Tópicos Especiais em Matemática Aplicada - 2025-1
UERJ

09 - Elementos Finitos - Caso 2D

Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br
Github: https://github.com/rodrigolrmadureira/ElementosFinitos

Sumário

Discretização do domínio - 2D

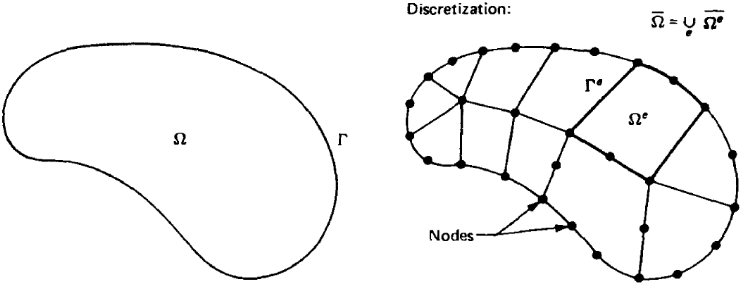


Figura: Fonte: Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method*, 1987

Algumas definições:

• **Nós**: são os pontos discretizados do domínio $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, onde:

• Γ: é a fronteira do domínio (curva fechada que faz o contorno do domínio);

• Ω: é a região que contém os nós que não pertencem à fronteira Γ, ou seja, contém os nós interiores no domínio.

Discretização do domínio - 2D

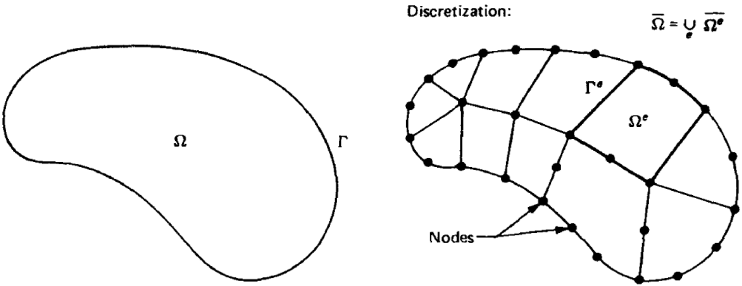


Figura: Fonte: Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method*, 1987

Considere uma partição de Ω em subregiões Ω^e, onde:

$$\begin{cases} \Omega = \bigcup_{e=1}^{Nel} \Omega^e, \\ \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \text{ se } i \neq j, \end{cases}$$

onde *Nel* é o número de subregiões, chamadas de **Elementos Finitos**.

Discretização do domínio - 2D

Usualmente, os elementos finitos em $\mathbb{R}^2$ são **triângulos** ou **quadriláteros**.

Podemos determinar a quantidade de nós em cada elemento finito Ω^e:

Q_n: quadrilátero com n nós;
T_n: triângulo com n nós.

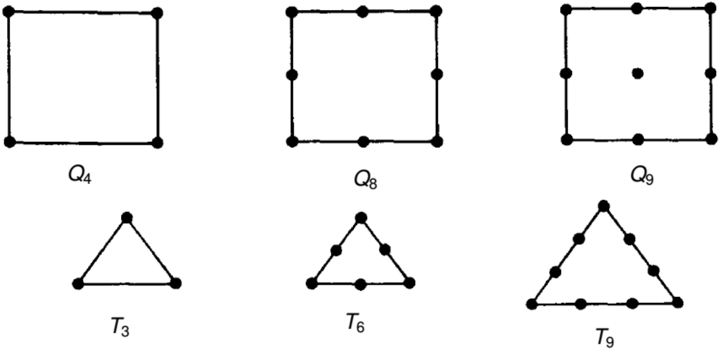


Figura: Fonte: Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method*, 1987

Discretização do domínio - 2D

Neste curso, trabalharemos somente com elementos do tipo Q_4.

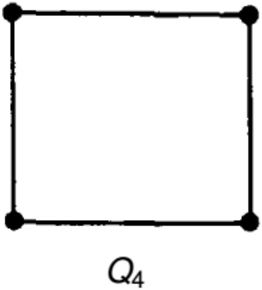


Figura: Fonte: Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method*, 1987

Discretização do domínio - 2D

Algumas definições:

- N_{no}: quantidade total de nós da malha de elementos finitos;
- n_{no}: quantidade total de nós em cada elemento finito.

No caso de Q_4, $n_{no} = 4$.

- $N = \{1, 2, 3, \ldots, N_{no}\}$: conjunto de nós da malha de elementos finitos;
- N_p: conjunto de nós cuja solução $u(x, y)$ já é conhecida (prescrita), ou seja, $u|_{N_p} = p$.
- $N - N_p$: conjunto de nós nos quais a solução aproximada u_h será determinada com número de nós igual a Neq (número de equações).

Discretização do domínio - 2D

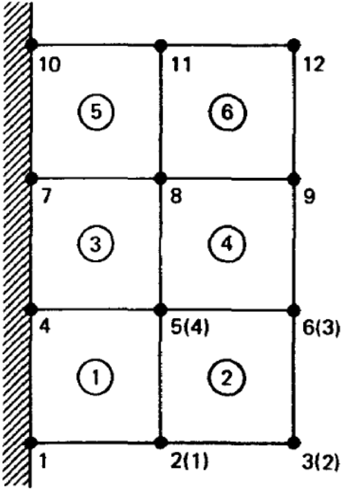


Figura: Fonte: Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method*, 1987

Exemplo de malha:

$N_{no} = 12;$

$N = \{1, 2, 3, \ldots, 12\};$

$N_p = \{1, 4, 7, 10\};$

$N - N_p = \{2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12\};$

$Neq = \#(N - N_p) = 8.$

Discretização do domínio - 2D

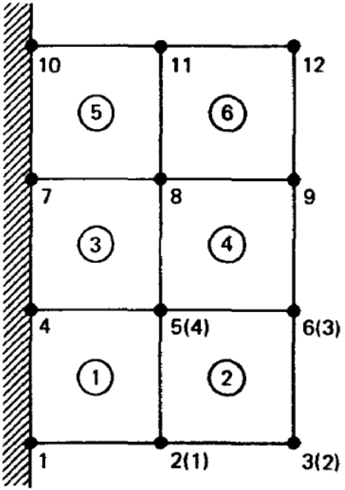


Figura: Fonte: Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method*, 1987

O número do nó da malha é chamado de **nó global**.

O número do nó da malha relativo ao elemento é chamado de **nó local**.

Obs.: Os nós locais são numerados sempre no **sentido anti-horário**.

Neste exemplo, no elemento 2:

Numeração local (sentido anti-horário): $\{1, 2, 3, 4\}$.

Numeração global (sentido anti-horário): $\{2, 3, 6, 5\}$.

Discretização do domínio - 2D

Para associar o número global A do nó da malha com o número local a no elemento finito Ω^e, usamos uma **matriz LG** (*Local-Global*).

No exemplo anterior:

a \ e	1	2	3	4	5	6
1	1	2	4	5	7	8
2	2	3	5	6	8	9
3	5	6	8	9	11	12
4	4	5	7	8	10	11

Tabela: Matriz LG

Discretização do domínio - 2D

Para relacionar a numeração global A com o número da equação no sistema linear, usamos o vetor **EQ**:

No exemplo anterior:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1	2	0	3	4	0	5	6	0	7	8

Tabela: Vetor EQ

Aplicação no problema da condução de calor

Vamos relacionar o que vimos até agora com o problema aproximado da condução de calor:

$$\sum_{j=1}^{N_{no}} a(\varphi_i, \varphi_j)\, c_j = (f, \varphi_i) - (\bar{q}, \varphi_i)_{\Gamma_q} - \sum_{j=1}^{N_{no}} a(\varphi_i, \varphi_j)\, p_j, \quad \text{para todo } i = 1, 2, \ldots, N_{no}, \tag{1}$$

onde vimos que a solução aproximada não prescrita (desconhecida) é dada por:

$$w_h(x, y) = \sum_{i=1}^{N_{no}} c_i\, \varphi_i(x, y) \tag{2}$$

Aplicação no problema da condução de calor

Aqui, podemos restringir $w_h(x, y)$ aos nós globais não prescritos $B = (x_B, y_B)$ do conjunto dos nós não prescritos $N - N_p$. Ou seja, podemos reescrever w_h como:

$$w_h(x, y) = \sum_{B \,\in\, N - N_p} c_B \, \varphi_B(x, y), \tag{3}$$

onde $\varphi_A(x, y)$ é a função de interpolação (função da base) associada ao nó global A, tal que;

$$\varphi_A(x_B, y_B) = \begin{cases} 1, & \text{se } A = B, \\ 0, & \text{se } A \neq B. \end{cases}$$

Note que nos nós globais não prescritos $B \in N - N_p$,

$$w_h(x_B, y_B) = c_B$$

Aplicação no problema da condução de calor

Vimos também que a solução prescrita (conhecida) $p_h(x, y)$ é dada por:

$$p_h(x, y) = \sum_{j=1}^{N_{no}} p_j \, \varphi_j(x, y) \tag{4}$$

Logo, restringindo p_h ao conjunto dos nós prescritos N_p, podemos reescrevê-la como:

$$p_h(x, y) = \sum_{A \,\in\, N_p} p_A \, \varphi_A(x, y). \tag{5}$$

Note que nos nós globais prescritos $A \in N_p$,

$$p_h(x_A, y_A) = p_A$$

Aplicação no problema da condução de calor

Assim, podemos reescrever o problema aproximado da Eq. (1) como:

$$\sum_{B\,\in\,N-N_p} a(\varphi_A,\varphi_B)\,c_B = (f,\varphi_A) - (\bar{q},\varphi_A)_{\Gamma_q} - \sum_{B\,\in\,N_p} a(\varphi_A,\varphi_B)\,p_B, \qquad (6)$$

$$\text{para todo } A \in N - N_p.$$

Usando em (6) a notação matricial:

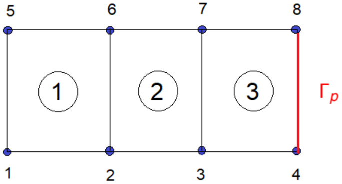
$K_{IJ} = a(\varphi_A,\varphi_B) = (\nabla\varphi_A, k\cdot\nabla\varphi_B);$

$F_I = (f,\varphi_A) - (\bar{q},\varphi_A)_{\Gamma_q} - \sum_{B\in N_p} a(\varphi_A,\varphi_B)\,p_B,$

onde $I = EQ[A]$ e $J = EQ[B]$ são os índices dos nós das soluções não prescritas, ou seja, dos nós que pertencem ao conjunto $N - N_p$, então obtemos o sistema linear:

$$Kc = F.$$

Exemplo



$$N_{no} = 8$$

$$N_p = \{4, 8\}$$

$$Neq = 6$$

1	2	3	0	4	5	6	0

Tabela: Vetor EQ

a \ e	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	4
3	6	7	8
4	5	6	7

Tabela: Matriz LG

Exemplo

Sistema a ser resolvido: $Kc = F$.

Montagem da matriz global simétrica K a partir das matrizes locais simétricas

$$K^e = \begin{bmatrix} K^e_{11} & K^e_{12} & K^e_{13} & K^e_{14} \\ K^e_{21} & K^e_{22} & K^e_{23} & K^e_{24} \\ K^e_{31} & K^e_{32} & K^e_{33} & K^e_{34} \\ K^e_{41} & K^e_{42} & K^e_{43} & K^e_{44} \end{bmatrix}, \text{ para } e = 1, 2, 3,$$

e das informações do vetor EQ e da matriz LG.

O vetor EQ possui os índices 4 e 8 iguais a zero, indicando que estes nós globais são prescritos, e os demais índices numerados de 1 a 6, indicando que o sistema possui 6 equações.

Logo, neste exemplo, $K_{6\times 6}$ e $F_{6\times 1}$.

Exemplo

Vamos calcular os elementos K_{IJ} da matriz K usando I, J iguais a:

$EQ[LG(a, e)]$, onde $a = 1, 2, 3, 4$ e, neste exemplo, $e = 1, 2, 3$.

Elemento $e = 1$:

$$
\begin{aligned}
EQ[LG(1,1)] &= EQ[1] = 1\\
EQ[LG(2,1)] &= EQ[2] = 2\\
EQ[LG(3,1)] &= EQ[6] = 5\\
EQ[LG(4,1)] &= EQ[5] = 4
\end{aligned}
$$

Aqui, por exemplo:

$$
\begin{aligned}
&I = EQ[LG(3,1)] = EQ[6] = 5\\
&J = EQ[LG(4,1)] = EQ[5] = 4 \Rightarrow K_{54} = K^1_{34}
\end{aligned}
$$

Portanto, até aqui teremos:

$$
\begin{array}{llll}
K_{11} = K^1_{11}; & K_{12} = K^1_{12}; & K_{15} = K^1_{13}; & K_{14} = K^1_{14};\\
K_{21} = K^1_{21}; & K_{22} = K^1_{22}; & K_{25} = K^1_{23}; & K_{24} = K^1_{24};\\
K_{51} = K^1_{31}; & K_{52} = K^1_{32}; & K_{55} = K^1_{33}; & K_{54} = K^1_{34};\\
K_{41} = K^1_{41}; & K_{42} = K^1_{42}; & K_{45} = K^1_{43}; & K_{44} = K^1_{44}.
\end{array}
$$

Exemplo

Até agora, a matriz global K possui a configuração:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & K_{14} & K_{15} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & 0 & K_{24} & K_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{41} & K_{42} & 0 & K_{44} & K_{45} & 0 \\ K_{51} & K_{52} & 0 & K_{54} & K_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^1_{11} & K^1_{12} & 0 & K^1_{14} & K^1_{15} & 0 \\ K^1_{21} & K^1_{22} & 0 & K^1_{24} & K^1_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K^1_{41} & K^1_{42} & 0 & K^1_{44} & K^1_{43} & 0 \\ K^1_{31} & K^1_{32} & 0 & K^1_{34} & K^1_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Elemento $e = 2$:

$$EQ[LG(1,2)] = EQ[2] = 2$$
$$EQ[LG(2,2)] = EQ[3] = 3$$
$$EQ[LG(3,2)] = EQ[7] = 6$$
$$EQ[LG(4,2)] = EQ[6] = 5$$

Note que:

$K_{22} = K^2_{11} + K^1_{22}$, pois a posição K_{22} já estava ocupada por K^1_{22}.
Logo, toda vez que a posição estiver ocupada, devemos somar.

Portanto, aqui temos:

$$K_{22} = K^2_{11} + K^1_{22}; \quad K_{23} = K^2_{12}; \quad K_{26} = K^2_{13}; \quad K_{25} = K^2_{14} + K^1_{23};$$
$$K_{32} = K^2_{21}; \quad K_{33} = K^2_{22}; \quad K_{36} = K^2_{23}; \quad K_{35} = K^2_{24};$$
$$K_{62} = K^2_{31}; \quad K_{63} = K^2_{32}; \quad K_{66} = K^2_{33}; \quad K_{65} = K^2_{34};$$
$$K_{52} = K^2_{41} + K^1_{32}; \quad K_{53} = K^2_{42}; \quad K_{56} = K^2_{43}; \quad K_{55} = K^2_{44} + K^1_{33}.$$

Exemplo

Até agora, a matriz global K possui a configuração:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & K_{14} & K_{15} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ 0 & K_{32} & K_{33} & 0 & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & 0 & K_{44} & K_{45} & 0 \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ 0 & K_{62} & K_{63} & 0 & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} K^1_{11} & K^1_{12} & 0 & K^1_{14} & K^1_{15} & 0 \\ K^1_{21} & K^2_{11} + K^1_{22} & K^2_{12} & K^1_{24} & K^2_{14} + K^1_{23} & K^2_{13} \\ 0 & K^2_{21} & K^2_{22} & 0 & K^2_{24} & K^2_{23} \\ K^1_{41} & K^1_{42} & 0 & K^1_{44} & K^1_{43} & 0 \\ K^1_{31} & K^2_{41} + K^1_{32} & K^2_{42} & K^1_{34} & K^2_{44} + K^1_{33} & K^2_{43} \\ 0 & K^2_{31} & K^2_{32} & 0 & K^2_{34} & K^2_{33} \end{bmatrix}$$

Exemplo

Elemento $e = 3$:

$EQ[LG(1,3)] = EQ[3] = 3$
$EQ[LG(2,3)] = EQ[4] = 0 \Rightarrow$ Não gera equação, não será usado.
$EQ[LG(3,3)] = EQ[8] = 0 \Rightarrow$ Não gera equação, não será usado.
$EQ[LG(4,3)] = EQ[7] = 6$

Aqui, temos:

$$K_{33} = K^{3}_{11} + K^{2}_{22}; \quad K_{36} = K^{3}_{14} + K^{2}_{23};$$
$$K_{63} = K^{3}_{41} + K^{2}_{32}; \quad K_{66} = K^{3}_{44} + K^{2}_{33}.$$

Exemplo

Logo, a matriz global K terá a configuração:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & K_{14} & K_{15} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ 0 & K_{32} & K_{33} & 0 & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & 0 & K_{44} & K_{45} & 0 \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ 0 & K_{62} & K_{63} & 0 & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} K^1_{11} & K^1_{12} & 0 & K^1_{14} & K^1_{15} & 0 \\ K^1_{21} & K^2_{11} + K^1_{22} & K^2_{12} & K^1_{24} & K^2_{14} + K^1_{23} & K^2_{13} \\ 0 & K^2_{21} & K^3_{11} + K^2_{22} & 0 & K^2_{24} & K^3_{14} + K^2_{23} \\ K^1_{41} & K^1_{42} & 0 & K^1_{44} & K^1_{43} & 0 \\ K^1_{31} & K^2_{41} + K^1_{32} & K^2_{42} & K^1_{34} & K^2_{44} + K^1_{33} & K^2_{43} \\ 0 & K^2_{31} & K^3_{41} + K^2_{32} & 0 & K^2_{34} & K^3_{44} + K^2_{33} \end{bmatrix}$$

Exemplo

Montagem do vetor global F a partir dos vetores locais:

$$F^e = \begin{bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \\ F_4^e \end{bmatrix}, \text{ para } e = 1, 2, 3,$$

e das informações do vetor EQ e da matriz LG.

Elemento $e = 1$:

$EQ[LG(1,1)] = EQ[1] = 1$
$EQ[LG(2,1)] = EQ[2] = 2$
$EQ[LG(3,1)] = EQ[6] = 5$
$EQ[LG(4,1)] = EQ[5] = 4$

Aqui teremos:
$F_1 = F_1^1$; $F_2 = F_2^1$; $F_5 = F_3^1$; $F_4 = F_4^1$.

Exemplo

Até agora, o vetor global F possui a configuração:

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \\ F_4 \\ F_5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ 0 \\ F_4^1 \\ F_3^1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Elemento $e = 2$:

$$
\begin{aligned}
EQ[LG(1,2)] &= EQ[2] = 2 \\
EQ[LG(2,2)] &= EQ[3] = 3 \\
EQ[LG(3,2)] &= EQ[7] = 6 \\
EQ[LG(4,2)] &= EQ[6] = 5
\end{aligned}
$$

Aqui teremos:

$F_2 = F_1^2 + F_2^1; \quad F_3 = F_2^2; \quad F_6 = F_3^2; \quad F_5 = F_4^2 + F_3^1.$

Até agora, o vetor global F possui a configuração:

$$
F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_1^2 + F_2^1 \\ F_2^2 \\ F_4^1 \\ F_4^2 + F_3^1 \\ F_3^2 \end{bmatrix}
$$

Exemplo

Elemento $e = 3$:

$EQ[LG(1,3)] = EQ[3] = 3$
$EQ[LG(2,3)] = EQ[4] = 0 \Rightarrow$ Não gera equação.
$EQ[LG(3,3)] = EQ[8] = 0 \Rightarrow$ Não gera equação.
$EQ[LG(4,3)] = EQ[7] = 6$

Aqui teremos:
$F_3 = F_1^3 + F_2^2 \; F_6 = F_4^3 + F_3^2$;

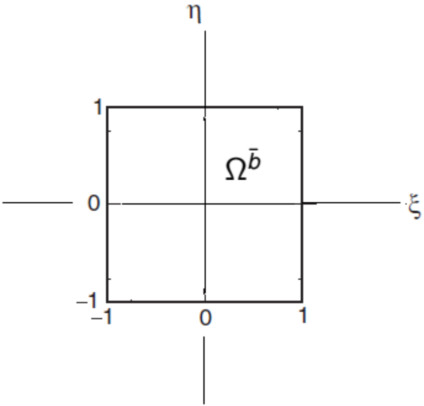
Até agora, o vetor global F possui a configuração:

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_1^2 + F_2^1 \\ F_1^3 + F_2^2 \\ F_4^1 \\ F_4^2 + F_3^1 \\ F_4^3 + F_3^2 \end{bmatrix}$$

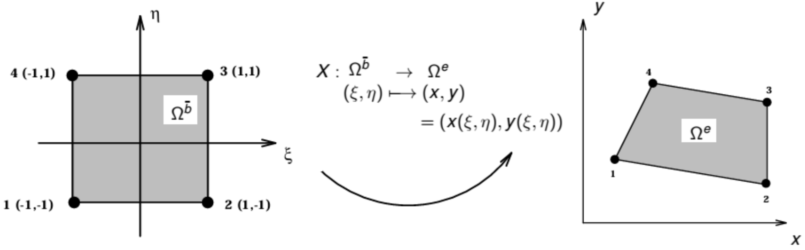
Elementos isoparamétricos

Agora, vamos ver como são calculados K^e e F^e para cada elemento Ω^e.

Seja $\Omega^{\bar{b}} = [-1, 1] \times [-1, 1]$ o elemento finito biunitário como representado na figura abaixo.



Elementos isoparamétricos



Seja

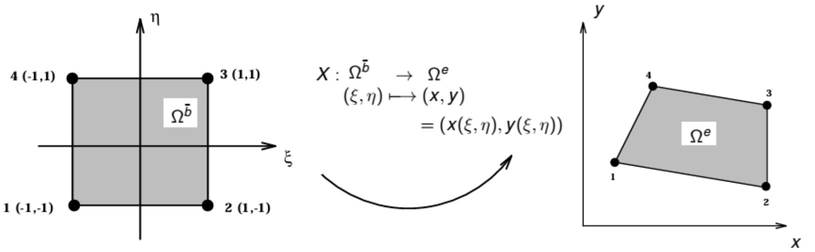
$$X : \Omega^{\bar{b}} \longrightarrow \Omega^e$$
$$(\xi,\eta) \longmapsto (x,y) = (x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)),$$

onde

$$x(\xi,\eta) = \sum_{a=1}^{4} \varphi_a^{\bar{b}}(\xi,\eta) \cdot x_a^e;$$

$$y(\xi,\eta) = \sum_{a=1}^{4} \varphi_a^{\bar{b}}(\xi,\eta) \cdot y_a^e; \qquad \varphi_a^{\bar{b}}(\xi_c,\eta_c) = \begin{cases} 1, & \text{se } a = c, \\ 0, & \text{se } a \neq c. \end{cases}$$

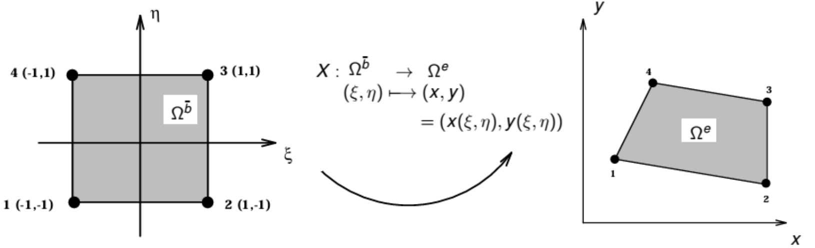
Elementos isoparamétricos



Por exemplo,

$$
\begin{aligned}
x(-1,-1) = x(\xi_1,\eta_1) &= \sum_{a=1}^{4} \varphi_a^{\bar{b}}(\xi_1,\eta_1)\cdot x_a^e \\
&= \underbrace{\varphi_1^{\bar{b}}(\xi_1,\eta_1)}_{1}\cdot x_1^e + \cancelto{0}{\varphi_2^{\bar{b}}(\xi_1,\eta_1)}\cdot x_2^e + \cancelto{0}{\varphi_3^{\bar{b}}(\xi_1,\eta_1)}\cdot x_3^e + \cancelto{0}{\varphi_4^{\bar{b}}(\xi_1,\eta_1)}\cdot x_4^e \\
&= x_1^e
\end{aligned}
$$

Elementos isoparamétricos



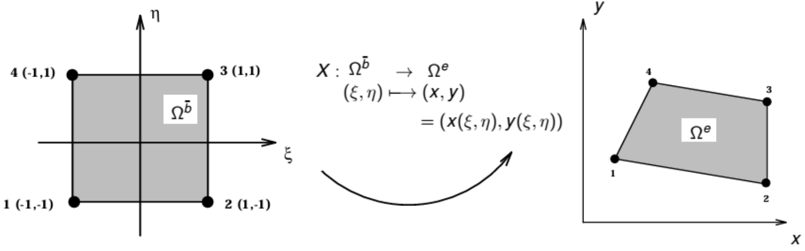
Analogamente,

$$\begin{aligned} x(1,-1) &= x(\xi_2,\eta_2) = x_2^e; \\ x(1,1) &= x(\xi_3,\eta_3) = x_3^e; \\ x(-1,1) &= x(\xi_4,\eta_4) = x_4^e \end{aligned}$$

Ou seja, para todo $a = 1,2,3,4$,

$$x(\xi_a,\eta_a) = x_a^e; \quad y(\xi_a,\eta_a) = y_a^e$$

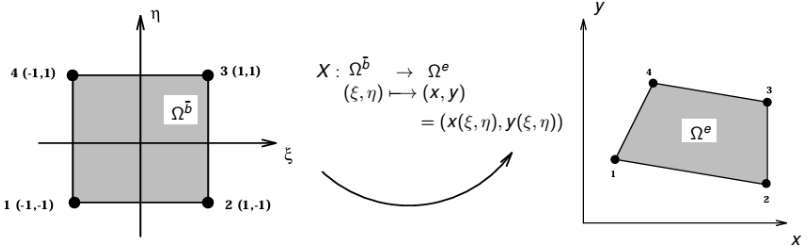
Elementos isoparamétricos



Vamos assumir que $x(\xi,\eta)$ e $y(\xi,\eta)$ são lineares em ξ e η, ou seja:

$$x(\xi,\eta) = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta$$
$$y(\xi,\eta) = b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\xi\eta$$

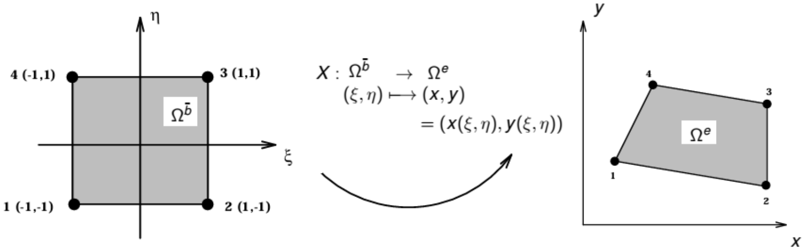
Elementos isoparamétricos



Então,

$$\begin{aligned}
x(-1,-1) = x_1^e &\Rightarrow a_1 - a_2 - a_3 + a_4 = x_1^e \\
x(1,-1) = x_2^e &\Rightarrow a_1 + a_2 - a_3 - a_4 = x_2^e \\
x(-1,1) = x_3^e &\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = x_3^e \\
x(-1,1) = x_4^e &\Rightarrow a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = x_4^e
\end{aligned}$$

Elementos isoparamétricos

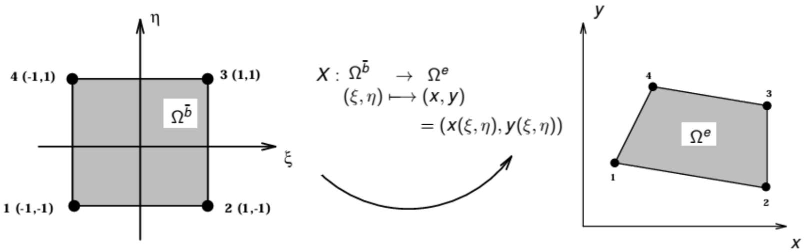


$$\begin{aligned} X : \Omega^{\bar{b}} &\rightarrow \Omega^e \\ (\xi, \eta) &\longmapsto (x, y) \\ &= (x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)) \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^e \\ x_2^e \\ x_3^e \\ x_4^e \end{bmatrix}$$

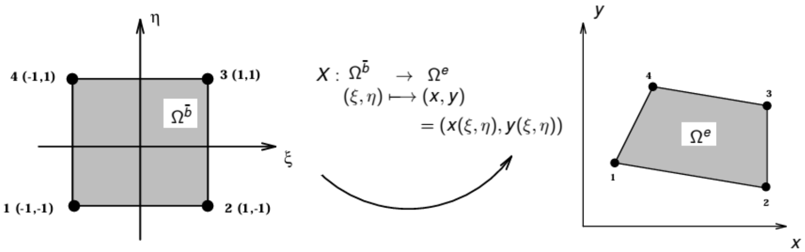
Elementos isoparamétricos



encontramos:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= (x_1^e + x_2^e + x_3^e + x_4^e)/4; \\
a_2 &= (-x_1^e + x_2^e + x_3^e - x_4^e)/4; \\
a_3 &= (-x_1^e - x_2^e + x_3^e + x_4^e)/4; \\
a_4 &= (x_1^e - x_2^e + x_3^e - x_4^e)/4
\end{aligned}
$$

Elementos isoparamétricos

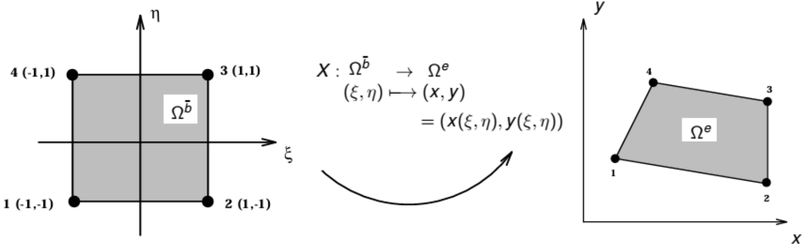


Substituindo a_1, a_2, a_3, a_4 em $x(\xi,\eta)$ e arrumando os termos, obtemos:

$$x(\xi,\eta) = \underbrace{\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)}_{\varphi_1^{\bar{b}}(\xi,\eta)} x_1^e + \underbrace{\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)}_{\varphi_2^{\bar{b}}(\xi,\eta)} x_2^e$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)}_{\varphi_3^{\bar{b}}(\xi,\eta)} x_3^e + \underbrace{\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)}_{\varphi_4^{\bar{b}}(\xi,\eta)} x_4^e$$

Elementos isoparamétricos



Assim, temos as quatro funções de base para Q_4:

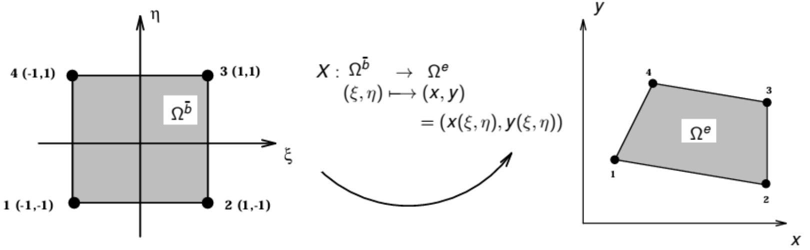
$$\varphi_1^{\bar{b}}(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta);$$

$$\varphi_2^{\bar{b}}(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta);$$

$$\varphi_3^{\bar{b}}(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta);$$

$$\varphi_4^{\bar{b}}(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

Elementos isoparamétricos



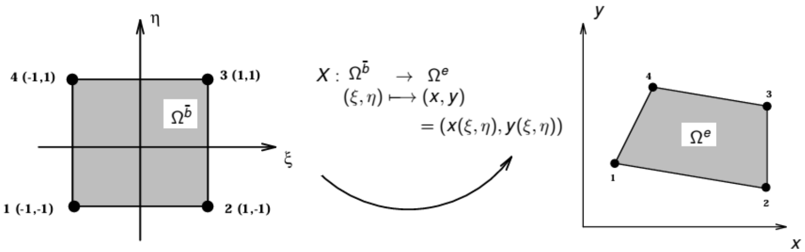
Assim, escrevemos a solução aproximada u_h^e em cada elemento Ω^e como:

$$u_h^e(x, y) = \sum_{a=1}^{4} c_a^e \cdot \varphi_a^e(x, y)$$

Com a mudança de variáveis $(x, y) \longmapsto (\xi, \eta)$, obtemos:

$$u_h^e(x, y) = u_h^{\bar{b}}(\xi, \eta) = \sum_{a=1}^{4} c_a^{\bar{b}} \cdot \varphi_a^{\bar{b}}(\xi, \eta)$$

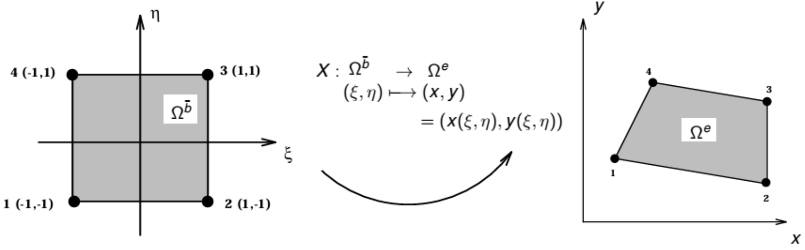
Elemento da matriz local K^e



Também temos para cada elemento Ω^e, ou seja, para todo a, $b = 1, 2, 3, 4$:

$$K^e_{ab} = a(\varphi^e_a, \varphi^e_b) = (\nabla\varphi^e_a, k \cdot \nabla\varphi^e_b) = \int_{\Omega^e} \nabla\varphi^e_a \cdot k \cdot \nabla\varphi^e_b \, dxdy$$

Elemento do vetor local F^e



Também temos para cada elemento Ω^e, ou seja, para todo $a = 1, 2, 3, 4$:

$$F_a^e = (f, \varphi_a^e) - (\bar{q}, \varphi_a^e)_{\Gamma_q} - \sum_{b=1}^{4} a(\varphi_a^e, \varphi_b^e) p_b^e$$

$$= \int_{\Omega^e} f \varphi_a^e \, dxdy - \int_{\Gamma_q} \bar{q} \varphi_a^e \, d\Gamma_q - \sum_{b=1}^{4} a(\varphi_a^e, \varphi_b^e) p_b^e$$

Cálculo de K^e

Pela definição do vetor gradiente no $\mathbb{R}^2$, temos que:

$$\nabla\varphi_a^e(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varphi_a^e}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\varphi_a^e}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Usando notação matricial do produto interno (ou escalar) de dois vetores x, y no $\mathbb{R}^2$, temos que:

$$x \cdot y = x^T y$$

Logo, podemos reescrever K_{ab}^e para todo a, $b = 1, 2, 3, 4$ como:

$$K_{ab}^e = a(\varphi_a^e, \varphi_b^e) = (\nabla\varphi_a^e, k \cdot \nabla\varphi_b^e) = \int_{\Omega^e} \nabla\varphi_a^e \cdot k \cdot \nabla\varphi_b^e \, dxdy \tag{7}$$

$$= \int_{\Omega^e} (\nabla\varphi_a^e)^T \, k \, \nabla\varphi_b^e \, dxdy = \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varphi_a^e}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_a^e}{\partial y} \end{bmatrix} k \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varphi_a^e}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\varphi_a^e}{\partial y} \end{bmatrix} dxdy$$

Cálculo de K^e

De forma análoga ao que vimos no caso 1D, devemos usar mudança de variáveis através da transformação isoparamétrica

$$\begin{aligned} T_{\xi\eta} : \Omega^e &\longrightarrow \Omega^{\bar{b}} \\ (x, y) &\longmapsto (\xi, \eta) = (\xi(x, y), \eta(x, y)), \end{aligned}$$

para aproximar a integral dupla com quadratura de Gauss.

Então,

$$\varphi_a^e(x, y) = \varphi_a^{\bar{b}}(\xi, \eta) = \varphi_a^{\bar{b}}(\xi(x, y), \eta(x, y))$$

e usando a Regra da Cadeia, obtemos as derivadas parciais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_a^e}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi_a^{\bar{b}}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_a^{\bar{b}}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_a^e}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi_a^{\bar{b}}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_a^{\bar{b}}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned}$$

Cálculo de K^e

Passando as duas equações para a forma matricial, obtemos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \varphi_a^e}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \varphi_a^e}{\partial y} \end{bmatrix}}_{=\nabla \varphi_a^e(x,y)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial y} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \varphi_a^{\bar{b}}}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial \varphi_a^{\bar{b}}}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{=\nabla \varphi_a^{\bar{b}}(\xi,\eta)}$$

Usando a notação $\xi_x = \dfrac{\partial \xi}{\partial x}$ para as derivadas parciais da matriz, temos:

$$\nabla \varphi_a^e(x,y) = \begin{bmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{bmatrix} \nabla \varphi_a^{\bar{b}}(\xi,\eta) \tag{8}$$

Cálculo de K^e

Do estudo de mudança de variáveis em integrais duplas, sabemos que:

$$\int_{\Omega^e} g(x,y)\; dxdy = \int_{\Omega^{\bar{b}}} g(\xi,\eta)\; |J(\xi,\eta)|\; d\xi d\eta, \tag{9}$$

onde

$$J(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix}$$

é a **matriz jacobiana** da transformação isoparamétrica

$$\begin{aligned} T_{xy} : \Omega^{\bar{b}} &\longrightarrow \Omega^e \\ (\xi,\eta) &\longmapsto (x,y) = (x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)) \end{aligned}$$

e

$$|J(\xi,\eta)| = det(J(\xi,\eta)) = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$$

é o **jacobiano** dessa transformação.

Cálculo de K^e

Usando os resultados de (8) e (9) na Eq. (7), obtemos:

$$
\begin{aligned}
K_{ab}^e &= \int_{\Omega^e} (\nabla \varphi_a^e)^T \; k \; \nabla \varphi_b^e \; dxdy \\
&= \int_{\Omega^e} (\nabla \varphi_a^{\bar{b}}(\xi,\eta))^T \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} k \begin{bmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{bmatrix} \nabla \varphi_b^{\bar{b}}(\xi,\eta) \; |J(\xi,\eta)| \; d\xi d\eta
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Cálculo de K^e

Note que se:

$$\begin{aligned} T_{xy}: \Omega^{\bar{b}} &\longrightarrow \Omega^e \\ (\xi,\eta) &\longmapsto (x,y) = (x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)) \end{aligned}$$

é a transformação onde a matriz jacobiana é

$$J(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix},$$

a transformação inversa é dada por

$$\begin{aligned} T_{xy}^{-1} = T_{\xi\eta}: \Omega^e &\longrightarrow \Omega^{\bar{b}} \\ (x,y) &\longmapsto (\xi,\eta) = (\xi(x,y), \eta(x,y)), \end{aligned}$$

onde a matriz jacobiana é

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} = J^{-1}(\xi,\eta) \tag{11}$$

Cálculo de K^e

Portanto, usando a definição de $J^{-1}(\xi,\eta)$ de (11) na Eq. (10), obtemos:

Elemento K^e_{ab} da matriz local K^e (Materiais isotrópicos: $Q = kI$)

$$K^e_{ab} = \int_{\Omega^e} (\nabla\varphi^e_a)^T \, k \, \nabla\varphi^e_b \, dxdy \tag{12}$$

$$= \int_{\Omega^e} (\nabla\varphi^{\bar{b}}_a(\xi,\eta))^T \cdot J^{-1} \cdot k \cdot (J^{-1})^T \cdot \nabla\varphi^{\bar{b}}_b(\xi,\eta) \cdot |J| \, d\xi d\eta,$$

para $a, b = 1, 2, 3, 4$, onde

$$J = J(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix}.$$

Referências I

- Hughes, T.J.R.. **The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. Prentice-Hall, Inc., 1987.
- Fish, J.; Belytschko, T.. **A First Course in Finite Elements**. Wiley, 2007.
- Becker, E. B.; Carey, G. F.; Oden, J. T.. **Finite Elements - An Introduction**. Prentice-Hall, 1981.
- Liu, I.S.; Rincon, M.A.. **Introdução ao Método de Elementos Finitos, Análise e Aplicação**. IM/UFRJ, 2003.