# Tópicos Especiais em Matemática Aplicada - 2025-1
# IME - UERJ

## 01 - Conceitos Fundamentais - Espaços Funcionais

Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br
**Github**: https://github.com/rodrigolrmadureira/ElementosFinitos

# Sumário

# Alguns espaços funcionais

Seja $\Omega$ um conjunto aberto no $\mathbb{R}^n$.

**Obs. 1:** Se $n = 1$, o conjunto aberto fica na reta $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$.

**Exemplo 1**: $(0, 1)$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}$.

**Obs. 2:** Se $n = 2$, o conjunto aberto fica no plano $\mathbb{R}^2$.

**Exemplo 2**: Se $A_1 = (0, 1)$ e $A_2 = (0, 2)$ são dois conjuntos abertos de $\mathbb{R}$, o produto cartesiano $A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a_1 \in A_1 \text{ e } a_2 \in A_2\}$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^2$.

**1. Espaço** $C^\infty(\Omega)$: é o conjunto de todas as funções reais contínuas com infinitas derivadas também contínuas sobre $\Omega$.

**Suporte compacto**: Dada uma função $\phi$ definida em $\Omega$, denomina-se suporte de $\phi$ ao menor subconjunto fechado do domínio $\Omega$ onde a função não é nula.

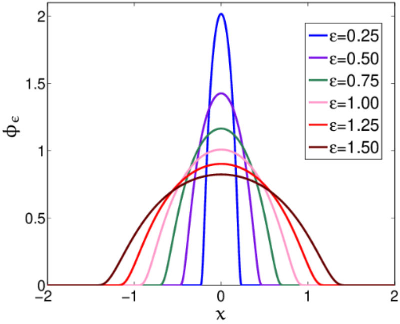
**Obs. 3:** Se $\Omega = (a, b)$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}$, o fecho de $(a, b)$ é o conjunto fechado $[a, b]$. Ou seja, $\overline{(a, b)} = [a, b]$.

# Alguns espaços funcionais

**Obs. 4:** O suporte compacto de uma função $\phi \in C_0^\infty(a,b)$ é o fecho em $\Omega$ do conjunto dos pontos de $\Omega$ onde a função $u$ é diferente de zero. Portanto, é denotado por $\text{supp}(\phi) = \overline{\{x \in (a,b) : \phi(x) \neq 0\}}$

**2. Espaço das Funções Testes (ou Admissíveis)** $C_0^\infty(\Omega)$: é o subespaço de $C^\infty(\Omega)$ que contém funções $\phi$ com suporte compacto contido em $\Omega$. Ou seja, se anulam na fronteira (ou contorno). Quando $\Omega = (a,b)$, é definido por:

$$C_0^\infty(a,b) = \{\phi \in C^\infty(\Omega)\ ;\ \phi(a) = \phi(b) = 0\}.$$




**Exemplo 3:** Na figura à esquerda, são mostrados alguns exemplos de funções $\phi_\epsilon(x) \in C_0^\infty(-\epsilon,\epsilon)$ com seus respectivos suportes compactos para cada valor de $\epsilon$.

# Alguns espaços funcionais

**3. Espaço** $L^p(\Omega)$: é o espaço das funções reais $u(x)$ que são $p$-integráveis para $p \geq 1$. Ou seja, é definido por:

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \; ; \; \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty \right\}$$

**Em particular:**

**4. Espaço** $L^1(\Omega)$: é o espaço das funções integráveis. Ou seja,

$$L^1(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \; ; \; \int_\Omega |u(x)| dx < \infty \right\}$$

**5. Espaço** $L^1_{loc}(\Omega)$: uma função $u(x)$ é **localmente integrável**, isto é, $u(x) \in L^1_{loc}(\Omega)$, quando $u(x) \in L^1(\Omega)$ **em cada subconjunto do suporte compacto de** $\Omega$.

**Obs. 5:** $u(x) \in L^p(\Omega) \Rightarrow |u(x)|^p \in L^1(\Omega)$ para $p \geq 1$.

# Alguns espaços funcionais

**6. Espaço de Hilbert** $\mathcal{H}$: é um espaço vetorial completo que possui um produto interno. **Exemplo:** Espaço $L^2(\Omega)$.

**6.1. Espaço** $L^2(\Omega)$: Se $\Omega$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$, $L^2(\Omega)$ é o espaço das funções $u$ com quadrado integrável,

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \, ; \, \int_\Omega |u(x)|^2 dx < \infty \right\},$$

que é um espaço de Hilbert munido de:

- **Produto interno**: Se $u$, $v \in L^2(\Omega)$, é definido por

$$< u, v >_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

**Obs. 6**: Outras notações recebidas por $< u, v >_{L^2(\Omega)}$ são $(u, v)_0$ e $(u, v)$.

- **Norma**: Se $u \in L^2(\Omega)$, é definida por

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |u(x)|^2 dx$$

**Obs. 7**: Outras notações recebidas por $\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$ são $\|u\|^2_0$ e $|u|^2$.

# Alguns espaços funcionais

**6.2. Espaços de Sobolev** $H^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$:

Se $\Omega$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$, a definição geral é:

$$H^m(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \; ; \; u \in L^2(\Omega), \; \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\},$$

onde $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_n$, $0 \leq \alpha \leq m$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$.

**Exemplos de espaços de Sobolev para** $m = 1$ **e** $\Omega = (a, b) \in \mathbb{R}$:

**6.2.1. Espaço** $H^1(a, b)$: é o espaço onde as funções $u$ e sua derivada em relação a $x$, $u_x = \dfrac{du}{dx}$, estão em $L^2(a, b)$. Ou seja,

$$H^1(a, b) = \{u : (a, b) \to \mathbb{R} \; ; \; u \in L^2(a, b), u_x \in L^2(a, b)\},$$

que é um espaço de Hilbert munido de:

- **Produto interno**: $< u, v >_{H^1(a,b)} = \displaystyle\int_a^b u(x)v(x) + u_x v_x dx$ ;
- **Norma**: $\|u\|^2_{H^1(a,b)} = \displaystyle\int_a^b |u(x)|^2 + |u_x|^2 dx$

# Alguns espaços funcionais

**Exemplo 4:** A função $u(x) = \dfrac{1}{x}$, definida em $\Omega = [1, \infty) \subset \mathbb{R}$, pertence ao espaço $L^2([1, \infty))$, pois

$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \int_1^\infty x^{-2} dx = -x^{-1}\Big|_1^\infty = -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty = -\cancelto{0}{\frac{1}{\infty}} + \frac{1}{1} = 1 < \infty.$$

**Exemplo 5:** A função $u(x) = \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$, definida em $\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}$, pertence ao espaço $L^2(0, 1)$ somente para $n \neq \dfrac{1}{2}$, pois

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x^n}\right)^2 dx = \int_0^1 x^{-2n} dx = -\frac{x^{-2n+1}}{-2n+1}\Big|_0^1 = -\frac{1}{-2n+1} = \frac{1}{2n-1}.$$

$$\Rightarrow 2n - 1 \neq 0 \Rightarrow n \neq \frac{1}{2}.$$

# Alguns espaços funcionais

**Obs. 8**: Outra notações recebidas por $< u, v >_{H^1(\Omega)}$ e $\|u\|^2_{H^1(\Omega)}$ são, respectivamente, $(u, v)_1$ e $\|u\|_1^2$.

**6.2.2. Espaço** $H_0^1(a, b)$: subespaço importante de $H^1(a, b)$ definido pelas funções $u \in H^1(a, b)$ que se anulam na fronteira $\Gamma$ de $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$, ou seja, se anulam nos contornos $x = a$ e $x = b$. Ou seja,

$$H_0^1(a, b) = \{u \in H^1(a, b) \; ; \; u(a) = u(b) = 0\},$$

que é um espaço de Hilbert munido de (demonstração a posteriori):

- **Produto interno**: $< u, v >_{H_0^1(a,b)} = \int_a^b u_x v_x \, dx$ ;
- **Norma**: $\|u\|^2_{H_0^1(a,b)} = \int_a^b |u_x|^2 dx$

**Obs. 9**: Outra notações recebidas por $< u, v >_{H_0^1(\Omega)}$ e $\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}$ são, respectivamente, $((u, v))$ e $\|u\|^2$.

# Derivada fraca (Conceito de Distribuições)

Utilizamos o conceito de **derivada fraca** ou **derivada no sentido das distribuições** na passagem da **formulação forte** para a **formulação fraca** dos problemas que veremos neste curso.

**7. Distribuição:** Uma distribuição $T$ é um funcional linear e contínuo (limitado) sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ que associa a todo elemento elemento $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ um número real, ou seja,

$$\begin{aligned} T\colon \mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi(x) &\mapsto T(\phi), \end{aligned}$$

de tal modo que as seguintes condições estejam satisfeitas:

**D1.** O funcional $T$ é **linear**. Isto é, são satisfeitas as propriedades:

- **Associativa:** $T(\phi_1 + \phi_2) = T(\phi_1) + T(\phi_2)$, para todo $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$;
- **Multiplicação por escalar:** $T(c\phi) = cT(\phi)$, onde $c \in \mathbb{R}$, para todo $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

**D2.** O funcional $T$ é **contínuo**. Ou seja, se uma sequência de funções $(\phi_\nu)$ converge para zero em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $T(\phi_\nu)$ converge para zero em $\mathbb{R}$.

**Obs. 10:** O **espaço das distribuições** é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

# Derivada fraca (Conceito de Distribuições)

**Obs. 11:** Também escrevemos $T(\phi)$ como o produto interno $< T, \phi >$.

**Exemplo de distribuição**: Uma função $u(x) \in L^1_{loc}(\Omega)$, dita localmente integrável, define univocamente uma distribuição $T_u$. Assim, podemos reescrever o produto interno substituindo $T_u$ por $u$ quando não houver ambiguidade. Assim,

$$T_u(\phi) =< T_u, \phi >=< u, \phi >= \int_\Omega u(x)\phi(x)\ dx,\ \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

**Exercício:** Verifique se $T_u$ é um funcional linear.

**7.1. Derivada fraca (ou no sentido das distribuições)**:

• **Primeira derivada de $T_u$ (ou $u$) no sentido das distribuições**:

$$(T_u)_x = \frac{dT_u}{dx} = \left\langle \frac{dT_u}{dx}, \phi \right\rangle = \left\langle \frac{du}{dx}, \phi \right\rangle = \int_\Omega \frac{du}{dx}\phi(x)dx$$

Usando integração por partes, obtemos:

$$\int_\Omega \frac{du}{dx}\phi(x)dx = u\phi\Big|_\Omega - \int_\Omega u\frac{d\phi}{dx}dx$$

# Derivada fraca (Conceito de Distribuições)

Supondo que $\Omega$ é um aberto em $\mathbb{R}$ e $\Omega = (a, b)$, obtemos:

$$\int_a^b \frac{du}{dx}\phi(x)dx = u\phi\Big|_a^b - \int_a^b u\frac{d\phi}{dx}dx = u(b)\cancelto{0}{\phi(b)} - u(a)\cancelto{0}{\phi(a)} - \int_a^b u\frac{d\phi}{dx}dx$$
$$= -\left\langle u, \frac{d\phi}{dx}\right\rangle,$$

pois se $\phi \in \mathcal{D}(a, b)$, então $\phi(a) = \phi(b) = 0$.

Portanto, se $u(x) \in L^1_{loc}(a, b)$, denominamos a **primeira derivada de** $u(x)$ **no sentido fraco (das distribuições)** como o produto interno:

$$\left\langle \frac{du}{dx}, \phi\right\rangle = -\left\langle u, \frac{d\phi}{dx}\right\rangle, \ \forall\phi \in \mathcal{D}(a, b).$$

- **Segunda derivada de** $T_u$ **(ou** $u$**) no sentido das distribuições**:

$$(T_u)_{xx} = \frac{d^2T_u}{dx^2} = \left\langle \frac{d^2T_u}{dx^2}, \phi\right\rangle = \left\langle \frac{d^2u}{dx^2}, \phi\right\rangle = \left\langle \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right), \phi\right\rangle$$

# Derivada fraca (Conceito de Distribuições)

Portanto, se $\dfrac{du}{dx} \in L^1_{loc}(a, b)$, denominamos a **segunda derivada de** $u(x)$ **no sentido fraco (das distribuições)** como o produto interno:

$$\left\langle \frac{d^2u}{dx^2}, \phi \right\rangle = \left\langle \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right), \phi \right\rangle = -\left\langle \frac{du}{dx}, \frac{d\phi}{dx} \right\rangle, \ \forall \phi \in \mathcal{D}(a, b).$$

# Referências I

Liu, I.S.; Rincon, M.A.. **Introdução ao Método de Elementos Finitos, Análise e Aplicação**. IM/UFRJ, 2003.