Matemática Discreta - IME/UERJ

Trabalho Extra Nº 1 - Data de entrega: 26/03/2024

1. **(Valendo 1,0 ponto)** Escolha **somente quatro sentenças** a seguir para prová-las usando a primeira forma do Princípio da Indução Finita (forma fraca) ou a segunda forma (forma forte):

1.1. Para todo número natural $n > 1$, tem-se que $1 + 2^n < 3^n$.

1.2. **Exercício 34** do livro-texto **Introdução à Análise Combinatória** - J. Plínio O. Santos, Margarida P. Mello, Idani T. C. Murari.

1.3. (Indução forte) Todo número natural n pode ser representado como uma soma de potências de 2 **distintas**.

Dica 1: Dois exemplos:

O número 7 pode ser escrito como:

$7 = 2^0 + 2^1 + 2^2$, que é uma soma de três potências de 2 distintas.

O número 8 pode ser escrito como apenas uma potência de 2, que é 2^3.

Dica 2: Para todo número natural n, $2^b \leq n < 2^{b+1}$, onde $b \in \mathbb{Z}^+$, ou seja, b é um inteiro não-negativo. Note que para os exemplos dados na dica anterior, valem as desigualdades:

$2^2 \leq 7 < 2^3$ e $2^3 \leq 8 < 2^4$.

1.4. (Recorrência - Indução forte) Se $x_0 = 2$, $x_1 = 3$ e $x_{n+1} = 3x_n - 2x_{n-1}$, então $x_n = 2^n + 1$ para todo inteiro $n \geq 0$.

1.5. (Sequência de Fibonacci - Indução forte) **Exercício 35, item (e)** do livro-texto **Introdução à Análise Combinatória** - J. Plínio O. Santos, Margarida P. Mello, Idani T. C. Murari.

Dica 1: Use o resultado do item(a) do mesmo exercício para reescrever a fórmula do item (e) e depois faça a demonstração por indução forte.

Dica 2: Obviamente, no desenvolvimento, use a definição de Fibonacci:

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \ n \geq 2. \end{cases}$$