Exercício 1 – Há 3 linhas de ônibus entre as cidades A e B e 2 linhas de ônibus entre B e C. De quantas maneiras uma pessoa pode viajar:

(a) indo de A até C, passando por B?

(b) indo e voltando entre A e C sempre passando por B?

Solução: a) Observamos que temos as seguintes linhas entre as cidades:

$$\underbrace{A \qquad\qquad\qquad B}_{3}\underbrace{\qquad\qquad\qquad C}_{2}$$

Assim se esta pessoa pegar a Linha 1 até a cidade B ela terá mais duas opções de linha entre as cidades B e C. Se pegar a Linha 2 também. E se pegar a Linha 3 também.

Pelo princípio multiplicativo ela tem 3 . 2 = 6 maneiras diferentes de viajar.

b) Como visto no exercício "a" temos 6 maneiras de viajar partindo da cidade A até C passando pela cidade B. Da cidade C até A também teremos 6 maneiras. Então pelo princípio multiplicativo temos:
6 x 6 = 36 maneiras de viajar.

Exercício 2 – Considere 3 vogais (incluindo o A) e 7 consoantes (incluindo o B):

a) Quantos anagramas de 5 letras diferentes podem ser formados com 3 consoantes e 2 vogais?

1°. Devemos calcular, separadamente, de quantas maneiras diferentes podemos pegar vogais e consoantes:

→Para vogais: como são duas vogais diferentes e POR ENQUANTO não importa a ordem, então:

$C_3^2 = \frac{3!}{2!1!} = 3$

→Para consoantes: como são 3 consoantes diferentes e POR ENQUANTO não importa a ordem, então:

$C_7^3 = \frac{7!}{3!4!} = 35$

Como para cada combinação de vogais, gera uma "árvore" de possibilidades de consoantes a seguir, então, pelo princípio multiplicativo: 3x35=105.

2°. Como as letras podes trocar de posição entre si e formar diferentes anagramas, então:

$P_5 = 5! = 120$

Agora multipliquemos a quantidade de possibilidades de utilização de letras pela quantidade de posições possíveis e teremos:

120x105=12.600. Portanto podem ser formados 12.600 anagramas diferentes.

Considerando os anagramas do item (a), responda:
b) Quantos contém a letra B?

A única diferença da resolução acima, é que agora possuímos uma consoante fixa, então ao invés de calcular C_7^3, calcularemos C_6^2, pois uma consoante já está fixa sobrando apenas 6 e 2 colocações.

Portanto:

$C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = 15.$

Seguindo o raciocínio da questão anterior: 3x15=45 $\Longrightarrow$ 45x120=5400 anagramas diferentes contendo a letra "B".

c) Quantos começam com o B?

Agora, além de ter o B como consoante fixa, temos ele fixo na primeira posição também.

Portanto a diferença entre a resolução desta e a anterior, é que não temos mais uma permutação de 5 termos, já que o primeiro está fixo. Então:

$P_4 = 4! = 24$

Seguindo o raciocínio da questão anterior: 45x24=1.080 anagramas começando por "B".

d) Agora como temos o "A" como vogal fixa e fixa como primeira, teremos uma pequena diferença em relação à resolução da questão "2.a)": Ao invés de calcular C_3^2, calcularemos C_2^1, pois já temos uma vogal fixa e ao invés de permutar 5 termos no final, permutaremos 4. Então:

$C_2^1 = 2$

$P_4 = 4! = 24$

Seguindo o raciocínio da questão "2.a)": 2x35=70 $\Longrightarrow$ 70x24=1.680 anagramas começando com "A".

e) Quantos começam por A e contém o B?

Por partes:

Temos o "A" fixo e temos ele na primeira posição. Logo teremos as seguintes alterações em relação à questão "2.a)":

$C_3^2 \rightarrow C_2^1$=2

$P_5 \rightarrow P_4$=24

Temos o "B" " fixo e temos ele na primeira posição. Logo teremos as seguintes alterações em relação à questão "2.a)":

$C_7^3 \rightarrow C_6^2 = 15$

Seguindo o raciocínio da questão"2.a)": 2x15=30 $\Longrightarrow$ 30x24=720 anagramas começando com "A" e contendo o "B".

Exercício 3 – Simplifique:

a) $\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1).n!}{n!} = n+1$

b) $\frac{n!}{(n+2)!} = \frac{n!}{(n+2).(n+1).n!} = \frac{1}{(n+2).(n+1)} = [(n+2)(n+1)]^{-1}$

c) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1).n.(n-1)!}{(n-1)!} = (n+1).n$

d) $\frac{(n-r)!}{(n-r-2)!} = \frac{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)!}{(n-r-2)!} = (n-r)(n-r-1)$

Exercício 4 – Supondo que as placas dos veículos contêm 3 letras (dentre as 26 disponíveis), seguidas de 4 dígitos numéricos, quantas são as placas nas quais:

a) o zero não aparece na primeira posição?

b) não há repetição de letras e nem de dígitos?

c) não há restrições quanto ao número de repetições?

Solução: 3 letras (26 total) e 4 números

a) $\underline{26}\ \underline{26}\ \underline{26}\ \underline{9}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10}$

$$26^3 \cdot 9 \cdot 10^3 = 9 \cdot 260^3 = 158.184.000$$

b) $\underline{26}\ \underline{25}\ \underline{24}\ \underline{10}\ \underline{9}\ \underline{8}\ \underline{7}$

$$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 78.624.000$$

c) $\underline{26}\ \underline{26}\ \underline{26}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10}$

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^3 \cdot 10 \cdot 10^3 = 175.760.000$$

Exercício 5 – 5 rapazes e 5 moças devem posar para uma fotografia, ocupando 5 degraus de uma escadaria, de forma que em cada degrau fique um rapaz e uma moça. De quantas maneiras podemos arrumar este grupo?

Solução: Como os 5 rapazes devem ocupar os 5 degraus e, da mesma forma, as 5 moças, iremos permutar a posição das moças e dos rapazes nos degraus, assim vamos ter:

$P_5 . P_5$ =5! . 5!= 5.4.3.2.1 . 5.4.3.2.1= 120 . 120= 14400 possibilidades iniciais.

Mas cada rapaz pode trocar de lugar com a moça que está ao seu lado (no mesmo degrau), ou seja, temos duas posições possíveis em cada escada. Como são 5 degraus na escada, vamos ter: 2.2.2.2.2=32 possibilidades de trocar as posições.

Logo, pelo princípio multiplicativo, teremos 32.14400= 460800 maneiras diferentes.

Exercício 8 – Prove as identidades:

a) $p . C_n^p = n . n_{n-1}^{p-1}$ b) $\frac{1}{p+1} . C_n^p = \frac{1}{n+1} . C_{n+1}^{p+1}$

Provando (a):

$$p . \frac{n!}{(n-p)! . p!} = n . \frac{(n-1)!}{(n-1-p+1)! . (p-1)!}$$

$$p . \frac{n!}{(n-p)! . p!} = n . \frac{(n-1)!}{(n-p)! . (p-1)!}$$

$$p . \frac{n!}{(n-p)! . p . (p-1)!} = n . \frac{(n-1)!}{(n-p)! . (p-1)!}$$

$$\frac{n!}{(n-p)! . (p-1)!} = n . \frac{(n-1)!}{(n-p)! . (p-1)!}$$

$$\frac{n!}{(n-p)! . (p-1)!} = \frac{n . (n-1)!}{(n-p)! . (p-1)!}$$

$$\frac{n . (n-1)!}{(n-p)! . (p-1)!} = \frac{n . (n-1)!}{(n-p)! . (p-1)!}$$; Como queríamos provar.

Provando (b):

$$\left(\frac{1}{p+1}\right) . \frac{n!}{(n-p)! . p!} = \left(\frac{1}{n+1}\right) . \frac{(n+1)!}{(n+1-p-1)! . (p+1)!}$$

$$\left(\frac{1}{p+1}\right) . \frac{n!}{(n-p)! . p!} = \left(\frac{1}{n+1}\right) . \frac{(n+1) . (n+1-1)!}{(n-p)! . (p+1)!}$$

$$\left(\frac{1}{p+1}\right) . \frac{n!}{(n-p)! . p!} = \frac{n!}{(n-p)! . (p+1)!}$$

$$\frac{n!}{(n-p)! . p!} = \frac{n!}{(n-p)! . (p+1)!} . (p+1)$$

$$\frac{n!}{(n-p)! . p!} = \frac{n!}{(n-p)! . (p+1) . (p+1-1)!} . (p+1)$$

$$\frac{n!}{(n-p)!\,.\,p!} = \frac{n!}{(n-p)!\,.p!}$$, Como queríamos provar.

Exercício 11 – Considere os números de 3 algarismos distintos formados com os dígitos 2, 3, 5, 8, 9.

a) Quantos são estes números?

Seja $A = \{2,3,5,8,9\} \Rightarrow \ n(A) = 5.$

Queremos formar números de 3 dígitos distintos, ou seja, organizar:

$(d_1, d_2, d_3) \in A \times A_1 \times A_2 \; onde \; n(A_1) = 4 \; e \; n(A_2) = 3.$

Assim pelo princípio multiplicativo teremos:

$n(A \times A_1 \times A_2) = n(A).n(A_1).n(A_2) = \ 5.4.3 = 60$

ou seja, temos

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5.4.3 = 60.$$

b) Quantos são menores do que 800?

Seja $A = \{2,3,5,8,9\} \ \Rightarrow n(A) = 5.$

Queremos formar números de 3 dígitos distintos menores que 800, ou seja, organizar:

$(d_1, d_2, d_3) \in A_1 \times A_2 \times A_3,$ onde

$A_1 = \{2,3,5) \Longrightarrow \ n(A_1) = 3, \ n(A_2) = 4 \; e \; n(A_3) = \ 3.$

Assim pelo princípio multiplicativo teremos:

$n(A_1 \times A_2 \times A_3) = n(A_1).n(A_2).n(A_3) = 3.4.3 = 36,$

que corresponde a

$3.A_{4,2} = \ 3.\frac{4!}{(4-2)!} = 3.\frac{4!}{2!} = 3.12 = 36.$

c) Quantos são múltiplos de 5?

Queremos formar números de 3 dígitos distintos múltiplos de 5, ou seja, organizar:

$(d_1, d_2, d_3) \in A_1 \times A_2 \times A_3$, onde

$A_1 = \{2,3,8,9\} \ \Longrightarrow \ n(A_1) = 4; n(A_2) = 3 \ \ A_3 = \{5\} \ \Longrightarrow \ n(A_3) = 1.$

Assim pelo princípio multiplicativo teremos:

$n(A_1 \times A_2 \times A_3) = n(A_1) \times \ n(A_2) \times n(A_3) = 4.3.1 = 12,$ que corresponde a

$$A_{4,2}.n(A_3) = \frac{4!}{(4-2)!}.1 = \frac{4!}{2!} = 12.$$

d) Quantos são pares?

Seja $A = \{2, 3, 5, 8, 9\}$ $n(A) = 5$

Queremos formar números de 3 dígitos distintos pares, ou seja, organizar:

$$(d_1, d_2, d_3) \in A_1 \times A_2 \times A_3,$$

$onde\ A_3 = \{2, 8\},\ n(A_3) = 2;\ n(A_1) = 4,\ n(A_2) = 3.$

Assim pelo princípio multiplicativo teremos:

$n(A_1 \times A_2 \times A_3) = n(A_1).n(A_2).n(A_3) = 4.3.2 = 24$

e) Quantos são impares?

Seja $A = \{2, 3, 5, 8, 9\},\ n(A) = 5.$

Queremos formar números de 3 dígitos distintos pares, ou seja, organizar:

$$(d_1, d_2, d_3) \in A_1 \times A_2 \times A_3,$$

$onde\ A_3 = \{3, 5, 9\},\ n(A_3) = 3;\ n(A_1) = 4,\ n(A_2) = 3.$

Assim pelo princípio multiplicativo teremos:

$n(A_1 \times A_2 \times A_3) = n(A_1).n(A_2).n(A_3) = 4.3.3 = 36.$

Exercício 15 – Encontre o número de inteiros positivos que podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3 e 4, sendo que não há repetição de dígitos num mesmo número.

Solução: Como temos 4 dígitos, podem ser formados números de um a quatro algarismos. Pelo princípio multiplicativo, para cada um dos casos temos as seguintes possibilidades:

Números de 1 algarismo: 4 possibilidade

*Números de 2 algarismos: 4*3=12 possibilidades*

*Números de 3 algarismos: 4*3*2=24 possibilidades*

*Números de 4 algarismos: 4*3*2*1= 24 possibilidades*

A quantidade total de números que podem ser formados é obtida então pelo princípio aditivo: 4+12+24+24= 64 possibilidades.

Exercício 18 – São dados os pontos A, B, C, D sobre uma reta *m* e A, F, G, H e I sobre uma reta *n*, distinta de *m*. Quantos triângulos podem ser formados unindo-se estes pontos?

Solução:

Observamos que as retas se interceptam em A, então temos que da reta m os segmentos, AB, AC, AD, BC, BD, CD, fazem combinação com outros quatro pontos da reta n para formar triângulos. Já da reta n (FG, FH, FI, GH, GI, HI), combinaremos com apenas três pontos da reta m. Assim o número total de triângulo possíveis é dado por

*C(4,2)*4 + C(4,2)*3 = (6*4) + (6*3) = 24+18 = 42 triângulos, onde*

$$C_4^2 = \frac{4!}{4!\,(4-2)!}$$

Exercício 19 – Numa classe existem 8 alunas das quais uma se chama Maria e 7 alunos, sendo José o nome de um deles. Formam-se comissões constituídas de 5 alunas e 4 alunos. Quantos são as comissões das quais:

a) Maria participa?

b) Maria participa sem José?

c) José participa?

d) José participa sem Maria?

e) Maria e José participam simultaneamente?

Solução:

a) $\mathrm{C}_7^4 \cdot C_7^4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} \cdot \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7!}{4!3!} \cdot \frac{7!}{4!3!} = \frac{5040}{144} \cdot \frac{5040}{144} = 35 \cdot 35 = 1225$

b) $\mathrm{C}_7^4 \cdot \mathrm{C}_6^4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} \cdot \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{5040}{144} \cdot \frac{720}{48} = 35 \cdot 15 = 525$

c) $\mathrm{C}_8^5 \cdot \mathrm{C}_6^3 = \frac{8!}{5!(8-5)!} \cdot \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{40320}{720} \cdot \frac{720}{36} = 56 \cdot 20 = 1120$

d) $\mathrm{C}_6^3 \cdot \mathrm{C}_7^5 = \frac{6!}{3!(6-3)!} \cdot \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{720}{36} \cdot \frac{5040}{240} = 20 \cdot 21 = 420$

e) $C_7^4 \cdot C_6^3 = 35 \cdot 20 = 700.$

Exercício 20 – De quantos modos diferentes podem ser dispostos em fila m + h pessoas (todas alturas diferentes), sendo m mulheres e h homens:

a) sem restrições?

b) de modo que pessoas do mesmo sexo fiquem juntas?

c) de modo que pessoas do mesmo sexo fiquem juntas, respeitando-se a ordem crescente de altura?

Solução:

a) Como Pn=n!, teremos P(m+h) = (m+h)!

b) Homens permutam juntos entre si= h!

Mulheres permutam juntas entre si= m!

Os homens podem estar na frente, ou as mulheres podem = 2 possibilidades

Logo: 2m!h!

c) Não é possível realizar permutação, pois os homens e as mulheres são de alturas diferentes.. Logo só há duas possibilidades: todos homens por ordem crescente de altura à frente, ou as mulheres nessa situação.

Exercício 27 – Qual a soma dos divisores inteiros e positivos de:

a) 720

Fatorando em divisores primos, temos que 720= $2^4.3^2.5^1$

Percebamos que todos os divisores de 720 podem ser representados por $2^x.3^y.5^z$ sendo que "x" varia de 0 a 4, "y" varia de 0 a 2 e "z" varia de 0 a 1, com $x, y, z \in N$.

Ex.: $2^0.3^2.5^1$ = 45, que é divisor de 720.

Percebamos também que a soma dos divisores, representada por $2^0.3^0.5^0$+...+$2^4.3^2.5^1$, pode ser representada por (2^0+2^1+2^2+2^3).(3^0+3^1+3^2).(5^0+5^1)

Resolvendo, temos 31x13x6=2418.

b) 17.640

Seguindo o raciocínio anterior:

17.640= 2^3.3^2.5^1.7^2

(2^0+2^1+2^2+2^3).(3^0+3^1+3^2).(5^0+5^1).(7^0+7^1+7^2)

15x13x6x57=66.690.

c) 1540

1540= 2^2.5^1.7^1.11^1

(2^0+2^1+2^2).(5^0+5^1).(7^0+7^1).(11^0+11^1)

7x6x8x12=4032.

Exercício 28 – De quantos modos podemos dividir 18 pessoas em :

a) 3 grupos de 6 pessoas cada?

b) 2 grupos de 9 pessoas cada?

c) 1 grupo de 11 pessoas e um de 7 pessoas?

d) 9 grupos de 2 pessoas cada?

e)2 grupos de 4 pessoas e 2 grupos de 5 pessoas cada?

Solução

a)Temos 18 pessoas e queremos dividir em três grupos com 6 pessoas, assim no 1º grupo terá 6 pessoas que poderão estar posicionadas de diferentes maneiras e assim será 6!, no 1º no 2º e no 3º grupo. E também estes 3 grupos poderá estar posicionados de formas diferentes assim será 3!. E disso surgirá:

$$\frac{18!}{6!.6!.6!.3!} = 2858856$$

b) Temos 18 pessoas. E queremos dividir em dois grupos com 9 pessoas, assim no 1º grupo terá 9 pessoas que poderão estar posicionadas de diferentes maneiras e assim será 9!, no 1º no e 2º grupo. E também estes 2 grupos poderão estar posicionados de formas diferentes assim será 2!. E disso surgirá:

$$\frac{18!}{9!.9!.2!} = 24310$$

c) Temos 18 pessoas. E queremos dividir em 1 grupos com 11 pessoas e 1 grupo com 7, assim no 1º grupo terá 11 pessoas que poderão estar posicionadas de diferentes maneiras e assim será 11!, 2º grupo terá 7 pessoas e será 7!. E disso surgirá:

$$\frac{18!}{11!.7!} = 31824$$

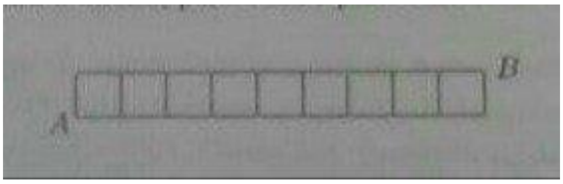
d) Temos 18 pessoas. E queremos dividir em 9 grupos com 2 pessoas em cada, assim no 1º grupo terá 2 pessoas que poderão estar posicionadas de diferentes maneiras e assim será 2!, no 1º, 2º, 3º, 4º, 5º, 6º, 7º, 8º e no 9º grupo. E também estes 9 grupos poderão estar posicionados de formas diferentes assim será 9!. E disso surgirá:

$$\frac{18!}{2!.2!.2!.2!.2!.2!.2!.2!.2!.9!} = 34459425$$

e) Temos 18 pessoas. E queremos dividir em 2 grupos com 4 pessoas e em 2 grupos com 5 pessoas, assim nos dois 1º^{s} grupos terá 4 pessoas que poderão estar posicionadas de diferentes maneiras e assim será $(4!)^2$. E os outros 2 grupos de 5 pessoas que será $(5!)^{2}$. Também os 2 grupos cada será 2!.E disso surgirá:

$$\frac{18!}{4!\,4!.5!.5!.2!.2!} = 192972780$$

Exercício 35 – Considere o esquema de ruas que nos levam do ponto A ao ponto B. De quantas maneiras podemos ir de A até B, se é permitido caminhar para direita, para cima e para baixo?



Solução:

Se é permitido caminhar apenas para direita, para baixo e para cima, teremos que:

*Não é permitido caminhar para esquerda, logo não será possível caminhar para trás.

*Partindo de A vamos ter, em cada esquina, apenas duas escolhas de ruas a seguir.

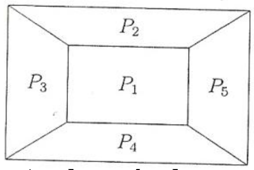
Assim, considerando n o número de esquinas, pelo princípio multiplicativo, teremos as seguintes possibilidades:

$2.2.2.2.2...2=2^n$

Como são nove esquinas, teremos:

2^9= 512 possibilidades.

Exercício 36 – A figura abaixo mostra um mapa com 5 países:



a) De quantos modos esse mapa pode ser colorido (cada país de uma cor, países com uma linha fronteira comum não podem ter a mesma cor) se dispomos de m cores diferentes?

Solução: Para pintar o mapa temos os seguintes casos possíveis:

i) usar cinco cores diferentes;

ii) repetir uma cor, pois, por exemplo, P_2 e P_4 poderiam ser pintadas da mesma cor, visto que não possuem fronteiras em comum;

iii) repetir duas cores, pois, por exemplo, P_2 e P_4 poderiam ser pintadas da mesma cor e P_3 e P_5, visto que não possuem fronteiras em comum.

Assim, teremos as seguintes possibilidades:

i) Como serão cores diferentes: no primeiro país eu posso usar as *m* cores.

No segundo país eu posso usar *m-1* cores.

No terceiro país eu posso usar *m-2* cores.

No quarto país eu posso usar *m-3* cores.

No quinto país eu posso usar *m-4* cores.

Pelo princípio multiplicativo teremos,

$$m(m-1)(m-2)(m-2)(m-3)(m-4),$$

que corresponde a escolhermos cinco cores diferentes dentre as m possíveis:

$$A_{m,5} = \frac{m!}{(m-5)!} = \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3).(m-4).(m-5)!}{(m-5)!}.$$

ii) Temos m opções de cores para pintar, por exemplo, P_2 e P_4. Para os outros três países teremos sempre uma cor a menos. Como essa possibilidade também existe para P_3 e P_5, então teremos, pelo princípio multiplicativo

$$2.m.(m-1).(m-2).(m-3)$$

possibilidades de colorir o mapa repetindo uma cor.

iii) Neste caso, temos m opções de cores para pintar, por exemplo, P_2 e P_4 e *(m-1)* para colorir P_3 e P_5, restando *(m-2)* para P_1. Então teremos, pelo princípio multiplicativo, $m.(m-1).(m-2)$ possibilidades de colorir o mapa repetindo duas cores.

O total de possibilidade de colorir o mapa é dado então pelo princípio aditivo:

$$m(m-1)(m-2)(m-2)(m-3)(m-4)+2.m.(m-1).(m-2).(m-3) + m.(m-1).(m-2) =$$

$$= m(m-1)(m-2)[(m-3)(m-4)+2m(m-3)+1].$$

b) Qual o menor valor de m que permite colorir o mapa?

Como o menor fator que aparece na nossa expressão é no caso (iii), teremos que exigir que $m-2=1$, ou seja, devemos ter $m=3$.

Portanto o mínimo de cores diferentes que pode ser utilizadas são 3.

Exercício 42 – Sobre uma circunferência temos um conjunto de 6 pontos distintos. Quantos polígonos podemos formar tendo por vértices os pontos deste conjunto?

Solução: Sabemos que para formar um polígono precisamos ter 3 ou mais vértices.

Então utilizando os 6 pontos faremos as seguintes combinações (pois num polígono a ordem dos pontos não é considerada): com 3 pontos, com 4 pontos, com 5 pontos e com 6 pontos:

$C_6^3=\frac{6!}{3!3!}$=20 triângulos

$C_6^4=\frac{6!}{4!2!}$=15 quadriláteros

$C_6^5=\frac{6!}{5!1!}$=6 pentágonos

$C_6^6=\frac{6!}{6!0!}$=1 hexágono.

Ao total, pelo princípio aditivo, temos: 20+15+6+1= 42 polígonos.

Exercício 43 – Com os algarismos de 1 a 9, quantos números, constituídos de 3 algarismos pares e 4 algarismos ímpares, podem ser formados, se:

a) É permitida a repetição dos algarismos pares?

b) Não é permitida a repetição de algarismos?

Solução:

Temos os conjuntos

A = *{2, 4, 6, 8}* $\Longrightarrow n(A)=4$.

B = *{1, 3, 5, 7, 9}* $\Longrightarrow n(B)=5$.

a) *Utilizando três algarismos pares que podem se repetir, teremos*
P = 4.4.4 = 64 possibilidades.
Utilizando quatro algarismos ímpares distintos, teremos:
Q = 5! = 5.4.3.2.1 = 120 possibilidades
R= P.Q.(7!/4!.3!) = 64.120.35 = 268800 possibilidades.

b) *R = C(4, 3).C(5,4).7! = 4.5.5040 = 100800 possibilidades.*

(7! /4!.3! é o número de permutações repetidas (com 4 elementos iguais entre si e 3 elementos iguais entre si)). São todas as formas de ordenar 3 algarismos pares e 4 ímpares.

Exercício 44 – Quantas são as diagonais de um octógono?

Solução: Se n é o números de lados de um polígono, n também é o número de vértices. De cada vértice, partem (n-3) diagonais, pois não contamos com o próprio vértice e os dois adjacentes a ele. Considerando também que cada diagonal será contada duas vezes, então pelo princípio multiplicativo, teremos

$$\mathrm{d} = \frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}-3)}{2} \Longrightarrow d = \frac{8(8-3)}{2} = \frac{8(5)}{2} = 20$$

Exercício 51 - De quantas maneiras 22 livros diferentes podem ser distribuídos entre 5 estudantes (Paulo, Roberto, José, Mário e Rafael), de modo que 2 deles recebam 5 livros cada e os outros 3 recebam 4 livros cada?

O primeiro estudante receberá 5 livros: $C_{22}^{5} = \frac{22!}{5!17!}$ 2633,4

O segundo estudante receberá 5 livros: $C_{17}^{5} = \frac{17!}{5!12!} = 6188$

O terceiro estudante receberá 4 livros: $C_{12}^{4} = \frac{12!}{4!8!} = 495$

O quarto estudante receberá 4 livros: $C_{8}^{4} = \frac{8!}{4!4!} = 70$

O quinto estudante receberá 4 livros: $C_{4}^{4} = \frac{4!}{4!0!} = 1$

Exercício 58 - No sistema decimal, quantos números de 6 dígitos distintos possuem 3 dígitos pares e 3 dígitos impares?

Solução:

Temos os conjuntos

A = {0, 2, 4, 6, 8} $\Longrightarrow n(A) = 5.$

B = {1, 3, 5, 7, 9}$\Longrightarrow n(B) = 5$.

*Posição dos dígitos pares: (6,3). Os ímpares entram nos lugares que sobram. Como temos 5 dígitos pares, vamos organizar nas 3 posições escolhidas com 5*4*3 modos. O mesmo vale para dígitos impares: 5*4*3.*

*Já temos C(6,3). Então, (5*4*3)² = 20*3600 = 72000 modos. Temos que descontar a posição do número zero na centena de milhar. Vamos escolher duas posições das 5 que restam para colocar os outros dígitos pares: C(5,2). E, novamente, os ímpares ocupam os que sobraram.*

*Vamos arrumar os 4 dígitos pares que restam nas duas posições escolhidas de 4*3 modos. E para os ímpares continua valendo 5*4*3. Daí, vamos obter C(5,2)*(4*3)*(5*4*3) = 10*12*60 = 7200 modos.*

Fazendo a subtração: 72000-7200 = 64800 possibilidades.

Exercício 60 – De um grupo de 10 pessoas, das quais 4 são mulheres, quantas comissões de 5 pessoas podem ser formadas de modo que pelo menos uma mulher faça parte?

Solução: As comissões podem ser formadas das seguintes maneiras: mistas, com homens e mulheres, com apenas homens ou apenas mulheres. Mas como é restrito ter pelo menos uma mulher em cada comissão, a possibilidade de ter apenas homens está descartada. Logo por combinação, vamos ter que:

Combinação de “todas as pessoas com as comissões”

C 10,5= 10!/5!(10-5)!= 10!/5!.5!= 10.9.8.7.6.5!/5!.5!= 10.9.8.7.6/5.4.3.2.1= 30240/120= 252

Combinação dos” homens com as comissões”

C6,5= 6!/5!(6-5)!= 6.5!/5!.1!= 6/1= 6

Subtração “homens de todas as pessoas”: 252-6=246 possibilidades

Exercício 67 – Num jogo de dominó, 4 pessoas dividem entre si 28 peças. De quantas maneiras isto pode ser feito?

Solução: Inicialmente, percebemos que cada pessoa ficará com 7 peças: $\frac{28}{4}$=7.

Percebemos que para a primeira pessoa, podemos dar as peças da seguinte maneira:

C_{28}^{7}, pois a ordem das peças não é considerada.

Como já foram usadas 7 peças, sobram 21 para a segunda pessoa, podendo dar as peças da seguinte forma:

C_{21}^{7}, pois a ordem igualmente não importa.

Seguindo este raciocínio, e tendo em mente que para cada forma de distribuição para uma pessoa, gera possibilidade de distribuição para as outras, pelo princípio multiplicativo teremos:

$C_{28}^{7}.C_{21}^{7}.C_{14}^{7}.C_{7}^{7}=\frac{28!}{7!21!}.\frac{21!}{7!14!}.\frac{14!}{7!7!}.1$

Simplificando os termos semelhantes, teremos:

$$\frac{28!}{7!^4}$$

maneiras diferentes.

Exercício 68 - Encontrar o número de maneiras de 4 livros de matemática, 3 livros de história, 3 livros de química e 2 de física serem colocados em uma estante de forma que os livros de mesmo assunto fiquem juntos.

Solução: Temos 4 tipos de matérias diferentes assim a forma de ordenar as matérias é dada por P_4 =4! = 24.

Mas nessas 4 posições, cada uma pode fazer permutações diferentes entre os livros, assim:

para os 4 livros de matemática: $P_4 = 4!$=24

para os 3 livros de história, P_3 =3!=6

para os 3 livros de química, P_3 =3!=6

para os 2 livros de física, P_2 =2!=2.

Assim, pelo princípio multiplicativo

$$P_4.P_4.P_3.P_3.P_2 = \frac{24}{\text{ord. das mat.}} \times \frac{24}{mat.} \times \frac{6}{\text{hist.}} \times \frac{6}{qui.} \times \frac{2}{\text{fis.}} = 41472$$

Assim teremos 41472 formas diferentes de posicionar os livros na estante.

Exercício 76 - De quantas maneiras podemos permutar as letras da palavra PÔSTER de tal forma que haja 2 consoantes entre as 2 vogais?

Sejam $A = \{x|x\text{ é } consoante\} = \{p,s,t,r\},\ n(A) = 4$

$B = \{x|x\ é\ vogal\} = \{o,e\},\ n(B) = 2.$

Queremos permutar as consoantes entre as 2 vogais, ou seja, organizar:

$(v_1,v_2) \in A \times A_1, onde\ n(A) = 4\ e\ n(A_1) = 3$

Assim pelo princípio multiplicativo teremos:

$n(A)!.n(A_1)! = \ 4!\,3! = 24.6 = 144$

Exercício 82 – Considere os algarismos do número 786.415. Forme todos os números de 6 algarismos distintos e coloque-os em ordem crescente. Qual a posição ocupada pelo número dado?

Solução: Se fôssemos escrever, um a um, todos os números possíveis de se algarismos distintos com os algarismos dados, escreveríamos $P_6 = n!$ =720 números! Isso seria muito trabalhoso.

Portanto, para descobrir qual a posição que o número dado se encontraria, basta calcular quantos números o antecede. Ou seja:

Com 1, 4, 5 ou 6 na casa da centena de milhar, teremos 4 opções. Em seguida, como já foi utilizado um número, teremos 5, depois 4, 3, 2, 1. Teremos então: 4x5x4x3x2x1=480 números.

Com o 7 na casa da centena de milhar, teremos diferentes casos:

1°: com 1, 4, 5 ou 6 na casa da dezena de milhar, teremos 4 opções. Em seguida, como já foram utilizados 2 números, nos restam 4, depois 3, 2, 1. Teremos então: 1x4x4x3x2x1=96

2°: com o 8 na casa da dezena de milhar, teremos dois casos diferentes:

→com 1, 4 ou 5 na casa da unidade de milhar, teremos 3 opções. Em seguida, como já foram utilizados 3 números, teremos 3 opções, depois 2, 1. Teremos então: 1x1x3x3x2x1=18

→com o 6 na casa da unidade de milhar, temos uma opção. Em seguida teremos o 1 como opção, senão ou excederia o número 789.415 ou poderia ser ele mesmo, portanto uma opção novamente. Em seguida temos o 4 e o 5 como opções, logo temos 2 opções, e enfim temos 1 opção no final. Teremos então 1x1x1x1x2x1=2

Como já calculamos todas as possibilidades de números ANTECEDENTES a 786.415, é só soma-las e teremos qual a posição do número em questão. Então: 480+96+18+2=596.

O número 786.415 ocupa a 597° posição.

Exercício 83 - Realizadas todas as permutações simples com os algarismos 0, 3 4, 6 e 7 e colocados os números assim obtidos em ordem decrescente, qual a posição do número 46.307?

Solução:

Sabemos que o número total de possibilidades de permutação desses algarismos é $P_5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120.$ *Para saber a ordem do número 46307, começamos pela permutação do número maior pois a ordem é decrescente. Assim temos:7xxxx, 6xxxx. Observamos assim* *que cada número aparece na primeira posição 24 vezes, pois se fixarmos um número qualquer na primeira posição restam para as demais posições* $P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$.

Então já sabemos que tem pelo menos 48 números que vem na frente do 46.307.

Seguindo pra chegar no 46xxx temos antes o:

47xxx implica em 3!=6

463xx implica em 2!=2

4630x implica em 1!=1

A próximo número será o 46307 assim pra descobrir sua posição, fazemos

48+6+2+1=57.

Portanto como a posição procurada é a próxima, será a 58ª posição.

Exercício 84 – Quantos números distintos, superiores a 100 e inferiores a 1.000, podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 de modo que:

a) cada algarismo seja usado apenas uma vez em cada número?

b) os números sejam pares e formados de algarismos distintos?

c) os números possuam o 4 como algarismo do meio?

Solução: Queremos formar números de três algarismos.

a) $\underline{6}\ \underline{5}\ \underline{4} \Longrightarrow 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

b) $\underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3} \Longrightarrow\ 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

c) $\underline{5}\ \underline{1}\ \underline{4} \Longrightarrow\ 5 \cdot 4 = 20$

Exercício 91 - De quantas maneiras podemos escolher 2 inteiros de 1 a 20 de forma que a soma seja ímpar?

Sejam $A = \{1, 2, 3, \dots, 20\},\ n(A) = 20$

$A_1 = \{x \in A |\ x\ é\ par\} = \{2, 4, 6, \dots, 20\},\ n(A_1) = 10$

$A_2 = \{x \in A |\ x\ é\ ímpar\} = \{1, 3, 5, \dots, 19\},\ n(A_2) = 10.$

Como $a_1 + a_2 = ímpar,\ (a_1, a_2) \in A_1 \times A_2, onde\ n(A_1) = 10\ e\ \ n(A_2) = 10.$

Assim pelo princípio multiplicativo teremos:

$n(A_1 \times A_2) = n(A_1).n(A_2) = 10.10 = 100.$