Tópicos Especiais em Matemática Aplicada - 2025-1
UERJ

03 - Formulação de Galerkin e Problema Aproximado

Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br
Github: https://github.com/rodrigolrmadureira/ElementosFinitos

Sumário

Formulação de Galerkin

Sobre o problema estudado:

Seja o problema **unidimensional** ($\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$), **não homogêneo** ($f(x) \neq 0$) e **no regime estacionário** de determinar $u(x) \in H_0^1(0,1)$ tal que:

Formulação forte (S)

$$\begin{cases} -\alpha\, u_{xx} + \beta\, u(x) = f(x), \ \forall x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

com $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ e $f(x)$ regular (suficientemente suave).

Formulação fraca (W) (em notação de produto interno)

$$\alpha(u_x, v_x) + \beta(u, v) = (f, v)\ ,\ \forall\ v \in H_0^1(0,1) \tag{2}$$

A solução analítica $u(x) \in V = H_0^1(0,1) \subset L^2(0,1)$.
O espaço $L^2(0,1)$ possui dimensão infinita. Para trabalhar com **soluções numéricas (ou aproximadas)**, precisamos trabalhar com um **espaço de dimensão finita**.

Formulação de Galerkin

Formulação de Galerkin: aproxima o espaço de dimensão infinita V das soluções por um subespaço de dimensão finita $V_h \subset V$.

A base de V_h, denotada por $\mathcal{B}_{V_h}$, será formada por m funções linearmente independentes (funções bases):

$$\mathcal{B}_{V_h} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$$

Logo, o subespaço V_h é gerado pelas combinações lineares dos elementos de $\mathcal{B}_{V_h}$:

$$V_h = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m]$$

Ou seja, qualquer $u_h \in V_h$ é escrito como combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}_{V_h}$:

$$u_h = \sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_i$$

Problema aproximado

Queremos aproximar a solução analítica $u(x) \in V = H_0^1(0,1)$ por uma **solução aproximada** $u_h(x) \in V_h$.

Assim, substituindo $u(x)$ por $u_h(x)$ na formulação fraca da Eq. (2), obtemos:

$$\alpha((u_h)_x, v_x) + \beta(u_h, v) = (f, v) \ , \ \forall \ v \in V$$

Como $V_h \subset V$, então:

$$\alpha((u_h)_x, v_x) + \beta(u_h, v) = (f, v) \ , \ \forall \ v \in V_h \tag{3}$$

Como $V_h = [\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m]$ e $u_h(x) \in V_h$, então:

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_i(x) \tag{4}$$

Substituindo a solução aproximada (4) na Eq. (3), obtemos:

$$\alpha\left(\sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_{ix}, v_x\right) + \beta\left(\sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_i, v\right) = (f, v) \ , \ \forall \ v \in V_h \tag{5}$$

Problema aproximado

Se a Eq. (5) vale para todo $v \in V_h$, vale, em particular, para algum $\varphi_j \in V_h$.

Logo, escolhendo $v = \varphi_j$ e substituindo na Eq. (5), obtemos a equação para o problema aproximado:

$$\alpha\left(\sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_{ix}, \varphi_{jx}\right) + \beta\left(\sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_i, \varphi_j\right) = (f, \varphi_j), \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots, m \tag{6}$$

Vamos começar desenvolvendo a Eq. (6) com as propriedades do produto interno:

P1. Linearidade: $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i(x), b_j(x)\right) = \sum_{i=1}^{m} (a_i(x), b_j(x))$

P2. Homogeneidade: $\sum_{i=1}^{m} (c_i a_i(x), b_j(x)) = \sum_{i=1}^{m} c_i (a_i(x), b_j(x))$,

onde c_i é uma constante real.

Assim, obtemos por **P1**,

$$\alpha \sum_{i=1}^{m} (c_i \varphi_{ix}, \varphi_{jx}) + \beta \sum_{i=1}^{m} (c_i \varphi_i, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots, m$$

Problema aproximado

E por **P2**,

$$\alpha \sum_{i=1}^{m} c_i(\varphi_{ix}, \varphi_{jx}) + \beta \sum_{i=1}^{m} c_i(\varphi_i, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots, m \qquad (7)$$

Vou denotar as matrizes: $M_{ij} = (\varphi_{ix}, \varphi_{jx})$; $N_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j)$;
e o **vetor força**: $F_j = (f, \varphi_j)$.

Substituindo na Eq.(7), obtemos:

$$\alpha \sum_{i=1}^{m} c_i M_{ij} + \beta \sum_{i=1}^{m} c_i N_{ij} = F_j, \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots, m \qquad (8)$$

Note que todos os termos da Eq. (8) são vetores-linhas.

Devemos fazer a transposta de todos os termos para transformá-los em vetores-colunas.

Problema aproximado

Para fazer a transposta de todos os membros da Eq. (8), basta trocar os índices i por j e j por i. Assim, obtemos:

$$\alpha \sum_{j=1}^{m} c_j M_{ji} + \beta \sum_{j=1}^{m} c_j N_{ji} = F_i, \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, m$$

Usando a propriedade comutativa nos produtos, obtemos:

$$\alpha \sum_{j=1}^{m} M_{ji} c_j + \beta \sum_{j=1}^{m} N_{ji} c_j = F_i, \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, m$$

Usando a notação $A_{ij}^T = A_{ji}$ para matrizes transpostas, obtemos:

$$\alpha \sum_{j=1}^{m} M_{ij}^T c_j + \beta \sum_{j=1}^{m} N_{ij}^T c_j = F_i, \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, m$$

Note que: As matrizes M e N são simétricas ($M = M^T$ e $N = N^T$), pois trocando-se i por j e j por i:

$$M_{ij} = (\varphi_{ix}, \varphi_{jx}) = (\varphi_{jx}, \varphi_{ix}) = M_{ji}; \; N_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j) = (\varphi_j, \varphi_i) = N_{ji}$$

Problema aproximado

Portanto, chegamos ao sistema linear de equações:

$$\alpha \sum_{j=1}^{m} M_{ij} c_j + \beta \sum_{j=1}^{m} N_{ij} c_j = F_i, \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, m \tag{9}$$

Na notação vetorial,

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix},$$

onde c é um vetor-coluna e A é uma matriz quadrada que pode ser M ou N, podemos reescrever o sistema linear (9) como:

$$\alpha M c + \beta N c = F \Rightarrow \underbrace{(\alpha M + \beta N)}_{K} c = F \Rightarrow K c = F$$

Problema aproximado

Assim, obtemos:

Problema aproximado

$$Kc = F, \tag{10}$$

com

$$K = [K_{ij}]_{m\times m},\ c = [c_i]_{m\times 1},\ F = [F_i]_{m\times 1},$$

onde

$$K_{ij} = \alpha M_{ij} + \beta N_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j),$$

$$M_{ij} = (\varphi_{ix}, \varphi_{jx});\ N_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j);\ F_j = (f, \varphi_j).$$

Obs.: Vimos nos slides anteriores que a forma $a(\cdot,\cdot)$ é definida por:
$a(u,v) = \alpha(u_x, v_x) + \beta(u,v),\ \forall\ u,v \in V = H_0^1(0,1)$.

Logo, para φ_i, $\varphi_j \in V_h \subset V$, temos:
$a(\varphi_i,\varphi_j) = \alpha(\varphi_{ix},\varphi_{jx}) + \beta(\varphi_i,\varphi_j) \Rightarrow K_{ij} = a(\varphi_i,\varphi_j)$.

Problema aproximado

Observações:

1. A matriz K é chamada **matriz de rigidez** ou **matriz de condutividade térmica**

2. K é simétrica: $K_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = a(\varphi_j, \varphi_i) = K_{ji}$

2. K é definida positiva: Existe um vetor $[d_i]_{m\times 1}$ tal que $d^T K d > 0$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} d^T K d &= \sum_{i,j=1}^{m} d_i K_{ij} d_j = \sum_{i,j=1}^{m} d_i a(\varphi_i, \varphi_j) d_j = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{m} d_i a(\varphi_i, \varphi_j) d_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{m} a(d_i\varphi_i, \varphi_j) d_j\right) = \sum_{j=1}^{m} a\left(\sum_{i=1}^{m} d_i\varphi_i, \varphi_j\right) d_j \\ &= \sum_{j=1}^{m} a\left(\sum_{i=1}^{m} d_i\varphi_i, d_j\varphi_j\right) = a\left(\sum_{i=1}^{m} d_i\varphi_i, \sum_{j=1}^{m} d_j\varphi_j\right) \\ &= a(v,v) \geq C\|v\|^2 > 0 \text{ (pois } v = \sum_{i=1}^{m} d_i\varphi_i \text{ e } d_i \neq 0) \qquad \square \end{aligned}$$

Referências I

Liu, I.S.; Rincon, M.A.. **Introdução ao Método de Elementos Finitos, Análise e Aplicação**. IM/UFRJ, 2003.