Tópicos Especiais em Matemática Aplicada - 2025-1
UERJ

04 - Solução numérica 1D - Abordagem tradicional

Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br
Github: https://github.com/rodrigolrmadureira/ElementosFinitos

Sumário

1. Problema aproximado
2. Interpolação de Lagrange linear por partes
3. Matriz de rigidez K
4. Vetor força F
5. Bibliografia

Problema aproximado

Com a formulação de Galerkin, obtemos o sistema linear:

$$Kc = F, \tag{1}$$

com

$$K = [K_{ij}]_{m\times m} \text{ (\textbf{matriz de rigidez})},$$
$$F = [F_i]_{m\times 1} \text{ (\textbf{vetor força})},$$
$$c = [c_i]_{m\times 1} \text{ (\textbf{vetor solução para} } u_h(x)\text{)}$$

onde

$$K_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = \alpha M_{ij} + \beta N_{ij},$$
$$M_{ij} = (\varphi_{ix}, \varphi_{jx});\ N_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j);\ F_j = (f, \varphi_j).$$

Veremos agora uma abordagem tradicional para a montagem da matriz K e do vetor F para obter a solução numérica c do problema (1).

Interpolação de Lagrange linear por partes

Seja V_h um subespaço de $V = H_0^1(\Omega)$ definido como:

$$V_h = [\varphi_1, \ldots, \varphi_m] \tag{2}$$

As funções φ_i escolhidas são **funções de interpolação de Lagrange linear por partes** satisfazendo:

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases} \tag{3}$$

onde $x_j \in \Omega$ é denominado **nó**.

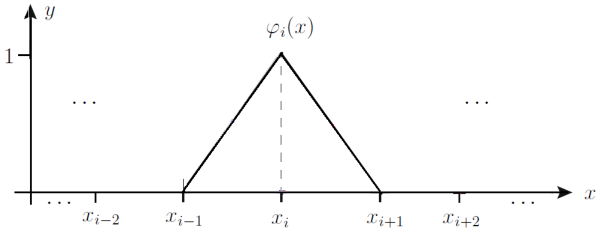


Figura: Função de base de Lagrange linear $\varphi_i(x)$

Interpolação de Lagrange linear por partes

Os **nós** x_j, para $j = 1, 2, \ldots, m$, são pontos discretos do intervalo $\Omega = [x_1, x_m]$ distribuídos de forma equidistante.

Obs.: No exemplo dado, $\Omega = [0, 1]$. Neste caso, $x_1 = 0$ e $x_m = 1$.

Portanto, dividimos o domínio Ω em $(m - 1)$ partes iguais e definimos o passo

$$h = x_{i+1} - x_i, \text{ para } \quad i = 1, \ldots, m. \tag{4}$$

Obs.: Os nós x_0 e x_{m+1} estão fora do domínio Ω.

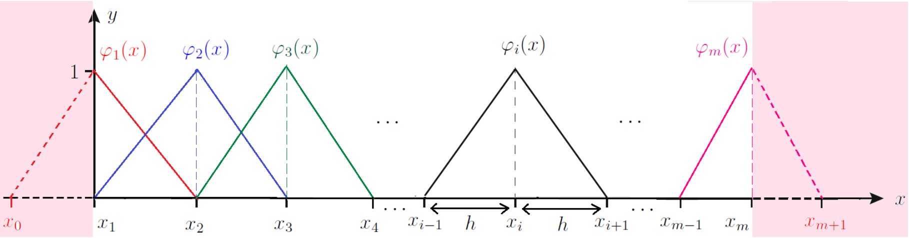


Figura: Funções da base de Lagrange linear

Interpolação de Lagrange linear por partes

Em cada nó x_i, definimos a função de Lagrange linear por partes $\varphi_i(x)$, satisfazendo a condição (3). Assim, $\varphi_i(x)$ para $i = 1, \ldots, m$ é definida por:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \dfrac{x - x_{i-1}}{h}, & \text{se } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} = \dfrac{x_{i+1} - x}{h}, & \text{se } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & \text{se } x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases} \tag{5}$$

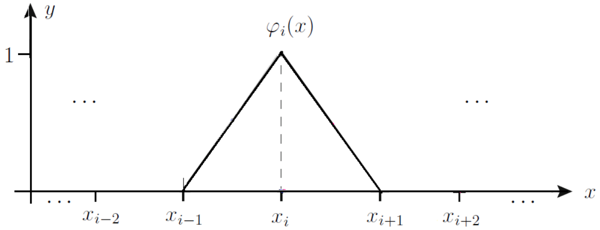


Figura: Função de base de Lagrange linear $\varphi_i(x)$

Interpolação de Lagrange linear por partes

De (5), podemos calcular a derivada de $\varphi_i(x)$, obtendo-se:

$$\varphi_{ix}(x) = \frac{d\varphi_i}{dx}(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & \text{se } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ -\frac{1}{h}, & \text{se } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & \text{se } x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases} \tag{6}$$

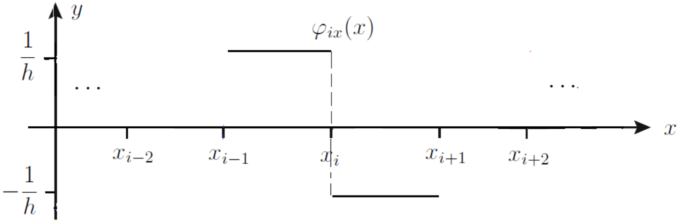
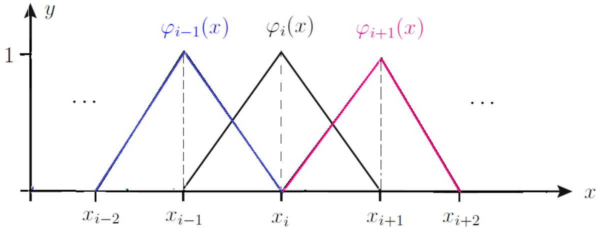


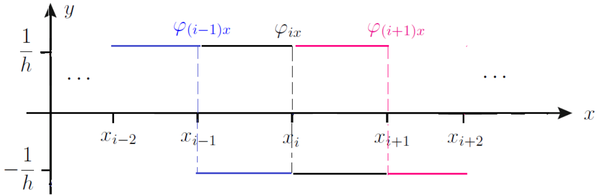
Figura: Derivada da função de base de Lagrange linear $\varphi_{ix}(x)$

Interpolação de Lagrange linear por partes

Observe que para φ_i e φ_j não consecutivos:

$$\varphi_i(x)\varphi_j(x) = \frac{d\varphi_i}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx} = 0, \qquad \text{se } |i-j| \geq 2. \tag{7}$$





Matriz de rigidez K

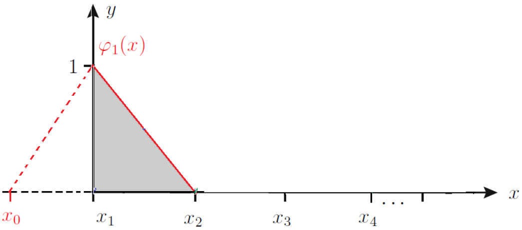
Pela definição do problema,

$$K_{ij} = \alpha M_{ij} + \beta N_{ij} = \alpha(\varphi_{ix}, \varphi_{jx}) + \beta(\varphi_i, \varphi_j) = \alpha \int_0^1 \varphi_{ix}\varphi_{jx} dx + \beta \int_0^1 \varphi_i \varphi_j dx$$

Vamos ver o que acontece com a primeira linha de K (K_{1j}, para $j = 1, 2, \ldots, m$):

$$K_{11} = \alpha(\varphi_{1x}, \varphi_{1x}) + \beta(\varphi_1, \varphi_1) = \alpha \int_0^1 (\varphi_{1x})^2 dx + \beta \int_0^1 (\varphi_1(x))^2 dx$$

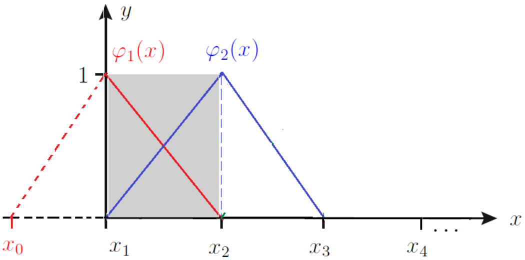
$$= \alpha \int_{x_1}^{x_2} (\varphi_{1x})^2 dx + \beta \int_{x_1}^{x_2} (\varphi_1(x))^2 dx \neq 0$$



Obs.: x_0 é um nó que não faz parte do domínio, pois $\Omega = [x_1, x_m] = [0, 1]$.

Matriz de rigidez K

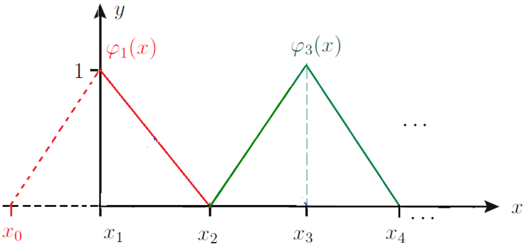
$$K_{12} = \alpha(\varphi_{1x}, \varphi_{2x}) + \beta(\varphi_1, \varphi_2) = \alpha \int_0^1 \varphi_{1x}\varphi_{2x}dx + \beta \int_0^1 \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx$$
$$= \alpha \int_{x_1}^{x_2} \varphi_{1x}\varphi_{2x}dx + \beta \int_{x_1}^{x_2} \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx \neq 0$$



Matriz de rigidez K

Agora, para $j \geq 3$:

$$K_{1j} = \alpha(\varphi_{1x}, \varphi_{jx}) + \beta(\varphi_1, \varphi_j) = \alpha \int_0^1 \varphi_{1x}\varphi_{jx} dx + \beta \int_0^1 \varphi_1(x)\varphi_j(x) dx = 0$$



Então, a primeira linha de K segue o padrão:

$$K_{1j} = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

onde os asteriscos são os elementos não nulos K_{11} e K_{12}.

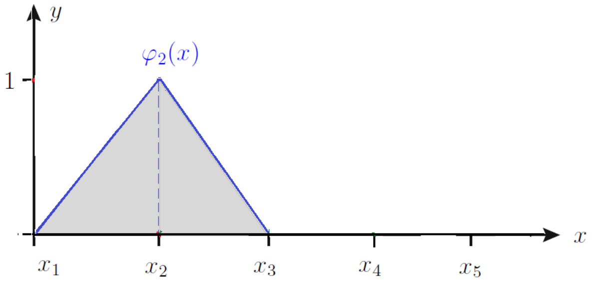
Matriz de rigidez K

Vamos ver o que acontece com a segunda linha de K (K_{2j}, para $j = 1, 2, \dots, m$):

Como a matriz K é simétrica, $K_{21} = K_{12}$, que já calculamos. Logo, $K_{21} \neq 0$.

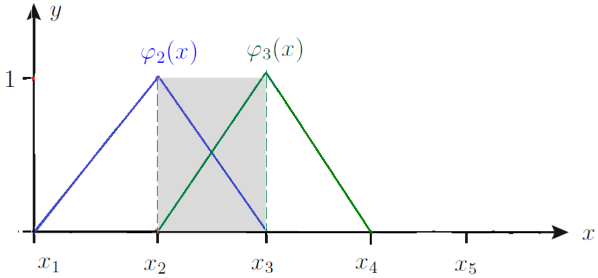
$$K_{22} = \alpha(\varphi_{2x}, \varphi_{2x}) + \beta(\varphi_2, \varphi_2) = \alpha \int_0^1 (\varphi_{2x})^2 dx + \beta \int_0^1 (\varphi_2(x))^2 dx$$

$$= \alpha \int_{x_1}^{x_3} (\varphi_{2x})^2 dx + \beta \int_{x_1}^{x_3} (\varphi_2(x))^2 dx \neq 0$$



Matriz de rigidez K

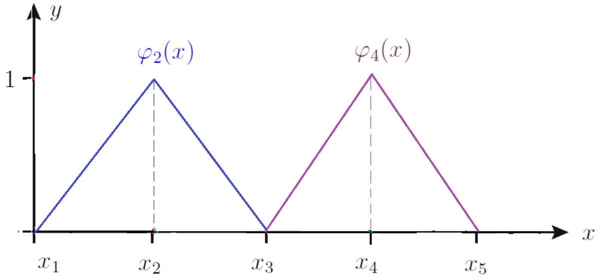
$$K_{23} = \alpha(\varphi_{2x}, \varphi_{3x}) + \beta(\varphi_2, \varphi_3) = \alpha \int_0^1 \varphi_{2x}\varphi_{3x}dx + \beta \int_0^1 \varphi_2(x)\varphi_3(x)dx$$
$$= \alpha \int_{x_2}^{x_3} \varphi_{2x}\varphi_{3x}dx + \beta \int_{x_2}^{x_3} \varphi_2(x)\varphi_3(x)dx \neq 0$$



Matriz de rigidez K

Agora, para $j \geq 4$:

$$K_{2j} = \alpha(\varphi_{2x}, \varphi_{jx}) + \beta(\varphi_2, \varphi_j) = \alpha \int_0^1 \varphi_{2x}\varphi_{jx}dx + \beta \int_0^1 \varphi_2(x)\varphi_j(x)dx = 0$$



Então, a segunda linha de K segue o padrão:

$$K_{2j} = \begin{bmatrix} * & * & * & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

onde os asteriscos são os elementos não nulos K_{21}, K_{22} e K_{23}.

Matriz de rigidez K

Analogamente, repetindo o processo para as demais linhas, obtemos a matriz quadrada, tridiagonal e esparsa $m \times m$:

$$K = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez K

$$K = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & K_{ii} & K_{i,i+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & K_{i+1,i} & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix},$$

Agora, devemos calcular os elementos não nulos, que são:

- **Os elementos da diagonal de** K:

$$K_{ii}, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, m.$$

- **Os elementos à direita ou abaixo de** K_{ii}:

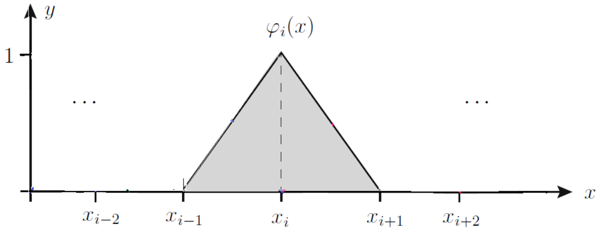
$$K_{i,i+1} = K_{i+1,i}, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, m.$$

Matriz de rigidez K

Por definição,

$$K_{ii} = \alpha(\varphi_{ix}, \varphi_{ix}) + \beta(\varphi_i, \varphi_i) = \alpha \int_0^1 (\varphi_{ix})^2 dx + \beta \int_0^1 (\varphi_i(x))^2 dx$$

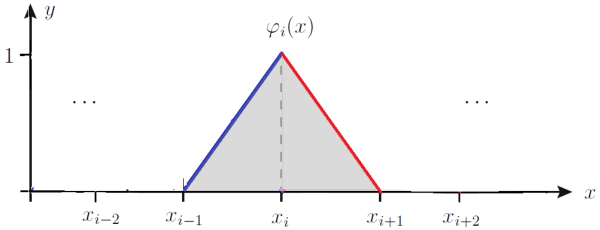
$$= \alpha \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (\varphi_{ix})^2 dx + \beta \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (\varphi_i(x))^2 dx$$



Matriz de rigidez K

Por definição,

$$K_{ii} = \alpha\Big(\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\varphi_{ix})^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\varphi_{ix})^2 dx\Big)$$
$$+ \beta\Big(\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\varphi_i(x))^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\varphi_i(x))^2 dx\Big)$$

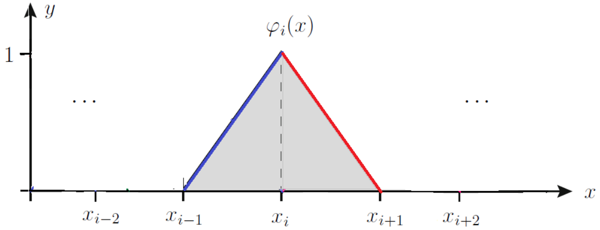


Matriz de rigidez K

Por definição,

$$\begin{aligned} K_{ii} &= \alpha\Big(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \Big(\frac{1}{h}\Big)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Big(-\frac{1}{h}\Big)^2 dx\Big) \\ &\quad + \beta\Big(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \Big(\frac{x - x_{i-1}}{h}\Big)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Big(\frac{x_{i+1} - x}{h}\Big)^2 dx\Big) \\ &= 2\Big(\frac{\alpha}{h} + \frac{\beta h}{3}\Big). \end{aligned}$$

(Exercício: Prove!)

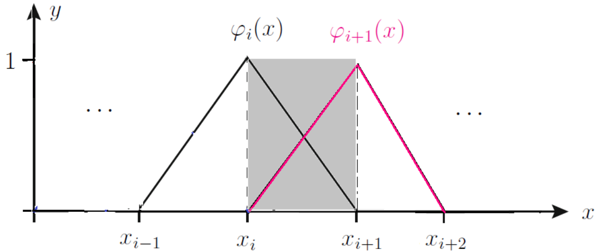


Matriz de rigidez K

Agora, calculamos:

$$
\begin{aligned}
K_{i,i+1} &= \alpha(\varphi_{ix}, \varphi_{(i+1)x}) + \beta(\varphi_i, \varphi_{i+1}) \\
&= \alpha \int_0^1 \varphi_{ix}\varphi_{(i+1)x} dx + \beta \int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x) dx \\
&= \alpha \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_{ix}\varphi_{(i+1)x} dx + \beta \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x) dx \\
&= \alpha \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{1}{h}\right)\left(\frac{1}{h}\right) dx + \beta \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x_{i+1}-x}{h}\right)\left(\frac{x-x_i}{h}\right) dx = -\frac{\alpha}{h} + \frac{\beta h}{6}.
\end{aligned}
$$

(Exercício: Prove! Dica: use mudança de variáveis $z = x - x_i$).



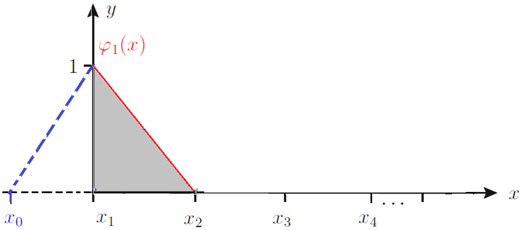
Matriz de rigidez K

Obs.: x_0 é um nó que não faz parte do domínio $\Omega = [x_1, x_m] = [0, 1]$. Assim,

$$K_{11} = \alpha(\varphi_{1x}, \varphi_{1x}) + \beta(\varphi_1, \varphi_1) = \alpha \int_0^1 (\varphi_{1x})^2 dx + \beta \int_0^1 (\varphi_1(x))^2 dx$$

$$= \alpha \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{1}{h}\right)^2 dx + \beta \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{x_2 - x}{h}\right)^2 dx = \frac{\alpha}{h} + \frac{\beta h}{3}.$$

(Exercício: Prove!).



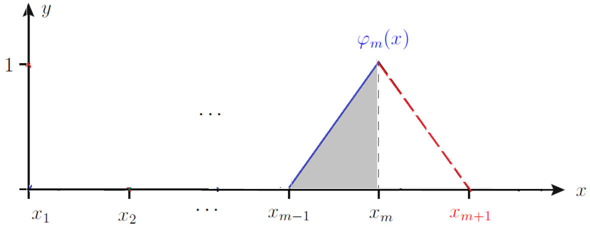
Matriz de rigidez K

Obs.: x_{m+1} é um nó que não faz parte do domínio $\Omega = [x_1, x_m] = [0, 1]$. Assim,

$$K_{mm} = \alpha(\varphi_{mx}, \varphi_{mx}) + \beta(\varphi_m, \varphi_m) = \alpha \int_0^1 (\varphi_{mx})^2 dx + \beta \int_0^1 (\varphi_m(x))^2 dx$$

$$= \alpha \int_{x_{m-1}}^{x_m} \left(\frac{1}{h}\right)^2 dx + \beta \int_{x_{m-1}}^{x_m} \left(\frac{x - x_{m-1}}{h}\right)^2 dx = \frac{\alpha}{h} + \frac{\beta h}{3}.$$

(Exercício: Prove!).



Vetor força F

Componentes do vetor F:

$$F^T = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & \cdots & F_m \end{bmatrix}, \text{ onde:}$$

Obs.: $x_0 \notin \Omega = [x_1, x_m] = [0, 1]$. Assim,

$$F_1 = (f, \varphi_1) = \int_0^1 f(x)\varphi_1(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\varphi_1(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\left(\frac{x_2 - x}{h}\right)dx;$$

Para $i = 2, \ldots, m$:

$$\begin{aligned} F_i = (f, \varphi_i) &= \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x)dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\varphi_i(x)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x)dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\left(\frac{x - x_{i-1}}{h}\right)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\left(\frac{x_{i+1} - x}{h}\right)dx \end{aligned}$$

Vetor força F

Obs.: $x_{m+1} \notin \Omega = [x_1, x_m] = [0, 1]$. Assim,

$$F_m = (f, \varphi_m) = \int_0^1 f(x)\varphi_m(x)dx = \int_{x_{m-1}}^{x_m} f(x)\varphi_m(x)dx$$
$$= \int_{x_{m-1}}^{x_m} f(x)\left(\frac{x - x_{m-1}}{h}\right)dx$$

O cálculo vai depender da definição da função $f(x)$.

Resultados

Matriz de rigidez K:

$$K_{11} = \frac{\alpha}{h} + \frac{\beta h}{3};$$

$$K_{ii} = 2\left(\frac{\alpha}{h} + \frac{\beta h}{3}\right), \text{ para } i = 2, 3, \dots, m-1; \tag{8}$$

$$K_{i+1,i} = K_{i,i+1} = -\frac{\alpha}{h} + \frac{\beta h}{6}, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, m-1;$$

$$K_{mm} = \frac{\alpha}{h} + \frac{\beta h}{3}.$$

Vetor força F:

$$F_1 = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\left(\frac{x_2 - x}{h}\right)dx;$$

$$F_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\left(\frac{x - x_{i-1}}{h}\right)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\left(\frac{x_{i+1} - x}{h}\right)dx, \text{ para } i = 2, 3, \dots, m-1;$$

$$F_m = \int_{x_{m-1}}^{x_m} f(x)\left(\frac{x - x_{m-1}}{h}\right)dx. \tag{9}$$

Referências I

Liu, I.S.; Rincon, M.A.. **Introdução ao Método de Elementos Finitos, Análise e Aplicação**. IM/UFRJ, 2003.