Tópicos Especiais em Matemática Aplicada - 2025-1
UERJ

02 - Formulação fraca e Teorema de Lax-Milgram

Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br
Github: https://github.com/rodrigolrmadureira/ElementosFinitos

Sumário

Problema unidimensional - Formulação forte

Formulação forte: é dada pelas suas equações diferenciais e condições de contorno que descrevem o problema físico.

Seja o problema **unidimensional** ($\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}$), **não homogêneo** ($f(x) \neq 0$) e **no regime estacionário** de determinar $u(x) \in H^1_0(0, 1)$ tal que:

Formulação forte (S)

$$\begin{cases} -\alpha\, u_{xx} + \beta\, u(x) = f(x), \ \forall x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

com $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ e $f(x)$ regular (suficientemente suave).

Note que as **condições de contorno** são do tipo **Dirichlet**, pois especificam os valores da solução $u(x)$ nos contornos $x = 0$ e $x = 1$ (Neste exemplo, são nulos).

A formulação forte exige um alto grau de suavidade das soluções $u(x)$ e isso é mais difícil de ser implementado de forma analítica ou numérica.

O **Método dos Elementos Finitos (MEF) no espaço** tem como base a **formulação fraca (ou variacional)**, mais fácil de implementar numericamente.

Problema unidimensional - Formulação fraca

Os passos para obter a formulação fraca do problema são:

1. Verificar as condições de contorno: No exemplo, são de **Dirichlet** e **nulas**. Assim, podemos multiplicar a equação do problema por uma **função teste suave** $v(x)$ que se anula nos seus contornos. Ou seja, podemos usar $v(x) \in \mathcal{D}(0,1)$.

Note que o **Espaço das funções testes** $\mathcal{D}(0,1) = C_0^\infty(0,1) = \{v : (0,1) \to \mathbb{R}\ ;\ v(x) \in C^\infty(0,1) \text{ e } v(0) = v(1) = 0\}$ é também o espaço de funções com **suporte compacto** ($v(x) \neq 0$ para $0 < x < 1$).

2. Multiplicar a equação por $v(x) \in \mathcal{D}(0,1)$:

$$-\alpha\, u_{xx}\, v(x) + \beta\, u(x)\, v(x) = f(x)\, v(x) \tag{2}$$

3. Integrar no domínio $\Omega = (0,1)$ para obter:

$$-\alpha \int_0^1 u_{xx}\, v(x)\, dx + \beta \int_0^1 u(x)\, v(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx \tag{3}$$

Problema unidimensional - Formulação fraca

Agora, precisamos fazer a integração por partes somente na parcela onde aparece u_{xx}. Por quê?

A integral da parcela na notação de produto interno fica:

$$\int_0^1 u_{xx}\, v(x)\, dx = \langle u_{xx}, v\rangle_{L^2(0,1)} = (u_{xx}, v)_0 = (u_{xx}, v)$$

Mais tarde, veremos que é preciso haver **simetria** nas integrais para a **matriz de rigidez K do MEF**. (**Simetria:** $(u, v) = (v, u)$ ao trocar u por v e v por u).

$(u_{xx}, v) \neq (v_{xx}, u) \Rightarrow (u_{xx}, v) \neq (u, v_{xx})$. Logo, não há simetria nessa integral.

Assim, vamos aplicar a integração por partes, $\displaystyle\int_0^1 z dw = zw\Big|_0^1 - \int_0^1 w dz$,

onde $z = v$ e $dw = u_{xx}$. Assim, obtemos:

$$\int_0^1 \underbrace{u_{xx}}_{dw}\ \underbrace{v(x)}_{z}\, dx = u_x v(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 u_x v_x\, dx = u_x(1)\cancelto{0}{v(1)} - u_x(0)\cancelto{0}{v(0)} - \int_0^1 u_x v_x\, dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 u_{xx}\, v(x)\, dx = -\int_0^1 u_x v_x\, dx \tag{4}$$

Problema unidimensional - Formulação fraca

Note que a integração por partes forçou o aparecimento de u_x na integral do lado direito da Eq. (4). Note também que:

$\int_0^1 u_x v_x \, dx = (u_x, v_x) = (v_x, u_x)$. Logo, agora, há simetria.

Portanto, ao fazer a substituição da integral resultante da Eq. (4) na Eq. (3), obtemos:

$$\alpha \int_0^1 u_x \, v_x \, dx + \beta \int_0^1 u(x) \, v(x) \, dx = \int_0^1 f(x) \, v(x) \, dx \ , \ \forall \ v(x) \in \mathcal{D}(0,1) \quad (5)$$

Obs.: No MEF, funções testes $v(x)$ muito suaves, ou seja, $v(x) \in \mathcal{D}(0,1)$, seriam muito difíceis de construir em mais de uma dimensão.

Como $\mathcal{D}(0,1)$ é **denso** em $H_0^1(0,1)$, ou seja,

- $\mathcal{D}(0,1) \subset H_0^1(0,1)$;
- Toda função em $H_0^1(0,1)$ pode ser aproximada por uma função em $\mathcal{D}(0,1)$,

podemos usar a formulação fraca para todo $v(x) \in H_0^1(0,1)$.

Problema unidimensional - Formulação fraca

Assim,

Formulação fraca (W) (em notação de integrais)

$$\alpha \int_0^1 u_x \, v_x \, dx + \beta \int_0^1 u(x) \, v(x) \, dx = \int_0^1 f(x) \, v(x) \, dx \ , \ \forall \, v(x) \in H_0^1(0,1) \quad (6)$$

Formulação fraca (W) (em notação de produto interno)

$$\alpha(u_x, v_x) + \beta(u, v) = (f, v) \ , \ \forall \, v(x) \in H_0^1(0,1) \quad (7)$$

Obs.: Note também que a **segunda derivada fraca** de $u(x)$ é a **segunda derivada** de $u(x)$ **no sentido das distribuições**, pois como vimos no slide anterior:

$$(T_u(v))_{xx} = ((T_u)_{xx}, v) = (u_{xx}, v) = -(u_x, v_x), \ \forall \, v \in H_0^1(0,1) \subset \mathcal{D}(0,1).$$

Lembre que $u(x) \in H_0^1(0,1) \subset L^2(0,1) \subset L^1_{loc}(0,1)$. Logo, se $u(x) \in L^1_{loc}(0,1)$, define univocamente uma distribuição $(T_u = u)$.

Problema unidimensional - Formulação fraca

Equivalência entre as formulações forte e fraca

$u(x)$ é solução da formulação forte $\Leftrightarrow$ $u(x)$ é solução da formulação fraca

Demonstração: Devemos provar que:

(1) $u(x)$ é solução da formulação forte $\Rightarrow$ $u(x)$ é solução da formulação fraca
(2) $u(x)$ é solução da formulação fraca $\Rightarrow$ $u(x)$ é solução da formulação forte

A parte (1) já foi provada nos slides anteriores. $\square$.

Para provar a parte (2), devemos partir da formulação fraca da Eq. (6):

$$\alpha \int_0^1 u_x \, v_x \, dx + \beta \int_0^1 u(x) \, v(x) \, dx = \int_0^1 f(x) \, v(x) \, dx \ , \ \forall \, v(x) \in H_0^1(0,1)$$

Vamos aplicar integração por partes, $\displaystyle\int_0^1 z dw = zw\Big|_0^1 - \int_0^1 w dz$,

na primeira integral do lado esquerdo, onde $z = u_x$ e $dw = v_x$.

Problema unidimensional - Formulação fraca

Assim, obtemos **para todo** $v(x) \in H_0^1(0,1)$:

$$\alpha\left\{u_x\, v\Big|_0^1 - \int_0^1 u_{xx}\, v\, dx\right\} + \beta\int_0^1 u(x)\, v(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \alpha\left\{u_x(1)\, \cancel{v(1)}^{\,0} - u_x(0)\, \cancel{v(0)}^{\,0} - \int_0^1 u_{xx}\, v\, dx\right\} + \beta\int_0^1 u(x)\, v(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx$$

$$\Rightarrow -\alpha\int_0^1 u_{xx}\, v\, dx + \beta\int_0^1 u(x)\, v(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (-\alpha\, u_{xx} + \beta u(x))\, v(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (-\alpha\, u_{xx} + \beta u(x))\, v(x)\, dx - \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (-\alpha\, u_{xx} + \beta u(x) - f(x))\, v(x)\, dx = 0$$

Como a igualdade **vale zero para qualquer** $v(x) \in H_0^1(0,1)$, então:

$$-\alpha\, u_{xx} + \beta u(x) - f(x) = 0 \Rightarrow -\alpha\, u_{xx} + \beta u(x) = f(x),\ \forall\, x \in (0,1). \quad \square$$

Teorema de Lax-Milgram

Agora, definindo o lado esquerdo da equação da formulação fraca como

$$a(u, v) = \alpha(u_x, v_x) + \beta(u, v) = \alpha \int_0^1 u_x \, v_x \, dx + \beta \int_0^1 u(x) \, v(x) \, dx,$$

podemos ainda reescrever a formulação fraca como:

$$a(u, v) = (f, v), \ \forall \, v \in H_0^1(0, 1). \tag{8}$$

Com essa forma $a(\cdot, \cdot)$, ainda podemos usar um **teorema** muito importante para determinar a **unicidade da solução** $u(x)$ **da formulação fraca**:

Teorema de Lax-Milgram

Seja $a(\cdot, \cdot)$ uma **forma bilinear, contínua e coerciva**. Então, se f é uma **forma linear e contínua** no espaço de Hilbert V, o problema fraco (8) possui **uma única solução** $u(x) \in V$. Além disso, a **forma linear** (f, v) **é contínua** em V.

Obs.: Aqui, sempre consideramos $V = H_0^1(0, 1)$.

Teorema de Lax-Milgram

As propriedades mais importantes para mostrar que o problema fraco (8) obedece às hipóteses de continuidade e coercividade do teorema são:

P1. Desigualdade de Cauchy-Schwarz:

Seja E um espaço com produto interno (ou seja, de Hilbert). Então, denotando $\|u\|_E = \langle u, u \rangle_E^{1/2} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$, para todos u, $v \in E$ vale:

$$\left| \langle u, v \rangle_E \right| \leq \int_\Omega |u(x)| \, |v(x)| \, dx \leq \|u\|_E \, \|v\|_E \tag{9}$$

P2. Equivalência de normas em $H_0^1(\Omega)$:

No espaço $H_0^1(\Omega)$, as normas $\|u\|_1$ e $\|\nabla u\|_0$ são equivalentes, ou seja, existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$C_1 \|u\|_1 \leq \|\nabla u\|_0 \leq C_2 \|u\|_1 \tag{10}$$

Obs.: Quando $\Omega \subset \mathbb{R}$, temos: $\|\nabla u\|_0 = \|u_x\|_0$.

Teorema de Lax-Milgram

Obs.: Para demonstrar a equivalência de normas em $H_0^1(\Omega)$, usamos as seguintes propriedades:

P3. Desigualdade de Poincaré-Friedrichs:

Se $u(x) \in H_0^1(\Omega)$, então existe uma constante positiva C tal que:

$$\|u\|_0 \leq C\|\nabla u\|_0 \tag{11}$$

P4. Definição de normas:

$$\|u\|_0^2 \leq \underbrace{\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2}_{\|u\|_1^2} \Rightarrow \|u\|_0^2 \leq \|u\|_1^2 \Rightarrow \|u\|_0 \leq \|u\|_1 \tag{12}$$

Teorema de Lax-Milgram

Provando as hipóteses do teorema:

1. Para provar que $a(\cdot,\cdot)$ **é bilinear**, basta mostrar que:

1a. $a(\cdot,\cdot)$ é **simétrica**: provar que $a(u,v) = a(v,u)$ para todo u, $v \in V = H_0^1(\Omega)$
1b. $a(\cdot,\cdot)$ é **linear** em cada uma de suas componentes esquerda e direita: provar que para todo u, v, $w \in V = H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} a(u+w,v) &= a(u,v) + a(w,v) \\ a(u,v+w) &= a(u,v) + a(u,w) \end{aligned}$$

1a. Mostrar que $a(\cdot,\cdot)$ é **simétrica**:

$$\begin{aligned} a(u,v) = \alpha(u_x,v_x) + \beta(u,v) &= \alpha \int_0^1 u_x \, v_x \, dx + \beta \int_0^1 u(x) \, v(x) \, dx \\ &= \alpha \int_0^1 v_x \, u_x \, dx + \beta \int_0^1 v(x) \, u(x) \, dx \\ &= a(v,u). \quad \square \end{aligned}$$

Teorema de Lax-Milgram

1b. Mostrar que $a(\cdot,\cdot)$ é **linear** em cada uma de suas componentes:

- Provar que $a(u+w,v) = a(u,v) + a(w,v)$:

$$
\begin{aligned}
a(u+w,v) &= \alpha((u+w)_x, v_x) + \beta(u+w,v) \\
&= \alpha \int_0^1 (u+w)_x \; v_x \; dx + \beta \int_0^1 (u+w)(x) \; v(x) \; dx \\
&= \alpha \int_0^1 (u_x + w_x) \; v_x \; dx + \beta \int_0^1 (u(x)+w(x)) \; v(x) \; dx \\
&= \alpha \int_0^1 u_x v_x \; dx + \alpha \int_0^1 w_x v_x \; dx + \beta \int_0^1 u(x)v(x) \; dx + \beta \int_0^1 w(x)v(x) \; dx \\
&= \underbrace{\alpha \int_0^1 u_x v_x \; dx + \beta \int_0^1 u(x)v(x) \; dx}_{a(u,v)} + \underbrace{\alpha \int_0^1 w_x v_x \; dx + \beta \int_0^1 w(x)v(x) \; dx}_{a(w,v)} \\
&= a(u,v) + a(w,v) \quad \square
\end{aligned}
$$

- **Exercício:** Provar que $a(u, v+w) = a(u,v) + a(u,w)$ de forma análoga.

Teorema de Lax-Milgram

2. Para provar que $a(\cdot,\cdot)$ **é contínua**, basta mostrar que existe uma constante $C > 0$ tal que:

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|$$

Demonstração: Vamos aplicar:

2a. Desigualdade triangular (D-T):

$|a+b| \leq |a| + |b|$; $\quad \left|\int_\Omega a(x)\ dx\right| \leq \int_\Omega |a(x)|\ dx$;

2b. Desigualdade de Cauchy-Schwarz (C-S);

2c. Equivalência de normas em $H_0^1(0,1)$ (E-N).

$$|a(u,v)| = \left|\alpha(u_x, v_x) + \beta(u,v)\right| = \left|\alpha\int_0^1 u_x\ v_x\ dx + \beta\int_0^1 u(x)\ v(x)\ dx\right|$$

$$\leq \left|\alpha\int_0^1 u_x\ v_x\ dx\right| + \left|\beta\int_0^1 u(x)\ v(x)\ dx\right| \quad \textbf{(usando (D-T))}$$

$$\leq |\alpha|\cdot\left|\int_0^1 u_x\ v_x\ dx\right| + |\beta|\cdot\left|\int_0^1 u(x)\ v(x)\ dx\right|$$

Teorema de Lax-Milgram

$$
\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leq \alpha \cdot \int_0^1 |u_x|\,|v_x|\,dx + \beta \cdot \int_0^1 |u(x)|\,|v(x)|\,dx \quad \textbf{(usando (D-T))}\\
&\leq \alpha \cdot \|u_x\|_0\,\|v_x\|_0 + \beta \cdot \|u\|_0\,\|v\|_0 \quad \textbf{(usando (C-S))}\\
&\leq \max\{\alpha,\beta\} \cdot (\|u_x\|_0\,\|v_x\|_0 + \|u\|_0\,\|v\|_0)\\
&\leq \max\{\alpha,\beta\} \cdot (\|u\|\,\|v\| + \|u\|_0\,\|v\|_0) \quad \textbf{(usando } \|u_x\|_0 = \|u\| \textbf{)}\\
&\leq \max\{\alpha,\beta\} \cdot (\|u\|\,\|v\| + \|u\|_1\,\|v\|_1) \quad \textbf{(usando } \|\cdot\|_0 \leq \|\cdot\|_1 \textbf{)}\\
&\leq \max\{\alpha,\beta\} \cdot \left(\|u\|\,\|v\| + \frac{1}{C_1}\|u_x\|_0\,\frac{1}{C_1}\|v_x\|_0\right) \quad \textbf{(por (E-N))}\\
&\leq \max\{\alpha,\beta\} \cdot \left(\|u\|\,\|v\| + \frac{1}{C_1^2}\|u_x\|_0\,\|v_x\|_0\right)\\
&\leq \max\{\alpha,\beta\} \cdot \left(\|u\|\,\|v\| + \frac{1}{C_1^2}\|u\|\,\|v\|\right) \quad \textbf{(usando } \|u_x\|_0 = \|u\| \textbf{)}\\
&\leq \underbrace{\max\{\alpha,\beta\}\left(1 + \frac{1}{C_1^2}\right)}_{C>0}\|u\|\,\|v\| \leq C\|u\|\,\|v\| \quad \square
\end{aligned}
$$

Teorema de Lax-Milgram

3. Para provar que $a(\cdot,\cdot)$ **é coerciva**, basta mostrar que existe uma constante $C > 0$ tal que:

$$a(u,u) \geq C\|u\|^2$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \alpha(u_x,u_x) + \beta(u,u) = \alpha \int_0^1 |u_x|^2 \, dx + \beta \int_0^1 |u(x)|^2 \, dx \\
&\geq \min\{\alpha,\beta\} \cdot \left(\int_0^1 |u_x|^2 \, dx + \int_0^1 |u(x)|^2 \, dx \right) \\
&\geq \min\{\alpha,\beta\} \cdot \left(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2 \right) \\
&\geq \min\{\alpha,\beta\} \cdot \|u\|_1^2 \quad \textbf{(definição de } H^1(0,1)\textbf{)} \\
&\geq \min\{\alpha,\beta\} \cdot \frac{1}{C_2^2}\|u_x\|_0^2 \quad \textbf{(por (E-N))} \\
&\geq \min\{\alpha,\beta\} \cdot \frac{1}{C_2^2}\|u\|^2 \ \textbf{(usando } \|u_x\|_0 = \|u\| \textbf{)} \\
&\geq C\|u\|^2 \quad \textbf{(fazendo } C = \min\{\alpha,\beta\} \cdot (1/C_2^2)\textbf{)} \qquad \square
\end{aligned}$$

Teorema de Lax-Milgram

4. Para provar que a forma linear (f, v) é **contínua**, basta provar que existe uma constante $C > 0$ tal que:

$$|(f, v)| \leq C\|v\|$$

Hipótese: Se f é uma forma linear e contínua em $V = H_0^1(0,1)$, f é limitada. Ou seja, $\|f\|_0 \leq C$, onde $C > 0$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}
|(f, v)| &\leq \|f\|_0\|v\|_0 \quad \textbf{(usando (C-S))} \\
&\leq \|f\|_0\|v\|_1 \ \textbf{(usando } \|\cdot\|_0 \leq \|\cdot\|_1 \textbf{)} \\
&\leq \|f\|_0 \frac{1}{C_1}\|v_x\|_0 \quad \textbf{(por (E-N))} \\
&\leq \|f\|_0 \frac{1}{C_1}\|v\| \ \textbf{(usando } \|v_x\|_0 = \|v\| \textbf{)} \\
&\leq C\frac{1}{C_1}\|v\| \ \textbf{(} f \ \textbf{contínua} \ \Rightarrow f \ \textbf{limitada} \ \Rightarrow \|f\|_0 \leq C \ \textbf{)} \\
&\leq \bar{C}\|v\|, \quad \text{onde } \bar{C} > 0. \quad \square
\end{aligned}$$

Referências I

Liu, I.S.; Rincon, M.A.. **Introdução ao Método de Elementos Finitos, Análise e Aplicação**. IM/UFRJ, 2003.