Exemplos de relações de recorrência

onde:

1. $g(n)$ é uma função exponencial:

$$\begin{cases} a_0 = 1,\ a_1 = 2; \\ a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + \overbrace{3\cdot 2^n}^{g(n)},\ n \geq 2. \end{cases}$$

(a) Resolver a equação característica da homogênea associada:

$$h_n = 5h_{n-1} - 6h_{n-2}$$

$$\Rightarrow r^2 = 5r - 6 \Rightarrow r^2 - 5r + 6 = 0$$
$$\Rightarrow (r-2)(r-3) = 0$$

Raízes: $r_1 = 2$, $r_2 = 3$

Solução geral da homogênea associada:

$$h_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n, \quad \text{onde } C_1, C_2 \text{ são constantes.} \quad (1)$$

(b) Achar uma solução particular para a equação não homogênea:

$$p_n = 5p_{n-1} - 6p_{n-2} + 3\cdot 2^n$$

$$\Rightarrow p_n - 5p_{n-1} + 6p_{n-2} = 3\cdot 2^n \quad (2)$$

Note que este é o caso onde $g(n) = c\cdot q^n$, com c e q constantes, onde q é a raiz da equação característica.

Neste exemplo, $c=3$ e $q=2$, que é raiz da equação característica.

Logo, a solução particular é do tipo:

$$p_n = n\cdot[A\cdot 2^n] = An\cdot 2^n, \text{ onde } A \text{ é constante. } (3)$$

ou seja, multiplicamos $A\cdot 2^n$ por um fator $n^m = n^1$, pois m é a multiplicidade da raiz e $m=1$.

Substituindo p_n de (3) na equação (2), obtemos:

$$An\cdot 2^n - 5A(n-1)\cdot 2^{n-1} + 6A(n-2)\cdot 2^{n-2} = 3\cdot 2^n$$

$$An\cdot 2^n - 5An\cdot 2^{n-1} + 5A\cdot 2^{n-1} + 6An\cdot 2^{n-2} - 12A\cdot 2^{n-2} = 3\cdot 2^n$$

Como o lado direito da equação é uma constante multiplicada por 2^n, devemos igualar este termo ao termo do lado esquerdo da equação que segue o mesmo padrão.

Os termos que seguem este padrão são: $5A\cdot 2^{n-1}$, $-12A\cdot 2^{n-2}$. Os demais termos não seguem, pois estão multiplicados por n. Então, obtemos:

$$5A\cdot 2^{n-1} - 12A\cdot 2^{n-2} = 3\cdot 2^n$$

Note que podemos reescrever: $2^{n-1} = 2^{-1}\cdot 2^n$ e $2^{n-2} = 2^{-2}\cdot 2^n$. Assim, temos:

$$5A\cdot 2^{-1}\cdot 2^n - 12A\cdot 2^{-2}\cdot 2^n = 3\cdot 2^n$$

$$\left[5A \cdot 2^{-1} - 12A \cdot 2^{-2}\right] \cdot 2^n = 3 \cdot 2^n$$

Igualando os coeficientes de 2^n em ambos os lados da equação, obtemos:

$$5A \cdot \underbrace{2^{-1}}_{(1/2)} - 12A \cdot \underbrace{2^{-2}}_{(1/4)} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2}A - 3A = 3 \Rightarrow \left(\frac{5}{2} - 3\right)A = 3 \Rightarrow -\frac{1}{2}A = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{A = -6}$$

Logo, a solução particular é dada por:

$$p_n = -6n \cdot 2^n \qquad (4)$$

E a solução geral da relação de recorrência não homogênea é dada pela soma das equações da homogênea associada (1) e da particular (4):

$$a_n = h_n + p_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n - 6n \cdot 2^n, \quad n \geq 0.$$

Faltam ainda os valores das constantes C_1 e C_2 usando as condições iniciais da relação:

$$a_0 = 1 \Rightarrow C_1 \cdot 2^0 + C_2 \cdot 3^0 - 6 \cdot 0 \cdot 2^0 = 1$$

$$\Rightarrow C_1 + C_2 = 1; \qquad (5)$$

$$a_1 = 2 \Rightarrow C_1 \cdot 2^1 + C_2 \cdot 3^1 - 6 \cdot 1 \cdot 2^1 = 2$$

$$\Rightarrow 2C_1 + 3C_2 = 14 \qquad (6)$$

As equações (5) e (6) formam o sistema:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 + 3C_2 = 14 \end{cases},$$

cuja solução é: $C_1 = -11$, $C_2 = 12$.

Portanto, a solução geral da relação de recorrência não homogênea é dada por:

$$\boxed{a_n = -11 \cdot 2^n + 12 \cdot 3^n - 6n \cdot 2^n, \quad n \geq 0}.$$

2. $g(n)$ é um polinômio de grau l em n:

$$\begin{cases} a_0 = 3,\ a_1 = 4, \\ a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + \underbrace{2n+1}_{g(n)},\ n \geq 2. \end{cases}$$

Neste exemplo, $l=1$, ou seja, $g(n)$ é um polinômio de grau 1.

(a) Resolver a equação característica da homogênea associada:

$$h_n = 3h_{n-1} - 2h_{n-2}$$

$$\Rightarrow r^2 = 3r - 2 \Rightarrow r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow (r-1)(r-2) = 0$$

Raízes: $r_1 = 1$, $r_2 = 2$.

Solução geral da homogênea associada:

$$h_n = C_1 \cdot \underbrace{1^n}_{=1} + C_2 \cdot 2^n = C_1 + C_2 \cdot 2^n, \text{ onde } C_1, C_2 \text{ são constantes.} \quad (1)$$

(b) Achar uma solução particular para a equação não homogênea:

$$p_n = 3p_{n-1} - 2p_{n-2} + 2n + 1$$

$$\Rightarrow p_n - 3p_{n-1} + 2p_{n-2} = 2n + 1 \quad (2)$$

Note que este é o caso onde $g(n)$ é um polinômio de grau 1 e temos uma das raízes da equação característica da homogênea associada igual a 1. Por isso, não podemos usar como solução particular um polinômio de grau 1 do tipo $An+B$. Devemos então multiplicá-lo por $n^m = n^1 = n$, pois m é a multiplicidade da raiz $r_1 = 1$ e $m=1$.

Logo, uma solução particular neste caso é:

$$p_n = n[An+B] = An^2 + Bn \quad (3)$$

Substituindo (3) em (2), obtemos:

$$An^2 + Bn - 3A(n-1)^2 - 3B(n-1) + 2A(n-2)^2 + 2B(n-2) =$$
$$= 2n+1$$

$$\Rightarrow \cancel{[A - 3A + 2A]} \cdot n^2 + [\cancel{B} + 6A - \cancel{3B} - 8A + \cancel{2B}]n$$
$$+ [-3A + 3B + 8A - 4B] = 2n+1$$

$$\Rightarrow -2An + (5A - B) = 2n+1$$

Igualando os coeficientes, obtemos:

$$-2A = 2 \Rightarrow A = -1;$$

$$5A - B = 1 \Rightarrow 5(-1) - B = 1 \Rightarrow B = -6$$

Logo,

$$p_n = -n^2 - 6n \qquad (4)$$

A solução geral da não homogênea é dada por:

$$a_n = h_n + p_n = c_1 + c_2 \cdot 2^n - n^2 - 6n, \quad n \geq 0.$$

Falta agora calcular as constantes c_1 e c_2 usando as condições iniciais:

$$a_0 = 3 \Rightarrow c_1 + c_2 \cdot 2^0 - 0^2 - 6 \cdot 0 = 3$$

$$\Rightarrow c_1 + c_2 = 3 \qquad (5)$$

$$a_1 = 4 \Rightarrow c_1 + c_2 \cdot 2^1 - 1^2 - 6 \cdot 1 = 4$$

$$\Rightarrow c_1 + 2c_2 = 11 \qquad (6)$$

As equações (5) e (6) formam o sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ c_1 + 2c_2 = 11, \end{cases}$$

cuja solução é: $c_1 = -5$, $c_2 = 8$.

Portanto, a solução geral da relação não homogênea é dada por:

$$\boxed{a_n = -5 + 8 \cdot 2^n - n^2 - 6n, \quad n \geq 0}$$