$ :

Do limitante superior do erro da Regra dos Trapézios, extraímos que:

$$|E_{TR}| \leq \frac{|b-a|^3}{12n^2} M_2 < 10^{-3} \Rightarrow |E_{TR}| \leq \frac{|1-0|^3}{12n^2} M_2 < 10^{-3},$$

$$\text{onde } M_2 = \max_{0 \leq x \leq 1} |f''(x)| = \max_{0 \leq x \leq 1} |e^x|.$$

Nos extremos de  $[a, b] = [0, 1]$ :  $|e^0| = 1$ ;  $|e^1| \approx 2,7183$ .

$$\Rightarrow M_2 = \max \{|e^0|, |e^1|\} = \max \{1; 2,7183\} = 2,7183.$$

$$\text{Logo, } |E_{TR}| \leq \frac{|1-0|^3}{12n^2} (2,7183) < 10^{-3}$$

$$\Rightarrow \frac{2,7183}{12n^2} < 10^{-3} \Rightarrow \frac{12n^2}{2,7183} > 10^3$$

# Exemplos

$$\Rightarrow 12n^2 > 2,7183 \cdot 10^3 \Rightarrow n^2 > \frac{2,7183 \cdot 10^3}{12} \Rightarrow n > \sqrt{\frac{2,7183 \cdot 10^3}{12}}$$

$$\Rightarrow n > 15,0507$$

Logo,  $n_{\min} = 16$ .

## Exemplo 2 (Regra (1/3) de Simpson):

Considere a mesma integral definida no exemplo anterior:  $\int_0^1 e^x dx$ .

- (a) Estime o valor da integral usando a Regra de Simpson repetida com 10 subintervalos.
- (b) Qual o número **mínimo**  $n$  de subintervalos que devemos usar para que o erro cometido seja menor que  $10^{-3}$ ?

# Exemplos

## Solução:

Ⓐ Com  $n = 10$ , temos  $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0,1$ .

Como  $f(x) = e^x$ , obtemos pela Regra de Simpson:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &\approx \frac{0,1}{3} [f(0) + 4 \cdot f(0,1) + 2 \cdot f(0,2) + 4 \cdot f(0,3) + 2 \cdot f(0,4) \\ &\quad + 4 \cdot f(0,5) + 2 \cdot f(0,6) + 4 \cdot f(0,7) + 2 \cdot f(0,8) \\ &\quad + 4 \cdot f(0,9) + f(1)] \\ \Rightarrow \int_0^1 e^x dx &\approx \frac{0,1}{3} [e^0 + 4 \cdot e^{0,1} + 2 \cdot e^{0,2} + 4 \cdot e^{0,3} + 2 \cdot e^{0,4} + 4 \cdot e^{0,5} \\ &\quad + 2 \cdot e^{0,6} + 4 \cdot e^{0,7} + 2 \cdot e^{0,8} + 4 \cdot e^{0,9} + e^1] \\ &\approx 1,71828278192 \end{aligned}$$

**Obs.: Solução analítica**

$$\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 \approx 1,71828182846 \Rightarrow E_{\text{abs}} \approx 9,5346 \cdot 10^{-7}.$$

# Exemplos

(b) Número mínimo de subintervalos  $n$  para que  $|E_S| < 10^{-3}$ :

Do limitante superior do erro da Regra de Simpson, extraímos que:

$$|E_S| \leq \frac{|b-a|^5}{180n^4} M_4 < 10^{-3} \Rightarrow |E_S| \leq \frac{|1-0|^5}{180n^4} M_4 < 10^{-3},$$

$$\text{onde } M_4 = \max_{0 \leq \xi \leq 1} |f^{(iv)}(x)| = \max_{0 \leq \xi \leq 1} |e^x|.$$

Nos extremos de  $[a, b] = [0, 1]$ :  $|e^0| = 1$ ;  $|e^1| \approx 2,7183$ .

$$\Rightarrow M_4 = \max \{|e^0|, |e^1|\} = \max \{1; 2,7183\} = 2,7183.$$

$$\text{Logo, } |E_S| \leq \frac{|1-0|^5}{180n^4} (2,7183) < 10^{-3}$$

$$\Rightarrow \frac{2,7183}{180n^4} < 10^{-3} \Rightarrow \frac{180n^4}{2,7183} > 10^3$$

# Exemplos

$$\Rightarrow 180n^4 > 2,7183 \cdot 10^3 \Rightarrow n^4 > \frac{2,7183 \cdot 10^3}{180} \Rightarrow n > \sqrt[4]{\frac{2,7183 \cdot 10^3}{180}}$$

$$\Rightarrow n > 1,9713$$

Logo,  $n_{\min} = 2$ .

**Pergunta:** E se a inequação final deste exercício tivesse sido  $n > 2,9713$ ? Qual seria o número mínimo de subintervalos pela Regra de Simpson?



# Exemplos

$$\Rightarrow 180n^4 > 2,7183 \cdot 10^3 \Rightarrow n^4 > \frac{2,7183 \cdot 10^3}{180} \Rightarrow n > \sqrt[4]{\frac{2,7183 \cdot 10^3}{180}}$$

$$\Rightarrow n > 1,9713$$

Logo,  $n_{\min} = 2$ .

**Pergunta:** E se a inequação final deste exercício tivesse sido  $n > 2,9713$ ? Qual seria o número mínimo de subintervalos pela Regra de Simpson?

**Resposta:**  $n_{\min} = 4$ , pois na Regra de Simpson,  $n$  **deve ser sempre par!**

# Referências I



RUGGIERO, M.; LOPES, V.. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. Pearson, 1996, 2a. Ed.



BURDEN, R.. **Numerical Analysis**. Brooks/Cole Pub Co, 1996, 6th Edition.