Tópicos Especiais em Matemática Aplicada - 2025-1
UERJ

04 - Solução numérica 1D - Abordagem tradicional

Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br
Github: https://github.com/rodrigolrmadureira/ElementosFinitos

Sumário

Problema aproximado

Com a formulação de Galerkin, obtemos o sistema linear:

$$Kc = F, \tag{1}$$

com

$$K = [K_{ij}]_{m\times m} \text{ (\textbf{matriz de rigidez})},$$
$$F = [F_i]_{m\times 1} \text{ (\textbf{vetor força})},$$
$$c = [c_i]_{m\times 1} \text{ (\textbf{vetor solução para} } u_h(x)\text{)}$$

onde

$$K_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = \alpha M_{ij} + \beta N_{ij},$$
$$M_{ij} = (\varphi_{ix}, \varphi_{jx});\ N_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j);\ F_j = (f, \varphi_j).$$

Veremos agora uma abordagem tradicional para a montagem da matriz K e do vetor F para obter a solução numérica c do problema (1).

Interpolação de Lagrange linear por partes

Seja V_h um subespaço de $V = H_0^1(\Omega)$ definido como:

$$V_h = [\varphi_1, \ldots, \varphi_m] \tag{2}$$

As funções φ_i escolhidas são **funções de interpolação de Lagrange linear por partes** satisfazendo:

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases} \tag{3}$$

onde $x_j \in \Omega$ é denominado **nó**.

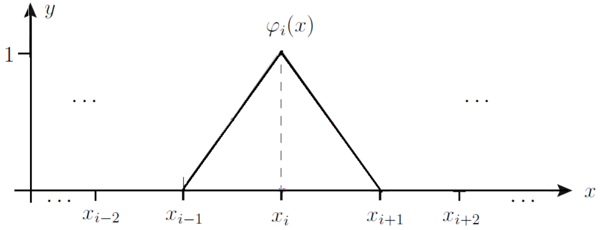


Figura: Função de base de Lagrange linear $\varphi_i(x)$

Interpolação de Lagrange linear por partes

Os **nós** x_j, para $j = 1, 2, \ldots, m$, são pontos discretos do intervalo $\Omega = [x_1, x_m]$ distribuídos de forma equidistante.

Obs.: No exemplo dado, $\Omega = [0, 1]$. Neste caso, $x_1 = 0$ e $x_m = 1$.

Portanto, dividimos o domínio Ω em $(m - 1)$ partes iguais e definimos o passo

$$h = x_{i+1} - x_i, \text{ para } \quad i = 1, \ldots, m. \tag{4}$$

Obs.: Os nós x_0 e x_{m+1} estão fora do domínio Ω.

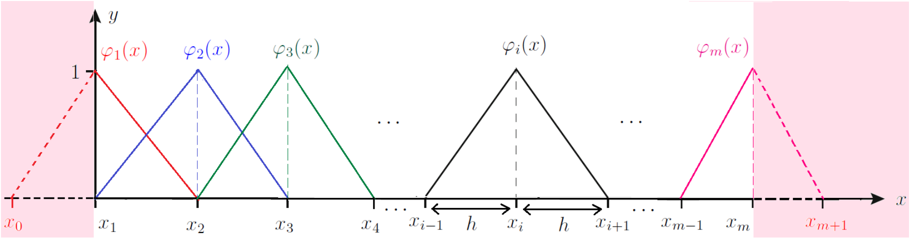


Figura: Funções da base de Lagrange linear

Interpolação de Lagrange linear por partes

Em cada nó x_i, definimos a função de Lagrange linear por partes $\varphi_i(x)$, satisfazendo a condição (3). Assim, $\varphi_i(x)$ para $i = 1, \ldots, m$ é definida por:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \dfrac{x - x_{i-1}}{h}, & \text{se } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} = \dfrac{x_{i+1} - x}{h}, & \text{se } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & \text{se } x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases} \tag{5}$$

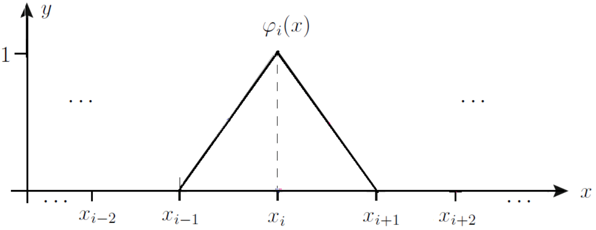


Figura: Função de base de Lagrange linear $\varphi_i(x)$

Interpolação de Lagrange linear por partes

De (5), podemos calcular a derivada de $\varphi_i(x)$, obtendo-se:

$$\varphi_{ix}(x) = \frac{d\varphi_i}{dx}(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & \text{se } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ -\frac{1}{h}, & \text{se } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & \text{se } x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases} \tag{6}$$

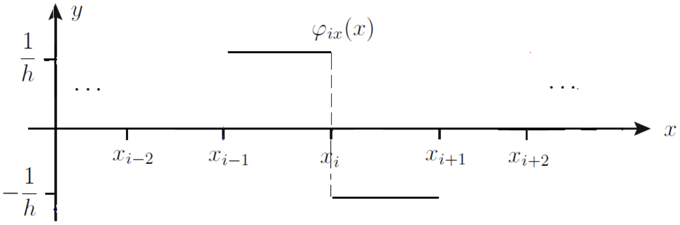
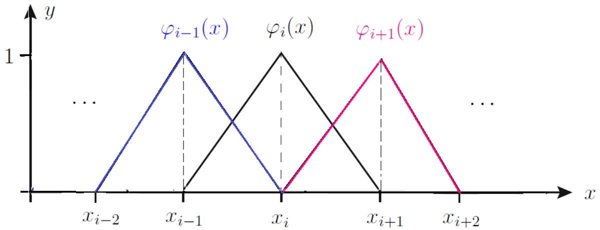


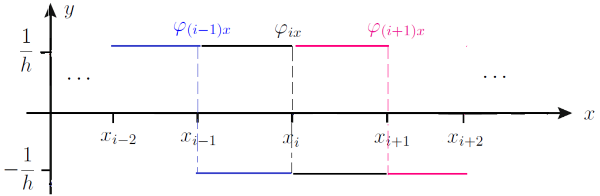
Figura: Derivada da função de base de Lagrange linear $\varphi_{ix}(x)$

Interpolação de Lagrange linear por partes

Observe que para φ_i e φ_j não consecutivos:

$$\varphi_i(x)\varphi_j(x) = \frac{d\varphi_i}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx} = 0, \qquad \text{se } |i-j| \geq 2. \tag{7}$$





Matriz de rigidez K

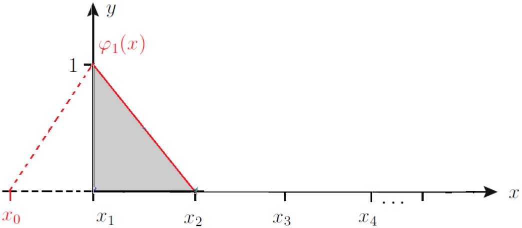
Pela definição do problema,

$$K_{ij} = \alpha M_{ij} + \beta N_{ij} = \alpha(\varphi_{ix}, \varphi_{jx}) + \beta(\varphi_i, \varphi_j) = \alpha \int_0^1 \varphi_{ix}\varphi_{jx} dx + \beta \int_0^1 \varphi_i \varphi_j dx$$

Vamos ver o que acontece com a primeira linha de K (K_{1j}, para $j = 1, 2, \ldots, m$):

$$K_{11} = \alpha(\varphi_{1x}, \varphi_{1x}) + \beta(\varphi_1, \varphi_1) = \alpha \int_0^1 (\varphi_{1x})^2 dx + \beta \int_0^1 (\varphi_1(x))^2 dx$$

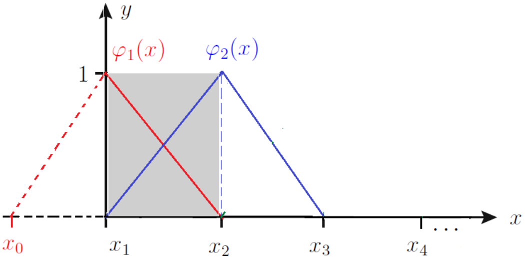
$$= \alpha \int_{x_1}^{x_2} (\varphi_{1x})^2 dx + \beta \int_{x_1}^{x_2} (\varphi_1(x))^2 dx \neq 0$$



Matriz de rigidez K

$$K_{12} = \alpha(\varphi_{1x}, \varphi_{2x}) + \beta(\varphi_1, \varphi_2) = \alpha \int_0^1 \varphi_{1x}\varphi_{2x} dx + \beta \int_0^1 \varphi_1(x)\varphi_2(x) dx$$

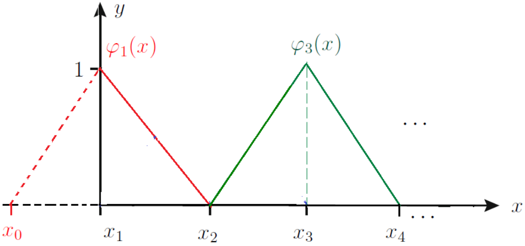
$$= \alpha \int_{x_1}^{x_2} \varphi_{1x}\varphi_{2x} dx + \beta \int_{x_1}^{x_2} \varphi_1(x)\varphi_2(x) dx \neq 0$$



Matriz de rigidez K

Agora, para $j \geq 3$:

$$K_{1j} = \alpha(\varphi_{1x}, \varphi_{jx}) + \beta(\varphi_1, \varphi_j) = \alpha \int_0^1 \varphi_{1x}\varphi_{jx}dx + \beta \int_0^1 \varphi_1(x)\varphi_j(x)dx = 0$$



Então, a primeira linha de K segue o padrão:

$$K_{1j} = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

onde os asteriscos são os elementos não nulos K_{11} e K_{12}.

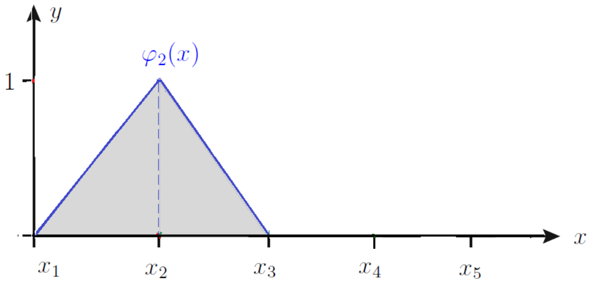
Matriz de rigidez K

Vamos ver o que acontece com a segunda linha de K (K_{2j}, para $j = 1, 2, \ldots, m$):

Como a matriz K é simétrica, $K_{21} = K_{12}$, que já calculamos. Logo, $K_{21} \neq 0$.

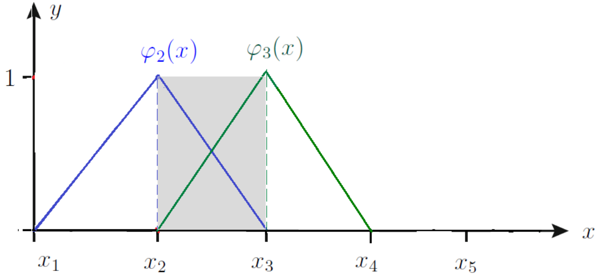
$$K_{22} = \alpha(\varphi_{2x}, \varphi_{2x}) + \beta(\varphi_2, \varphi_2) = \alpha \int_0^1 (\varphi_{2x})^2 dx + \beta \int_0^1 (\varphi_2(x))^2 dx$$

$$= \alpha \int_{x_1}^{x_3} (\varphi_{2x})^2 dx + \beta \int_{x_1}^{x_3} (\varphi_2(x))^2 dx \neq 0$$



Matriz de rigidez K

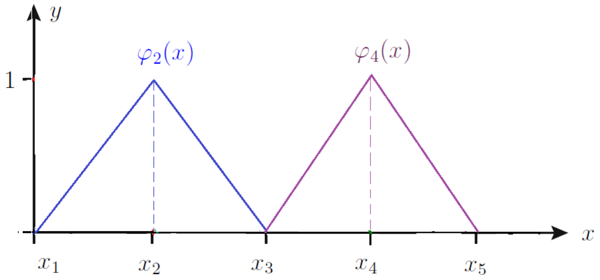
$$K_{23} = \alpha(\varphi_{2x}, \varphi_{3x}) + \beta(\varphi_2, \varphi_3) = \alpha \int_0^1 \varphi_{2x}\varphi_{3x} dx + \beta \int_0^1 \varphi_2(x)\varphi_3(x) dx$$
$$= \alpha \int_{x_2}^{x_3} \varphi_{2x}\varphi_{3x} dx + \beta \int_{x_2}^{x_3} \varphi_2(x)\varphi_3(x) dx \neq 0$$



Matriz de rigidez K

Agora, para $j \geq 4$:

$$K_{2j} = \alpha(\varphi_{2x}, \varphi_{jx}) + \beta(\varphi_2, \varphi_j) = \alpha \int_0^1 \varphi_{2x}\varphi_{jx}dx + \beta \int_0^1 \varphi_2(x)\varphi_j(x)dx = 0$$



Então, a segunda linha de K segue o padrão:

$$K_{2j} = \begin{bmatrix} * & * & * & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

onde os asteriscos são os elementos não nulos K_{21}, K_{22} e K_{23}.

Matriz de rigidez K

Analogamente, repetindo o processo para as demais linhas, obtemos a matriz quadrada, tridiagonal e esparsa $m \times m$:

$$K = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez K

$$K = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & K_{ii} & K_{i,i+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & K_{i+1,i} & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix},$$

Agora, devemos calcular os elementos não nulos, que são:

- **Os elementos da diagonal de** K:

$$K_{ii}, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, m.$$

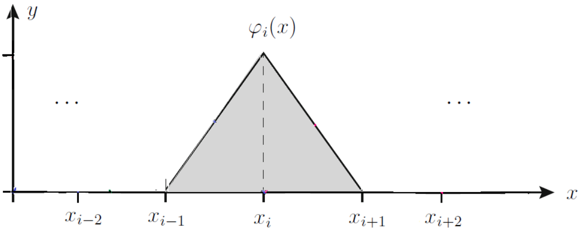
- **Os elementos à direita ou abaixo de** K_{ii}:

$$K_{i,i+1} = K_{i+1,i}, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, m.$$

Matriz de rigidez K

Por definição,

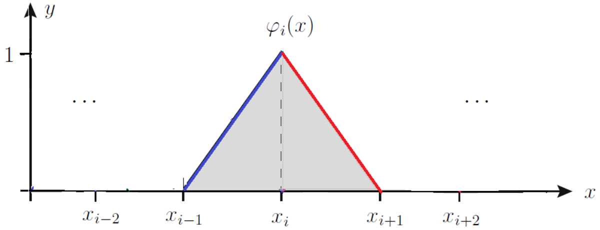
$$K_{ii} = \alpha(\varphi_{ix}, \varphi_{ix}) + \beta(\varphi_i, \varphi_i) = \alpha \int_0^1 (\varphi_{ix})^2 dx + \beta \int_0^1 (\varphi_i(x))^2 dx$$
$$= \alpha \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (\varphi_{ix})^2 dx + \beta \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (\varphi_i(x))^2 dx$$



Matriz de rigidez K

Por definição,

$$K_{ii} = \alpha\Big(\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\varphi_{ix})^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\varphi_{ix})^2 dx\Big)$$
$$+ \beta\Big(\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\varphi_i(x))^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\varphi_i(x))^2 dx\Big)$$

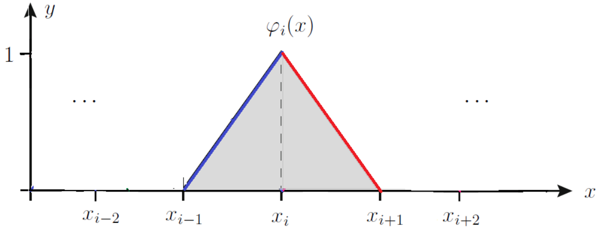


Matriz de rigidez K

Por definição,

$$
\begin{aligned}
K_{ii} &= \alpha\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\frac{1}{h}\right)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(-\frac{1}{h}\right)^2 dx\right) \\
&\quad + \beta\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(\frac{x_{i+1}-x}{h}\right)^2 dx\right) \\
&= 2\left(\frac{\alpha}{h}+\frac{\beta h}{3}\right).
\end{aligned}
$$

(Exercício: Prove!)

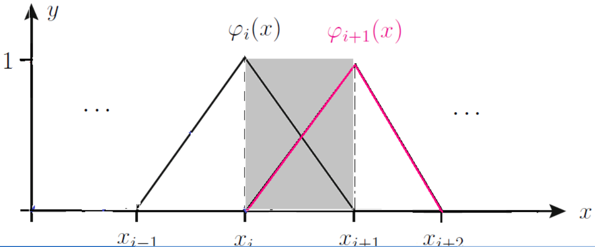


Matriz de rigidez K

Agora, calculamos:

$$
\begin{aligned}
K_{i,i+1} &= \alpha(\varphi_{ix}, \varphi_{(i+1)x}) + \beta(\varphi_i, \varphi_{i+1}) \\
&= \alpha \int_0^1 \varphi_{ix}\varphi_{(i+1)x} dx + \beta \int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x) dx \\
&= \alpha \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_{ix}\varphi_{(i+1)x} dx + \beta \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x) dx \\
&= \alpha \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{1}{h}\right)\left(\frac{1}{h}\right) dx + \beta \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x_{i+1}-x}{h}\right)\left(\frac{x-x_i}{h}\right) dx = -\frac{\alpha}{h} + \frac{\beta h}{6}.
\end{aligned}
$$

(Exercício: Prove! Dica: use mudança de variáveis $z = x - x_i$).



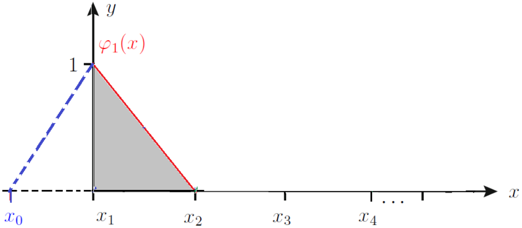
Matriz de rigidez K

Obs.: x_0 é um nó que não faz parte do domínio $\Omega = [x_1, x_m] = [0, 1]$. Assim,

$$K_{11} = \alpha(\varphi_{1x}, \varphi_{1x}) + \beta(\varphi_1, \varphi_1) = \alpha \int_0^1 (\varphi_{1x})^2 dx + \beta \int_0^1 (\varphi_1(x))^2 dx$$

$$= \alpha \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{1}{h}\right)^2 dx + \beta \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{x_2 - x}{h}\right)^2 dx = \frac{\alpha}{h} + \frac{\beta h}{3}.$$

(Exercício: Prove!).



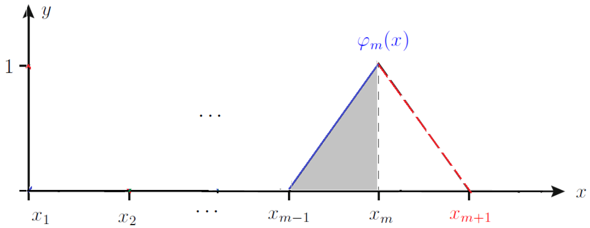
Matriz de rigidez K

Obs.: x_{m+1} é um nó que não faz parte do domínio $\Omega = [x_1, x_m] = [0, 1]$. Assim,

$$K_{mm} = \alpha(\varphi_{mx}, \varphi_{mx}) + \beta(\varphi_m, \varphi_m) = \alpha \int_0^1 (\varphi_{mx})^2 dx + \beta \int_0^1 (\varphi_m(x))^2 dx$$

$$= \alpha \int_{x_{m-1}}^{x_m} \left(\frac{1}{h}\right)^2 dx + \beta \int_{x_{m-1}}^{x_m} \left(\frac{x - x_{m-1}}{h}\right)^2 dx = \frac{\alpha}{h} + \frac{\beta h}{3}.$$

(Exercício: Prove!).



Vetor força F

Componentes do vetor F:

$$F^T = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & \cdots & F_m \end{bmatrix}, \text{ onde:}$$

Obs.: $x_0 \notin \Omega = [x_1, x_m] = [0, 1]$. Assim,

$$F_1 = (f, \varphi_1) = \int_0^1 f(x)\varphi_1(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\varphi_1(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\left(\frac{x_2 - x}{h}\right)dx;$$

Para $i = 2, \ldots, m$:

$$\begin{aligned} F_i = (f, \varphi_i) = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x)dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\varphi_i(x)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x)dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\left(\frac{x - x_{i-1}}{h}\right)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\left(\frac{x_{i+1} - x}{h}\right)dx \end{aligned}$$

Vetor força F

Obs.: $x_{m+1} \notin \Omega = [x_1, x_m] = [0, 1]$. Assim,

$$F_m = (f, \varphi_m) = \int_0^1 f(x)\varphi_m(x)dx = \int_{x_{m-1}}^{x_m} f(x)\varphi_m(x)dx$$
$$= \int_{x_{m-1}}^{x_m} f(x)\left(\frac{x - x_{m-1}}{h}\right)dx$$

O cálculo vai depender da definição da função $f(x)$.

Resultados

Matriz de rigidez K:

$$K_{11} = \frac{\alpha}{h} + \frac{\beta h}{3};$$

$$K_{ii} = 2\left(\frac{\alpha}{h} + \frac{\beta h}{3}\right), \text{ para } i = 2, 3, \ldots, m-1; \tag{8}$$

$$K_{i+1,i} = K_{i,i+1} = -\frac{\alpha}{h} + \frac{\beta h}{6}, \text{ para } i = 1, 2, 3, \ldots, m-1;$$

$$K_{mm} = \frac{\alpha}{h} + \frac{\beta h}{3}.$$

Vetor força F:

$$F_1 = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\left(\frac{x_2 - x}{h}\right)dx;$$

$$F_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\left(\frac{x - x_{i-1}}{h}\right)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\left(\frac{x_{i+1} - x}{h}\right)dx, \text{ para } i = 2, 3, \ldots, m-1;$$

$$F_m = \int_{x_{m-1}}^{x_m} f(x)\left(\frac{x - x_{m-1}}{h}\right)dx. \tag{9}$$

Condições de contorno

O sistema linear $Kc = F$ é dado por:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{43} & K_{44} & K_{45} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{54} & K_{55} & K_{56} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & * & K_{mm} \end{bmatrix}}_{K} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ \vdots \\ c_{m-1} \\ c_m \end{bmatrix}}_{c} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ \vdots \\ F_{m-1} \\ F_m \end{bmatrix}}_{F}$$

Usando as condições de contorno do enunciado, obtemos $c_1 = c_m = 0$, pois:

$$u_h(0) = u_h(x_1) = \sum_{i=1}^{m} c_i\, \varphi_i(x_1) = c_1 \text{ e } u_h(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0;$$

$$u_h(1) = u_h(x_m) = \sum_{i=1}^{m} c_i\, \varphi_i(x_m) = c_m \text{ e } u_h(1) = 0 \Rightarrow c_m = 0.$$

Condições de contorno

Na primeira linha do sistema,

$$K_{11}\ c_1 + K_{12}\ c_2 = F_1,$$

tornando $K_{11} = 1$ e $K_{12} = 0$, obtemos $c_1 = 0$.

Na segunda linha do sistema,

$$K_{21}\ c_1 + K_{22}\ c_2 + K_{23}\ c_3 = F_2 \Rightarrow K_{22}\ c_2 + K_{23}\ c_3 = F_2 - K_{21}\cancelto{0}{c_1} = F_2$$

Da linha 3 até a linha $m - 2$, nenhuma equação do sistema depende de c_1 e c_m. Logo, continuam as mesmas.

Na última linha (linha m),

$$K_{m,m-1}\ c_{m-1} + K_{mm}\ c_m = F_m,$$

tornando $K_{m,m-1} = 0$, e $K_{mm} = 1$, obtemos $c_m = 0$.

Na penúltima linha do sistema (linha $m - 1$),

$$K_{m-1,m-2}\ c_{m-2} + K_{m-1,m-1}\ c_{m-1} + K_{m-1,m}\ c_m = F_{m-1}$$

$$\Rightarrow K_{m-1,m-2}\ c_{m-2} + K_{m-1,m-1}\ c_{m-1} = F_{m-1} - K_{m-1,m}\ \cancelto{0}{c_m} = F_{m-1}$$

Condições de contorno

Conclusão: com as condições de contorno $c_1 = 0$ e $c_m = 0$, a primeira e última linhas e a primeira e última colunas são retiradas do sistema.

$$
\underbrace{\begin{bmatrix}
K_{22} & K_{23} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \\
K_{32} & K_{33} & K_{34} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \\
0 & K_{43} & K_{44} & K_{45} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & K_{54} & K_{55} & K_{56} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * &
\end{bmatrix}}_{\overline{K}}
\underbrace{\begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ \vdots \\ c_{m-1} \end{bmatrix}}_{\overline{c}}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ \vdots \\ F_{m-1} \end{bmatrix}}_{\overline{F}}
$$

Logo, devemos resolver o sistema $\overline{K}\,\overline{c} = \overline{F}$, onde:

$\overline{K} = [\overline{K}]_{(m-2)\times(m-2)}$, $\overline{c} = [\overline{c}]_{(m-2)\times 1}$, $\overline{F} = [\overline{K}]_{(m-2)\times 1}$

Referências I

Liu, I.S.; Rincon, M.A.. **Introdução ao Método de Elementos Finitos, Análise e Aplicação**. IM/UFRJ, 2003.