Tópicos Especiais em Matemática Aplicada - IME/UERJ

Trabalho 4 - Matriz e vetor global, resolução do sistema linear - Caso 2D

1. Seja o problema dado por:

$$\begin{cases} -k\Delta u = f, \quad \text{em} \quad \Omega = (0,1)\times(0,1), \\ \quad u = 0°\text{C}, \quad \text{em} \quad \Gamma_1 = \{(0,y);\ 0 \le y \le 1\}, \\ \quad u = 100°\text{C}, \quad \text{em} \quad \Gamma_2 = \{(1,y);\ 0 \le y \le 1\}, \end{cases}$$

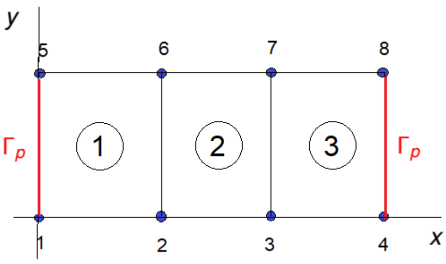
onde as **condições de fronteira são apenas de Dirichlet**.

Vimos que, neste caso, o problema aproximado local (por elemento e) é dado por:

$$\sum_{b=1}^{4} K_{ab}^{e} c_b^{e} = F_a^{e},$$

onde $K_{ab}^e = (\nabla\varphi_a^e, k\cdot\nabla\varphi_b^e)$; $f_a^e = (f,\varphi_a^e)$; $F_a^e = f_a^e + \bar{p}_a^e$; $\bar{p}_a^e = \sum_{b=1}^4 K_{ab}^e\, p_b^e$.

Considere Ω a região



dividida em três elementos que são quadrados de lado 1/3.

Considere também $k = 1$ e $u(x,y) = 100\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$. Note que substituindo $u(x,y)$ na equação do problema, obtemos $f(x,y) = 25\pi^2\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$. Dando continuidade ao que foi visto nos slides das aulas 09 e 10:

(a) Mostre que no elemento $e = 1$, a matriz local é dada por:

$$K^1 = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/6 & -1/3 & -1/6 \\ -1/6 & 2/3 & -1/6 & -1/3 \\ -1/3 & -1/6 & 2/3 & -1/6 \\ -1/6 & -1/3 & -1/6 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Dica: a matriz K^1 é simétrica.

(b) Mostre que os vetores locais, usando 4 casas decimais, são dados por:

$$F^1 = \begin{bmatrix} 1,1423 \\ 2,2846 \\ 2,2846 \\ 1,1423 \end{bmatrix} ; \quad F^2 = \begin{bmatrix} 4,2632 \\ 5,0994 \\ 5,0994 \\ 4,2632 \end{bmatrix} ; \quad F^3 = \begin{bmatrix} 56,2417 \\ -43,4522 \\ -43,4522 \\ 56,2417 \end{bmatrix} .$$

(c) Sabendo que para os elementos 2 e 3, também temos:

$$K^2 = K^3 = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/6 & -1/3 & -1/6 \\ -1/6 & 2/3 & -1/6 & -1/3 \\ -1/3 & -1/6 & 2/3 & -1/6 \\ -1/6 & -1/3 & -1/6 & 2/3 \end{bmatrix}$$

baseie-se nos slides da aula 09 para montar a matriz global K e o vetor global F.

(d) Resolva o sistema linear $Kc = F$ para achar a solução aproximada não prescrita:

$$c = \begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_6 \\ c_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_h(x_2, y_2) \\ u_h(x_3, y_3) \\ u_h(x_6, y_6) \\ u_h(x_7, y_7) \end{bmatrix} ,$$

onde (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_6, y_6), (x_7, y_7) são os nós globais não prescritos 2, 3, 6, 7 do domínio Ω da figura do enunciado.