Tópicos Especiais em Matemática Aplicada - IME/UERJ

Trabalho 2 - Método dos Elementos Finitos - Caso 1D

Data de entrega: 12/05/2025

Obs. 1: Cada aluno vai sortear uma função $u(x)$ e as constantes α, β, c e d.

Obs. 2: O número de elementos (nel) para os itens (c) - (g) é $nel = 4$. Opcionalmente, você pode resolver os mesmos itens com um trabalho de programação na sua linguagem preferida para malhas mais refinadas ($nel = 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, \ldots, 2^{10}$). Note que o número de nós de interpolação (m) é $m = nel + 1$.

Obs. 3: Sempre que for possível, tire suas dúvidas durante as aulas ou por e-mail ao resolver todos os itens deste trabalho.

1. Seja o problema dado por:

$$\begin{cases} -\alpha\, u_{xx}(x) + \beta\, u(x) = f(x), \ \forall\, x \in (c,d), \\ u(c) = u(d) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

onde α, β, c, d são constantes reais e positivas, $u \in H_0^1(c,d)$, $f \in L^2(c,d)$.

Resolva os seguintes itens:

(a) (0,5 ponto) Determine a formulação fraca do problema usando as constantes do sorteio.

(b) (0,5 ponto) A partir da formulação fraca do problema, obtenha o problema aproximado $Kc = F$ no subespaço de dimensão finita $V_h = [\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m]$, tal que $V_h \subset H_0^1(c,d)$, onde as funções $\varphi_i(x)$ são da base de Lagrange linear. Defina os elementos da matriz de rigidez global K_{ij}, do vetor força global F_i e do vetor solução c_i.

(c) (2,0 pontos) Calcular as matrizes locais K^e e o vetores locais F^e para $e = 1, 2, \ldots, nel$ usando Quadratura Gaussiana nas integrais.

Obs.: Para o cálculo de $f(x)$, use $u(x)$ que você sorteou para substituir na equação da formulação forte (1).

(d) (2,0 pontos) Usando o Método dos Elementos Finitos (MEF), monte a matriz global K e o vetor força global F para 4 elementos ($m = nel + 1$ nós de interpolação) usando as matrizes locais K^e e o vetores locais F^e encontrados no item anterior.

(e) (2,0 pontos) Resolva o sistema linear $Kc = F$ usando Eliminação de Gauss para encontrar a solução aproximada $c^T = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_m \end{bmatrix}$, lembrando que as condições de contorno são Dirichlet e nulas ($c_1 = c_m = 0$).

(f) (2,0 pontos) Encontre os erros absolutos em cada nó global x_i entre a solução aproximada $u_h(x_i) = c_i$ e a solução verdadeira $u(x_i)$. Isto é, encontre

$$E_i = |u_h(x_i) - u(x_i)|, \text{ para todo } i = 1, 2, 3, \ldots, m.$$

(g) (1,0 ponto) Calcule a norma discreta do erro em $L^2(c,d)$, dada por

$$\sqrt{h \cdot E^T \cdot E},$$

onde h é o tamanho da malha, isto é, $h = x_2^e - x_1^e$, e $E^T = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_3 & \cdots & E_5 \end{bmatrix}$ é o vetor dos erros absolutos calculados no item anterior.