Tópicos Especiais em Matemática Aplicada - 2025-1
UERJ

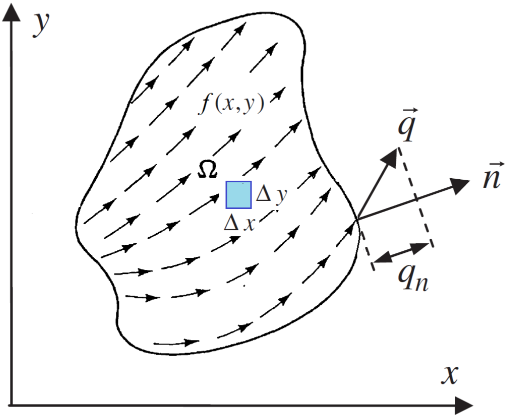
06 - Caso 2D estacionário - Formulação forte do Problema da condução de calor

Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br
Github: https://github.com/rodrigolrmadureira/ElementosFinitos

Sumário

Problema da condução de calor (Regime permanente)

Considere uma chapa de espessura unitária mostrada a seguir com um volume de controle em azul.



A chapa contém uma **fonte de calor** $f(x, y)$ (energia por unidade de área e tempo).

Problema da condução de calor (Regime permanente)

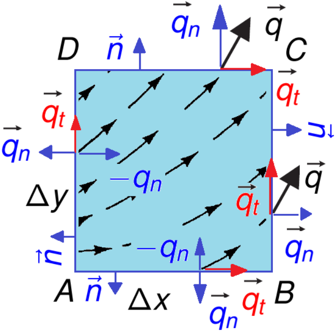


Figura: Volume de controle

- **Balanço de energia**: o fluxo de calor q que sai pelas fronteiras do volume é igual ao calor gerado pela fonte $f(x, y)$.
- O **vetor fluxo** $\vec{q}$ possui a **componente tangencial** à fronteira $\vec{q_t}$ e a **componente normal** à fronteira $\vec{q_n}$. O **vetor normal unitário** $\vec{n}$ aponta para fora do volume de controle.

Problema da condução de calor (Regime permanente)

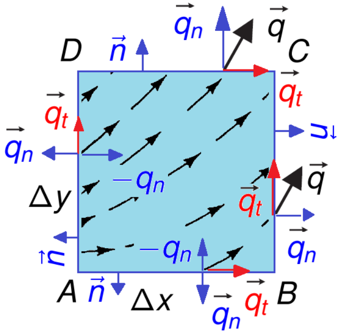
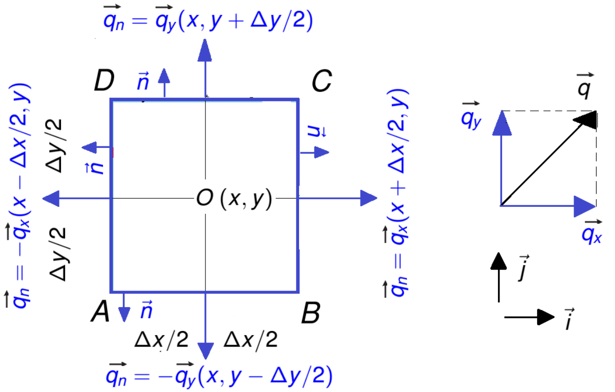


Figura: Volume de controle

- O **fluxo de saída de calor em cada ponto** (x, y) **da fronteira do volume** é dado por $q_n = \vec{q} \cdot \vec{n}$ (projeção de $\vec{q}$ sobre $\vec{n}$).
- $\vec{q}_t$ não contribui para a entrada ou saída de calor no volume de controle.

Problema da condução de calor (Regime permanente)



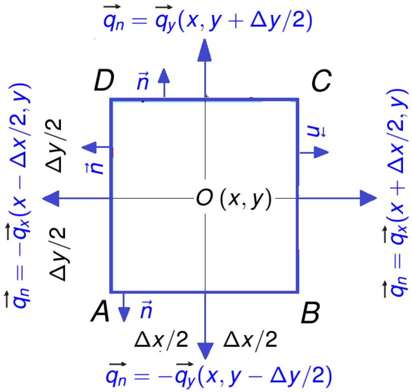
Note que: $\vec{q} = \vec{q_x} + \vec{q_j} = q_x\vec{i} + q_y\vec{j}$.

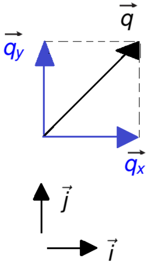
Na figura, os vetores normais unitários sobre as fronteiras do volume são:

AD: $\vec{n} = -\vec{i}$; AB: $\vec{n} = -\vec{j}$;

BC: $\vec{n} = \vec{i}$; CD: $\vec{n} = \vec{j}$.

Problema da condução de calor (Regime permanente)



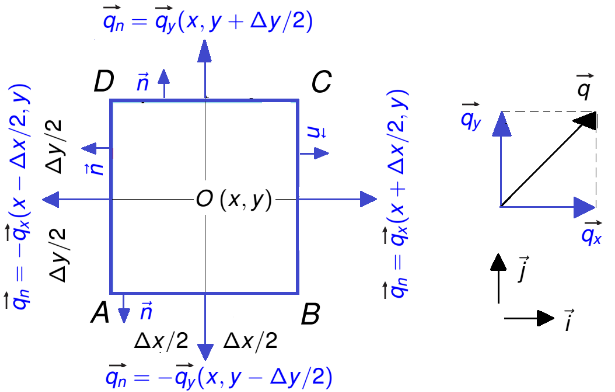


Assim, temos os seguintes fluxos de saída de calor nas fronteiras:

AD: $q_n = \vec{q} \cdot \vec{n} = \vec{q} \cdot (-\vec{i}) = -q_x \Rightarrow$ No ponto $\left(x - \dfrac{\Delta x}{2}, y\right)$: $-q_x\left(x - \dfrac{\Delta x}{2}, y\right)$;

AB: $q_n = \vec{q} \cdot \vec{n} = \vec{q} \cdot (-\vec{j}) = -q_y \Rightarrow$ No ponto $\left(x, y - \dfrac{\Delta y}{2}\right)$: $-q_y\left(x, y - \dfrac{\Delta y}{2}\right)$;

Problema da condução de calor (Regime permanente)

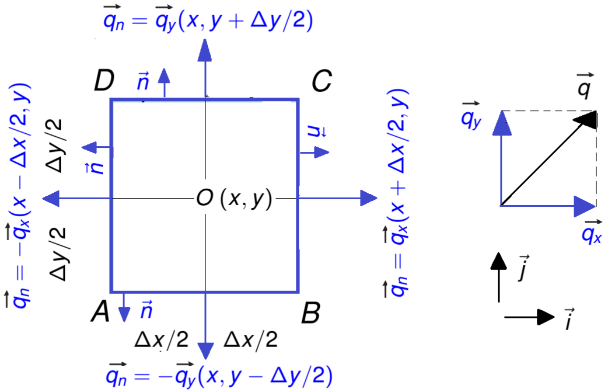


Assim, temos os seguintes fluxos de saída de calor nas fronteiras:

BC: $q_n = \vec{q} \cdot \vec{n} = \vec{q} \cdot (\vec{i}) = q_x \Rightarrow$ No ponto $\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}, y\right)$: $q_x\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}, y\right)$;

CD: $q_n = \vec{q} \cdot \vec{n} = \vec{q} \cdot (\vec{j}) = q_y \Rightarrow$ No ponto $\left(x, y + \dfrac{\Delta y}{2}\right)$: $q_y\left(x, y + \dfrac{\Delta y}{2}\right)$.

Problema da condução de calor (Regime permanente)

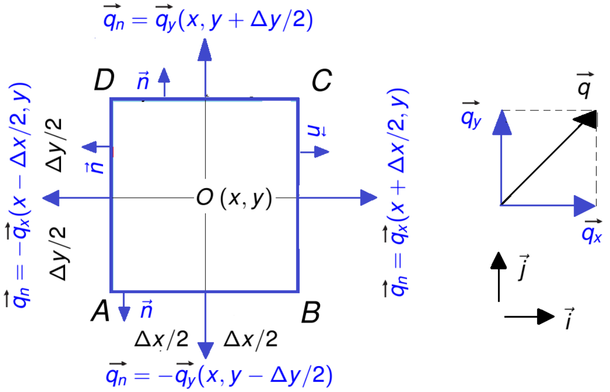


Com Δx e Δy pequenos, temos os seguintes fluxos de saída de calor:

$$AD:\ -q_x\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y\right)\Delta y; \quad AB:\ -q_y\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x;$$

$$BC:\ q_x\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y\right)\Delta y; \quad CD:\ q_y\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x.$$

Problema da condução de calor (Regime permanente)



O calor gerado pela fonte $f(x, y)$ em todo o volume de controle é:

$f(x, y)\Delta x \Delta y$

Problema da condução de calor (Regime permanente)

• **Balanço de energia**: o fluxo de calor total que sai pelas fronteiras do volume é igual ao calor gerado pela fonte $f(x, y)$.

Então,

$$
\begin{aligned}
&- q_x\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y\right)\Delta y - q_y\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x \\
&+ q_x\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y\right)\Delta y + q_y\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x = f(x, y)\Delta x\Delta y
\end{aligned}
$$

Rearrumando os termos, obtemos:

$$
\begin{aligned}
&q_x\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y\right)\Delta y - q_x\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y\right)\Delta y \\
&+ q_y\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x - q_y\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x + f(x, y)\Delta x\Delta y = 0
\end{aligned}
$$

Dividindo os termos por $\Delta x\Delta y$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
&\frac{q_x\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y\right)}{\Delta x} - \frac{q_x\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y\right)}{\Delta x} + \frac{q_y\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}\right)}{\Delta y} - \frac{q_y\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}\right)}{\Delta y} \\
&+ f(x, y) = 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Problema da condução de calor (Regime permanente)

Fazendo o limite quando $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, temos as derivadas parciais:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{q_x\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}, y\right) - q_x\left(x - \dfrac{\Delta x}{2}, y\right)}{\Delta x} = \frac{\partial q_x}{\partial x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{q_y\left(x, y + \dfrac{\Delta y}{2}\right) - q_y\left(x, y - \dfrac{\Delta y}{2}\right)}{\Delta y} = \frac{\partial q_y}{\partial y}$$

Portanto, fazendo o mesmo limite na Eq. (1), obtemos:

Equação do balanço de energia

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = f(x, y) \Rightarrow \nabla \cdot \vec{q} = f \qquad (2)$$

(Divergente do fluxo de calor (fluxo que sai do volume de controle) = Calor gerado no volume de controle)

Problema da condução de calor (Regime permanente)

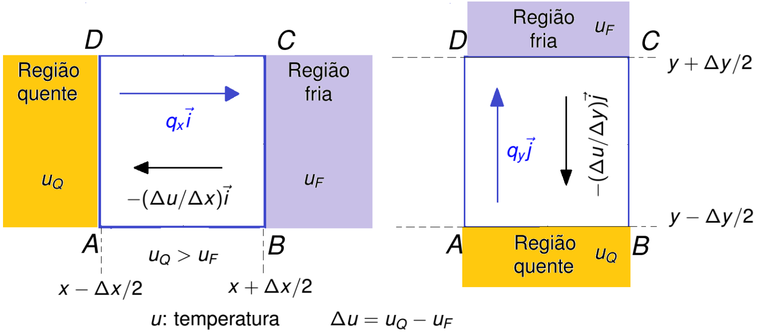


Figura: Lei de Fourier

Lei de Fourier: O fluxo de calor escoa em direção oposta ao gradiente de temperatura (o calor escoa da região de temperatura mais alta para a mais baixa).

Problema da condução de calor (Regime permanente)

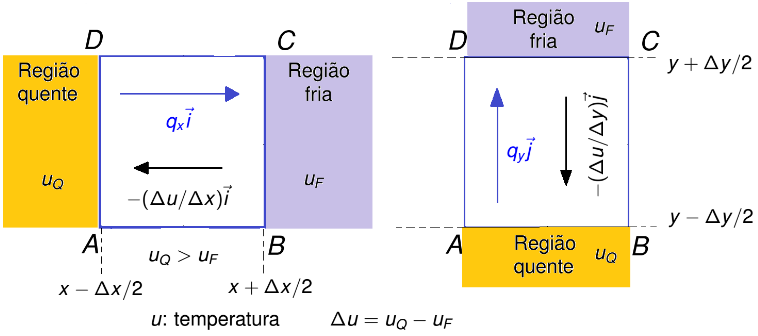


Figura: Lei de Fourier

Logo, $q_x = -k\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$, $q_y = -k\dfrac{\Delta u}{\Delta y}$.

Como $\vec{q} = q_x\vec{i} + q_y\vec{j}$, obtemos:

$$\vec{q} = -k\frac{\Delta u}{\Delta x}\vec{i} - k\frac{\Delta u}{\Delta y}\vec{j} = -k\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\vec{i} + \frac{\Delta u}{\Delta y}\vec{j}\right).$$

Problema da condução de calor (Regime permanente)

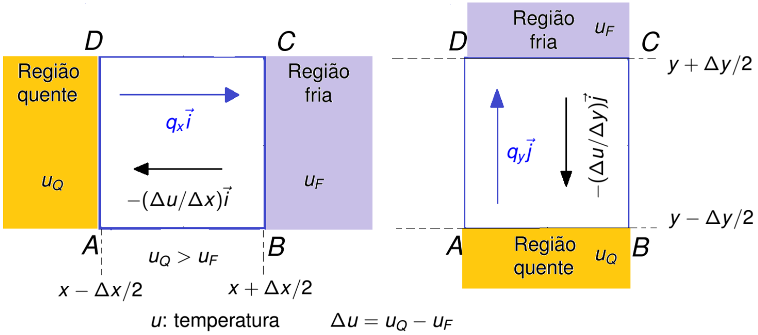


Figura: Lei de Fourier

Quando $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, temos: $\lim_{\Delta x \to 0} -\dfrac{\Delta u}{\Delta x} = -\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\quad \lim_{\Delta y \to 0} -\dfrac{\Delta u}{\Delta y} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$

E assim, $\vec{q} = -k\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\vec{j}\right) = -k\nabla u.$

Problema da condução de calor (Regime permanente)

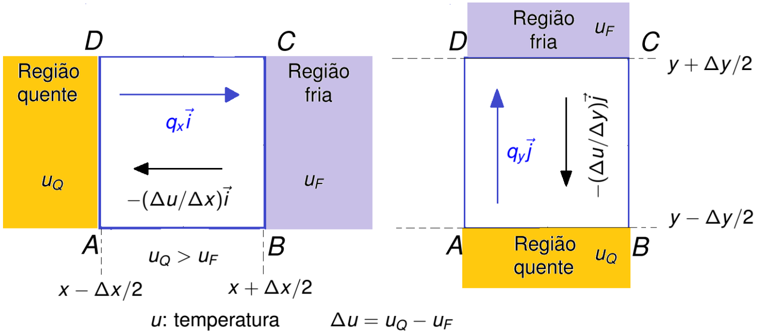


Figura: Lei de Fourier

Lei de Fourier (Condutividade térmica $Q = kI$ constante)

$$\vec{q} = -k\nabla u \tag{3}$$

Problema da condução de calor (Regime permanente)

Obs.: Para **materiais isotrópicos**, a **matriz de condutividade térmica** $Q = kI$ para alguma **constante** k **positiva**, ou seja,

$$Q = kI = k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}, \text{ onde } k > 0.$$

Então, a matriz Q é **definida positiva**, isto é, para todo vetor ∇u, $Q^T \, \nabla u \, Q > 0$ (o calor precisa fluir em direção à diminuição de temperatura).

Um **material** é **isotrópico** se as propriedades são as mesmas em qualquer sistema de coordenadas.
Exemplos: A maioria dos metais, o concreto, um cristal de silício, etc.

Na Eq. (3) (Lei de Fourier), podemos substituir k por kI sem prejuízo:

Lei de Fourier (Materiais isotrópicos - Condutividade térmica $Q = kI$ constante)

$$\vec{q} = -k\nabla u = -\underbrace{k\,I}_{Q}\,\nabla u \tag{4}$$

Problema da condução de calor (Regime permanente)

Obs.: Se a condutividade térmica é constante ($Q = kI$), substituindo a Eq. (3) (Lei de Fourier) na Eq. (1) (Balanço de energia), obtemos:

$$\nabla \cdot \vec{q} = f \Rightarrow \nabla \cdot (-k\nabla u) = f \Rightarrow -k\nabla \cdot \nabla u = f \Rightarrow -k\Delta u = f,$$

onde o operador **nabla** (∇) é definido no $\mathbb{R}^2$ como:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}^T.$$

O operador **nabla** aplicado a uma função escalar $u(x, y)$ se transforma no vetor **gradiente** de u (∇u ou *grad u*):

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}^T.$$

Assim,

$$\Delta u = \nabla \cdot \nabla u = \nabla^T(\nabla u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Problema da condução de calor (Regime permanente)

Podemos reescrever a Eq. (4) (Lei de Fourier) para **materiais não isotrópicos**, onde:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \neq kI$$

é também uma **matriz definida positiva**, isto é, para todo vetor ∇u, $Q^T \nabla u \, Q > 0$ (o calor precisa fluir em direção à diminuição de temperatura). Assim, temos:

Lei de Fourier (Materiais não isotrópicos - Condutividade térmica $Q \neq kI$)

$$\vec{q} = -Q \nabla u \tag{5}$$

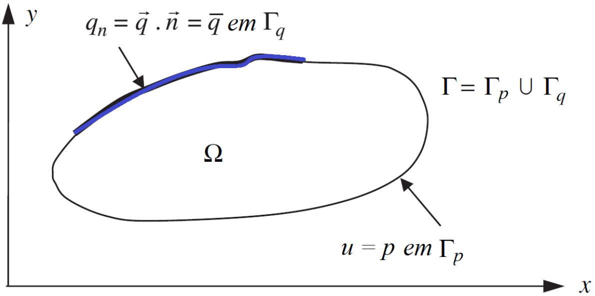
Problema da condução de calor (Regime permanente)

Então, até este momento, temos as equações da formulação forte:

$$\nabla \cdot \vec{q} = f, \quad \text{em } \Omega \quad \text{(Balanço de energia)} \tag{6}$$

$$\vec{q} = -Q\,\nabla u, \quad \text{em } \Omega \quad \text{(Lei de Fourier)} \tag{7}$$

Agora, precisamos das **condições de fronteira**, que precisam ser **prescritas**. Em qualquer ponto da fronteira Γ, tanto a temperatura $u(x, y)$ quanto o fluxo normal q_n precisam ser prescritos, mas ambos não podem ser prescritos.



Problema da condução de calor (Regime permanente)

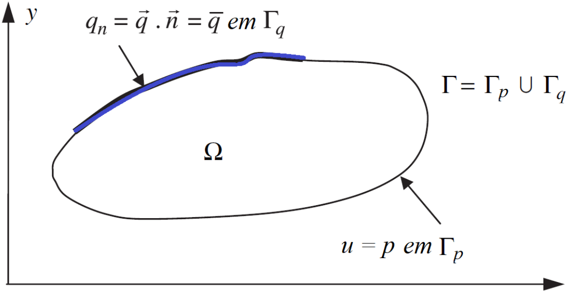
Por isso, dividimos a fronteira em duas partes:

Γ_p: fronteira onde a temperatura u é prescrita, de onde obtemos a **condição de fronteira de Dirichlet (essencial)**,

$$u = p, \quad \text{em } \Gamma_p, \tag{8}$$

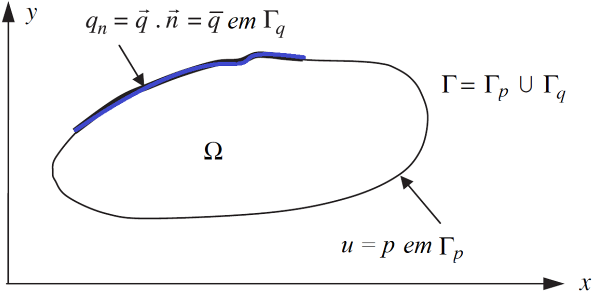
Γ_q: fronteira onde o fluxo normal de calor q_n é prescrito, de onde obtemos a **condição de fronteira de Neumann (natural)**,

$$q_n = \vec{q} \cdot \vec{n} = \bar{q}, \quad \text{em } \Gamma_q. \tag{9}$$



Problema da condução de calor (Regime permanente)

Então, temos: $\Gamma_p \cup \Gamma_q = \Gamma, \quad \Gamma_p \cap \Gamma_q = \emptyset$.



Problema da condução de calor (Regime permanente)

Formulação forte - Problema da condução de calor (regime permanente)

$$\begin{array}{rcllr} \nabla\cdot\vec{q} & = & f, & \text{em } \Omega, & \text{(Balanço de energia)} \\ \vec{q} & = & -Q\,\nabla u, & \text{em } \Omega, & \text{(Lei de Fourier)} \end{array}$$

Condições de fronteira:

$$\begin{array}{rcllr} u & = & p, & \text{em } \Gamma_p, & \text{(Condição de Dirichlet)} \\ q_n & = & \vec{q}\cdot\vec{n} = \bar{q}, & \text{em } \Gamma_q & \text{(Condição de Neumann)} \end{array}$$

Problema da condução de calor (Regime permanente)

Formulação forte - Problema da condução de calor (Materiais isotrópicos ($Q = kI$, $k > 0$))

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{q} &= f, && \text{em } \Omega, && \text{(Balanço de energia)} \\
\vec{q} &= -kI\,\nabla u = -k\,\nabla u, && \text{em } \Omega, && \text{(Lei de Fourier)}
\end{aligned}
$$

Condições de fronteira:

$$
\begin{aligned}
u &= p, && \text{em } \Gamma_p, && \text{(Condição de Dirichlet)} \\
q_n &= \vec{q} \cdot \vec{n} = \bar{q}, && \text{em } \Gamma_q && \text{(Condição de Neumann)}
\end{aligned}
$$

Problema da condução de calor (Regime permanente)

Podemos substituir a equação da Lei de Fourier na equação do balanço de energia para obter:

Formulação forte - Problema da condução de calor (regime permanente)

$$-\nabla \cdot (Q\,\nabla u) = f, \qquad \text{em } \Omega, \tag{10}$$

Condições de fronteira:

$$\begin{aligned} u &= p, & \text{em } \Gamma_p, \quad & \text{(Condição de Dirichlet)} \\ q_n &= \vec{q}\cdot\vec{n} = \bar{q}, & \text{em } \Gamma_q \quad & \text{(Condição de Neumann)} \end{aligned} \tag{11}$$

Problema da condução de calor (Regime permanente)

Podemos substituir a equação da Lei de Fourier na equação do balanço de energia para obter:

Formulação forte - Problema da condução de calor (Materiais isotrópicos ($Q = kI$, $k > 0$))

$$-\nabla \cdot (kI\,\nabla u) = -\nabla \cdot (k\,\nabla u) = -k\Delta u = f, \quad \text{em } \Omega, \tag{12}$$

Condições de fronteira:

$$\begin{aligned} u &= p, && \text{em } \Gamma_p, && \text{(Condição de Dirichlet)} \\ q_n &= \vec{q}\cdot\vec{n} = \bar{q}, && \text{em } \Gamma_q && \text{(Condição de Neumann)} \end{aligned} \tag{13}$$

Referências I

- Fish, J.; Belytschko, T.. **A First Course in Finite Elements**. Wiley, 2007.
- Becker, E. B.; Carey, G. F.; Oden, J. T.. **Finite Elements - An Introduction**. Prentice-Hall, 1981.
- Liu, I.S.; Rincon, M.A.. **Introdução ao Método de Elementos Finitos, Análise e Aplicação**. IM/UFRJ, 2003.