

Indução e Recursão: Indução Matemática Fraca e Indução Matemática Forte

Área de Conhecimento em Algoritmos e Teoria - DCC/UFMG

Introdução à Lógica Computacional

2024/2

Introdução

Indução e recursão: Introdução

- Indução e recursão são técnicas essenciais da Matemática Discreta e têm inúmeras aplicações em Ciência da Computação.
- Muitas afirmações matemáticas estabelecem que uma certa propriedade é satisfeita por todo inteiro positivo n :
 1. $n! \leq n^n$
 2. $n^3 - n$ é divisível por 3.
 3. Se um conjunto tem n elementos, seu conjunto potência tem 2^n elementos.

Aqui vamos ver uma técnica poderosa para demonstrar este tipo de resultado: a indução matemática.

Indução Matemática (Fraca)

Princípio da indução matemática: Intuição

- Imagine que você esteja diante de uma escada de infinitos degraus e você se pergunta:

“Será que eu consigo alcançar qualquer degrau dessa escada?”

- Você sabe que
 - você consegue alcançar o primeiro degrau, e
 - se você alcançar um degrau qualquer, você consegue alcançar o próximo.
- Usando as regras acima, você pode deduzir que você consegue:
 - alcançar o primeiro degrau: pela regra 1;
 - alcançar o segundo degrau: pela regra 1, depois regra 2;
 - alcançar o terceiro degrau: regra 1, depois regra 2 por duas vezes;
 - ...
 - alcançar o n -ésimo degrau: regra 1, depois regra 2 por $n - 1$ vezes.
- Logo, você pode concluir que pode alcançar todos os degraus da escada!

Princípio da indução matemática (fraca)

- Para mostrar que uma propriedade $P(n)$ vale para todos os inteiros positivos n , uma **demonstração** que utilize o **princípio da indução matemática (fraca)** possui duas partes:

Demonstração por indução fraca:

Passo base: Demonstra-se $P(1)$.

Passo indutivo: Demonstra-se que, para qualquer inteiro positivo k , se $P(k)$ é verdadeiro, então $P(k + 1)$ é verdadeiro.

- Note que o passo indutivo é uma implicação; sua premissa ($P(k)$ é verdadeiro) é chamada de **hipótese de indução** ou **I.H.**
- O princípio da indução matemática pode ser expresso como uma regra de inferência sobre os números inteiros:

$$\left(\underbrace{P(1)}_{\text{Passo base}} \wedge \underbrace{\forall k \in \mathbb{Z}^+ : (P(k) \rightarrow P(k+1))}_{\text{Passo indutivo}} \right) \rightarrow \underbrace{\forall n \in \mathbb{Z}^+ : P(n)}_{\text{Conclusão}}$$

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 1 Se n é um inteiro positivo, então $1 + 2 + \cdots + n = n(n + 1)/2$.

Demonstração. Seja $P(n)$ a proposição “a soma dos n primeiros inteiros positivos é $n(n + 1)/2$ ”.

Passo base: Queremos mostrar que $P(1)$ é verdadeiro. Mas $P(1)$ é verdade porque

$$1 = \frac{1(1 + 1)}{2}.$$

Passo indutivo: Queremos mostrar que $\forall k \in \mathbb{Z}^+ : (P(k) \rightarrow P(k + 1))$.

Assuma que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro positivo arbitrário k . Ou seja, a nossa hipótese de indução é de que, para um inteiro positivo k arbitrário:

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k + 1)}{2}.$$

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 1 (Continuação)

Sob a hipótese de indução, deve-se mostrar que $P(k+1)$ é válido, ou seja:

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Podemos, então, derivar

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) && \text{(pela I.H.)} \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}, \end{aligned}$$

de onde concluímos o passo indutivo.

Como concluímos com sucesso tanto o passo base quanto o passo indutivo, mostramos por indução que $\forall n \in \mathbb{Z}^+ : P(n)$, ou seja, que $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$ para todo inteiro positivo n . □

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 2 Desenvolva uma conjectura de uma fórmula equivalente à soma dos n primeiros inteiros ímpares positivos.

Então, demonstre sua conjectura usando indução matemática.

Solução.

Vamos começar testando alguns exemplos com valores de n :

$$n = 1 : \quad 1$$

$$n = 2 : \quad 1 + 3 = 4$$

$$n = 3 : \quad 1 + 3 + 5 = 9$$

$$n = 4 : \quad 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$n = 5 : \quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

$$\dots : \quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + \dots = ?$$

Qual padrão podemos tentar inferir a partir dos exemplos acima?

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 2 (Continuação)

Uma conjectura que parece razoável e que podemos tentar demonstrar é:

“A soma dos n primeiros inteiros positivos ímpares é n^2 .”

Demonstração. Seja $P(n)$ a proposição *“A soma dos n primeiros inteiros positivos ímpares é n^2 ”*.

Passo base: $P(1)$ é verdadeiro porque o primeiro inteiro positivo ímpar é 1, o que é igual a 1^2 .

Passo indutivo: Assuma que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro positivo arbitrário k .

Note que o k -ésimo inteiro positivo ímpar é dado por $2k - 1$.

Logo, a hipótese de indução é:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2.$$

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 2 (Continuação)

Queremos mostrar que $\forall k \in \mathbb{Z}^+ : (P(k) \rightarrow P(k+1))$, onde $P(k+1)$ é:

$$1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2.$$

Logo, podemos derivar

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) &= k^2 + (2(k + 1) - 1) \quad (\text{pela I.H.}) \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2, \end{aligned}$$

de onde concluímos o passo indutivo.

Como concluímos com sucesso o passo base e o passo indutivo, mostramos por indução que $\forall n \in \mathbb{Z}^+ : P(n)$, ou seja, que a soma dos n primeiros ímpares positivos é n^2 . □

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Podemos usar a indução para mostrar que propriedades dos naturais \mathbb{N} , ajustando os passos base e indutivo adequadamente.
- Exemplo 3** Para todo inteiro não-negativo n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$.

Demonstração. Seja $P(n)$ a proposição “ $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ”.

Passo base: $P(0)$ é verdadeiro porque:

$$\sum_{i=0}^0 2^i = 2^{0+1} - 1,$$

já que o lado esquerdo da igualdade acima pode ser escrito como

$$\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1,$$

e o lado direito pode ser escrito como

$$2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = 1.$$

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 3 (Continuação)

Passo indutivo: Assuma que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro não-negativo arbitrário k , ou seja, assuma como verdadeira a hipótese de indução

$$\sum_{i=0}^k 2^i = 2^{k+1} - 1.$$

Queremos mostrar que, se a hipótese acima for verdadeira, então $P(k+1)$ também é verdadeira, ou seja, que

$$\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = 2^{(k+1)+1} - 1 = 2^{k+2} - 1.$$

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 3 (Continuação)

Para isto, podemos derivar

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k+1} 2^i &= \left(\sum_{i=0}^k 2^i \right) + 2^{k+1} \\ &= (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} && \text{(pela I.H.)} \\ &= 2 \cdot 2^{k+1} - 1 \\ &= 2^{k+2} - 1,\end{aligned}$$

de onde concluímos o passo indutivo.

Logo, por indução mostramos que $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$, ou seja, que $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ para todo inteiro $n \geq 0$. □

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- No caso geral, podemos usar a indução para mostrar que uma propriedade vale para qualquer subconjunto dos inteiros

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\},$$

onde $n_0 \in \mathbb{Z}$ é um ponto de partida.

Neste caso, a indução fica como a seguir

Demonstração por indução fraca:

Passo base: Demonstra-se $P(n_0)$, onde n_0 é um inteiro.

Passo indutivo: Demonstra-se que, para qualquer inteiro k maior ou igual a n_0 , se $P(k)$ é verdadeiro, então $P(k + 1)$ é verdadeiro.

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 4 Para todo inteiro $n \geq 4$, $2^n < n!$.

Demonstração. Note que neste caso vamos começar nossa indução a partir de $n_0 = 4$ e demonstrar que a propriedade vale para todo inteiro maior ou igual a 4.

Seja $P(n)$ a proposição “ $2^n < n!$ ”.

Passo base: $P(4)$ é verdadeiro porque $2^4 = 16$ é menor que $4! = 24$.

Passo indutivo: Assuma que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro positivo arbitrário $k \geq 4$, ou seja, a hipótese de indução é que, para um inteiro arbitrário $k \geq 4$,

$$2^k < k!.$$

Sob esta hipótese, queremos mostrar $P(k + 1)$, ou seja,

$$2^{k+1} < (k + 1)!$$

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 4 (Continuação)

Para isto, podemos derivar

$$\begin{aligned}2^{k+1} &= 2(2^k) \\ &< 2(k!) && \text{(pela I.H.)} \\ &< (k+1)k! && (2 < k+1, \text{ pois } k \geq 4) \\ &= (k+1)!,\end{aligned}$$

de onde concluímos o passo indutivo.

Logo, por indução mostramos que $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 4 : P(n)$, ou seja, que $2^n < n!$ para todo inteiro $n \geq 4$. \square

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 5 Para todo inteiro $n \geq 0$, $n^3 - n$ é divisível por 3.

Demonstração. Seja $P(n)$ a proposição “ $n^3 - n$ é divisível por 3”.

Passo base: $P(0)$ é verdadeiro porque $0^3 - 0 = 0$ é divisível por 3.

Passo indutivo: Assuma que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro não-negativo arbitrário k , ou seja, que é verdadeira a hipótese de indução de que $k^3 - k$ é divisível por 3.

Queremos mostrar que $P(k + 1)$ também é verdadeiro, ou seja, que $(k + 1)^3 - (k + 1)$ é divisível por 3.

Para isto, podemos fazer:

$$\begin{aligned}(k + 1)^3 - (k + 1) &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k + 1) \\ &= (k^3 - k) + 3(k^2 + k).\end{aligned}$$

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 5 (Continuação)

Então sabemos que

$$(k+1)^3 - (k+1) = (k^3 - k) + 3(k^2 + k).$$

Note que no lado direito da igualdade acima, a primeira parcela da soma é $(k^3 - k)$ e, pela I.H., este valor é divisível por 3.

Além disso, a segunda parcela $3(k^2 + k)$ da soma do lado direito também é divisível por 3.

Logo todo o lado direito da igualdade é divisível por 3, e assim concluímos indutivo ao mostrar que $(k+1)^3 - (k+1)$ é divisível por 3.

Assim mostramos por indução que $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$, ou seja, que $n^3 - n$ é divisível por 3 para todo inteiro $n \geq 0$. □

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 6 Para todo inteiro não-negativo n , se um conjunto possui n elementos, então este conjunto possui 2^n subconjuntos.

Demonstração. Seja $P(n)$ a proposição “*todo conjunto de n elementos possui 2^n subconjuntos*”.

Passo base: $P(0)$ é verdadeiro porque o único conjunto de 0 elementos é o conjunto vazio \emptyset , que possui somente $2^0 = 1$ subconjunto (ele mesmo).

Passo indutivo: Assuma que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro não-negativo arbitrário k , ou seja, a hipótese de indução é:

“*Todo conjunto de k elementos possui 2^k subconjuntos.*”

Sob a I.H., queremos demonstrar $P(k + 1)$, ou seja, que

“*Todo conjunto de $k + 1$ elementos possui 2^{k+1} subconjuntos.*”

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

● Exemplo 6 (Continuação)

Para mostrar isto, seja T um conjunto qualquer de $k + 1$ elementos. Então é possível escrever T como $S \cup \{a\}$, onde

- a é um elemento qualquer de T ;
- $S = T - \{a\}$ e, portanto, $|S| = k$.

Note que os subconjuntos de T podem ser obtidos da seguinte forma.

Para cada subconjunto X de S , existem exatamente dois subconjuntos de T : o subconjunto X (em que a não aparece) e o subconjunto $X \cup \{a\}$ (em que a aparece). Logo o número de subconjuntos de T é o dobro do número de subconjuntos de S . Pela hipótese indutiva, S tem 2^k subconjuntos, logo T possui $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ subconjuntos. Isto conclui o passo indutivo.

Logo, por indução mostramos que $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$, ou seja, que todo conjunto de n elementos possui 2^n subconjuntos. □

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 7 Uma das Leis de De Morgan afirma que, para dois conjuntos A_1 e A_2 , temos

$$\overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}.$$

Sabendo disto, demonstre a seguinte generalização da Lei de De Morgan:

$$\overline{\bigcap_{j=1}^n A_j} = \bigcup_{j=1}^n \overline{A_j},$$

sempre que A_1, A_2, \dots, A_n são subconjuntos de um conjunto universal U e $n \geq 2$.

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 7 (Continuação)

Demonstração. Seja $P(n)$ a proposição “ $\overline{\bigcap_{j=1}^n A_j} = \bigcup_{j=1}^n \overline{A_j}$ sempre que A_1, A_2, \dots, A_n são subconjuntos de um conjunto universal U e $n \geq 2$ ”.

Passo base: $P(2)$ é verdadeiro porque, como já demonstramos nesse curso, a Lei de De Morgan original garante que $\overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$.

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 7 (Continuação)

Passo indutivo: Assuma que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro positivo arbitrário $k \geq 2$, ou seja, a hipótese de indução é

$$\overline{\bigcap_{j=1}^k A_j} = \bigcup_{j=1}^k \overline{A_j},$$

sempre que A_1, A_2, \dots, A_n são subconjuntos de um conjunto universal U e $n \geq 2$.

Queremos mostrar que, sob a I.H., $P(k+1)$ também é verdadeira, ou seja, que

$$\overline{\bigcap_{j=1}^{k+1} A_j} = \bigcup_{j=1}^{k+1} \overline{A_j},$$

sempre que A_1, A_2, \dots, A_n são subconjuntos de um conjunto universal U e $n \geq 2$.

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 7 (Continuação)

Para isto, note que

$$\begin{aligned}\overline{\bigcap_{j=1}^{k+1} A_j} &= \overline{\left(\bigcap_{j=1}^k A_j\right) \cap A_{k+1}} \\ &= \overline{\left(\bigcap_{j=1}^k A_j\right)} \cup \overline{A_{k+1}} \\ &= \left(\bigcup_{j=1}^k \overline{A_j}\right) \cup \overline{A_{k+1}} \\ &= \bigcup_{j=1}^{k+1} \overline{A_j},\end{aligned}$$

(usando a Lei de De Morgan sobre os conjuntos $\bigcap_{j=1}^k A_j$ e A_{k+1})

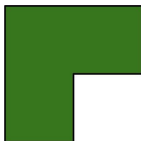
(pela I.H.)

de onde concluímos o passo indutivo.

Logo, por indução mostramos que $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 2 : P(n)$, ou seja, que a generalização da Lei de De Morgan é válida. □

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 8 Seja o inteiro $n \geq 1$. Demonstre que qualquer região quadrada de tamanho $2^n \times 2^n$, com um quadrado removido, pode ser preenchida com peças no formato L, formada por 3 quadradinhos, do tipo mostrado abaixo.

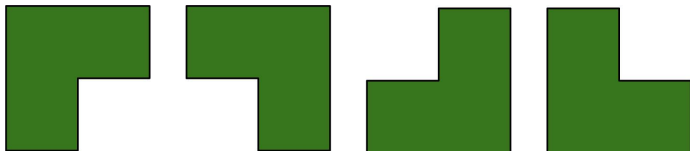


Demonstração. Seja $P(n)$ a proposição “qualquer região quadrada de tamanho $2^n \times 2^n$, com um quadrado removido, pode ser preenchida com peças no formato L”.

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 8 (Continuação)

Passo base: $P(1)$ é verdadeiro porque qualquer tabuleiro de tamanho $2^1 \times 2^1$ com um quadrado removido pode ser preenchido com uma peça em formato de L, conforme mostrado abaixo:



Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 8 (Continuação)

Passo indutivo: Assuma como hipótese indutiva que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro positivo arbitrário k , ou seja, que qualquer região quadrada de tamanho $2^k \times 2^k$, com um quadrado removido, pode ser preenchida com peças no formato de L.

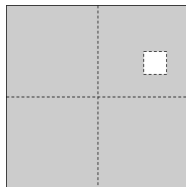
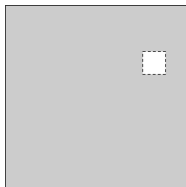
Sob a I.H., queremos mostrar que $P(k + 1)$ também deve ser verdadeiro, ou seja, que qualquer região quadrada de tamanho $2^{k+1} \times 2^{k+1}$, com um quadrado removido, pode ser preenchida com peças no formato de L.

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 8 (Continuação)

Para isto, considere uma região quadrada de tamanho $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ qualquer, com um quadrado removido.

Divida essa região em 4 regiões de tamanho $2^k \times 2^k$ como mostrado abaixo.

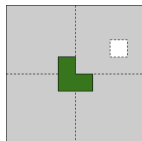
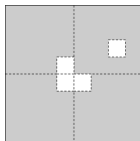


Pela hipótese de indução, a região $2^k \times 2^k$, com um quadrado removido, pode ser preenchida com peças no formato de L. O problema passa a ser como a mesma hipótese indutiva pode ser aplicada às outras três regiões sem nenhum quadrado removido.

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 8 (Continuação)

Temporariamente remova um quadrado de cada região $2^k \times 2^k$ que está “completa”, formando um “buraco” como mostrado na figura à esquerda.



Cada uma dessas três regiões tem tamanho $2^k \times 2^k$ e, portanto, pela I.H., podem ser preenchidas com peças no formato de L.

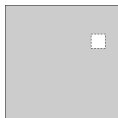
Para finalizarmos a solução, preenchamos o “buraco” criado pelas três peças removidas de cada região cobrindo-o com uma peça L, como mostrado na figura à direita. Com isto concluímos o passo indutivo.

Logo, por indução mostramos que $\forall n \in \mathbb{Z}^+ : P(n)$, ou seja, que qualquer região de tamanho $2^n \times 2^n$, $n \geq 1$, com um quadrado removido, pode ser preenchida com peças no formato de L. □

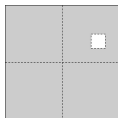
Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 8 (Continuação)

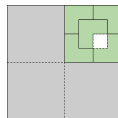
Ilustrando o passo a passo do passo indutivo da demonstração anterior:



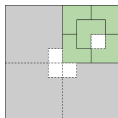
(i) Comece com a região de tamanho $2^{k+1} \times 2^{k+1}$.



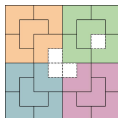
(ii) Divida-a em 4 sub-regiões de tamanho $2^k \times 2^k$.



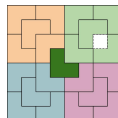
(iii) Use a I.H. para preencher a sub-região com o buraco original.



(iv) Retire um quadrado de cada sub-região restante.



(v) Aplique a I.H. em cada uma das sub-regiões restantes.



(vi) Preencha o buraco com uma peça em L.

Quando usar indução matemática

- Algumas observações importantes sobre a indução matemática:
 1. O princípio da indução pode ser utilizado para demonstrar propriedades dos números inteiros (se elas forem verdadeiras).
 2. O princípio da indução não pode ser utilizado para descobrir propriedades dos números inteiros.
- A propriedade de interesse geralmente é descoberta usando um outro método (talvez até tentativa e erro).

Uma vez que uma propriedade tenha sido conjecturada, a indução pode ser usada para demonstrá-la (caso a propriedade seja mesmo verdadeira).

Modelo de demonstração por indução matemática (fraca)

1. Expresse a afirmação a ser demonstrada na forma “para todo inteiro $n \geq n_0$, $P(n)$ ”, onde n_0 é um inteiro fixo.
2. Escreva “Passo base.” e mostre que $P(n_0)$ é verdadeiro, se certificando de que o valor correto de n_0 foi utilizado. Isto conclui o passo base.
3. Escreva as palavras “Passo indutivo.”
4. Escreva claramente a hipótese indutiva, na forma “Assuma que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro arbitrário fixo $k \geq n_0$.”
5. Escreva o que precisa ser demonstrado sob a suposição de que a hipótese de indução é verdadeira. Ou seja, escreva o que $P(k + 1)$ significa.
6. Demonstre a afirmação $P(k + 1)$ utilizando o fato de que $P(k)$ é verdadeiro. Certifique-se de que sua demonstração é válida para qualquer $k \geq n_0$.
7. Identifique claramente as conclusões do passo indutivo, e conclua-o escrevendo, por exemplo, “isto completa o passo de indução”.
8. Completados o passo base e o passo indutivo, escreva a conclusão da demonstração: que, por indução matemática, $P(n)$ é verdadeiro para todos os inteiros $n \geq n_0$.

Princípio da indução matemática (fraca): Erros comuns

- Como em qualquer outra técnica de demonstração, o princípio da indução matemática deve ser usado com cautela para evitar erros.
- Em particular, para que a demonstração por indução esteja correta é preciso demonstrar ambos o passo base e o passo indutivo.

Se um dos dois passos não for demonstrado, o resultado não está garantido!

- Exemplo 9 Imagine que tenhamos a conjectura de que o predicado $P(n)$ definido como “10” é múltiplo de 7” é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se quisermos demonstrar esta afirmação por indução:

- a) É possível demonstrar o passo indutivo?
- b) É possível demonstrar o passo base?
- c) A demonstração por indução pode ser concluída com sucesso?

Princípio da indução matemática (fraca): Erros comuns

- Exemplo 9 (Continuação)

Solução.

a) Vamos começar pelo passo indutivo.

Passo indutivo: Assuma como hipótese indutiva que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro $k \geq 0$ arbitrário, ou seja, que 10^k é divisível por 7. Sob a I.H., queremos mostrar que $P(k+1)$ também deve ser verdadeiro, ou seja, que 10^{k+1} é divisível por 7.

Se 10^k é divisível por 7, então existe um inteiro r tal que $10^k = 7r$.

Logo podemos derivar

$$\begin{aligned} 10^{k+1} &= 10 \cdot 10^k \\ &= 10 \cdot 7r && \text{(pela I.H.)} \\ &= 7(10r) \end{aligned}$$

e, portanto, 10^{k+1} é divisível por 7, o que conclui o passo indutivo com sucesso.

Princípio da indução matemática (fraca): Erros comuns

- Exemplo 9 (Continuação)

b) Agora olharemos o passo base.

Passo base: Queremos mostrar $P(0)$, ou seja, que $10^0 = 1$ é divisível por 7. Mas isso é claramente falso.

Logo o passo base não é válido.

c) Por fim concluímos que a demonstração por indução não foi completada com sucesso, pois, apesar de o passo indutivo ter sido demonstrado, o passo base não foi.

(Na verdade, o predicado $P(n)$ é falso para todo $n \in \mathbb{N}$!)



Indução Matemática (Forte) e Boa Ordenação

Princípio da indução matemática (forte): Introdução

- O princípio de indução que vimos até agora é conhecido como o **princípio da indução matemática fraca**:

$$\left(\underbrace{P(1)}_{\text{Passo base}} \wedge \underbrace{\forall k \in \mathbb{Z}^+ : \overbrace{(P(k) \rightarrow P(k+1))}^{\text{I.H.}}}_{\text{Passo indutivo}} \right) \rightarrow \underbrace{\forall n \in \mathbb{Z}^+ : P(n)}_{\text{Conclusão}}$$

Ele recebe este nome de indução “fraca” porque a hipótese de indução (I.H.) do passo indutivo é apenas que $P(k)$ seja verdadeiro para algum k .

- Às vezes é complicado usar a indução fraca para demonstrar um resultado, e podemos recorrer ao **princípio da indução matemática forte**.
 - Neste princípio, a hipótese de indução do passo indutivo é de que $P(j)$ é válido para todo $1 \leq j \leq k$.

Princípio da indução matemática (forte)

- Para mostrar que uma propriedade $P(n)$ vale para todos os inteiros positivos n , uma **demonstração** que utilize **princípio da indução matemática (forte)** possui duas partes:

Demonstração por indução forte:

Passo base: Demonstra-se $P(1)$;

Passo indutivo: Demonstra-se que, para qualquer inteiro positivo k , se $P(j)$ é verdadeiro para todo $1 \leq j \leq k$, então $P(k+1)$ é verdadeiro.

- A **hipótese de indução** ou **I.H.** da indução forte é $P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(k)$ são todos verdadeiros.
- O princípio da indução matemática forte pode ser expresso como uma regra de inferência sobre os números inteiros:

$$\left(\underbrace{P(1)}_{\text{Passo base}} \wedge \underbrace{\forall k \in \mathbb{Z}^+ : (P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(k) \rightarrow P(k+1))}_{\text{Passo indutivo}} \right) \rightarrow \underbrace{\forall n \in \mathbb{Z}^+ : P(n)}_{\text{Conclusão}}$$

Princípio da indução matemática forte: Intuição

- Imagine que você esteja diante de uma escada de infinitos degraus, e você novamente se pergunta: *“Será que eu consigo alcançar qualquer degrau dessa escada?”*
- Mas, desta vez, você sabe que:
 1. você consegue alcançar o primeiro degrau e também o segundo degrau, e
 2. se você alcançar um degrau qualquer, você consegue alcançar dois degraus acima (ou seja, você pode subir degraus de dois em dois).
- Você consegue usar a indução fraca para verificar que conseguimos alcançar qualquer degrau dessa escada?

Princípio da indução matemática forte: Intuição

- Vamos tentar responder à pergunta usando indução forte.

Vamos chamar de $P(n)$ a proposição “*Eu consigo alcançar o n -ésimo degrau da escada*”.

Passo base: $P(1)$ é verdadeiro porque eu consigo alcançar o primeiro degrau. O mesmo vale para $P(2)$.

Passo indutivo: Assumamos como hipótese de indução que para um $k \geq 2$, as proposições $P(1), P(2), \dots, P(k)$ são todas verdadeiras. Queremos mostrar que $P(k+1)$ também é verdadeiro, ou seja, que podemos alcançar também o $(k+1)$ -ésimo degrau.

Para ver que podemos alcançar o degrau $k+1$, note que pela I.H. alcançamos todos os degraus entre 1 e k (para $k \geq 2$), e, em particular, o degrau $k-1$. Como alcançamos $k-1$ e a regra 2 diz que uma vez que tenhamos alcançado um degrau podemos alcançar dois degraus acima, podemos alcançar o degrau $k+1$. E assim termina o passo indutivo.

Dessa forma, a demonstração por indução forte está completa.

Exemplos de uso de indução matemática (forte)

- Exemplo 10 Se n é um inteiro maior ou igual a 2, então n pode ser escrito como o produto de números primos.

Demonstração. Seja $P(n)$ a proposição “ n pode ser escrito como o produto de números primos”.

Passo base: $P(2)$ é verdadeiro porque 2 pode ser escrito como o produto de um número primo, ele mesmo.

Passo indutivo: A hipótese de indução é que, para um inteiro $k \geq 2$ arbitrário, $P(j)$ é verdadeiro para todos os inteiros positivos tais que $2 \leq j \leq k$, ou seja, que qualquer inteiro j entre 2 e k pode ser escrito como o produto de primos.

Para completar o passo indutivo, temos que mostrar que a I.H. de indução implica que $P(k+1)$ também é verdadeiro, ou seja, que o inteiro $k+1$ também pode ser escrito como o produto de primos.

Exemplos de uso de indução matemática

- Exemplo 10 (Continuação)

Há dois casos a se considerarem: $k + 1$ é primo ou $k + 1$ é composto.

- Caso 1: $k + 1$ é primo. Neste caso $P(k + 1)$ é trivialmente verdadeiro, porque $k + 1$ é o produto de um único primo, ele mesmo.
- Caso 2: $k + 1$ é composto. Neste caso $k + 1$ pode ser escrito como o produto de dois inteiros a e b tais que $2 \leq a \leq b \leq k$. Pela hipótese de indução, tanto a quanto b podem ser escritos como o produto de primos (já que $P(j)$ vale para todo $2 \leq j \leq k$). Logo, $k + 1 = ab$ também pode ser escrito como o produto de primos e assim concluímos o passo indutivo.

Como concluímos com sucesso o passo base e o passo indutivo, mostramos por indução que $\forall n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 2 : P(n)$, ou seja, que todo inteiro $n \geq 2$ pode ser escrito como o produto de números primos. □

Exemplos de uso de indução matemática (forte)

- Exemplo 11 Toda postagem de 12 centavos ou mais pode ser feita usando apenas selos de 4 centavos e selos de 5 centavos.

Demonstração. Seja $P(n)$ a proposição “qualquer postagem de n centavos pode ser feita usando apenas selos de 4 centavos e selos de 5 centavos”.

Passo base: Vamos precisar de quatro casos base:

- $P(12)$ é verdadeiro porque podemos usar três selos de 4 centavos;
- $P(13)$ é verdadeiro porque podemos usar dois selos de 4 centavos e um selo de 5 centavos;
- $P(14)$ é verdadeiro porque podemos usar um selo de 4 centavos e dois selos de 5 centavos; e
- $P(15)$ é verdadeiro porque podemos usar 3 selos de 5 centavos;

Isto completa o passo base.

Exemplos de uso de indução matemática (forte)

- Exemplo 11 (Continuação)

Passo indutivo: A hipótese de indução é que $P(j)$ é verdadeiro para $12 \leq j \leq k$, onde k é um inteiro $k \geq 15$. Ou seja, a I.H. é que toda postagem de valores entre 12 centavos e k centavos pode ser feita usando selos de 4 e 5 centavos apenas.

Para completar o passo indutivo, vamos mostrar que, sob a I.H., $P(k + 1)$ é verdadeiro, ou seja, que uma postagem de $k + 1$ centavos pode ser feita usando-se apenas selos de 4 e 5 centavos.

Pela I.H., $P(k - 3)$ é verdadeiro porque $k - 3 \geq 12$ e para todo $12 \leq j \leq k$ temos $P(j)$ verdadeiro. Logo, existe uma maneira de postar $k - 3$ centavos usando apenas selos de 4 e 5 centavos. Para postar $k + 1$ centavos, basta acrescentar à postagem possível para $k - 3$ centavos um selo de 4 centavos.

Isto concluímos o passo indutivo e a demonstração. □

Exemplos de uso de indução matemática (forte)

- Exemplo 12 O Jogo de Nim possui as seguintes regras:

1. Há duas pilhas de fósforos (não vazias) sobre a mesa.
2. Dois jogadores se alternam em rodadas, sendo que em cada rodada um jogador escolhe uma pilha de fósforos e retira da mesma um número positivo de fósforos.
3. O jogador que remover o último fósforo ganha o jogo.

Mostre que se as duas pilhas contêm inicialmente o mesmo número de fósforos, então o segundo jogador sempre pode ganhar o Jogo de Nim.

Demonstração. Seja n o número de fósforos em cada pilha. Seja $P(n)$ a proposição “o segundo jogador pode ganhar o Jogo de Nim se houver inicialmente n fósforos em cada pilha”.

Passo base: $P(1)$ é verdadeiro porque nesse caso o primeiro jogador só tem uma opção: remover um fósforo de uma das pilhas, e assim o segundo jogador ganha ao remover o fósforo da outra pilha.

Exemplos de uso de indução matemática (forte)

- Exemplo 12 (Continuação)

Passo indutivo: A hipótese de indução é a afirmação de que $P(j)$ é verdadeiro para todo $1 \leq j \leq k$, onde $k \geq 1$ é um inteiro arbitrário. Ou seja, a I.H. é que o segundo jogador sempre pode vencer o Jogo de Nim em que cada pilha começa com j fósforos, sendo j um inteiro entre 1 e k , com $k \geq 1$.

Assumindo a I.H., precisamos mostrar que $P(k+1)$ é verdadeiro, ou seja, que o segundo jogador pode vencer o Jogo de Nim se cada pilha começar com $k+1$ fósforos.

Para mostrar isto, suponha que cada pilha comece com $k+1$ fósforos. Pelas regras do jogo, o primeiro jogador tem que remover um número r fósforos tal que $1 \leq r \leq k+1$. Comece por notar que se o primeiro jogador remover exatamente $k+1$ fósforos de uma pilha, o segundo jogador ganha ao remover $k+1$ fósforos da outra pilha.

Exemplos de uso de indução matemática (forte)

- Exemplo 12 (Continuação)

Vamos nos concentrar agora no caso de o primeiro jogador remover $1 \leq r \leq k$ fósforos de uma pilha.

Nesse caso, o segundo jogador pode remover o mesmo número r de fósforos da outra pilha.

Nesse caso, cada pilha passa a conter um número igual de fósforos $k + 1 - r$.

Como $1 \leq k + 1 - r \leq k$, a hipótese de indução garante que o segundo jogador pode ganhar o Jogo de Nim uma vez que cada pilha tenha $k + 1 - r$ fósforos.

Logo a indução forte termina. □

Princípio da Boa Ordenação

- O princípio da indução matemática fraca e forte são equivalentes:
 1. Toda demonstração que pode ser feita com indução fraca, pode ser feita também com indução forte.
 - Desafio para o(a) estudante: como demonstrar isto?
 2. Toda demonstração que pode ser feita com indução forte, pode ser feita também com indução fraca.
 - Desafio para o(a) estudante: como demonstrar isto?
- Além disso, o princípio da indução matemática fraca e forte são equivalentes ao seguinte axioma dos números naturais:

Princípio da Boa Ordenação: Seja S um subconjunto não-vazio de \mathbb{N} . Então S tem um menor elemento.