

Tópicos Especiais em Matemática Aplicada - 2025-1

UERJ

07 - Caso 2D estacionário - Formulação fraca

Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br

Github: <https://github.com/rodrigolrmadureira/ElementosFinitos>

Sumário

- 1 Formulação forte do problema da condução de calor
- 2 Formulação fraca
- 3 Equivalência entre as formulações forte e fraca
- 4 Bibliografia

Problema da condução de calor (Regime permanente)

Podemos substituir a equação da Lei de Fourier na equação do balanço de energia para obter:

Formulação forte - Problema da condução de calor (Materiais isotrópicos ($Q = kl$, $k > 0$))

$$\nabla \cdot q = -\nabla \cdot (kl \nabla u) = -\nabla \cdot (k \nabla u) = -k \Delta u = f, \quad \text{em } \Omega, \quad (1)$$

Condições de fronteira:

$$\begin{aligned} u &= p, & \text{em } \Gamma_p, & \text{(Condição de Dirichlet)} \\ q_n &= q \cdot n = -k(\nabla u \cdot n) = \bar{q}, & \text{em } \Gamma_q, & \text{(Condição de Neumann)} \end{aligned} \quad (2)$$

Problema da condução de calor (Regime permanente)

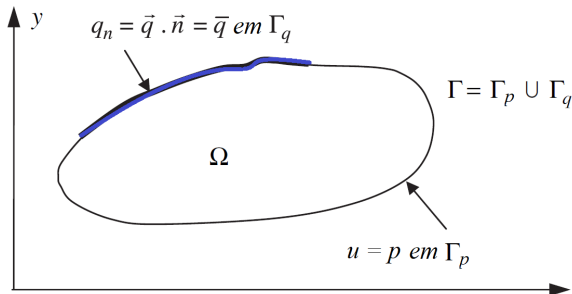
Recapitulando, a fronteira é dividida em duas partes:

Γ_p : fronteira onde a temperatura u é prescrita, de onde obtemos a **condição de fronteira de Dirichlet (essencial)**,

$$u = p, \quad \text{em } \Gamma_p, \quad (3)$$

Γ_q : fronteira onde o fluxo normal de calor q_n é prescrito, de onde obtemos a **condição de fronteira de Neumann (natural)**,

$$q_n = \vec{q} \cdot \vec{n} = \bar{q}, \quad \text{em } \Gamma_q. \quad (4)$$



Formulação fraca

Formulação fraca - Problema da condução de calor (Materiais isotrópicos ($Q = kl$, $k > 0$))

Sejam $H = \{u \in H^1(\Omega); u = p \text{ em } \Gamma_p\};$
 $V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ em } \Gamma_p\}.$

Dados $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $p : \Gamma_p \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{q} : \Gamma_q \rightarrow \mathbb{R}$ suficientemente suaves, a solução $u \in H$ da formulação fraca é tal que:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot k \cdot \nabla v \, dxdy = \int_{\Omega} f v \, dxdy - \int_{\Gamma_q} \bar{q} v \, d\Gamma, \text{ para todo } v \in V. \quad (5)$$

Ou, em notação de produto interno:

$$(\nabla u, k \cdot \nabla v) = (f, v) - (\bar{q}, v)_{\Gamma_q}, \text{ para todo } v \in V. \quad (6)$$

Formulação fraca

Demonstração: Multiplicando a Eq. (1) da formulação forte por uma função teste $v \in V$ e integrando em Ω , obtemos:

$$-\int_{\Omega} \nabla \cdot (k \cdot \nabla u) \cdot v \, dx dy = \int_{\Omega} f v \, dx dy, \text{ para todo } v \in V. \quad (7)$$

Vamos usar integração por partes,

$$\int_{\Omega} w \, dz = \int_{\Omega} d(wz) - \int_{\Omega} z \, dw, \quad (8)$$

na integral do lado esquerdo da Eq. (6), usando

$w = v$ e $dz = \nabla \cdot (k \cdot \nabla u)$, temos que $dw = \nabla v$ e $z = k \nabla u$.

Dica: No \mathbb{R}^2 , a "derivada" de uma função escalar v é ∇v (ou *grad* v) e a "derivada" de uma função vetorial ∇u é $\nabla \cdot \nabla u$ (ou *div* ∇u).

Formulação fraca

Assim, obtemos na integral do lado esquerdo da Eq. (6),

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (k \nabla u) v \, dx dy = \int_{\Omega} \nabla \cdot (v \cdot k \nabla u) \, dx dy - \int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy \quad (9)$$

Na integral em azul no lado direito da Eq. (8), devemos aplicar o **Teorema da Divergência no plano** (ou **Teorema de Green**):

Teorema da Divergência no plano (ou Teorema de Green)

Se F é um campo vetorial (fluxo de calor, por exemplo) atravessando uma região de domínio Ω , então

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F \, dx dy = \int_{\Gamma} F \cdot n \, d\Gamma \quad (10)$$

(divergente do fluxo de calor na região Ω = fluxo normal que sai da fronteira Γ)

Formulação fraca

Portanto, aplicando o Teorema da Divergência à integral em azul, temos que:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (v \cdot k \nabla u) \, dx dy = \int_{\Gamma} v \cdot (k \nabla u \cdot n) \, d\Gamma \quad (11)$$

Substituindo o resultado de (10) na Eq. (8), obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (k \nabla u) v \, dx dy = \int_{\Gamma} v \cdot (k \nabla u \cdot n) \, d\Gamma - \int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy \quad (12)$$

Como $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_q$, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \cdot (k \nabla u) v \, dx dy &= \int_{\Gamma_p} v \cdot (k \nabla u \cdot n) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_q} v \cdot (k \nabla u \cdot n) \, d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy \end{aligned} \quad (13)$$

Formulação fraca

Como $v \in V$, e pela definição do espaço V , $v = 0$ em Γ_p . Logo,

$$\int_{\Gamma_p} v \cdot (k \nabla u \cdot n) d\Gamma = 0.$$

Portanto, a Eq. (12) se torna:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (k \nabla u) v \, dx dy = \int_{\Gamma_q} v \cdot (k \nabla u \cdot n) d\Gamma - \int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy \quad (14)$$

Substituindo o resultado da Eq. (13) na Eq. (6), obtemos para todo $v \in V$,

$$\int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy - \int_{\Gamma_q} v \cdot (k \nabla u \cdot n) d\Gamma = \int_{\Omega} f v \, dx dy \quad (15)$$

Da condição de fronteira de Neumann em (2), $k \nabla u \cdot n = -\bar{q}$. Logo, substituindo na Eq. (14), obtemos a formulação fraca

$$\int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy = \int_{\Omega} f v \, dx dy - \int_{\Gamma_q} \bar{q} v \, d\Gamma, \quad \forall v \in V. \quad \square \quad (16)$$

Equivalência entre as formulações forte e fraca

$u(x, y)$ é solução da formulação forte (a)

\Leftrightarrow

$u(x, y)$ é solução da formulação fraca (b)

Demonstração: (a) \Rightarrow (b): Já acabamos de provar.

Agora, falta mostrar que (b) \Rightarrow (a).

A partir da formulação fraca de (15), aplicamos integração por partes,

$$\int_{\Omega} w \, dz = \int_{\Omega} d(wz) - \int_{\Omega} z \, dw,$$

na integral do lado esquerdo, usando $w = k \nabla u$ e $dz = \nabla v$. Assim, temos que $dw = \nabla \cdot (k \nabla u)$ e $z = v$ e obtemos,

$$\int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla v \, dxdy = \int_{\Omega} \nabla \cdot (v k \nabla u) \, dxdy - \int_{\Omega} \nabla \cdot (k \nabla u) v \, dxdy \quad (17)$$

Equivalência entre as formulações forte e fraca

Aplicando o Teorema da Divergência no plano na integral em azul na Eq. (16) e sabendo que $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_q$ e $v = 0$ em Γ_p , obtemos:

$$\int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy = \int_{\Gamma_q} \underbrace{v (k \nabla u \cdot n)}_{-q \cdot n = -\bar{q}} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla \cdot (k \nabla u) v \, dx dy \quad (18)$$

Substituindo (17) na formulação fraca de (15), obtemos:

$$\cancel{- \int_{\Gamma_q} \bar{q} v \, d\Gamma} - \int_{\Omega} \nabla \cdot (k \nabla u) v \, dx dy = \int_{\Omega} f v \, dx dy - \cancel{\int_{\Gamma_q} \bar{q} v \, d\Gamma}$$

Assim,

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \nabla \cdot (k \nabla u) v \, dx dy &= \int_{\Omega} f v \, dx dy, \quad \forall v \in V \\ \Rightarrow \int_{\Omega} [\nabla \cdot (k \nabla u) + f] v \, dx dy, \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (19)$$

Equivalência entre as formulações forte e fraca

Como a Eq. (18) é válida para qualquer $v \in V$, e lembrando que:

$$V = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ em } \Gamma_p\},$$

podemos pegar, por exemplo,

$$v(x, y) = \psi(x, y) \cdot (\nabla \cdot (k \nabla u) + f), \quad (20)$$

onde $\psi(x, y) = 0$ em Γ e $\psi(x, y) > 0$ em Ω .




Substituindo (19) na Eq. (18), obtemos:

$$\int_{\Omega} \psi(x, y) \cdot [\nabla \cdot (k \nabla u) + f]^2 dx dy, \quad \forall v \in V. \quad (21)$$

Como $\psi(x, y) = 0$ em Γ , $\psi(x, y) > 0$ em Ω e $[\nabla \cdot (k \nabla u) + f]^2 \geq 0$, logo a integral de (20) só se anula se:

$$\nabla \cdot (k \nabla u) + f = 0 \Rightarrow -\nabla \cdot (k \nabla u) = f. \quad \square \quad (22)$$

Referências I

-  Fish, J.; Belytschko, T.. **A First Course in Finite Elements**. Wiley, 2007.
-  Becker, E. B.; Carey, G. F.; Oden, J. T.. **Finite Elements - An Introduction**. Prentice-Hall, 1981.
-  Liu, I.S.; Rincon, M.A.. **Introdução ao Método de Elementos Finitos, Análise e Aplicação**. IM/UFRJ, 2003.