

# Tópicos Especiais em Matemática Aplicada - 2025-1

## UERJ

### 09 - Elementos Finitos - Caso 2D

Rodrigo Madureira

rodrigo.madureira@ime.uerj.br

**Github:** <https://github.com/rodrigolrmadureira/ElementosFinitos>

# Sumário

- 1 Discretização do domínio - 2D
- 2 Aplicação no problema da condução de calor
- 3 Bibliografia

# Discretização do domínio - 2D

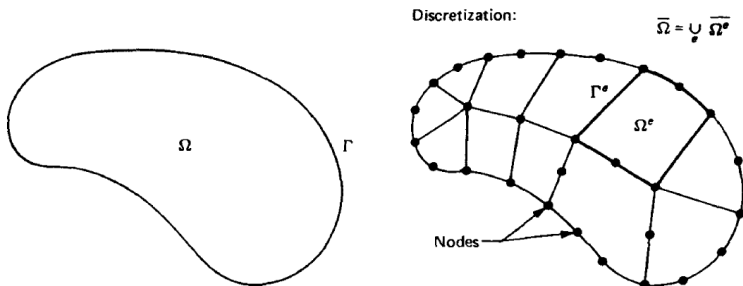


Figura: Fonte: Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method*, 1987

Algumas definições:

- **Nós:** são os pontos discretizados do domínio  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ , onde:
- $\Gamma$ : é a fronteira do domínio (curva fechada que faz o contorno do domínio);
- $\Omega$ : é a região que contém os nós que não pertencem à fronteira  $\Gamma$ , ou seja, contém os nós interiores no domínio.

# Discretização do domínio - 2D

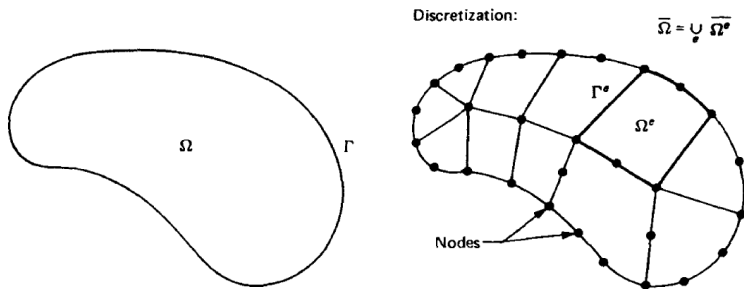


Figura: Fonte: Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method*, 1987

Considere uma partição de  $\Omega$  em subregiões  $\Omega^e$ , onde:

$$\begin{cases} \Omega = \bigcup_{e=1}^{Nel} \Omega^e, \\ \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \text{ se } i \neq j, \end{cases}$$

onde  $Nel$  é o número de subregiões, chamadas de **Elementos Finitos**.

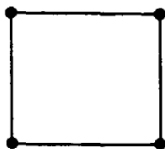
# Discretização do domínio - 2D

Usualmente, os elementos finitos em  $\mathbb{R}^2$  são **triângulos** ou **quadriláteros**.

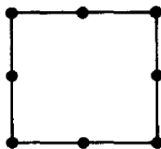
Podemos determinar a quantidade de nós em cada elemento finito  $\Omega^e$ :

$Q_n$ : quadrilátero com  $n$  nós;

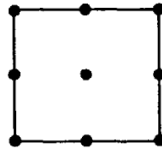
$T_n$ : triângulo com  $n$  nós.



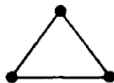
$Q_4$



$Q_8$



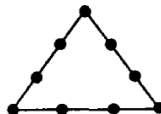
$Q_9$



$T_3$



$T_6$



$T_9$

Figura: Fonte: Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method*, 1987

# Discretização do domínio - 2D

Neste curso, trabalharemos somente com elementos do tipo  $Q_4$ .

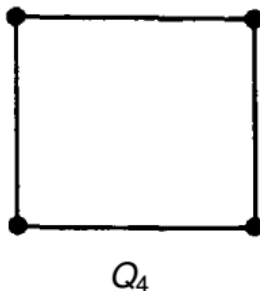


Figura: Fonte: Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method*, 1987

# Discretização do domínio - 2D

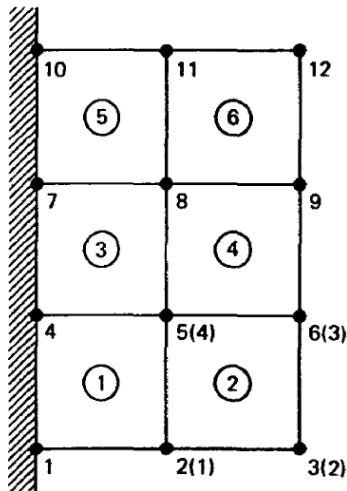
Algumas definições:

- $N_{no}$ : quantidade total de nós da malha de elementos finitos;
- $n_{no}$ : quantidade total de nós em cada elemento finito.

No caso de  $Q_4$ ,  $n_{no} = 4$ .

- $N = \{1, 2, 3, \dots, N_{no}\}$ : conjunto de nós da malha de elementos finitos;
- $N_p$ : conjunto de nós cuja solução  $u(x, y)$  já é conhecida (prescrita), ou seja,  $u|_{N_p} = p$ .
- $N - N_p$ : conjunto de nós nos quais a solução aproximada  $u_h$  será determinada com número de nós igual a  $Neq$  (número de equações).

# Discretização do domínio - 2D



**Figura:** Fonte: Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method*, 1987

## Exemplo de malha:

$$N_{no} = 12;$$

$$N = \{1, 2, 3, \dots, 12\};$$

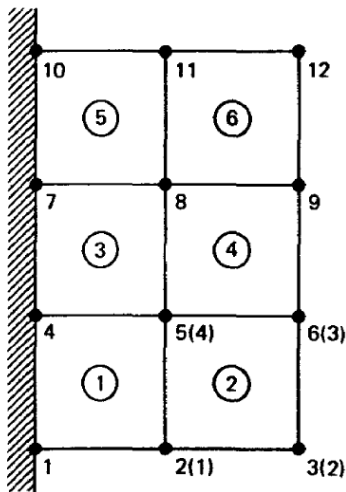
$$N_p = \{1, 4, 7, 10\};$$

$$N - N_p = \{2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12\};$$

$$Neq = \#(N - N_p) = 8.$$



# Discretização do domínio - 2D



**Figura:** Fonte: Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method*, 1987

O número do nó da malha é chamado de **nó global**.

O número do nó da malha relativo ao elemento é chamado de **nó local**.

**Obs.:** Os nós locais são numerados sempre no **sentido anti-horário**.

Neste exemplo, no elemento 2:

**Numeração local** (sentido anti-horário):  $\{1, 2, 3, 4\}$ .

**Numeração global** (sentido anti-horário):  $\{2, 3, 6, 5\}$ .

# Discretização do domínio - 2D

Para associar o número global  $A$  do nó da malha com o número local  $a$  no elemento finito  $\Omega^e$ , usamos uma **matriz LG** (*Local-Global*).

No exemplo anterior:

$a \backslash e$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	4	5	7	8
2	2	3	5	6	8	9
3	5	6	8	9	11	12
4	4	5	7	8	10	11

Tabela: Matriz LG

# Discretização do domínio - 2D

Para relacionar a numeração global  $A$  com o número da equação no sistema linear, usamos o vetor **EQ**:

No exemplo anterior:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1	2	0	3	4	0	5	6	0	7	8

Tabela: Vetor EQ

# Aplicação no problema da condução de calor

Vamos relacionar o que vimos até agora com o problema aproximado da condução de calor:

$$\sum_{j=1}^{N_{no}} a(\varphi_i, \varphi_j) c_j = (f, \varphi_i) - (\bar{q}, \varphi_i)_{\Gamma_q} - \sum_{j=1}^{N_{no}} a(\varphi_i, \varphi_j) p_j, \quad (1)$$

para todo  $i = 1, 2, \dots, N_{no}$ ,

onde vimos que a solução aproximada não prescrita (desconhecida) é dada por:

$$w_h(x, y) = \sum_{i=1}^{N_{no}} c_i \varphi_i(x, y) \quad (2)$$

## Aplicação no problema da condução de calor

Aqui, podemos restringir  $w_h(x, y)$  aos nós globais não prescritos  $B = (x_B, y_B)$  do conjunto dos nós não prescritos  $N - N_p$ . Ou seja, podemos reescrever  $w_h$  como:

$$w_h(x, y) = \sum_{B \in N - N_p} c_B \varphi_B(x, y), \quad (3)$$

onde  $\varphi_A(x, y)$  é a função de interpolação (função da base) associada ao nó global  $A$ , tal que;

$$\varphi_A(x_B, y_B) = \begin{cases} 1, & \text{se } A = B, \\ 0, & \text{se } A \neq B. \end{cases}$$

Note que nos nós globais não prescritos  $B \in N - N_p$ ,

$$w_h(x_B, y_B) = c_B$$

# Aplicação no problema da condução de calor

Vimos também que a solução prescrita (conhecida)  $p_h(x, y)$  é dada por:

$$p_h(x, y) = \sum_{j=1}^{N_{no}} p_j \varphi_j(x, y) \quad (4)$$

Logo, restringindo  $p_h$  ao conjunto dos nós prescritos  $N_p$ , podemos reescrevê-la como:

$$p_h(x, y) = \sum_{A \in N_p} p_A \varphi_A(x, y). \quad (5)$$

Note que nos nós globais prescritos  $A \in N_p$ ,

$$p_h(x_A, y_A) = p_A$$

# Aplicação no problema da condução de calor

Assim, podemos reescrever o problema aproximado da Eq. (1) como:

$$\sum_{B \in N - N_p} a(\varphi_A, \varphi_B) c_B = (f, \varphi_A) - (\bar{q}, \varphi_A)_{\Gamma_q} - \sum_{B \in N_p} a(\varphi_A, \varphi_B) p_B, \quad (6)$$

para todo  $A \in N - N_p$ .

Usando em (6) a notação matricial:

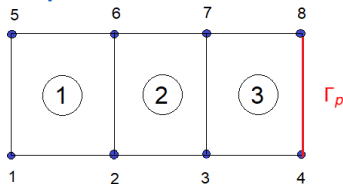
$$K_{IJ} = a(\varphi_A, \varphi_B) = (\nabla \varphi_A, k \cdot \nabla \varphi_B);$$

$$F_I = (f, \varphi_A) - (\bar{q}, \varphi_A)_{\Gamma_q} - \sum_{B \in N_p} a(\varphi_A, \varphi_B) p_B,$$

onde  $I = EQ[A]$  e  $J = EQ[B]$  são os índices dos nós das soluções não prescritas, ou seja, dos nós que pertencem ao conjunto  $N - N_p$ , então obtemos o sistema linear:

$$Kc = F.$$

## Exemplo



$$N_{no} = 8$$

$$N_p = \{4, 8\}$$

$$N_{eq} = 6$$

1	2	3	0	4	5	6	0
---	---	---	---	---	---	---	---

Tabela: Vetor EQ

a \ e	(1)	(2)	(3)
	(1)	(2)	(3)
1	1	2	3
2	2	3	4
3	6	7	8
4	5	6	7

Tabela: Matriz LG



## Exemplo

Sistema a ser resolvido:  $Kc = F$ .

Montagem da matriz global simétrica  $K$  a partir das matrizes locais simétricas

$$K^e = \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e & K_{14}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e & K_{24}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e & K_{34}^e \\ K_{41}^e & K_{42}^e & K_{43}^e & K_{44}^e \end{bmatrix}, \text{ para } e = 1, 2, 3,$$

e das informações do vetor EQ e da matriz LG.

O vetor EQ possui os índices 4 e 8 iguais a zero, indicando que estes nós globais são prescritos, e os demais índices numerados de 1 a 6, indicando que o sistema possui 6 equações.

Logo, neste exemplo,  $K_{6 \times 6}$  e  $F_{6 \times 1}$ .

## Exemplo

Vamos calcular os elementos  $K_{IJ}$  da matriz  $K$  usando  $I, J$  iguais a:

$EQ[LG(a, e)]$ , onde  $a = 1, 2, 3, 4$  e, neste exemplo,  $e = 1, 2, 3$ .

Elemento  $e = 1$ :

$$EQ[LG(1, 1)] = EQ[1] = 1$$

$$EQ[LG(2, 1)] = EQ[2] = 2$$

$$EQ[LG(3, 1)] = EQ[6] = 5$$

$$EQ[LG(4, 1)] = EQ[5] = 4$$

Aqui, por exemplo:

$$I = EQ[LG(3, 1)] = EQ[6] = 5$$

$$J = EQ[LG(4, 1)] = EQ[5] = 4 \Rightarrow K_{54} = K_{34}^1$$

Portanto, até aqui teremos:

$$\begin{array}{llll} K_{11} = K_{11}^1; & K_{12} = K_{12}^1; & K_{15} = K_{13}^1; & K_{14} = K_{14}^1; \\ K_{21} = K_{21}^1; & K_{22} = K_{22}^1; & K_{25} = K_{23}^1; & K_{24} = K_{24}^1; \\ K_{51} = K_{31}^1; & K_{52} = K_{32}^1; & K_{55} = K_{33}^1; & K_{54} = K_{34}^1; \\ K_{41} = K_{41}^1; & K_{42} = K_{42}^1; & K_{45} = K_{43}^1; & K_{44} = K_{44}^1. \end{array}$$

# Exemplo

Até agora, a matriz global  $K$  possui a configuração:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & K_{14} & K_{15} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & 0 & K_{24} & K_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{41} & K_{42} & 0 & K_{44} & K_{45} & 0 \\ K_{51} & K_{52} & 0 & K_{54} & K_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & K_{14}^1 & K_{15}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & 0 & K_{24}^1 & K_{25}^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & 0 & K_{44}^1 & K_{45}^1 & 0 \\ K_{51}^1 & K_{52}^1 & 0 & K_{54}^1 & K_{55}^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Exemplo

Elemento  $e = 2$ :

$$EQ[LG(1, 2)] = EQ[2] = 2$$

$$EQ[LG(2, 2)] = EQ[3] = 3$$

$$EQ[LG(3, 2)] = EQ[7] = 6$$

$$EQ[LG(4, 2)] = EQ[6] = 5$$

Note que:

$K_{22} = K_{11}^2 + K_{22}^1$ , pois a posição  $K_{22}$  já estava ocupada por  $K_{22}^1$ .  
Logo, toda vez que a posição estiver ocupada, devemos somar.

Portanto, aqui temos:

$$\begin{aligned} K_{22} &= K_{11}^2 + K_{22}^1; & K_{23} &= K_{12}^2; & K_{26} &= K_{13}^2; & K_{25} &= K_{14}^2 + K_{23}^1; \\ K_{32} &= K_{21}^2; & K_{33} &= K_{22}^2; & K_{36} &= K_{23}^2; & K_{35} &= K_{24}^2; \\ K_{62} &= K_{31}^2; & K_{63} &= K_{32}^2; & K_{66} &= K_{33}^2; & K_{65} &= K_{34}^2; \\ K_{52} &= K_{41}^2 + K_{32}^1; & K_{53} &= K_{42}^2; & K_{56} &= K_{43}^2; & K_{55} &= K_{44}^2 + K_{33}^1. \end{aligned}$$

# Exemplo

Até agora, a matriz global  $K$  possui a configuração:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & K_{14} & K_{15} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ 0 & K_{32} & K_{33} & 0 & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & 0 & K_{44} & K_{45} & 0 \\ K_{51} & K_{52} & 0 & K_{54} & K_{55} & 0 \\ 0 & K_{62} & K_{63} & 0 & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & K_{14}^1 & K_{15}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{11}^2 + K_{22}^1 & K_{12}^2 & K_{24}^1 & K_{14}^2 + K_{23}^1 & K_{13}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 & 0 & K_{24}^2 & K_{23}^2 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & 0 & K_{44}^1 & K_{43}^1 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{41}^2 + K_{32}^1 & K_{42}^2 & K_{34}^1 & K_{44}^2 + K_{33}^1 & K_{43}^2 \\ 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & 0 & K_{34}^2 & K_{33}^2 \end{bmatrix}$$

# Exemplo

Elemento  $e = 3$ :

$$EQ[LG(1, 3)] = EQ[3] = 3$$

$$EQ[LG(2, 3)] = EQ[4] = 0 \Rightarrow \text{Não gera equação, não será usado.}$$

$$EQ[LG(3, 3)] = EQ[8] = 0 \Rightarrow \text{Não gera equação, não será usado.}$$

$$EQ[LG(4, 3)] = EQ[7] = 6$$

Aqui, temos:

$$K_{33} = K_{11}^3 + K_{22}^2; \quad K_{36} = K_{14}^3 + K_{23}^2;$$

$$K_{63} = K_{41}^3 + K_{32}^2; \quad K_{66} = K_{44}^3 + K_{33}^2.$$

# Exemplo

Logo, a matriz global  $K$  terá a configuração:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & K_{14} & K_{15} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ 0 & K_{32} & K_{33} & 0 & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & 0 & K_{44} & K_{45} & 0 \\ K_{51} & K_{52} & 0 & K_{54} & K_{55} & 0 \\ 0 & K_{62} & K_{63} & 0 & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & K_{14}^1 & K_{15}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{11}^2 + K_{22}^1 & K_{12}^2 & K_{24}^1 & K_{14}^2 + K_{23}^1 & K_{13}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{11}^3 + K_{22}^2 & K_{11}^3 & K_{24}^2 & K_{14}^3 + K_{23}^2 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & 0 & K_{44}^1 & K_{43}^1 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{41}^2 + K_{32}^1 & K_{42}^2 & K_{34}^1 & K_{44}^2 + K_{33}^1 & K_{43}^2 \\ 0 & K_{31}^2 & K_{41}^3 + K_{32}^2 & 0 & K_{34}^2 & K_{44}^3 + K_{33}^2 \end{bmatrix}$$

# Exemplo

Montagem do vetor global  $F$  a partir dos vetores locais:

$$F^e = \begin{bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \\ F_4^e \end{bmatrix}, \text{ para } e = 1, 2, 3,$$

e das informações do vetor EQ e da matriz LG.

Elemento  $e = 1$ :

$$EQ[LG(1, 1)] = EQ[1] = 1$$

$$EQ[LG(2, 1)] = EQ[2] = 2$$

$$EQ[LG(3, 1)] = EQ[6] = 5$$

$$EQ[LG(4, 1)] = EQ[5] = 4$$

Aqui teremos:

$$F_1 = F_1^1; \quad F_2 = F_2^1; \quad F_5 = F_3^1; \quad F_4 = F_4^1.$$



# Exemplo

Até agora, o vetor global  $F$  possui a configuração:

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \\ F_4 \\ F_5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ 0 \\ F_4^1 \\ F_3^1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Exemplo

Elemento  $e = 2$ :

$$EQ[LG(1, 2)] = EQ[2] = 2$$

$$EQ[LG(2, 2)] = EQ[3] = 3$$

$$EQ[LG(3, 2)] = EQ[7] = 6$$

$$EQ[LG(4, 2)] = EQ[6] = 5$$

Aqui teremos:

$$F_2 = F_1^2 + F_2^1; \quad F_3 = F_2^2; \quad F_6 = F_3^2; \quad F_5 = F_4^2 + F_3^1.$$

Até agora, o vetor global  $F$  possui a configuração:

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_1^2 + F_2^1 \\ F_2^2 \\ F_4^1 \\ F_4^2 + F_3^1 \\ F_3^2 \end{bmatrix}$$

# Exemplo

Elemento  $e = 3$ :

$$EQ[LG(1, 3)] = EQ[3] = 3$$

$$EQ[LG(2, 3)] = EQ[4] = 0 \Rightarrow \text{Não gera equação.}$$

$$EQ[LG(3, 3)] = EQ[8] = 0 \Rightarrow \text{Não gera equação.}$$

$$EQ[LG(4, 3)] = EQ[7] = 6$$





Aqui teremos:

$$F_3 = F_1^3 + F_2^2 \quad F_6 = F_4^3 + F_3^2;$$

Até agora, o vetor global  $F$  possui a configuração:

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_1^2 + F_2^1 \\ F_1^3 + F_2^2 \\ F_4^1 \\ F_4^2 + F_3^1 \\ F_4^3 + F_3^2 \end{bmatrix}$$

# Referências I

-  Hughes, T.J.R.. **The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. Prentice-Hall, Inc., 1987.
-  Fish, J.; Belytschko, T.. **A First Course in Finite Elements**. Wiley, 2007.
-  Becker, E. B.; Carey, G. F.; Oden, J. T.. **Finite Elements - An Introduction**. Prentice-Hall, 1981.
-  Liu, I.S.; Rincon, M.A.. **Introdução ao Método de Elementos Finitos, Análise e Aplicação**. IM/UFRJ, 2003.