Tópicos Especiais em Matemática Aplicada - 2025-1
UERJ

08 - Caso 2D estacionário - Formulação de Galerkin e Problema Aproximado

Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br
Github: https://github.com/rodrigolrmadureira/ElementosFinitos

Sumário

Formulação fraca

Formulação fraca - Problema da condução de calor (Materiais isotrópicos ($Q = kI$, $k > 0$))

Sejam $H = \{u \in H^1(\Omega); u = p \text{ em } \Gamma_p\}$;
$V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ em } \Gamma_p\}$.

Dados $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $p : \Gamma_p \to \mathbb{R}$, $\bar{q} : \Gamma_q \to \mathbb{R}$ suficientemente suaves, a solução $u \in H$ da formulação fraca é tal que:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot k \cdot \nabla v \, dxdy = \int_\Omega f \, v \, dxdy - \int_{\Gamma_q} \bar{q} \, v \, d\Gamma, \text{ para todo } v \in V. \quad (1)$$

Ou, em notação de produto interno:

$$a(u, v) = (f, v) - (\bar{q}, v)_{\Gamma_q}, \text{ para todo } v \in V, \quad (2)$$

onde foi definida a forma bilinear $a(u, v) = (\nabla u, k \cdot \nabla v)$.

Obs.: $a(u, v)$ é bilinear, coerciva e contínua em V. Logo, pelo **Teorema de Lax-Milgram**, há uma única solução fraca u para o problema (2).

Problema da condução de calor (Regime permanente)

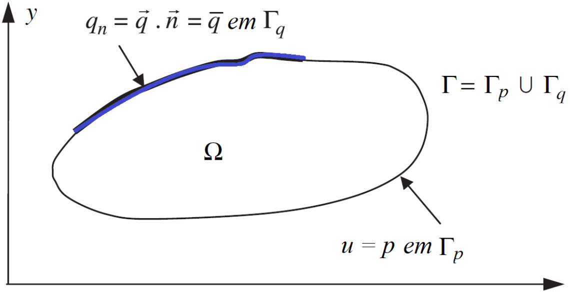
Recapitulando, a fronteira é dividida em duas partes:

Γ_p: fronteira onde a temperatura u é prescrita, de onde obtemos a **condição de fronteira de Dirichlet (essencial)**,

$$u = p, \quad \text{em } \Gamma_p, \tag{3}$$

Γ_q: fronteira onde o fluxo normal de calor q_n é prescrito, de onde obtemos a **condição de fronteira de Neumann (natural)**,

$$q_n = \vec{q} \cdot \vec{n} = \bar{q}, \quad \text{em } \Gamma_q. \tag{4}$$



Formulação de Galerkin - Problema aproximado

Sejam V_h e H_h subespaços de dimensão finita, respectivamente, de:

$$\begin{aligned} V &= \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ em } \Gamma_p\}; \\ H &= \{u \in H^1(\Omega); u = p \text{ em } \Gamma_p\}, \end{aligned} \tag{5}$$

onde

$$V_h = \left[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\right], \tag{6}$$

e as funções $\varphi_i(x, y)$, $i = 1, 2, \dots, m$ são de **Lagrange linear** com domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Ou seja, $\varphi_i(x, y) = 0$ em Γ_p, $i = 1, 2, \dots, m$.

Mas, a **solução aproximada** $u_h(x, y) \in H_h$, ou seja, $u_h(x, y) = p$ em Γ_p.

Então, note que u_h não pode ser combinação linear das funções base de V_h se considerarmos **soluções prescritas não nulas** p.

Formulação de Galerkin - Problema aproximado

Podemos reescrever $u_h \in H_h$ como a soma:

$$u_h(x, y) = w_h(x, y) + p_h(x, y), \tag{7}$$

onde $w_h \in V_h$ é a **solução aproximada não prescrita** e $p_h \in H_h$ é a **solução aproximada prescrita**.

Note que na fronteira Γ_p,

$$w_h \in V_h \Rightarrow w_h = 0 \text{ em } \Gamma_p,$$

$$p_h \in H_h \Rightarrow p_h = p \text{ em } \Gamma_p$$

$$\Rightarrow u_h = 0 + p \Rightarrow u_h = p \text{ em } \Gamma_p \ .$$

Fora da fronteira Γ_p:

$w_h \neq 0$ e $p_h = 0 \Rightarrow u_h = w_h$, para todo $(x, y) \in \Gamma \setminus \Gamma_p$.

Logo, $w_h(x, y)$ é a incógnita do problema aproximado.

Formulação de Galerkin - Problema aproximado

Como $V_h \subset V$, temos na formulação fraca (2) que:

$$a(u, v_h) = (f, v_h) - (\bar{q}, v_h)_{\Gamma_q}, \text{ para todo } v_h \in V_h. \tag{8}$$

Tomando $u = u_h$ em (8), obtemos a formulação fraca discreta:

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h) - (\bar{q}, v_h)_{\Gamma_q}, \text{ para todo } v_h \in V_h. \tag{9}$$

Usando $u_h = w_h + p_h$, onde $w_h \in V_h$ e $p_h \in H_h$, obtemos:

$$\begin{aligned} & a(w_h + p_h, v_h) = (f, v_h) - (\bar{q}, v_h)_{\Gamma_q}, \text{ para todo } v_h \in V_h \\ \Rightarrow\ & a(w_h, v_h) + a(p_h, v_h) = (f, v_h) - (\bar{q}, v_h)_{\Gamma_q}, \text{ para todo } v_h \in V_h \\ \Rightarrow\ & a(w_h, v_h) = (f, v_h) - (\bar{q}, v_h)_{\Gamma_q} - a(p_h, v_h), \text{ para todo } v_h \in V_h \end{aligned} \tag{10}$$

Agora, como $w_h \in V_h$, logo u_h pode ser escrito como uma combinação linear das funções base de V_h, ou seja,

$$w_h(x, y) = \sum_{i=1}^{m} c_i \, \varphi_i(x, y) \tag{11}$$

Formulação de Galerkin - Problema aproximado

Substituindo a Eq. (11) ma Eq. (10), obtemos:

$$a\left(\sum_{i=1}^{m} c_i\,\varphi_i, v_h\right) = (f, v_h) - (\bar{q}, v_h)_{\Gamma_q} - a(p_h, v_h),\ \text{para todo } v_h \in V_h \tag{12}$$

Pela linearidade de $a(u, v)$, obtemos:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i\, a(\varphi_i, v_h) = (f, v_h) - (\bar{q}, v_h)_{\Gamma_q} - a(p_h, v_h),\ \text{para todo } v_h \in V_h \tag{13}$$

Tomando arbitrariamente $v_h = \varphi_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$, em (13), obtemos:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i\, a(\varphi_i, \varphi_j) = (f, \varphi_j) - (\bar{q}, \varphi_j)_{\Gamma_q} - a(p_h, \varphi_j),\ \text{para todo } j = 1, 2, \ldots, m \tag{14}$$

Fazendo a transposta de todos os termos de (14), obtemos:

$$\sum_{j=1}^{m} a(\varphi_j, \varphi_i)\, c_j = (f, \varphi_i) - (\bar{q}, \varphi_i)_{\Gamma_q} - a(p_h, \varphi_i),\ \text{para todo } i = 1, 2, \ldots, m \tag{15}$$

Formulação de Galerkin - Problema aproximado

Como $a(\cdot,\cdot)$ é uma forma simétrica, $a(\varphi_j,\varphi_i) = a(\varphi_i,\varphi_j)$. Assim, obtemos em (15):

$$\sum_{j=1}^{m} a(\varphi_i,\varphi_j)\, c_j = (f,\varphi_i) - (\bar{q},\varphi_i)_{\Gamma_q} - a(p_h,\varphi_i), \text{ para todo } i = 1,2,\ldots,m \quad (16)$$

Agora, vamos definir a interpolação

$$p_h(x,y) = \sum_{j=1}^{m} p_j\, \varphi_j(x,y), \quad (17)$$

onde p_j é a temperatura prescrita no nó (x_j,y_j) e sabemos que

$$\varphi_j(x_i,y_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } j = i, \\ 0, & \text{se } j \neq i, \end{cases}$$

onde $(x_j,y_j) \in \Omega$ é denominado **nó**.

Formulação de Galerkin - Problema aproximado

Substituindo (17) em (16), obtemos para todo $i = 1, 2, \ldots, m$,

$$\sum_{j=1}^{m} a(\varphi_i, \varphi_j)\, c_j = (f, \varphi_i) - (\bar{q}, \varphi_i)_{\Gamma_q} - a\left(\sum_{j=1}^{m} p_j\, \varphi_j, \varphi_i\right). \tag{18}$$

No último termo do lado direito da Eq. (18), obtemos:

- Por linearidade de $a(\cdot, \cdot)$:

$$\sum_{j=1}^{m} a(\varphi_i, \varphi_j)\, c_j = (f, \varphi_i) - (\bar{q}, \varphi_i)_{\Gamma_q} - \sum_{j=1}^{m} p_j\, a(\varphi_j, \varphi_i). \tag{19}$$

- Por comutatividade:

$$\sum_{j=1}^{m} a(\varphi_i, \varphi_j)\, c_j = (f, \varphi_i) - (\bar{q}, \varphi_i)_{\Gamma_q} - \sum_{j=1}^{m} a(\varphi_j, \varphi_i)\, p_j. \tag{20}$$

Formulação de Galerkin - Problema aproximado

- Por simetria de $a(\cdot,\cdot)$:

$$\sum_{j=1}^{m} a(\varphi_i,\varphi_j)\, c_j = (f,\varphi_i) - (\bar{q},\varphi_i)_{\Gamma_q} - \sum_{j=1}^{m} a(\varphi_i,\varphi_j)\, p_j. \tag{21}$$

Usando em (21) a notação matricial:

$K_{ij} = a(\varphi_i,\varphi_j) = (\nabla\varphi_i, k\cdot\nabla\varphi_j);\quad f_i = (f,\varphi_i);\quad q_i = (\bar{q},\varphi_i)_{\Gamma_q};$

$p_i = \sum_{j=1}^{m} a(\varphi_i,\varphi_j)\, p_j = \sum_{j=1}^{m} K_{ij}p_j,$

obtemos:

$$\sum_{j=1}^{m} K_{ij}\, c_j = f_i - q_i - p_i = F_i.$$

$$\Rightarrow Kc = F.$$

Formulação de Galerkin - Problema aproximado

Problema aproximado 2D - Condução de calor - Materiais isotrópicos ($Q = kI$, $k > 0$)

$$\sum_{j=1}^{m} K_{ij}\, c_j = f_i - q_i - p_i = F_i. \qquad (22)$$

$$\Rightarrow Kc = F,$$

onde:

$K_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = (\nabla\varphi_i, k \cdot \nabla\varphi_j)$; $\quad f_i = (f, \varphi_i)$; $\quad q_i = (\bar{q}, \varphi_i)_{\Gamma_q}$; $\quad p_i = K_{ij} p_j$.

Referências I

- Fish, J.; Belytschko, T.. **A First Course in Finite Elements**. Wiley, 2007.
- Becker, E. B.; Carey, G. F.; Oden, J. T.. **Finite Elements - An Introduction**. Prentice-Hall, 1981.
- Liu, I.S.; Rincon, M.A.. **Introdução ao Método de Elementos Finitos, Análise e Aplicação**. IM/UFRJ, 2003.