Tópicos Especiais em Matemática Aplicada - 2025-1
UERJ

09 - Elementos Finitos - Caso 2D

Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br
Github: https://github.com/rodrigolrmadureira/ElementosFinitos

Sumário

Discretização do domínio - 2D

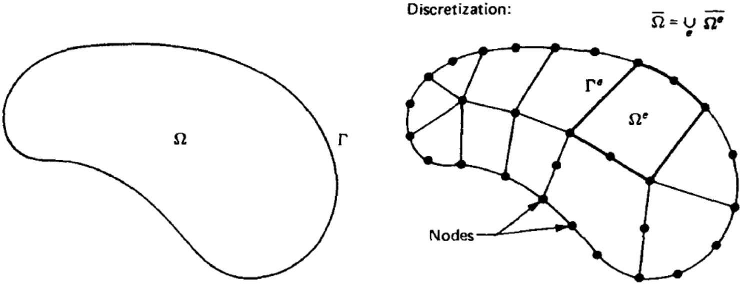

Figura: Fonte: Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method*, 1987

Algumas definições:

• **Nós**: são os pontos discretizados do domínio $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, onde:

• Γ: é a fronteira do domínio (curva fechada que faz o contorno do domínio);

• Ω: é a região que contém os nós que não pertencem à fronteira Γ, ou seja, contém os nós interiores no domínio.

Discretização do domínio - 2D

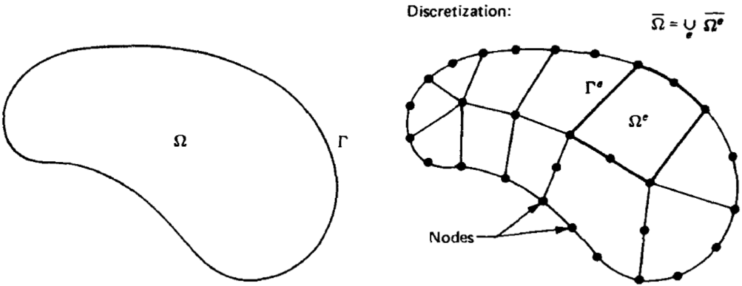

Figura: Fonte: Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method*, 1987

Considere uma partição de Ω em subregiões Ω^e, onde:

$$\begin{cases} \Omega = \bigcup_{e=1}^{Nel} \Omega^e, \\ \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \text{ se } i \neq j, \end{cases}$$

onde *Nel* é o número de subregiões, chamadas de **Elementos Finitos**.

Discretização do domínio - 2D

Usualmente, os elementos finitos em $\mathbb{R}^2$ são **triângulos** ou **quadriláteros**.

Podemos determinar a quantidade de nós em cada elemento finito Ω^e:

Q_n: quadrilátero com n nós;
T_n: triângulo com n nós.

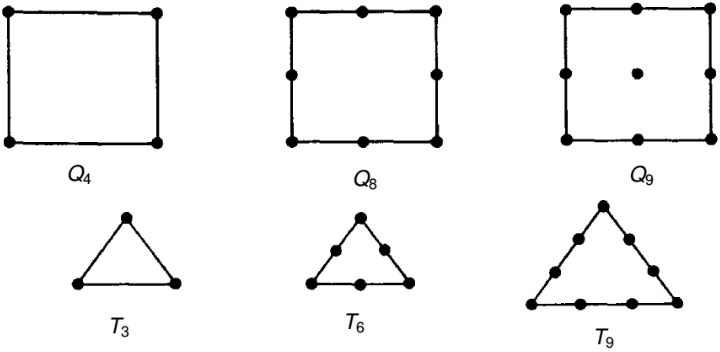

Figura: Fonte: Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method*, 1987

Discretização do domínio - 2D

Neste curso, trabalharemos somente com elementos do tipo Q_4.

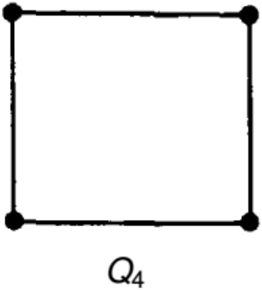

Figura: Fonte: Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method*, 1987

Discretização do domínio - 2D

Algumas definições:

- N_{no}: quantidade total de nós da malha de elementos finitos;
- n_{no}: quantidade total de nós em cada elemento finito.

No caso de Q_4, $n_{no} = 4$.

- $N = \{1, 2, 3, \ldots, N_{no}\}$: conjunto de nós da malha de elementos finitos;
- N_p: conjunto de nós cuja solução $u(x, y)$ já é conhecida (prescrita), ou seja, $u|_{N_p} = p$.
- $N - N_p$: conjunto de nós nos quais a solução aproximada u_h será determinada com número de nós igual a Neq (número de equações).

Discretização do domínio - 2D

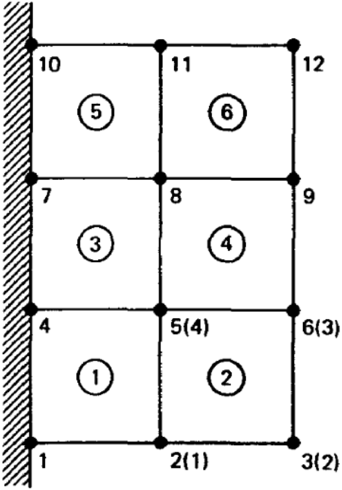

Figura: Fonte: Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method*, 1987

Exemplo de malha:

$N_{no} = 12;$

$N = \{1, 2, 3, \ldots, 12\};$

$N_p = \{1, 4, 7, 10\};$

$N - N_p = \{2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12\};$

$Neq = \#(N - N_p) = 8.$

Discretização do domínio - 2D

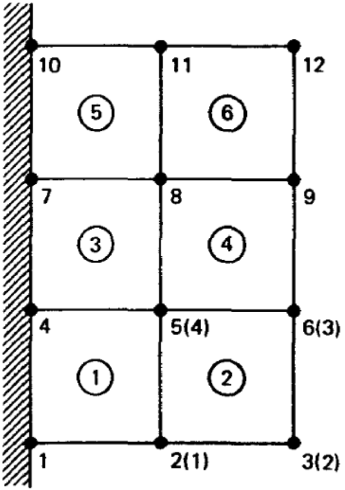

Figura: Fonte: Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method*, 1987

O número do nó da malha é chamado de **nó global**.

O número do nó da malha relativo ao elemento é chamado de **nó local**.

Obs.: Os nós locais são numerados sempre no **sentido anti-horário**.

Neste exemplo, no elemento 2:

Numeração local (sentido anti-horário): $\{1, 2, 3, 4\}$.

Numeração global (sentido anti-horário): $\{2, 3, 6, 5\}$.

Discretização do domínio - 2D

Para associar o número global A do nó da malha com o número local a no elemento finito Ω^e, usamos uma **matriz LG** (*Local-Global*).

No exemplo anterior:

a \ e	1	2	3	4	5	6
1	1	2	4	5	7	8
2	2	3	5	6	8	9
3	5	6	8	9	11	12
4	4	5	7	8	10	11

Tabela: Matriz LG

Discretização do domínio - 2D

Para relacionar a numeração global *A* com o número da equação no sistema linear, usamos o vetor **EQ**:

No exemplo anterior:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1	2	0	3	4	0	5	6	0	7	8

Tabela: Vetor EQ

Aplicação no problema da condução de calor

Vamos relacionar o que vimos até agora com o problema aproximado da condução de calor:

$$\sum_{j=1}^{N_{no}} a(\varphi_i, \varphi_j)\, c_j = (f, \varphi_i) - (\bar{q}, \varphi_i)_{\Gamma_q} - \sum_{j=1}^{N_{no}} a(\varphi_i, \varphi_j)\, p_j, \qquad \text{para todo } i = 1, 2, \ldots, N_{no}, \tag{1}$$

onde vimos que a solução aproximada não prescrita (desconhecida) é dada por:

$$w_h(x, y) = \sum_{i=1}^{N_{no}} c_i\, \varphi_i(x, y) \tag{2}$$

Aplicação no problema da condução de calor

Aqui, podemos restringir $w_h(x, y)$ aos nós globais não prescritos $B = (x_B, y_B)$ do conjunto dos nós não prescritos $N - N_p$. Ou seja, podemos reescrever w_h como:

$$w_h(x, y) = \sum_{B \,\in\, N - N_p} c_B \, \varphi_B(x, y), \tag{3}$$

onde $\varphi_A(x, y)$ é a função de interpolação (função da base) associada ao nó global A, tal que;

$$\varphi_A(x_B, y_B) = \begin{cases} 1, & \text{se } A = B, \\ 0, & \text{se } A \neq B. \end{cases}$$

Note que nos nós globais não prescritos $B \in N - N_p$,

$$w_h(x_B, y_B) = c_B$$

Aplicação no problema da condução de calor

Vimos também que a solução prescrita (conhecida) $p_h(x, y)$ é dada por:

$$p_h(x, y) = \sum_{j=1}^{N_{no}} p_j \, \varphi_j(x, y) \tag{4}$$

Logo, restringindo p_h ao conjunto dos nós prescritos N_p, podemos reescrevê-la como:

$$p_h(x, y) = \sum_{A \, \in \, N_p} p_A \, \varphi_A(x, y). \tag{5}$$

Note que nos nós globais prescritos $A \in N_p$,

$$p_h(x_A, y_A) = p_A$$

Aplicação no problema da condução de calor

Assim, podemos reescrever o problema aproximado da Eq. (1) como:

$$\sum_{B \in N-N_p} a(\varphi_A, \varphi_B)\, c_B = (f, \varphi_A) - (\bar{q}, \varphi_A)_{\Gamma_q} - \sum_{B \in N_p} a(\varphi_A, \varphi_B)\, p_B, \qquad (6)$$

para todo $A \in N - N_p$.

Usando em (6) a notação matricial:

$K_{IJ} = a(\varphi_A, \varphi_B) = (\nabla\varphi_A, k \cdot \nabla\varphi_B)$;

$F_I = (f, \varphi_A) - (\bar{q}, \varphi_A)_{\Gamma_q} - \sum_{B \in N_p} a(\varphi_A, \varphi_B)\, p_B$,

onde $I = EQ[A]$ e $J = EQ[B]$ são os índices dos nós das soluções não prescritas, ou seja, dos nós que pertencem ao conjunto $N - N_p$, então obtemos o sistema linear:

$$Kc = F.$$

Referências I

- Hughes, T.J.R.. **The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. Prentice-Hall, Inc., 1987.
- Fish, J.; Belytschko, T.. **A First Course in Finite Elements**. Wiley, 2007.
- Becker, E. B.; Carey, G. F.; Oden, J. T.. **Finite Elements - An Introduction**. Prentice-Hall, 1981.
- Liu, I.S.; Rincon, M.A.. **Introdução ao Método de Elementos Finitos, Análise e Aplicação**. IM/UFRJ, 2003.