INDUÇÃO FINITA APÊNDICE C

INDUÇÃO

No capítulo 6, quando colocamos a fórmula do termo geral da P.A., e no capítulo 7, a da P.G., nossa conclusão foi baseada em alguns casos particulares (fizemos uma *indução*):

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 1r \\ a_3 &= a_1 + 2r \\ a_4 &= a_1 + 3r \\ a_5 &= a_1 + 4r \\ \text{então } a_n &= a_1 + (n-1)r \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q^1 \\ a_3 &= a_1 \cdot q^2 \\ a_4 &= a_1 \cdot q^3 \\ a_5 &= a_1 \cdot q^4 \\ \text{então } a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \end{aligned}$$

Entretanto, é necessário que provemos que nossa conclusão é correta. Podem ocorrer situações em que alguns casos particulares induzem a uma conclusão pelo menos duvidosa, podendo até ser falsa. Por exemplo, alguém tentando descobrir a fórmula do termo geral da seqüência:

$$(1;\ 3;\ 6;\ 10;\ 15;\ \ldots)$$
$$+2 \quad +3 \quad +4 \quad +5$$

afirma que tal fórmula é $a_n = \dfrac{n^2 + n}{2}$ porque

para $n = 1$, $\quad a_1 = \dfrac{1^2 + 1}{2} = 1$

para $n = 2$, $\quad a_2 = \dfrac{2^2 + 2}{2} = 3$

para $n = 3$, $\quad a_3 = \dfrac{3^2 + 3}{2} = 6$

para $n = 4$, $\quad a_4 = \dfrac{4^2 + 4}{2} = 10$

para $n = 5$, $\quad a_5 = \dfrac{5^2 + 5}{2} = 15$

Até aí está dando tudo certo. Mas será que irá dar certo para $n = 6$? E para $n = 10$? E para $n = 52$? E para $n = 1\,000$? Será que irá dar certo para todo n? É impossível testar um por um todos os valores de *n*. Por isso precisamos de algum modo provar a fórmula.

Veja essa outra situação: calculando o valor numérico da expressão $n^2 - n + 17$ em vários casos particulares os resultados obtidos são números primos.

$$\begin{array}{l}
n = 1 \Rightarrow n^2 - n + 17 = 1 - 1 + 17 = 17 \quad (17 \text{ é primo}) \\
n = 2 \Rightarrow n^2 - n + 17 = 4 - 2 + 17 = 19 \quad (19 \text{ é primo}) \\
n = 3 \Rightarrow n^2 - n + 17 = 9 - 3 + 17 = 23 \quad (23 \text{ é primo}) \\
n = 4 \Rightarrow n^2 - n + 17 = 16 - 4 + 17 = 29 \quad (29 \text{ é primo}) \\
n = 5 \Rightarrow n^2 - n + 17 = 25 - 5 + 17 = 37 \quad (37 \text{ é primo})
\end{array}$$

Até para $n = 16$ o resultado será número primo. Entretanto, para $n = 17$ temos $n^2 - n + 17 = 17^2 - 17 + 17 = 17^2$, e 17^2 não é primo porque é divisível por 17. Assim, se concluíssemos que o resultado é sempre número primo, nossa conclusão seria falsa. Verifique também que para $n = 18$ o resultado não é número primo (você pode descobrir muitos outros casos em que o resultado não é número primo).

Conta-se que Fermat (Pierre de Fermat/1 601-1 665) pensara que os números calculados na expressão $2^{(2^n)} + 1$ são primos, o que ocorre de fato para $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$. Mas para $n = 5$ obtém-se:

$$2^{(2^5)} + 1 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297$$

que é divisível por 641. Isto foi descoberto por Euler (Leonhard Euler/1 707-1 783) quase um século depois. Já se mostrou agora que para muitos valores de *n* os resultados não são números primos.

PRINCÍPIO DE INDUÇÃO FINITA

Para demonstrar que uma propriedade P, relativa aos números naturais, é verdadeira para todo número natural $n \geqslant 1$, existe um método baseado no que chamamos *princípio de indução finita*, que pode ser enunciado como segue.

> A propriedade P é verdadeira para todo natural $n \geqslant 1$ se satisfaz às duas condições seguintes:
> 1ª) P é verdadeira para $n = 1$
> 2ª) P é verdadeira para $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$, implica que P é verdadeira para $n = k + 1$.

A demonstração por indução finita consta então de duas partes.

1.ª parte: provar que P vale para $n = 1$
2.ª parte: admitindo que P é válida para $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$ (hipótese), provar que ela vale também para $n = k + 1$ (tese).

Juntando as duas partes, note que estamos provando que a propriedade vale para $n = 1$ (1ª parte), valendo para $n = 1$ ela valerá para $n = 2$ (pela 2ª parte), valendo para $n = 2$ ela valerá para $n = 3$ (pela 2ª parte) e assim sucessivamente. Concluímos então que a propriedade vale para todo $n \geqslant 1$.

Nota: Conforme a propriedade a ser provada, na primeira parte poderemos ter $n = 0$ (prova-se que ela vale para todo $n \geqslant 0$) ou qualquer outro natural $n = n_0$ (prova-se que ela vale para todo $n \geqslant n_0$).

Exemplos

1. Provar por indução finita que o termo geral da seqüência (1; 3; 6; 10; 15; ...), que é definida por $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + n + 1 \ (n \geq 1) \end{cases}$, é dado por $a_n = \dfrac{n^2 + n}{2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1.ª parte: Provamos que a fórmula vale para $n = 1$.
Temos $a_1 = 1$.
Para $n = 1$, $\dfrac{n^2 + n}{2} = \dfrac{1^2 + 1}{2} = 1$. Logo, vale a fórmula.

2.ª parte: Partindo da hipótese (H) de que a fórmula vale para $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$,

$$H \left\{ a_k = \frac{k^2 + k}{2} \right. ,$$

devemos provar a tese (T) de que ela vale para $n = k + 1$:

$$T \left\{ a_{k+1} = \frac{(k+1)^2 + (k+1)}{2} \right.$$

Temos:

$$a_{k+1} = a_k + k + 1 = \frac{k^2 + k}{2} + k + 1 = \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2} =$$

$$= \frac{(k^2 + 2k + 1) + (k + 1)}{2} = \frac{(k+1)^2 + (k+1)}{2}$$

Logo, pelo princípio de indução finita a fórmula vale $\forall n \geq 1$.

2. Provar por indução finita que o termo geral da P.A. é dado por $a_n = a_1 + (n - 1)r$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1.ª parte: Para $n = 1$ vale a fórmula, porque $a_1 + (1 - 1)r = a_1$.

2.ª parte: $H \{ a_k = a_1 + (k - 1)r, \ k \in \mathbb{N}^*$
$T \{ a_{k+1} = a_1 + [(k + 1) - 1]r = a_1 + k \cdot r$

Demonstração

$$a_{k+1} = a_k + r = [a_1 + (k - 1)r] + r = a_1 + kr - r + r = a_1 + kr$$

3. Provar que $2^n \geq n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Lembremos que $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; \ldots\}$. Vamos fazer a demonstração por indução finita.

1.ª parte: Para $n = 0$

$$\left.\begin{array}{r} 2^n = 2^0 = 1 \\ n + 1 = 0 + 1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2^n \geq n + 1 \text{ é verdadeiro neste caso.}$$

2.ª parte: $H \{ 2^k \geq k + 1, \ k \in \mathbb{N}$.
$T \{ 2^{k+1} \geq (k + 1) + 1 = k + 2$

Demonstração

$$\left.\begin{array}{r} 2^k \geqslant k + 1 \Rightarrow 2 \cdot 2^k \geqslant 2(k + 1) \Rightarrow 2^{k+1} \geqslant 2k + 2 \\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow 2k + 2 = k + k + 2 \geqslant k + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2^{k+1} \geqslant k + 2$$

4. Seja S_n a soma dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos:

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2$$

Provar que $S_n = \dfrac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$, $\forall n \geqslant 1$.

Façamos a prova por indução finita:

1.ª parte: Para $n = 1$

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = 1^2 = 1 \\ \dfrac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} = \dfrac{1(1 + 1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1 \end{array}\right\} \text{vale a fórmula.}$$

2.ª parte: $\text{H} \left\{ S_k = \dfrac{k(k + 1)(2k + 1)}{6}, \ k \in \mathbb{N}^* \right.$

$$\text{T} \left\{ S_{k+1} = \frac{(k + 1)[(k + 1) + 1][2(k + 1) + 1]}{6} = \frac{(k + 1)(k + 2)(2k + 3)}{6} \right.$$

Demonstração

$$\left.\begin{array}{l} S_k = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + k^2 \\ S_{k+1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + k^2 + (k + 1)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow S_{k+1} = S_k + (k + 1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{k+1} = \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6} + (k + 1)^2 = \frac{k(k + 1)(2k + 1) + 6(k + 1)^2}{6} =$$

$$= \frac{(k + 1)[k(2k + 1) + 6(k + 1)]}{6} = \frac{(k + 1)[2k^2 + 7k + 6]}{6} = \frac{(k + 1)(k + 2)(2k + 3)}{6}$$

EXERCÍCIOS

1. Uma seqüência é dada pela lei de recorrência $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1, \ n \geqslant 1. \end{cases}$

   Prove que o termo geral é $a_n = 2^n - 1$ empregando o princípio de indução finita.

2. Seja S_n a soma dos n primeiros números ímpares positivos:

   $$S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1)$$

   Prove usando o princípio de indução finita que $S_n = n^2$, $\forall n \geqslant 2$.

3. Prove empregando o princípio de indução finita:

   a) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

   b) $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2(2^n - 1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

   c) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n + 1)} = \dfrac{n}{n + 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

4. Prove que numa P.A. de primeiro termo a_1 e razão r a soma (S_n) dos n primeiros termos é dada por $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} r$, para todo $n \geqslant 1$, empregando o método de indução.

5. Empregando o princípio de indução finita prove que numa P.G. de primeiro termo a_1 e razão q o produto (P_n) dos n primeiros termos é dado por $P_n = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$, para todo $n \geqslant 1$.

6. Prove que $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $a \geqslant -1$.

7. a) Prove que $n^2 > 2n + 1$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$.
b) Prove que $2^n \geqslant n^2$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \neq 3$. (Para $n > 3$ você poderá usar a parte *a*).)

8. Prove que, para todo n inteiro positivo, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

9. Prove que $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

De 10 a 12 assinale a alternativa correta.

10. (UNESP) Seja $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ uma seqüência de proposições. Supondo que a hipótese de p_k ser verdadeira implique na veracidade de p_{k+1}, para $k = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ e que a proposição p_5 seja verdadeira, então pode se afirmar que:

a) todas as proposições da seqüência acima são verdadeiras.
b) somente a proposição p_5 é verdadeira.
c) somente as proposições $p_6, p_7, \ldots, p_n, \ldots$ são verdadeiras.
d) as proposições $p_5, p_6, \ldots, p_n, \ldots$ são verdadeiras.
e) as proposições da seqüência acima são todas falsas.

11. (PUC-SP) Supondo que uma certa propriedade P é verdadeira para o número $n \in \mathbb{N}$, consegue-se provar que ela é verdadeira para o número 3n. Se P é verdadeira para $n = 2$, então pode-se garantir que ela é verdadeira para n igual a:

a) 216 b) 162 c) 512 d) 261 e) 270

12. (FUVEST-SP) P é uma propriedade relativa aos números naturais. Sabe-se que:

1) P é verdadeira para o natural $n = 10$;
2) se P é verdadeira para n, então P é verdadeira para 2n;
3) se P é verdadeira para n, $n \geqslant 2$, então P é verdadeira para $n - 2$.

Pode-se concluir que:

a) P é verdadeira para todo número natural n.
b) P é verdadeira somente para números naturais n, $n \geqslant 10$.
c) P é verdadeira para todos os números naturais pares.
d) P é somente verdadeira para potências de 2.
e) P não é verdadeira para os números ímpares.