

Tópicos Especiais em Matemática Aplicada - 2025-1

UERJ

09 - Elementos Finitos - Caso 2D

Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br

Github: <https://github.com/rodrigolrmadureira/ElementosFinitos>

Sumário

- 1 Discretização do domínio - 2D
- 2 Aplicação no problema da condução de calor
- 3 Bibliografia

Discretização do domínio - 2D

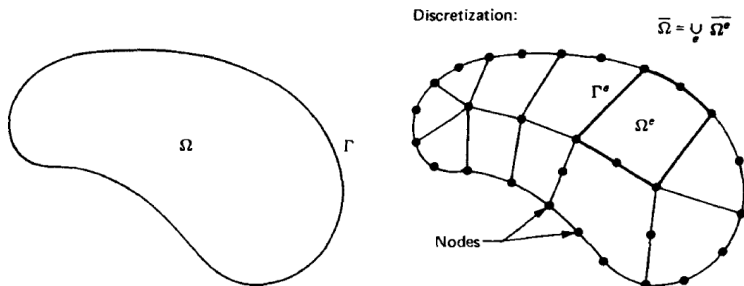


Figura: Fonte: Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method*, 1987

Algumas definições:

- **Nós:** são os pontos discretizados do domínio $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, onde:
- Γ : é a fronteira do domínio (curva fechada que faz o contorno do domínio);
- Ω : é a região que contém os nós que não pertencem à fronteira Γ , ou seja, contém os nós interiores no domínio.

Discretização do domínio - 2D

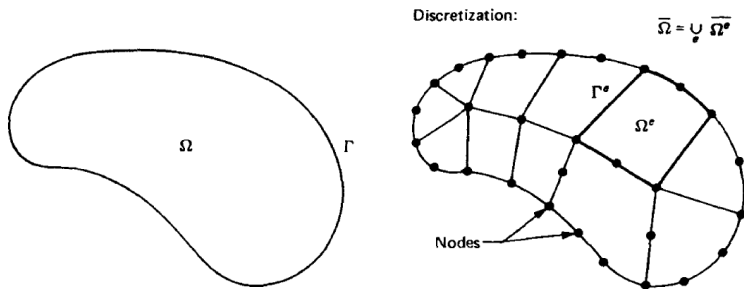


Figura: Fonte: Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method*, 1987

Considere uma partição de Ω em subregiões Ω^e , onde:

$$\begin{cases} \Omega = \bigcup_{e=1}^{Nel} \Omega^e, \\ \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \text{ se } i \neq j, \end{cases}$$

onde Nel é o número de subregiões, chamadas de **Elementos Finitos**.

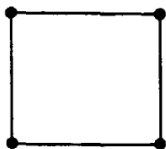
Discretização do domínio - 2D

Usualmente, os elementos finitos em \mathbb{R}^2 são **triângulos** ou **quadriláteros**.

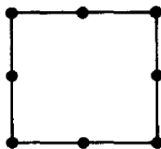
Podemos determinar a quantidade de nós em cada elemento finito Ω^e :

Q_n : quadrilátero com n nós;

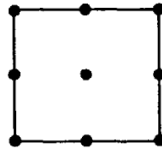
T_n : triângulo com n nós.



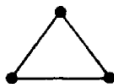
Q_4



Q_8



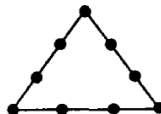
Q_9



T_3



T_6



T_9

Figura: Fonte: Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method*, 1987

Discretização do domínio - 2D

Neste curso, trabalharemos somente com elementos do tipo Q_4 .

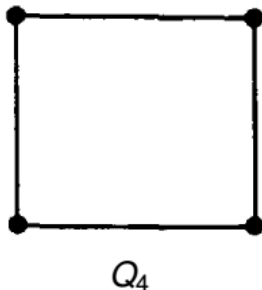


Figura: Fonte: Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method*, 1987

Discretização do domínio - 2D

Algumas definições:

- N_{no} : quantidade total de nós da malha de elementos finitos;
- n_{no} : quantidade total de nós em cada elemento finito.

No caso de Q_4 , $n_{no} = 4$.

- $N = \{1, 2, 3, \dots, N_{no}\}$: conjunto de nós da malha de elementos finitos;
- N_p : conjunto de nós cuja solução $u(x, y)$ já é conhecida (prescrita), ou seja, $u|_{N_p} = p$.
- $N - N_p$: conjunto de nós nos quais a solução aproximada u_h será determinada com número de nós igual a Neq (número de equações).

Discretização do domínio - 2D

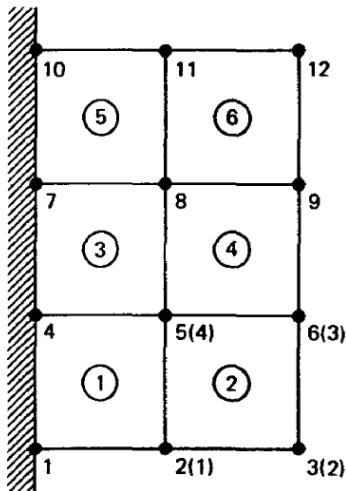


Figura: Fonte: Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method*, 1987

Exemplo de malha:

$$N_{no} = 12;$$

$$N = \{1, 2, 3, \dots, 12\};$$

$$N_p = \{1, 4, 7, 10\};$$

$$N - N_p = \{2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12\};$$

$$Neq = \#(N - N_p) = 8.$$

Discretização do domínio - 2D

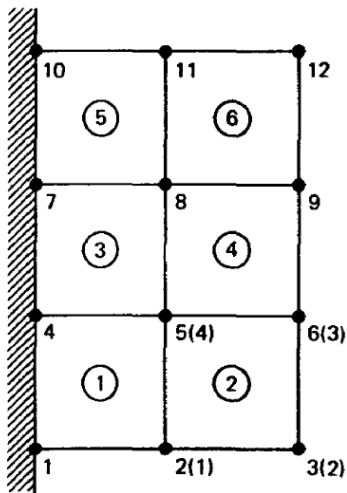


Figura: Fonte: Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method*, 1987

O número do nó da malha é chamado de **nó global**.

O número do nó da malha relativo ao elemento é chamado de **nó local**.

Obs.: Os nós locais são numerados sempre no **sentido anti-horário**.

Neste exemplo, no elemento 2:

Numeração local (sentido anti-horário): $\{1, 2, 3, 4\}$.

Numeração global (sentido anti-horário): $\{2, 3, 6, 5\}$.

Discretização do domínio - 2D

Para associar o número global A do nó da malha com o número local a no elemento finito Ω^e , usamos uma **matriz LG** (*Local-Global*).

No exemplo anterior:

$a \backslash e$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	4	5	7	8
2	2	3	5	6	8	9
3	5	6	8	9	11	12
4	4	5	7	8	10	11

Tabela: Matriz LG

Discretização do domínio - 2D

Para relacionar a numeração global A com o número da equação no sistema linear, usamos o vetor **EQ**:

No exemplo anterior:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1	2	0	3	4	0	5	6	0	7	8

Tabela: Vetor EQ

Aplicação no problema da condução de calor

Vamos relacionar o que vimos até agora com o problema aproximado da condução de calor:

$$\sum_{j=1}^{N_{no}} a(\varphi_i, \varphi_j) c_j = (f, \varphi_i) - (\bar{q}, \varphi_i)_{\Gamma_q} - \sum_{j=1}^{N_{no}} a(\varphi_i, \varphi_j) p_j, \quad (1)$$

para todo $i = 1, 2, \dots, N_{no}$,

onde vimos que a solução aproximada não prescrita (desconhecida) é dada por:

$$w_h(x, y) = \sum_{i=1}^{N_{no}} c_i \varphi_i(x, y) \quad (2)$$

Aplicação no problema da condução de calor

Aqui, podemos restringir $w_h(x, y)$ aos nós globais não prescritos $B = (x_B, y_B)$ do conjunto dos nós não prescritos $N - N_p$. Ou seja, podemos reescrever w_h como:

$$w_h(x, y) = \sum_{B \in N - N_p} c_B \varphi_B(x, y), \quad (3)$$

onde $\varphi_A(x, y)$ é a função de interpolação (função da base) associada ao nó global A , tal que;

$$\varphi_A(x_B, y_B) = \begin{cases} 1, & \text{se } A = B, \\ 0, & \text{se } A \neq B. \end{cases}$$

Note que nos nós globais não prescritos $B \in N - N_p$,

$$w_h(x_B, y_B) = c_B$$

Aplicação no problema da condução de calor

Vimos também que a solução prescrita (conhecida) $p_h(x, y)$ é dada por:

$$p_h(x, y) = \sum_{j=1}^{N_{no}} p_j \varphi_j(x, y) \quad (4)$$

Logo, restringindo p_h ao conjunto dos nós prescritos N_p , podemos reescrevê-la como:

$$p_h(x, y) = \sum_{A \in N_p} p_A \varphi_A(x, y). \quad (5)$$

Note que nos nós globais prescritos $A \in N_p$,

$$p_h(x_A, y_A) = p_A$$

Aplicação no problema da condução de calor

Assim, podemos reescrever o problema aproximado da Eq. (1) como:

$$\sum_{B \in N - N_p} a(\varphi_A, \varphi_B) c_B = (f, \varphi_A) - (\bar{q}, \varphi_A)_{\Gamma_q} - \sum_{B \in N_p} a(\varphi_A, \varphi_B) p_B, \quad (6)$$

para todo $A \in N - N_p$.

Usando em (6) a notação matricial:

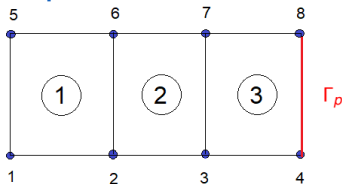
$$K_{IJ} = a(\varphi_A, \varphi_B) = (\nabla \varphi_A, k \cdot \nabla \varphi_B);$$

$$F_I = (f, \varphi_A) - (\bar{q}, \varphi_A)_{\Gamma_q} - \sum_{B \in N_p} a(\varphi_A, \varphi_B) p_B,$$

onde $I = EQ[A]$ e $J = EQ[B]$ são os índices dos nós das soluções não prescritas, ou seja, dos nós que pertencem ao conjunto $N - N_p$, então obtemos o sistema linear:

$$Kc = F.$$

Exemplo



$$N_{no} = 8$$

$$N_p = \{4, 8\}$$

$$N_{eq} = 6$$

1	2	3	0	4	5	6	0
---	---	---	---	---	---	---	---

Tabela: Vetor EQ

a \ e	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	4
3	6	7	8
4	5	6	7

Tabela: Matriz LG

Exemplo

Sistema a ser resolvido: $Kc = F$.

Montagem da matriz global simétrica K a partir das matrizes locais simétricas

$$K^e = \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e & K_{14}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e & K_{24}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e & K_{34}^e \\ K_{41}^e & K_{42}^e & K_{43}^e & K_{44}^e \end{bmatrix}, \text{ para } e = 1, 2, 3,$$

e das informações do vetor EQ e da matriz LG.

O vetor EQ possui os índices 4 e 8 iguais a zero, indicando que estes nós globais são prescritos, e os demais índices numerados de 1 a 6, indicando que o sistema possui 6 equações.

Logo, neste exemplo, $K_{6 \times 6}$ e $F_{6 \times 1}$.

Exemplo

Vamos calcular os elementos K_{IJ} da matriz K usando I, J iguais a:

$EQ[LG(a, e)]$, onde $a = 1, 2, 3, 4$ e, neste exemplo, $e = 1, 2, 3$.

Elemento $e = 1$:

$$EQ[LG(1, 1)] = EQ[1] = 1$$

$$EQ[LG(2, 1)] = EQ[2] = 2$$

$$EQ[LG(3, 1)] = EQ[6] = 5$$

$$EQ[LG(4, 1)] = EQ[5] = 4$$

Aqui, por exemplo:

$$I = EQ[LG(3, 1)] = EQ[6] = 5$$

$$J = EQ[LG(4, 1)] = EQ[5] = 4 \Rightarrow K_{54} = K_{34}^1$$

Portanto, até aqui teremos:

$$\begin{array}{llll} K_{11} = K_{11}^1; & K_{12} = K_{12}^1; & K_{15} = K_{13}^1; & K_{14} = K_{14}^1; \\ K_{21} = K_{21}^1; & K_{22} = K_{22}^1; & K_{25} = K_{23}^1; & K_{24} = K_{24}^1; \\ K_{51} = K_{31}^1; & K_{52} = K_{32}^1; & K_{55} = K_{33}^1; & K_{54} = K_{34}^1; \\ K_{41} = K_{41}^1; & K_{42} = K_{42}^1; & K_{45} = K_{43}^1; & K_{44} = K_{44}^1. \end{array}$$

Exemplo

Até agora, a matriz global K possui a configuração:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & K_{14} & K_{15} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & 0 & K_{24} & K_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{41} & K_{42} & 0 & K_{44} & K_{45} & 0 \\ K_{51} & K_{52} & 0 & K_{54} & K_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & K_{14}^1 & K_{15}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & 0 & K_{24}^1 & K_{25}^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & 0 & K_{44}^1 & K_{45}^1 & 0 \\ K_{51}^1 & K_{52}^1 & 0 & K_{54}^1 & K_{55}^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Elemento $e = 2$:

$$EQ[LG(1, 2)] = EQ[2] = 2$$

$$EQ[LG(2, 2)] = EQ[3] = 3$$

$$EQ[LG(3, 2)] = EQ[7] = 6$$

$$EQ[LG(4, 2)] = EQ[6] = 5$$

Note que:

$K_{22} = K_{11}^2 + K_{22}^1$, pois a posição K_{22} já estava ocupada por K_{22}^1 .
Logo, toda vez que a posição estiver ocupada, devemos somar.

Portanto, aqui temos:

$$\begin{aligned} K_{22} &= K_{11}^2 + K_{22}^1; & K_{23} &= K_{12}^2; & K_{26} &= K_{13}^2; & K_{25} &= K_{14}^2 + K_{23}^1; \\ K_{32} &= K_{21}^2; & K_{33} &= K_{22}^2; & K_{36} &= K_{23}^2; & K_{35} &= K_{24}^2; \\ K_{62} &= K_{31}^2; & K_{63} &= K_{32}^2; & K_{66} &= K_{33}^2; & K_{65} &= K_{34}^2; \\ K_{52} &= K_{41}^2 + K_{32}^1; & K_{53} &= K_{42}^2; & K_{56} &= K_{43}^2; & K_{55} &= K_{44}^2 + K_{33}^1. \end{aligned}$$

Exemplo

Até agora, a matriz global K possui a configuração:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & K_{14} & K_{15} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ 0 & K_{32} & K_{33} & 0 & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & 0 & K_{44} & K_{45} & 0 \\ K_{51} & K_{52} & 0 & K_{54} & K_{55} & 0 \\ 0 & K_{62} & K_{63} & 0 & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & K_{14}^1 & K_{15}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{11}^2 + K_{22}^1 & K_{12}^2 & K_{24}^1 & K_{14}^2 + K_{23}^1 & K_{13}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 & 0 & K_{24}^2 & K_{23}^2 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & 0 & K_{44}^1 & K_{43}^1 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{41}^2 + K_{32}^1 & K_{42}^2 & K_{34}^1 & K_{44}^2 + K_{33}^1 & K_{43}^2 \\ 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & 0 & K_{34}^2 & K_{33}^2 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Elemento $e = 3$:

$$EQ[LG(1, 3)] = EQ[3] = 3$$

$$EQ[LG(2, 3)] = EQ[4] = 0 \Rightarrow \text{Não gera equação, não será usado.}$$

$$EQ[LG(3, 3)] = EQ[8] = 0 \Rightarrow \text{Não gera equação, não será usado.}$$

$$EQ[LG(4, 3)] = EQ[7] = 6$$

Aqui, temos:

$$K_{33} = K_{11}^3 + K_{22}^2; \quad K_{36} = K_{14}^3 + K_{23}^2;$$

$$K_{63} = K_{41}^3 + K_{32}^2; \quad K_{66} = K_{44}^3 + K_{33}^2.$$

Exemplo

Logo, a matriz global K terá a configuração:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & K_{14} & K_{15} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ 0 & K_{32} & K_{33} & 0 & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & 0 & K_{44} & K_{45} & 0 \\ K_{51} & K_{52} & 0 & K_{54} & K_{55} & 0 \\ 0 & K_{62} & K_{63} & 0 & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & K_{14}^1 & K_{15}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{11}^2 + K_{22}^1 & K_{12}^2 & K_{24}^1 & K_{14}^2 + K_{23}^1 & K_{13}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{11}^3 + K_{22}^2 & K_{11}^3 & K_{24}^2 & K_{14}^3 + K_{23}^2 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & 0 & K_{44}^1 & K_{43}^1 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{41}^2 + K_{32}^1 & K_{42}^2 & K_{34}^1 & K_{44}^2 + K_{33}^1 & K_{43}^2 \\ 0 & K_{31}^2 & K_{41}^3 + K_{32}^2 & 0 & K_{34}^2 & K_{44}^3 + K_{33}^2 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Montagem do vetor global F a partir dos vetores locais:

$$F^e = \begin{bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \\ F_4^e \end{bmatrix}, \text{ para } e = 1, 2, 3,$$

e das informações do vetor EQ e da matriz LG.

Elemento $e = 1$:

$$EQ[LG(1, 1)] = EQ[1] = 1$$

$$EQ[LG(2, 1)] = EQ[2] = 2$$

$$EQ[LG(3, 1)] = EQ[6] = 5$$

$$EQ[LG(4, 1)] = EQ[5] = 4$$

Aqui teremos:

$$F_1 = F_1^1; \quad F_2 = F_2^1; \quad F_5 = F_3^1; \quad F_4 = F_4^1.$$

Exemplo

Até agora, o vetor global F possui a configuração:

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \\ F_4 \\ F_5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ 0 \\ F_4^1 \\ F_3^1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Elemento $e = 2$:

$$EQ[LG(1, 2)] = EQ[2] = 2$$

$$EQ[LG(2, 2)] = EQ[3] = 3$$

$$EQ[LG(3, 2)] = EQ[7] = 6$$

$$EQ[LG(4, 2)] = EQ[6] = 5$$

Aqui teremos:

$$F_2 = F_1^2 + F_2^1; \quad F_3 = F_2^2; \quad F_6 = F_3^2; \quad F_5 = F_4^2 + F_3^1.$$

Até agora, o vetor global F possui a configuração:

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_1^2 + F_2^1 \\ F_2^2 \\ F_4^1 \\ F_4^2 + F_3^1 \\ F_3^2 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Elemento $e = 3$:

$$EQ[LG(1, 3)] = EQ[3] = 3$$

$$EQ[LG(2, 3)] = EQ[4] = 0 \Rightarrow \text{Não gera equação.}$$

$$EQ[LG(3, 3)] = EQ[8] = 0 \Rightarrow \text{Não gera equação.}$$

$$EQ[LG(4, 3)] = EQ[7] = 6$$

Aqui teremos:

$$F_3 = F_1^3 + F_2^2 \quad F_6 = F_4^3 + F_3^2;$$

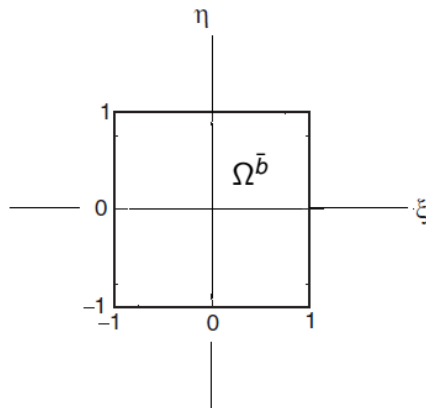
Até agora, o vetor global F possui a configuração:

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_1^2 + F_2^1 \\ F_1^3 + F_2^2 \\ F_4^1 \\ F_4^2 + F_3^1 \\ F_4^3 + F_3^2 \end{bmatrix}$$

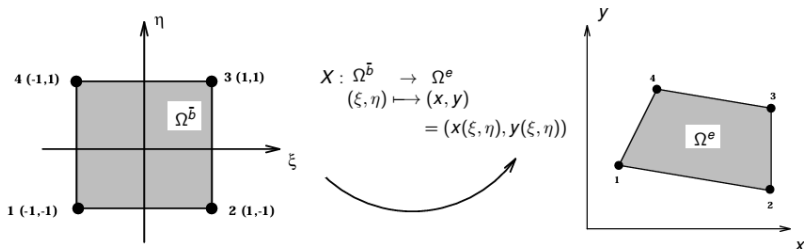
Elementos isoparamétricos

Agora, vamos ver como são calculados K^e e F^e para cada elemento Ω^e .

Seja $\Omega^{\bar{b}} = [-1, 1] \times [-1, 1]$ o elemento finito biunitário como representado na figura abaixo.



Elementos isoparamétricos



Seja

$$X: \Omega^b \rightarrow \Omega^e$$

$$(\xi, \eta) \mapsto (x, y) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)),$$

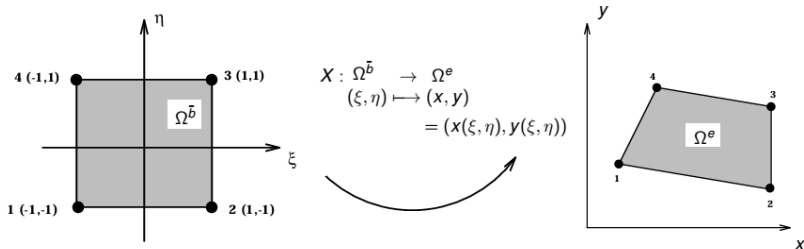
onde

$$x(\xi, \eta) = \sum_{a=1}^4 \varphi_a^b(\xi, \eta) \cdot x_a^e;$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{a=1}^4 \varphi_a^b(\xi, \eta) \cdot y_a^e;$$

$$\varphi_a^b(\xi_c, \eta_c) = \begin{cases} 1, & \text{se } a = c, \\ 0, & \text{se } a \neq c. \end{cases}$$

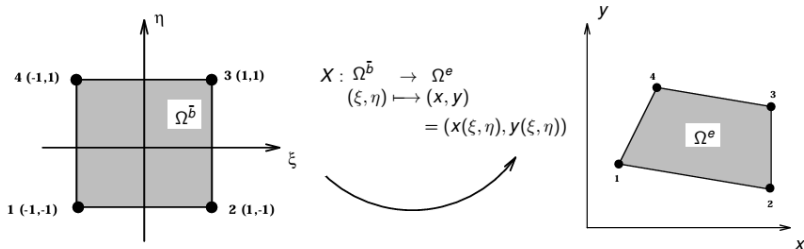
Elementos isoparamétricos



Por exemplo,

$$\begin{aligned}
 x(-1, -1) &= x(\xi_1, \eta_1) = \sum_{a=1}^4 \varphi_a^b(\xi_1, \eta_1) \cdot x_a^e \\
 &= \underbrace{\varphi_1^b(\xi_1, \eta_1)}_1 \cdot x_1^e + \cancel{\varphi_2^b(\xi_1, \eta_1)}^0 \cdot x_2^e + \cancel{\varphi_3^b(\xi_1, \eta_1)}^0 \cdot x_3^e + \cancel{\varphi_4^b(\xi_1, \eta_1)}^0 \cdot x_4^e \\
 &= x_1^e
 \end{aligned}$$

Elementos isoparamétricos



Analogamente,

$$x(1, -1) = x(\xi_2, \eta_2) = x_2^e;$$

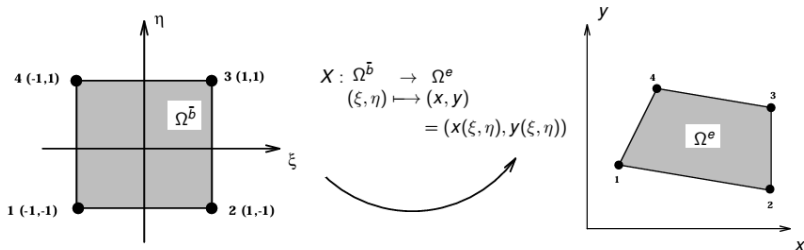
$$x(1, 1) = x(\xi_3, \eta_3) = x_3^e;$$

$$x(-1, 1) = x(\xi_4, \eta_4) = x_4^e$$

Ou seja, para todo $a = 1, 2, 3, 4$,

$$x(\xi_a, \eta_a) = x_a^e; \quad y(\xi_a, \eta_a) = y_a^e$$

Elementos isoparamétricos

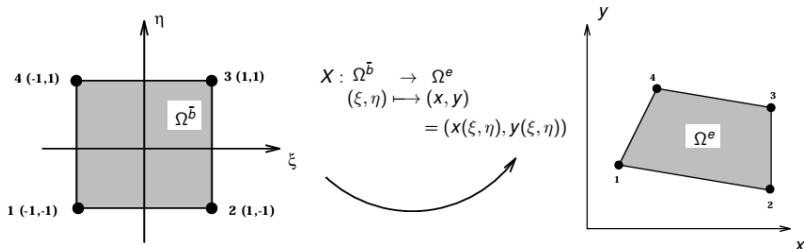


Vamos assumir que $x(\xi, \eta)$ e $y(\xi, \eta)$ são lineares em ξ e η , ou seja:

$$x(\xi, \eta) = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta$$

$$y(\xi, \eta) = b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\xi\eta$$

Elementos isoparamétricos



Então,

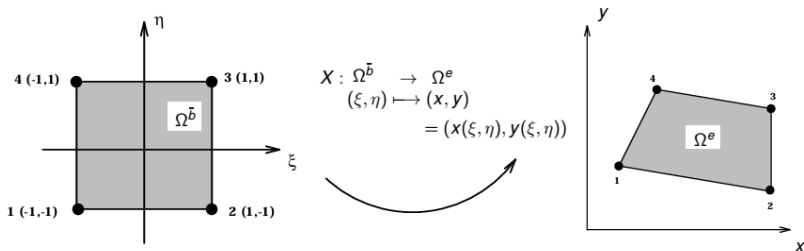
$$x(-1, -1) = x_1^e \Rightarrow a_1 - a_2 - a_3 + a_4 = x_1^e$$

$$x(1, -1) = x_2^e \Rightarrow a_1 + a_2 - a_3 - a_4 = x_2^e$$

$$x(-1, 1) = x_3^e \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = x_3^e$$

$$x(1, 1) = x_4^e \Rightarrow a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = x_4^e$$

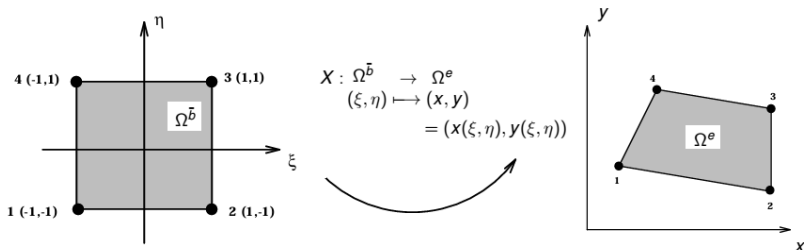
Elementos isoparamétricos



Resolvendo o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^e \\ x_2^e \\ x_3^e \\ x_4^e \end{bmatrix}$$

Elementos isoparamétricos



encontramos:

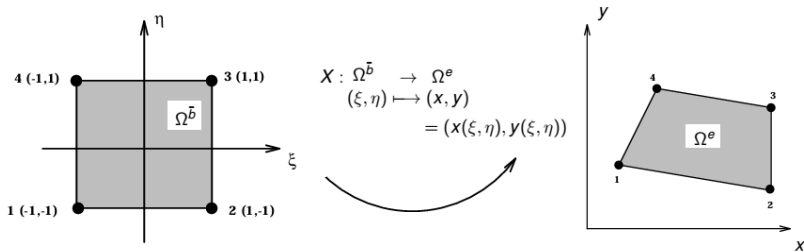
$$a_1 = (x_1^e + x_2^e + x_3^e + x_4^e)/4;$$

$$a_2 = (-x_1^e + x_2^e + x_3^e - x_4^e)/4;$$

$$a_3 = (-x_1^e - x_2^e + x_3^e + x_4^e)/4;$$

$$a_4 = (x_1^e - x_2^e + x_3^e - x_4^e)/4$$

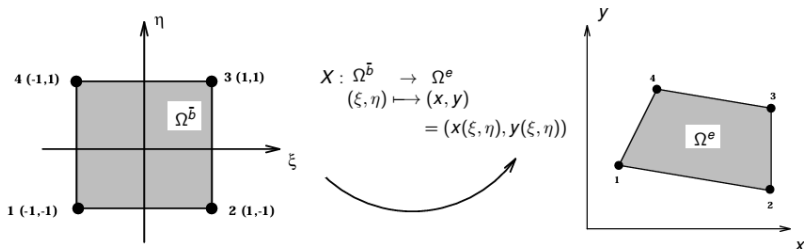
Elementos isoparamétricos



Substituindo a_1 , a_2 , a_3 , a_4 em $x(\xi, \eta)$ e arrumando os termos, obtemos:

$$\begin{aligned}
 x(\xi, \eta) = & \underbrace{\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) x_1^e}_{\varphi_1^b(\xi, \eta)} + \underbrace{\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) x_2^e}_{\varphi_2^b(\xi, \eta)} \\
 & + \underbrace{\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) x_3^e}_{\varphi_3^b(\xi, \eta)} + \underbrace{\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) x_4^e}_{\varphi_4^b(\xi, \eta)}
 \end{aligned}$$

Elementos isoparamétricos



Assim, temos as quatro funções de base para Q_4 :

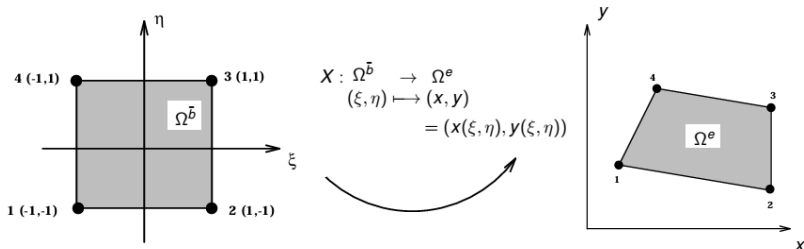
$$\varphi_1^{\bar{b}}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta);$$

$$\varphi_2^{\bar{b}}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta);$$

$$\varphi_3^{\bar{b}}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta);$$

$$\varphi_4^{\bar{b}}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

Elementos isoparamétricos



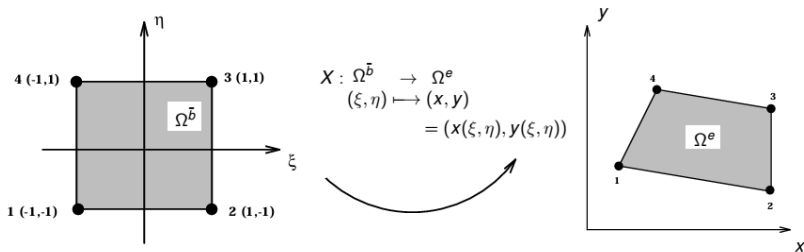
Assim, escrevemos a solução aproximada u_h^e em cada elemento Ω^e como:

$$u_h^e(x, y) = \sum_{a=1}^4 c_a^e \cdot \varphi_a^e(x, y)$$

Com o mapeamento $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$, obtemos:

$$u_h^e(x, y) = u_h^b(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = u_h^b(\xi, \eta) = \sum_{a=1}^4 c_a^b \cdot \varphi_a^b(\xi, \eta)$$

Elementos isoparamétricos

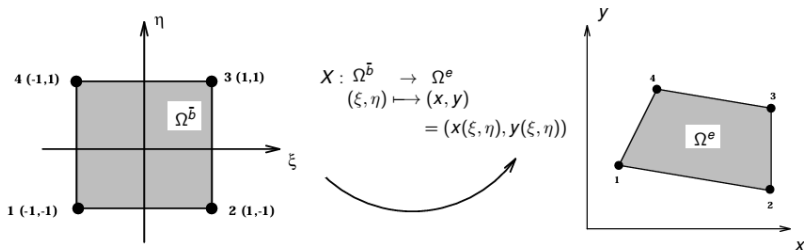


Também temos para cada elemento Ω^e , ou seja, para todo $a, b = 1, 2, 3, 4$:

$$K_{ab}^e = a(\varphi_a^e, \varphi_b^e) = (\nabla \varphi_a^e, k \cdot \nabla \varphi_b^e)$$

$$= \int_{\Omega^e} \nabla \varphi_a^e k \cdot \nabla \varphi_b^e dx dy = \int_{\Omega^{\bar{b}}} \nabla \varphi_a^{\bar{b}} k \cdot \nabla \varphi_b^{\bar{b}} |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta$$





Elementos isoparamétricos



Também temos para cada elemento Ω^e , ou seja, para todo $a = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned}
 F_a^e &= (f, \varphi_a^e) - (\bar{q}, \varphi_a^e)_{\Gamma_q} - \sum_{b=1}^4 a(\varphi_a^e, \varphi_b^e) p_b^e \\
 &= \int_{\Omega^e} f \varphi_a^e \, dx dy - \int_{\Gamma_q} \bar{q} \varphi_a^e \, d\Gamma_q - \sum_{b=1}^4 a(\varphi_a^e, \varphi_b^e) p_b^e
 \end{aligned}$$

Referências I

-  Hughes, T.J.R.. **The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. Prentice-Hall, Inc., 1987.
-  Fish, J.; Belytschko, T.. **A First Course in Finite Elements**. Wiley, 2007.
-  Becker, E. B.; Carey, G. F.; Oden, J. T.. **Finite Elements - An Introduction**. Prentice-Hall, 1981.
-  Liu, I.S.; Rincon, M.A.. **Introdução ao Método de Elementos Finitos, Análise e Aplicação**. IM/UFRJ, 2003.