Tópicos Especiais em Matemática Aplicada - 2025-1
UERJ

07 - Caso 2D estacionário - Formulação de Galerkin e Problema Aproximado

Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br
Github: https://github.com/rodrigolrmadureira/ElementosFinitos

Sumário

Problema da condução de calor (Regime permanente)

Podemos substituir a equação da Lei de Fourier na equação do balanço de energia para obter:

Formulação forte - Problema da condução de calor (Materiais isotrópicos ($Q = kI$, $k > 0$))

$$\nabla \cdot q = -\nabla \cdot (kI\, \nabla u) = -\nabla \cdot (k\, \nabla u) = -k\Delta u = f, \quad \text{em } \Omega, \tag{1}$$

Condições de fronteira:

$$\begin{aligned} u &= p, & &\text{em } \Gamma_p, & &\text{(Condição de Dirichlet)} \\ q_n &= q \cdot n = -k(\nabla u \cdot n) = \bar{q}, & &\text{em } \Gamma_q & &\text{(Condição de Neumann)} \end{aligned} \tag{2}$$

Problema da condução de calor (Regime permanente)

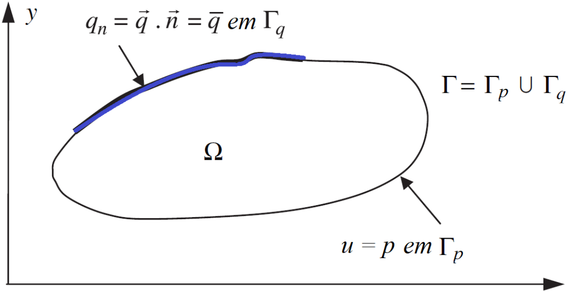
Recapitulando, a fronteira é dividida em duas partes:

Γ_p: fronteira onde a temperatura u é prescrita, de onde obtemos a **condição de fronteira de Dirichlet (essencial)**,

$$u = p, \quad \text{em } \Gamma_p, \tag{3}$$

Γ_q: fronteira onde o fluxo normal de calor q_n é prescrito, de onde obtemos a **condição de fronteira de Neumann (natural)**,

$$q_n = \vec{q} \cdot \vec{n} = \bar{q}, \quad \text{em } \Gamma_q. \tag{4}$$



Formulação fraca

Formulação fraca - Problema da condução de calor (Materiais isotrópicos ($Q = kI$, $k > 0$))

Sejam $H = \{u \in H^1(\Omega); u = p \text{ em } \Gamma_p\}$;
$V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ em } \Gamma_p\}$.

Dados $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $p : \Gamma_p \to \mathbb{R}$, $\bar{q} : \Gamma_q \to \mathbb{R}$ suficientemente suaves, a solução $u \in H$ da formulação fraca é tal que:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot k \cdot \nabla v \, dxdy = -\int_\Omega \bar{q} \, v \, d\Gamma + \int_\Omega f \, v \, dxdy, \text{ para todo } v \in V. \tag{5}$$

Formulação fraca

Demonstração: Multiplicando a Eq. (1) da formulação forte por uma função teste $v \in V$ e integrando em Ω, obtemos:

$$-\int_{\Omega} \nabla \cdot (k \cdot \nabla u) \cdot v \, dxdy = \int_{\Omega} f \, v \, dxdy, \text{ para todo } v \in V. \tag{6}$$

Vamos usar integração por partes,

$$\int_{\Omega} w \, dz = \int_{\Omega} d(wz) - \int_{\Omega} z \, dw, \tag{7}$$

na integral do lado esquerdo da Eq. (6), usando

$w = v$ e $dz = \nabla \cdot (k \cdot \nabla u)$, temos que $dw = \nabla v$ e $z = k\nabla u$.

Dica: No $\mathbb{R}^2$, a "derivada" de uma função escalar v é ∇v (ou *grad* v) e a "derivada" de uma função vetorial ∇u é $\nabla \cdot \nabla u$ (ou *div* ∇u).

Formulação fraca

Assim, obtemos na integral do lado esquerdo da Eq. (6),

$$\int_\Omega \nabla \cdot (k\nabla u)\, v\, dxdy = \int_\Omega \nabla \cdot (v \cdot k\nabla u)\, dxdy - \int_\Omega k\nabla u \cdot \nabla v\, dxdy \qquad (8)$$

Na integral em azul no lado direito da Eq. (8), devemos aplicar o **Teorema da Divergência no plano** (ou **Teorema de Green**):

Teorema da Divergência no plano (ou Teorema de Green)

Se F é um campo vetorial (fluxo de calor, por exemplo) atravessando uma região de domínio Ω, então

$$\int_\Omega \nabla \cdot F\, dxdy = \int_\Gamma F \cdot n\, d\Gamma \qquad (9)$$

(divergente do fluxo de calor na região Ω = fluxo normal que sai da fronteira Γ)

Formulação fraca

Portanto, aplicando o Teorema da Divergência à integral em azul, temos que:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (v \cdot k\nabla u)\; dxdy = \int_{\Gamma} v \cdot (k\nabla u \cdot n)\; d\Gamma \tag{10}$$

Substituindo o resultado de (10) na Eq. (8), obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (k\nabla u)\; v\; dxdy = \int_{\Gamma} v \cdot (k\nabla u \cdot n)\; d\Gamma - \int_{\Omega} k\nabla u \cdot \nabla v\; dxdy \tag{11}$$

Como $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_q$, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \cdot (k\nabla u)\; v\; dxdy =& \int_{\Gamma_p} v \cdot (k\nabla u \cdot n)\; d\Gamma + \int_{\Gamma_q} v \cdot (k\nabla u \cdot n)\; d\Gamma \\ & - \int_{\Omega} k\nabla u \cdot \nabla v\; dxdy \end{aligned} \tag{12}$$

Formulação fraca

Como $v \in V$, e pela definição do espaço V, $v = 0$ em Γ_p. Logo,

$$\int_{\Gamma_p} v \cdot (k\nabla u \cdot n)\, d\Gamma = 0.$$

Portanto, a Eq. (12) se torna:

$$\int_\Omega \nabla \cdot (k\nabla u)\, v\, dxdy = \int_{\Gamma_q} v \cdot (k\nabla u \cdot n)\, d\Gamma - \int_\Omega k\nabla u \cdot \nabla v\, dxdy \tag{13}$$

Substituindo o resultado da Eq. (13) na Eq. (6), obtemos para todo $v \in V$,

$$\int_\Omega k\nabla u \cdot \nabla v\, dxdy - \int_{\Gamma_q} v \cdot (k\nabla u \cdot n)\, d\Gamma = \int_\Omega f\; v\, dxdy \tag{14}$$

Da condição de fronteira de Neumann em (2), $k\nabla u \cdot n = -\bar{q}$. Logo, substituindo na Eq. (14), obtemos a formulação fraca

$$\int_\Omega k\nabla u \cdot \nabla v\, dxdy = \int_\Omega f\; v\, dxdy - \int_{\Gamma_q} \bar{q}\; v\, d\Gamma,\ \forall v \in V. \quad \square \tag{15}$$

Equivalência entre as formulações forte e fraca

$$u(x,t) \text{ é solução da formulação forte (a)}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$u(x,t) \text{ é solução da formulação fraca (b)}$$

Demonstração: (a) $\Rightarrow$ (b): Já acabamos de provar.

Agora, falta mostrar que (b) $\Rightarrow$ (a).

A partir da formulação fraca de (15), aplicamos integração por partes,

$$\int_\Omega w\ dz = \int_\Omega d(wz) - \int_\Omega z\ dw,$$

na integral do lado esquerdo, usando $w = k\nabla u$ e $dz = \nabla v$. Assim, temos que $dw = \nabla \cdot (k\nabla u)$ e $z = v$ e obtemos,

$$\int_\Omega k\nabla u \cdot \nabla v\ dxdy = \int_\Omega \nabla \cdot (v\ k\nabla u)\ dxdy - \int_\Omega \nabla \cdot (k\nabla u)\ v\ dxdy \qquad (16)$$

Equivalência entre as formulações forte e fraca

Aplicando o Teorema da Divergência no plano na integral em azul na Eq. (16) e sabendo que $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_q$ e $v = 0$ em Γ_p, obtemos:

$$\int_\Omega k\nabla u \cdot \nabla v \, dxdy = \int_{\Gamma_q} v \underbrace{(k\nabla u \cdot n)}_{-q\cdot n = -\bar{q}} d\Gamma - \int_\Omega \nabla \cdot (k\nabla u) \, v \, dxdy \tag{17}$$

Substituindo (17) na formulação fraca de (15), obtemos:

$$\cancel{-\int_{\Gamma_q} \bar{q} v \, d\Gamma} - \int_\Omega \nabla \cdot (k\nabla u) \, v \, dxdy = \int_\Omega f \, v \, dxdy \cancel{- \int_{\Gamma_q} \bar{q} \, v \, d\Gamma}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &-\int_\Omega \nabla \cdot (k\nabla u) \, v \, dxdy = \int_\Omega f \, v \, dxdy, \ \forall \ v \in V \\ &\Rightarrow \int_\Omega [\nabla \cdot (k\nabla u) + f] \, v \, dxdy, \ \forall \ v \in V. \end{aligned} \tag{18}$$

Equivalência entre as formulações forte e fraca

Como a Eq. (18) é válida para qualquer $v \in V$, e lembrando que:

$$V = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ em } \Gamma_p\},$$

podemos pegar, por exemplo,

$$v(x,y) = \psi(x,y) \cdot (\nabla \cdot (k\nabla u) + f), \tag{19}$$

onde $\psi(x,y) = 0$ em Γ e $\psi(x,y) > 0$ em Ω.

Substituindo (19) na Eq. (18), obtemos:

$$\int_\Omega \psi(x,y) \cdot [\nabla \cdot (k\nabla u) + f]^2 \, dxdy, \; \forall \; v \in V. \tag{20}$$

Como $\psi(x,y) = 0$ em Γ, $\psi(x,y) > 0$ em Ω e $[\nabla \cdot (k\nabla u) + f]^2 \geq 0$, logo a integral de (20) só se anula se:

$$\nabla \cdot (k\nabla u) + f = 0 \Rightarrow -\nabla \cdot (k\nabla u) = f. \quad \square \tag{21}$$

Referências I

- Fish, J.; Belytschko, T.. **A First Course in Finite Elements**. Wiley, 2007.
- Becker, E. B.; Carey, G. F.; Oden, J. T.. **Finite Elements - An Introduction**. Prentice-Hall, 1981.
- Liu, I.S.; Rincon, M.A.. **Introdução ao Método de Elementos Finitos, Análise e Aplicação**. IM/UFRJ, 2003.