

Cálculo Numérico - IME/UERJ

Lista de Exercícios 2 - Raízes de funções

1. Considere o polinômio $p(x) = (x - 1)(x - 2,5)^2(x - 4)^3$. Quais zeros não podem ser determinadas usando o método da bisseção? Justifique a sua resposta.
2. Determine um intervalo $[a, b]$ para iniciar o cálculo de $\ln(10)$ usando o método da bisseção. Explique. Quantas iterações são necessárias para obter $\ln(10)$ com erro menor ou igual a 10^{-3} ?
3. No cálculo das raízes de $f(x) = e^{-2x} + x^2 - 4 = 0$, pelo método do ponto fixo (ou iteração linear), fazem-se as transformações para as seguintes funções de iteração:

$$\varphi_1(x) = \sqrt{4 - e^{-2x}}; \quad \varphi_2(x) = -\frac{1}{2} \ln(4 - x^2).$$

- (a) Obtenha, graficamente ou usando o teorema do valor intermediário, boas estimativas iniciais para as duas raízes r_1 e r_2 .
 - (b) Indique, sem iteragir, qual função de iteração irá convergir para cada raiz. Justifique.
 - (c) Pelo método de Newton-Raphson, calcule as raízes de $f(x)$ com erro menor que 0,0001 a partir dos respectivos valores iniciais obtidos no item (a).
4. No cálculo da raiz positiva de $f(x) = 2 \cos(x/2) - x^2 + 1 = 0$, pelo método do ponto fixo (ou iteração linear), são feitas transformações para as seguintes funções de iteração:

$$\varphi_1(x) = \frac{2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 1}{x}; \quad \varphi_2(x) = \sqrt{2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 1}.$$

- (a) Obtenha, graficamente ou usando o teorema do valor intermediário, uma boa aproximação inicial x_0 para a raiz positiva de $f(x)$.
 - (b) Indique, sem iteragir, qual das funções de iteração acima converge para a raiz. Justifique.
 - (c) Pelo método de Newton-Raphson, calcule uma aproximação para a raiz de $f(x)$ com tolerância $\epsilon < 1 \times 10^{-4}$ a partir do valor inicial x_0 do item (a).
5. As funções de iterações $\varphi_1(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 4$ e $\varphi_2(x) = \frac{x^2}{2} - 2,5x + 5$ geram sequências convergentes para a raiz para qualquer aproximação inicial $x_0 \in (3/2, 3)$. Qual das duas funções converge mais rápido para esta raiz? Justifique a resposta.
 6. Determine as raízes das funções a seguir usando o Método de Newton-Raphson com tolerância $\epsilon \leq 1 \cdot 10^{-4}$.

(a) $f_1(x) = \sqrt{x} - e^{-x}$.

(d) $f_4(x) = \sin(x) - x^2$.

(b) $f_2(x) = \ln(x) - x + 2$.

(e) $f_5(x) = x/4 - \cos(x)$.

(c) $f_3(x) = e^{x/2} - x^3$.