

Tópicos Especiais em Matemática Aplicada - IME/UERJ

Trabalho 1 - Formulação fraca e problema aproximado

1. Seja o problema dado por:

$$\begin{cases} -\alpha u_{xx}(x) + \beta u(x) = f(x), \quad \forall x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

onde α e β são constantes reais e positivas, $f \in L^2(0, 1)$.

A partir da formulação fraca do problema, obtemos o problema aproximado $Kc = F$ no subespaço de dimensão finita $V_h = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m]$, tal que $V_h \subset H_0^1(0, 1)$, onde as funções $\varphi_i(x)$ são da base de Lagrange linear. Mostre que os **elementos da matriz** K são:

$$\begin{cases} K_{11} = K_{mm} = \frac{\alpha}{h} + \frac{\beta h}{3}; \\ K_{ii} = 2\left(\frac{\alpha}{h} + \frac{\beta h}{3}\right), \text{ para } i = 2, 3, \dots, m-1; \\ K_{i+1,i} = K_{i,i+1} = -\frac{\alpha}{h} + \frac{\beta h}{6}, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, m-1. \end{cases}$$