RESOLUÇÃO DE RELAÇÕES DE RECORRÊNCIAS

1. HOMOGÊNEAS, LINEARES de ORDEM k:

Seja uma relação de recorrência linear, homogênea, de ordem k dada por:

$$\begin{cases} a_0 = \beta_0,\ a_1 = \beta_1,\ \ldots,\ a_{k-1} = \beta_{k-1}, \\ a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}, \\ \qquad \text{para } n \geq k, \end{cases} \quad (1)$$

onde $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{k-1}$ são números dados das condições iniciais e $c_1, c_2, \ldots, c_k$ são constantes reais.

(a) Resolver a equação característica e achar as raízes:

Definindo $a_n = r^n$, onde $r \neq 0$ é um número real ou complexo, na equação de recorrência (1), obtemos:

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \cdots + c_k r^{n-k} \quad (2)$$

Dividindo a equação (2) por r^{n-k}, obtemos:

$$r^k = c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \cdots + c_k,$$

e assim obtemos a equação característica:

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_k = 0, \quad (3)$$

que pode ser reescrita como:

$(r - r_1)(r - r_2) \cdots (r - r_k) = 0$, onde $r_1, r_2, \ldots, r_k$ são as raízes da equação característica.

(b) Escrever a solução geral da equação de recorrência:

(b.1) Se as raízes $r_1, r_2, \ldots, r_k$ da equação característica forem todas distintas, a solução geral é dada pela combinação linear das raízes elevadas a n:

$$r_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n + \cdots + A_k r_k^n, \quad n \geq 0, \tag{4}$$

onde $A_1, A_2, \ldots, A_k$ são constantes reais.

(b.2) Se alguma raiz r_j tiver multiplicidade $m_j \geq 2$ vamos associar a essa raiz as funções:

$$r_j^n, \; n r_j^n, \; n^2 r_j^n, \; \ldots, \; n^{m_j - 1} r_j^n.$$

Então, fazemos a combinação linear destas funções e somamos à combinação linear das raízes que são distintas elevadas a n. Logo, temos a solução geral:

$$r_n = \left(A_j r_j^n + A_{j+1} n r_j^n + A_{j+2} n^2 r_j^n + \cdots + A_{j+(m_j-1)} n^{m_j-1} r_j^n\right) + A_{\ell_1} r_{\ell_1}^n + A_{\ell_2} r_{\ell_2}^n + \cdots + A_{\ell_{k-m_j}} r_{\ell_{k-m_j}}^n, \quad n \geq 0, \tag{5}$$

onde $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{k-m_j}$ são os índices das raízes que são distintas, e as constantes A_j são reais

(c) Achar as constantes da solução geral através das condições iniciais e, consequentemente, obter a solução geral a_n.

Exemplo 1: Seja a relação de recorrência linear, homogênea, de ordem 2:

$$\begin{cases} a_0 = 4, \ a_1 = 10 \\ a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, \ n \geq 2 \end{cases}$$

1. Resolver a equação característica:

$$r^2 = 5r - 6 \Rightarrow r^2 - 5r + 6 = 0$$
$$(r-2)(r-3) = 0$$

Raízes: $r_1 = 2$, $r_2 = 3$ (raízes distintas)

2. Solução geral da equação de recorrência:

$$a_n = A_1 \cdot r_1^n + A_2 \cdot r_2^n = A_1 \cdot 2^n + A_2 \cdot 3^n, \ n \geq 0.$$

3. Achar as constantes A_1, A_2 através das condições iniciais:

$$a_0 = 4 \Rightarrow A_1 \cdot 2^0 + A_2 \cdot 3^0 = 4 \Rightarrow A_1 + A_2 = 4$$
$$a_1 = 10 \Rightarrow A_1 \cdot 2^1 + A_2 \cdot 3^1 = 10 \Rightarrow 2A_1 + 3A_2 = 10$$

Resolvendo o sistema, encontramos $A_1 = A_2 = 2$.

Logo, a solução da relação de recorrência é:

$$a_n = 2 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n = 2^{n+1} + 2 \cdot 3^n, \ n \geq 0.$$

Exemplo 2: Seja a relação de recorrência linear, homogênea, de ordem 2:

$$\begin{cases} a_0 = \\ a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}, \ n \geq 2 \end{cases}$$

1. Resolver a equação característica:

$$r^2 - 6r + 9 = 0 \implies (r-3)^2 = 0$$

Raiz de multiplicidade 2: $r_1 = 3$.

2. Solução geral da equação de recorrência:

$$a_n = A_1 \cdot r_1^n + A_2 \cdot n \cdot r_1^n = A_1 \cdot 3^n + A_2 \cdot n \cdot 3^n, \ n \geq 0.$$

3. Achar as constantes A_1, A_2 através das condições iniciais:

$$a_0 = 4 \implies A_1 \cdot 3^0 + A_2 \cdot 0 \cdot 3^0 = 4 \implies A_1 = 4;$$

$$a_1 = 10 \implies A_1 \cdot 3^1 + A_2 \cdot 1 \cdot 3^1 = 10 \implies 3A_1 + 3A_2 = 10$$

$$\implies 3(4) + 3A_2 = 10$$

$$\implies 3A_2 = -2$$

$$\implies A_2 = -\frac{2}{3}.$$

Logo, a solução da relação de recorrência é:

$$a_n = 4 \cdot 3^n - \frac{2}{3} \cdot n \cdot 3^n, \ n \geq 0.$$

Exemplo 3: Seja a relação de recorrência linear, homogênea, de ordem 3:

$$\begin{cases} a_0 = 2,\ a_1 = 2,\ a_2 = 4 \\ a_n = 7a_{n-1} - 16a_{n-2} + 12a_{n-3},\ n \geq 3 \end{cases}$$

1. Resolver a equação característica:

$$r^3 = 7r^2 - 16r + 12 \Rightarrow r^3 - 7r^2 + 16r - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (r-3)(r-2)^2 = 0$$

Raízes: $r_1 = 3$, $r_2 = 2$ (de multiplicidade 2).

2. Solução geral da equação de recorrência:

$$a_n = A_1 \cdot 3^n + A_2 \cdot 2^n + A_3 \cdot n \cdot 2^n,\ n \geq 0.$$

3. Achar as constantes A_1, A_2, A_3 através das condições iniciais:

$$a_0 = 2 \Rightarrow A_1 \cdot 3^0 + A_2 \cdot 2^0 + A_3 \cdot 0 \cdot 2^0 = 2$$

$$\Rightarrow A_1 + A_2 = 2$$

$$a_1 = 2 \Rightarrow A_1 \cdot 3^1 + A_2 \cdot 2^1 + A_3 \cdot 1 \cdot 2^1 = 2$$

$$\Rightarrow 3A_1 + 2A_2 + 2A_3 = 2$$

$$a_2 = 4 \Rightarrow A_1 \cdot 3^2 + A_2 \cdot 2^2 + A_3 \cdot 2 \cdot 2^2 = 4$$

$$\Rightarrow 9A_1 + 4A_2 + 8A_3 = 4$$

Assim, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 2 \\ 3A_1 + 2A_2 + 2A_3 = 2 \\ 9A_1 + 4A_2 + 8A_3 = 4 \end{cases}$$

e encontramos $A_1 = 4$, $A_2 = -2$, $A_3 = -3$.

Logo, a solução da recorrência é:

$$a_n = 4 \cdot 3^n - 2 \cdot 2^n - 3 \cdot n \cdot 2^n, \quad n \geqslant 0.$$

2. NÃO HOMOGÊNEAS, LINEARES, de ORDEM k:

Seja uma relação de recorrência linear, <u>não homogênea</u>, de ordem k dada por:

$$a_0 = \beta_0,\ a_1 = \beta_1,\ \dots,\ a_{k-1} = \beta_{k-1},$$

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} + g(n),$$

para $n \geq k$,

onde $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{k-1}$ são números dados das condições iniciais, $c_1, c_2, \dots, c_k$ são constantes reais e $g(n) \neq 0$.

(a) Resolver a equação característica da homogênea associada:

$$h_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k},$$

que é, como já vimos anteriormente,

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \dots - c_k = 0.$$

(b) Solução geral da homogênea associada:

(b.1) Se as raízes $r_1, r_2, \dots, r_k$ forem todas distintas

$$h_n = A_1 \cdot r_1^n + A_2 \cdot r_2^n + \dots + A_k \cdot r_k^n;$$

(b.2) Se alguma raiz r_j tiver multiplicidade $m_j \geq 2$,

$$h_n = (A_j r_j^n + A_{j+1} n r_j^n + \dots + A_{j+(m_j-1)} n^{m_j-1} r_j^n)$$

$$+ A_{\ell_1} r_{\ell_1}^n + A_{\ell_2} r_{\ell_2}^n + \dots + A_{\ell_{k-m_j}} r_{\ell_{k-m_j}}^n,\ n \geq 0,$$

onde $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{k-m_j}$ são os índices das raízes distintas e as constantes A_j são reais.

(c) Solução particular para a equação não homogênea (p_n):

$$p_n = c_1 p_{n-1} + c_2 p_{n-2} + \dots + c_k p_{n-k} + g(n),$$

onde $g(n) \neq 0$.

Veremos dois casos para $g(n)$:

(c.1) $g(n) = c \cdot q^n$, onde c e q são constantes.

- Se <u>q não é raiz</u> da equação característica da homogênea associada, a solução particular é $p_n = A \cdot q^n$, onde A é uma constante.
- Se q é <u>uma raiz de multiplicidade m</u> da equação característica da homogênea associada, multiplico por n^m a solução particular: $p_n = A \cdot n^m \cdot q^n$.

(c.2) $g(n) = b_\ell n^\ell + b_{\ell-1} n^{\ell-1} + \dots + b_0$ (polinômio de grau ℓ em n com coeficientes constantes $b_\ell, b_{\ell-1}, \dots, b_0$).

- Se 1 <u>não é raiz</u> da equação característica da homogênea associada, a solução particular é $p_n = B_\ell n^\ell + B_{\ell-1} n^{\ell-1} + \dots + B_0$, onde $B_0, B_1, B_2, \dots, B_\ell$ são constantes reais.

- Se 1 é uma raiz de multiplicidade m da equação característica da homogênea associada, a solução particular é multiplicada pelo fator n^m e se torna:

$$p_n = B_\ell n^{m+\ell} + B_{\ell-1} n^{m+\ell-1} + \dots + B_0 \cdot n^m,$$

onde $B_0, B_1, \dots, B_\ell$ são constantes reais.

(d) A solução geral da relação não homogênea é a soma da homogênea associada com a solução particular:

$$a_n = h_n + p_n, \quad n \geq 0.$$

(e) Devemos achar os valores das constantes de $a_n = h_n + p_n$ através das condições iniciais e, deste modo, achamos a fórmula fechada para $a_n = h_n + p_n$, $n \geq 0$.

Digitalizado com CamScanner

RESOLUÇÃO de RECORRÊNCIAS LINEARES NÃO HOMOGÊNEAS

Exemplo 1: (Pizza de Steiner – Divisão do plano por retas)

Vimos que a relação de recorrência é dada por:

$$a_0 = 1,$$
$$a_n = \underbrace{a_{n-1}}_{1^{a}\text{ ordem}} + \underbrace{n}_{g(n)=n,\text{ não homogênea}}, \quad \text{para } n \geq 1$$

A equação de recorrência homogênea associada é:

$$h_n = h_{n-1} \Rightarrow h_n - h_{n-1} = 0$$

A equação característica é dada por:

$$r - 1 = 0 \Rightarrow r = 1$$

Logo, a solução da equação homogênea associada é:

$h_n = A \cdot 1^n = A$, onde A é uma constante real.

Tentaremos agora descobrir uma solução particular não homogênea p_n, pois:

$$\oplus \begin{cases} h_n = h_{n-1} & \text{(eq. homogênea)} \\ p_n = p_{n-1} + n & \text{(eq. particular)} \end{cases}$$

$$\underbrace{h_n + p_n}_{a_n} = \underbrace{h_{n-1} + p_{n-1}}_{a_{n-1}} + n$$

Ou seja, a soma de uma solução h_n da homogênea associada com uma solução p_n da eq. particular é uma solução da não homogênea

Então, da equação da solução particular, obtemos:

$$p_n - p_{n-1} = n$$

Que tipo de função deve ser p_n? É bastante razoável imaginar que p_n seja um polinômio de grau n.

Seja $p_n = B + Cn$

Substituindo na equação da solução particular, obtemos

$$B + Cn - (B + C(n-1)) = n$$

$$\cancel{B} + \cancel{Cn} - \cancel{B} - \cancel{Cn} + C = n$$

$$\underbrace{C}_{\text{constante}} = \underbrace{n}_{\text{termo com variável } n}$$ (Essa igualdade é impossível!)

Portanto, a recorrência não admite solução da forma $p_n = B + Cn$.

Por que não deu certo? A raiz da equação característica da homogênea é 1. Logo, uma solução da homogênea associada é uma constante B, se colocarmos $A = B$. É claro que o termo B não poderia cumprir o seu papel, pois substituindo na equação, daria zero e não n.

Como $h_n = B$, se $A = B$, então $h_n - h_{n-1} = B - B = 0$. Logo, não pode ser solução da particular, pois $p_n - p_{n-1} = n \neq 0$.

Vamos corrigir a nossa tentativa multiplicando por n

$$p_n = Bn + Cn^2$$

Obs.: Sempre que na nossa tentativa em algum bloco não cumprir o seu papel, fazemos a correção "aumentando o grau", isto é, multiplicando o bloco por n.

Agora, substituindo na recorrência, obtemos:

$$Bn + Cn^2 - (B(n-1) + C(n-1)^2) = n$$

$$\cancel{Bn} + \cancel{Cn^2} - \cancel{Bn} + B - \cancel{Cn^2} + 2cn - C = n$$

$$(B - C) + 2cn = n \quad \checkmark \quad \text{(igualdade válida)}$$

Para satisfazer a igualdade acima, resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} B - C = 0 \\ 2C = 1 \end{cases} \Longrightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow B = C = \frac{1}{2}.$$

A solução então é:

$$a_n = h_n + p_n = A + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 = A + \frac{n+n^2}{2}.$$

Para descobrir o valor de A, aplicamos a condição inicial $r_0 = 1$. Logo,

$$A + \underbrace{\frac{0+0^2}{2}}_{0} = 1 \Longrightarrow A = 1.$$

Portanto, a solução da relação de recorrência é dada por:

$$a_n = 1 + \frac{n+n^2}{2} = \frac{n^2+n+2}{2}, \text{ para } n \geq 0.$$

EXEMPLO 2: Resolva a relação de recorrência

$$a_n = 3a_{n-1} + \frac{1}{3} \cdot 3^n, \text{ para } n \geq 2, \quad a_1 = 2.$$

1) Homogênea associada:

$$h_n = 3h_{n-1} \implies h_n - 3h_{n-1} = 0$$

Equação característica: $r - 3 = 0 \implies r = 3$

Solução da homogênea associada: $h_n = A \cdot 3^n$, onde A é uma constante real.

2) Solução particular:

$$p_n = 3p_{n-1} + \frac{3^n}{3} \implies p_n - 3p_{n-1} = \frac{3^n}{3}.$$

1ª Tentativa: Vamos buscar uma solução particular da forma $p_n = B \cdot 3^n$

O problema é que não funciona, pois $B \cdot 3^n$ é solução da homogênea associada quando $A = B$.

2ª Tentativa: multiplicando por n, temos:

$p_n = Bn \cdot 3^n$

Assim, substituindo na relação de recorrência não homogênea, obtemos:

$$Bn \cdot 3^n = 3B(n-1) \cdot 3^{n-1} + \frac{3^n}{3}$$

$$Bn \cdot 3^n = B(n-1) \cdot 3^n + (3^n/3)$$

$$Bn \cdot 3^n = [B(n-1) + (1/3)] \cdot 3^n \implies Bn = B(n-1) + (1/3)$$

$$\Rightarrow \cancel{Bn} = \cancel{Bn} - B + \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow -B + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow B = \frac{1}{3}$$

Logo, $p_n = \frac{1}{3} \cdot n \cdot 3^n = n \cdot 3^{n-1}$

A solução geral é dada por:

$$a_n = h_n + p_n = A \cdot 3^n + n \cdot 3^{n-1}$$

Para descobrir A, usamos a condição inicial:

$$a_1 = 2 \Rightarrow A \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 2 \Rightarrow 3A + 1 = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{3}.$$

Logo,

$$a_n = \frac{1}{3} \cdot 3^n + n \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1} + n \cdot 3^{n-1} = (n+1)\,3^{n-1}, \; n \geq 1.$$

Exemplo 3

Seja a relação de recorrência linear, não homogênea de ordem 3:

$$\begin{cases} a_0 = 3, \quad a_1 = 5, \quad a_2 = 7, \\ a_n = 4a_{n-1} - 5a_{n-2} + 2a_{n-3} + (n^2 + 2n + 1), \; n \geq 2 \end{cases}$$

Aqui, $g(n) = n^2 + 2n + 1$ é um polinômio de grau 2 em n.

1. Resolver a equação característica da homogênea associada:

$$h_n = 4h_{n-1} - 5h_{n-2} + 2h_{n-3},$$

que é dada por:

$$r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = 0 \Longrightarrow (r-1)^2 (r-2) = 0,$$

cujas raízes são: $r_1 = 1$ (multiplicidade 2);
$r_2 = 2$.

2. A solução da homogênea associada é dada por:

$$h_n = A_1 \cdot 1^n + A_2 \cdot n \cdot 1^n + A_3 \cdot 2^n$$
$$= A_1 + A_2 n + A_3 \cdot 2^n, \text{ para } n \geq 0.$$

3. Solução da particular p_n:

$$p_n = p_{n-1} - 5p_{n-2} + 2p_{n-3} + (n^2 + 2n + 1)$$

Como $g(n) = n^2 + 2n + 1$ é um polinômio de grau 2, podemos usar como solução particular um polinômio de grau 2, que segue o padrão

$$p_n = B_2 n^2 + B_1 n + B_0.$$

Mas, o que acontece é o seguinte: como 1 é raiz da equação característica da homogênea associada, uma constante qualquer B_0, que é o mesmo que $B_0 \cdot 1$, também será solução da homogênea associada. Basta substituir a constante B_0 na homogênea associada para conferir:

$$h_n = 4h_{n-1} - 5h_{n-2} + 2h_{n-3}$$

$$h_n = B_0 \Rightarrow B_0 = 4B_0 - 5B_0 + 2B_0$$

(identidade válida).

Logo, $p_n = B_2 n^2 + B_1 n + B_0$ não pode ser uma solução particular p_n para a não homogênea.

Como 1 é raiz de multiplicidade 2, devemos multiplicar o polinômio de grau 2, $B_2 n^2 + B_1 n + B_0$ por n^2. E assim, obtemos como solução particular:

$$p_n = B_2 n^4 + B_1 n^3 + B_0 n^2.$$

Substituindo na equação de recorrência para p_n, obtemos:

$$B_2 n^4 + B_1 n^3 + B_0 n^2 = 4\left[B_2(n-1)^4 + B_1(n-1)^3 + B_0(n-1)^2\right]$$
$$-5\left[B_2(n-2)^4 + B_1(n-2)^3 + B_0(n-2)^2\right]$$
$$+2\left[B_2(n-3)^4 + B_1(n-3)^3 + B_0(n-3)^2\right] + (n^2+2n+1).$$

Desenvolvendo os termos, obtemos:

$$-12B_2n^2 + (-6B_1 + 72B_2)n + (-2B_0 + 18B_1 - 86B_2)$$
$$= n^2 + 2n + 1$$

Fazendo a correspondência dos coeficientes, obtemos o sistema:

$$-12B_2 = 1 \implies B_2 = -\frac{1}{12};$$

$$-6B_1 + 72B_2 = 2 \implies -6B_1 - 6 = 2 \implies B_1 = -\frac{4}{3};$$

$$-2B_0 + 18B_1 - 86B_2 = 1 \implies -2B_0 - 24 + \frac{43}{6} = 1$$

$$B_0 = -\frac{107}{12}.$$

Assim, uma solução particular é dada por:

$$p_n = -\frac{1}{12}n^4 - \frac{4}{3}n^3 - \frac{107}{12}n^2.$$

e a solução geral é dada por:

$$a_n = h_n + p_n = A_1 + A_2 n + A_3 \cdot 2^n - \frac{1}{12}n^4 - \frac{4}{3}n^3 - \frac{107}{12}n^2,$$
$$n \geq 0.$$

4. Achar as constantes A_1, A_2, A_3 através das condições iniciais:

$$a_0 = 3 \Rightarrow A_1 + A_3 = 3$$

$$a_1 = 5 \Rightarrow A_1 + A_2 + 2A_3 - \frac{1}{12} - \frac{4}{3} - \frac{107}{12} = 5$$

$$\Rightarrow A_1 + A_2 + 2A_3 = \frac{46}{3}$$

$$a_2 = 7 \Rightarrow A_1 + 2A_2 + 4A_3 - \frac{4}{3} - \frac{32}{3} - \frac{107}{3} = 7$$

$$\Rightarrow A_1 + 2A_2 + 4A_3 = \frac{164}{3}$$

Devemos então resolver o sistema:

$$\begin{cases} A_1 + A_3 = 3 \\ A_1 + A_2 + 2A_3 = \frac{46}{3} \\ A_1 + 2A_2 + 4A_3 = \frac{164}{3} \end{cases}$$

De onde obtemos: $A_1 = -24$, $A_2 = -\frac{44}{3}$, $A_3 = 27$.

Portanto, a solução geral da relação de recorrência não homogênea é dada por:

$$a_n = -24 - \frac{44}{3}n + 27 \cdot 2^n - \frac{1}{12}n^4 - \frac{4}{3}n^3 - \frac{107}{12}n^2, \quad n \geq 0.$$