Ex 17 / Cap 6 :

Resolva o sistema de relações de recorrência:

(1) $a_1 = b_1 = c_1 = 1$,

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}, & (2) \\ b_n = 4^{n-1} - c_{n-1}, & (3) \\ c_n = 4^{n-1} - b_{n-1}, & (4) \end{cases} \quad \text{para } n \geq 2.$$

Fazendo a subtração das equações (3) e (4), obtemos:

$$b_n - c_n = b_{n-1} - c_{n-1}, \text{ para } n \geq 2. \quad (5)$$

Como $b_1 = c_1 = 1$, tomando $n=2$ em (5), obtemos:

$$b_2 - c_2 = b_1 - c_1 \Rightarrow b_2 - c_2 = 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow b_2 = c_2.$$

Tomando $n=3$ em (5), obtemos:

$$b_3 - c_3 = \underbrace{b_2 - c_2}_{=0} \Rightarrow b_3 - c_3 = 0 \Rightarrow b_3 = c_3.$$

Assim, tomando n para os próximos naturais, concluímos que:

$$b_n = c_n, \text{ para } n \geq 1. \quad (6)$$

Substituindo na equação (3) e usando uma das condições iniciais de (1), obtemos a relação de recorrência:

$$\begin{cases} b_1 = 1, \\ b_n = -b_{n-1} + 4^{n-1}, \quad \text{para } n \geq 2 \end{cases}$$

1) A equação homogênea associada é dada por:

$h_n = -h_{n-1}$,

cuja equação característica é:

$r = -1$.

Logo, a solução geral da homogênea associada é:

$h_n = A \cdot (-1)^n$, onde A é uma constante. (7)

2) A solução particular de:

$p_n = -p_{n-1} + 4^{n-1}$

$\Rightarrow p_n + p_{n-1} = 4^{n-1} = \frac{1}{4} \cdot 4^n$ (8)

é dada por:

$p_n = B \cdot 4^n$, pois 4 <u>não é</u> raiz da equação característica.

Fazendo a substituição em (8), obtemos:

$$B \cdot 4^n + B \cdot 4^{n-1} = \frac{1}{4} \cdot 4^n$$

$$\Rightarrow B \cdot 4^n + B \cdot 4^{-1} \cdot 4^n = \frac{1}{4} \cdot 4^n$$

$$\Rightarrow \left[B + \frac{B}{4}\right] \cdot 4^n = \frac{1}{4} \cdot 4^n \Rightarrow \frac{5B}{4} \cdot 4^n = \frac{1}{4} \cdot 4^n$$

Igualando os coeficientes, obtemos:

$$\boxed{B = \frac{1}{5}}.$$

Logo, a solução particular é:

$$p_n = \frac{1}{5} \cdot 4^n \qquad (9)$$

Somando as equações (7) e (9), obtemos a solução geral da relação não homogênea:

$$b_n = h_n + p_n = A \cdot (-1)^n + \frac{1}{5} \cdot 4^n, \text{ para } n \geq 1.$$

Usando a condição inicial $b_1 = 1$, obtemos:

$$A \cdot (-1)^1 + \frac{1}{5} \cdot 4^1 = 1 \Rightarrow -A + \frac{4}{5} = 1 \Rightarrow \boxed{A = -\frac{1}{5}}.$$

Portanto,

$$\boxed{b_n = -\frac{1}{5}(-1)^n + \frac{1}{5} \cdot 4^n, \quad n \geq 1} \qquad (10)$$

De (6), concluímos que:

$$\boxed{c_n = -\frac{1}{5}(-1)^n + \frac{1}{5}\cdot 4^n, \quad n \geq 1} \qquad (11)$$

Agora, temos que achar a solução geral para a_n.

Usando os resultados (10) e (11) em (2), obtemos:

$$a_n = a_{n-1} + 2\left[-\frac{1}{5}(-1)^{n-1} + \frac{1}{5}\cdot \underbrace{4^{n-1}}_{4^{-1}\cdot 4^n}\right]$$

$$= a_{n-1} + \frac{2}{5}\cdot(-1)^n + \frac{1}{10}\cdot 4^n$$

Assim, temos que resolver a relação de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_n = a_{n-1} + \frac{2}{5}(-1)^n + \frac{1}{10}\cdot 4^n, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

A equação característica da homogênea associada é:

$$r = 1$$

Logo, a solução geral da homogênea associada é:

$h_n = A\cdot 1^n = A$, onde A é uma constante. (12)

A solução particular para a não homogênea

$$p_n = p_{n-1} + \frac{2}{5}(-1)^n + \frac{1}{10}\cdot 4^n \qquad (13)$$

é dada por:

$$p_n = B\cdot(-1)^n + C\cdot 4^n, \qquad (14)$$

pois -1 e 4 <u>não são raízes</u> da equação característica

Substituindo (14) em (13), obtemos:

$$B\cdot(-1)^n + C\cdot 4^n = B\cdot\underbrace{(-1)^{n-1}}_{\underbrace{(-1)^{-1}\cdot(-1)^n}_{(-1)\cdot(-1)^n}} + C\cdot\underbrace{4^{n-1}}_{4^{-1}\cdot 4^n} + \frac{2}{5}(-1)^n + \frac{1}{10}\cdot 4^n$$

$$\Rightarrow 2B\cdot(-1)^n + \left[C - \frac{C}{4}\right]\cdot 4^n = \frac{2}{5}(-1)^n + \frac{1}{10}\cdot 4^n$$

$$\Rightarrow 2B\cdot(-1)^n + \frac{3C}{4}\cdot 4^n = \frac{2}{5}(-1)^n + \frac{1}{10}\cdot 4^n$$

Igualando os coeficientes, obtemos:

$$2B = \frac{2}{5} \Rightarrow B = \frac{1}{5};$$

$$\frac{3C}{4} = \frac{1}{10} \Rightarrow C = \frac{2}{15}.$$

Logo, a solução particular é:

$$p_n = \frac{1}{5}\cdot(-1)^n + \frac{2}{15}\cdot 4^n$$

A solução geral é dada por:

$$a_n = h_n + p_n = A + \frac{1}{5}\cdot(-1)^n + \frac{2}{15}\cdot 4^n, \quad n \geq 1.$$

Usando a condição inicial $a_1 = 1$, obtemos:

$$A + \frac{1}{5}(-1)^1 + \frac{2}{15}\cdot 4^1 = 1 \Rightarrow A - \frac{1}{5} + \frac{8}{15} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{2}{3}}.$$

Portanto, a solução geral de a_n é:

$$\boxed{a_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\cdot(-1)^n + \frac{2}{15}\cdot 4^n, \quad n \geq 1}.$$

Ex 18 / Cap 6

Resolva o sistema de relações de recorrência:

$$\begin{cases} (1) & a_0 = -1, \quad b_0 = 2 \\ (2) & a_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1}, \qquad \text{para } n \geq 1 \\ (3) & b_n = a_{n-1} + 2b_{n-1} \end{cases}$$

Solução:

Subtraindo as equações (2) e (3), obtemos:

$$a_n - b_n = 2a_{n-1}$$

$$\Rightarrow b_n = a_n - 2a_{n-1} \qquad (4)$$

Substituindo (4) em (2), obtemos:

$$a_n = 3a_{n-1} + 2(a_{n-1} - 2a_{n-2})$$

$$\Rightarrow a_n = 5a_{n-1} - 4a_{n-2} \qquad (5)$$

2^a ordem

Como a equação de recorrência (5) é de 2^a ordem precisamos de duas condições iniciais.

A primeira condição inicial é informada pelo enunciado: $a_0 = -1$.

A segunda será obtida tomando $n = 1$ na equação (2) e usando as condições iniciais de (1):

$$a_1 = 3a_0 + 2b_0 = 3(-1) + 2(2) \Rightarrow a_1 = 1.$$

Assim, obtemos uma relação de recorrência de 2^{a} ordem para a_n:

$$\begin{cases} a_0 = -1, \; a_1 = 1, \\ a_n = 5a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad \text{para } n \geq 2. \end{cases}$$

É uma relação homogênea. A sua equação característica é:

$$r^2 = 5r - 4 \Rightarrow r^2 - 5r + 4 = 0 \Rightarrow (r-1)(r-4) = 0$$

Raízes: $r_1 = 1$ e $r_2 = 4$.

Portanto, a solução geral é:

$$a_n = A \cdot 1^n + B \cdot 4^n = A + B \cdot 4^n, \quad n \geq 0. \qquad (6)$$

Agora, devemos usar as condições iniciais para achar as constantes A e B:

$$a_0 = -1 \Rightarrow A + B \cdot 4^0 = -1 \Rightarrow A + B = -1 \qquad (7)$$

$$a_1 = 1 \Rightarrow A + B \cdot 4^1 = 1 \Rightarrow A + 4B = 1 \qquad (8)$$

Resolvendo o sistema formado por (7) e (8), obtemos: $A = -\frac{5}{3}$, $B = \frac{2}{3}$.

Logo,

$$\boxed{a_n = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3} \cdot 4^n, \quad n \geq 0.}$$

Agora, precisamos achar b_n.

De (4), obtemos:

$$b_n = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}\cdot 4^n - 2\left[-\frac{5}{3} + \frac{2}{3}\cdot \underbrace{4^{n-1}}_{4^{-1}\cdot 4^n}\right]$$

$$= -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}\cdot 4^n + \frac{10}{3} - \frac{1}{3}\cdot 4^n$$

Logo,

$$\boxed{b_n = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}\cdot 4^n, \quad n \geqslant 0}$$