Tópicos Especiais em Matemática Aplicada - 2025-1
IME - UERJ

01 - Conceitos Fundamentais - Espaços Funcionais

Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br
Github: https://github.com/rodrigolrmadureira/ElementosFinitos

Sumário

Alguns espaços funcionais

Seja Ω um conjunto aberto no $\mathbb{R}^n$.

Obs. 1: Se $n = 1$, o conjunto aberto fica na reta $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$.

Exemplo 1: $(0, 1)$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}$.

Obs. 2: Se $n = 2$, o conjunto aberto fica no plano $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 2: Se $A_1 = (0, 1)$ e $A_2 = (0, 2)$ são dois conjuntos abertos de $\mathbb{R}$, o produto cartesiano $A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a_1 \in A_1 \text{ e } a_2 \in A_2\}$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^2$.

1. Espaço $C^\infty(\Omega)$: é o conjunto de todas as funções reais contínuas com infinitas derivadas também contínuas sobre Ω.

Suporte compacto: Dada uma função ϕ definida em Ω, denomina-se suporte de ϕ ao menor subconjunto fechado do domínio Ω onde a função não é nula.

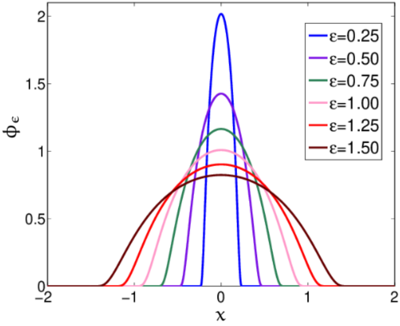
Obs. 3: Se $\Omega = (a, b)$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}$, o fecho de (a, b) é o conjunto fechado $[a, b]$. Ou seja, $\overline{(a, b)} = [a, b]$.

Alguns espaços funcionais

Obs. 4: O suporte compacto de uma função $\phi \in C_0^\infty(a,b)$ é o fecho em Ω do conjunto dos pontos de Ω onde a função u é diferente de zero. Portanto, é denotado por $\text{supp}(\phi) = \overline{\{x \in (a,b) : \phi(x) \neq 0\}}$

2. Espaço das Funções Testes (ou Admissíveis) $C_0^\infty(\Omega)$: é o subespaço de $C^\infty(\Omega)$ que contém funções ϕ com suporte compacto contido em Ω. Ou seja, se anulam na fronteira (ou contorno). Quando $\Omega = (a,b)$, é definido por:

$$C_0^\infty(a,b) = \{\phi \in C^\infty(\Omega)\ ;\ \phi(a) = \phi(b) = 0\}.$$



Exemplo 3: Na figura à esquerda, são mostrados alguns exemplos de funções $\phi_\epsilon(x) \in C_0^\infty(-\epsilon,\epsilon)$ com seus respectivos suportes compactos para cada valor de ϵ.

Alguns espaços funcionais

3. Espaço $L^p(\Omega)$: é o espaço das funções reais $u(x)$ que são p-integráveis para $p \geq 1$. Ou seja, é definido por:

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \; ; \; \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty \right\}$$

Em particular:

4. Espaço $L^1(\Omega)$: é o espaço das funções integráveis. Ou seja,

$$L^1(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \; ; \; \int_\Omega |u(x)| dx < \infty \right\}$$

5. Espaço $L^1_{loc}(\Omega)$: uma função $u(x)$ é **localmente integrável**, isto é, $u(x) \in L^1_{loc}(\Omega)$, quando $u(x) \in L^1(\Omega)$ **em cada subconjunto do suporte compacto de** Ω.

Obs. 5: $u(x) \in L^p(\Omega) \Rightarrow |u(x)|^p \in L^1(\Omega)$ para $p \geq 1$.

Alguns espaços funcionais

6. Espaço de Hilbert $\mathcal{H}$: é um espaço vetorial completo que possui um produto interno. **Exemplo:** Espaço $L^2(\Omega)$.

6.1. Espaço $L^2(\Omega)$: Se Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$, $L^2(\Omega)$ é o espaço das funções u com quadrado integrável,

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \; ; \; \int_\Omega |u(x)|^2 dx < \infty \right\},$$

que é um espaço de Hilbert munido de:

• **Produto interno**: Se $u, v \in L^2(\Omega)$, é definido por

$$< u, v >_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

Obs. 6: Outras notações recebidas por $< u, v >_{L^2(\Omega)}$ são $(u, v)_0$ e (u, v).

• **Norma**: Se $u \in L^2(\Omega)$, é definida por

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |u(x)|^2 dx$$

Obs. 7: Outras notações recebidas por $\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$ são $\|u\|^2_0$ e $|u|^2$.

Alguns espaços funcionais

6.2. Espaços de Sobolev $H^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$:

Se Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$, a definição geral é:

$$H^m(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \; ; \; u \in L^2(\Omega), \; \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\},$$

onde $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_n$, $0 \leq \alpha \leq m$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$.

Exemplos de espaços de Sobolev para $m = 1$ **e** $\Omega = (a, b) \in \mathbb{R}$:

6.2.1. Espaço $H^1(a, b)$: é o espaço onde as funções u e sua derivada em relação a x, $u_x = \dfrac{du}{dx}$, estão em $L^2(a, b)$. Ou seja,

$$H^1(a, b) = \{ u : (a, b) \to \mathbb{R} \; ; \; u \in L^2(a, b), u_x \in L^2(a, b) \},$$

que é um espaço de Hilbert munido de:

- **Produto interno**: $< u, v >_{H^1(a,b)} = \displaystyle\int_a^b u(x)v(x) + u_x v_x dx$;
- **Norma**: $\|u\|^2_{H^1(a,b)} = \displaystyle\int_a^b |u(x)|^2 + |u_x|^2 dx$

Alguns espaços funcionais

Exemplo 4: A função $u(x) = \dfrac{1}{x}$, definida em $\Omega = [1, \infty) \subset \mathbb{R}$, pertence ao espaço $L^2([1, \infty))$, pois

$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \int_1^\infty x^{-2} dx = -x^{-1}\Big|_1^\infty = -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty = -\cancelto{0}{\frac{1}{\infty}} + \frac{1}{1} = 1 < \infty.$$

Exemplo 5: A função $u(x) = \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$, definida em $\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}$, pertence ao espaço $L^2(0, 1)$ somente para $n \neq \dfrac{1}{2}$, pois

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x^n}\right)^2 dx = \int_0^1 x^{-2n} dx = -\frac{x^{-2n+1}}{-2n+1}\Big|_0^1 = -\frac{1}{-2n+1} = \frac{1}{2n-1}.$$

$$\Rightarrow 2n - 1 \neq 0 \Rightarrow n \neq \frac{1}{2}.$$

Alguns espaços funcionais

Obs. 8: Outra notações recebidas por $< u, v >_{H^1(\Omega)}$ e $\|u\|^2_{H^1(\Omega)}$ são, respectivamente, $(u, v)_1$ e $\|u\|^2_1$.

6.2.2. Espaço $H^1_0(a, b)$: subespaço importante de $H^1(a, b)$ definido pelas funções $u \in H^1(a, b)$ que se anulam na fronteira Γ de $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$, ou seja, se anulam nos contornos $x = a$ e $x = b$. Ou seja,

$$H^1_0(a, b) = \{u \in H^1(a, b)\ ;\ u(a) = u(b) = 0\},$$

que é um espaço de Hilbert munido de (demonstração a posteriori):

- **Produto interno**: $< u, v >_{H^1_0(a,b)} = \displaystyle\int_a^b u_x v_x dx$;
- **Norma**: $\|u\|^2_{H^1_0(a,b)} = \displaystyle\int_a^b |u_x|^2 dx$

Obs. 9: Outra notações recebidas por $< u, v >_{H^1_0(\Omega)}$ e $\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}$ são, respectivamente, $((u, v))$ e $\|u\|^2$.

Derivada fraca (Conceito de Distribuições)

Utilizamos o conceito de **derivada fraca** ou **derivada no sentido das distribuições** na passagem da **formulação forte** para a **formulação fraca** dos problemas que veremos neste curso.

7. Distribuição: Uma distribuição T é um funcional linear e contínuo (limitado) sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ que associa a todo elemento elemento $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ um número real, ou seja,

$$\begin{aligned} T : \mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi(x) &\mapsto T(\phi), \end{aligned}$$

de tal modo que as seguintes condições estejam satisfeitas:

D1. O funcional T é **linear**. Isto é, são satisfeitas as propriedades:

- **Associativa:** $T(\phi_1 + \phi_2) = T(\phi_1) + T(\phi_2)$, para todo $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$;
- **Multiplicação por escalar:** $T(c\phi) = cT(\phi)$, onde $c \in \mathbb{R}$, para todo $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

D2. O funcional T é **contínuo**. Ou seja, se uma sequência de funções (ϕ_ν) converge para zero em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $T(\phi_\nu)$ converge para zero em $\mathbb{R}$.

Obs. 10: O **espaço das distribuições** é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Derivada fraca (Conceito de Distribuições)

Obs. 11: Também escrevemos $T(\phi)$ como o produto interno $< T, \phi >$.

Exemplo de distribuição: Uma função $u(x) \in L^1_{loc}(\Omega)$, dita localmente integrável, define univocamente uma distribuição T_u. Assim, podemos reescrever o produto interno substituindo T_u por u quando não houver ambiguidade. Assim,

$$T_u(\phi) =< T_u, \phi >=< u, \phi >= \int_\Omega u(x)\phi(x)\, dx, \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Exercício: Verifique se T_u é um funcional linear.

7.1. Derivada fraca (ou no sentido das distribuições):

• **Primeira derivada de T_u (ou u) no sentido das distribuições**:

$$(T_u)_x = \frac{dT_u}{dx} = \left\langle \frac{dT_u}{dx}, \phi \right\rangle = \left\langle \frac{du}{dx}, \phi \right\rangle = \int_\Omega \frac{du}{dx}\phi(x)dx$$

Usando integração por partes, obtemos:

$$\int_\Omega \frac{du}{dx}\phi(x)dx = u\phi\Big|_\Omega - \int_\Omega u\frac{d\phi}{dx}dx$$

Derivada fraca (Conceito de Distribuições)

Supondo que Ω é um aberto em $\mathbb{R}$ e $\Omega = (a, b)$, obtemos:

$$\int_a^b \frac{du}{dx}\phi(x)dx = u\phi\Big|_a^b - \int_a^b u\frac{d\phi}{dx}dx = u(b)\cancelto{0}{\phi(b)} - u(a)\cancelto{0}{\phi(a)} - \int_a^b u\frac{d\phi}{dx}dx$$
$$= -\left\langle u, \frac{d\phi}{dx}\right\rangle,$$

pois se $\phi \in \mathcal{D}(a, b)$, então $\phi(a) = \phi(b) = 0$.

Portanto, se $u(x) \in L^1_{loc}(a, b)$, denominamos a **primeira derivada de $u(x)$ no sentido fraco (das distribuições)** como o produto interno:

$$\left\langle \frac{du}{dx}, \phi\right\rangle = -\left\langle u, \frac{d\phi}{dx}\right\rangle, \ \forall \phi \in \mathcal{D}(a, b).$$

• **Segunda derivada de T_u (ou u) no sentido das distribuições**:

$$(T_u)_{xx} = \frac{d^2 T_u}{dx^2} = \left\langle \frac{d^2 T_u}{dx^2}, \phi\right\rangle = \left\langle \frac{d^2 u}{dx^2}, \phi\right\rangle = \left\langle \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right), \phi\right\rangle$$

Derivada fraca (Conceito de Distribuições)

Portanto, se $\dfrac{du}{dx} \in L^1_{loc}(a, b)$, denominamos a **segunda derivada de** $u(x)$ **no sentido fraco (das distribuições)** como o produto interno:

$$\left\langle \frac{d^2u}{dx^2}, \phi \right\rangle = \left\langle \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right), \phi \right\rangle = -\left\langle \frac{du}{dx}, \frac{d\phi}{dx} \right\rangle, \ \forall \phi \in \mathcal{D}(a, b).$$

Referências I

Liu, I.S.; Rincon, M.A.. **Introdução ao Método de Elementos Finitos, Análise e Aplicação**. IM/UFRJ, 2003.