(g) $(S \cap M) \cup (S \cap J)$; (h) $S \cup (M \cap J)$.

14. Expandir as seguintes somas:

(a) $\sum_{i=1}^{6} 2i$; (b) $\sum_{i=0}^{6} x^i$; (c) $\sum_{i=3}^{7} 5$;

(d) $\sum_{j=2}^{6} \frac{j(j-1)(j-2)}{6}$; (e) $\sum_{i=5}^{10} (3i+2)$; (f) $\sum_{i=3}^{3} \frac{3i^2}{i+1}$.

15. Escreva as expressões abaixo, usando a notação somatório:

(a) $1+3+5+7+9$; (b) $-1+4-9+16-25+36$;

(c) $7+14+21+28+35+42$; (d) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 6}+\frac{1}{5\cdot 7}$.

16. Avalie $\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})$ considerando $a_0 = 0$.

17. Use o resultado do Exercício 16 para provar que:

(a) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$; (b) $\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

18. Determine o valor de $\sum_{i=1}^{n} i^2$ usando os resultados obtidos em 17.

19. Calcule a soma dos quadrados dos n primeiros números ímpares positivos.

(Observação: $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2 = \sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = \sum_{i=1}^{n}(4i^2-4i+1)$.)

20. Calcule $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$.

(Sugestão: faça $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) = \sum_{i=1}^{n} i^2(i+1) + 2\sum_{i=1}^{n} i(i+1)$, e use o resultado do Exemplo 1.13.)

21. Expandir os seguintes produtos:

(a) $\prod_{j=2}^{n}(3j+7)$; (b) $\prod_{i=1}^{4}(i^3-7i+3)$;

(c) $\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{1}{j^2}\right)$; (d) $\prod_{j=1}^{3} 6j^2$.

22. Expandir e simplificar:

(a) $\dfrac{\prod_{j=0}^{n}(j+1)}{\sum_{i=1}^{n} i}$;

(b) $\dfrac{\prod_{j=1}^{n} j}{\prod_{i=p+1}^{n-1} i \cdot \prod_{k=1}^{p} k}$.

23. Escreva as expressões abaixo usando a notação produtório:

(a) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$;

(b) $p \cdot (p+1) \cdot (p+2) \cdots (p+n)$;

(c) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7}$;

(d) $x^2 \cdot x^4 \cdot x^6 \cdot x^8 \cdot x^{10}$.

24. Verifique se as afirmações são verdadeiras:

(a) $\prod_{j=1}^{5} j^3 = (5!)^3$;

(b) $\dfrac{\prod_{j=1}^{n} j}{\prod_{k=1}^{p} k} = \prod_{i=1}^{n-p}(p+i)$, para $n > p$;

(c) $\prod_{j=2}^{7} 3j = 3^6 \cdot 7!$;

(d) $\prod_{n=1}^{4}\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) = 180$.

25. Determine o valor de:

(a) $\prod_{i=1}^{n} x^i$;

(b) $\prod_{i=1}^{n} x^{i(i+1)}$;

(c) $\prod_{i=1}^{n}\left[1 - \dfrac{1}{(i+1)^2}\right]$;

(d) $\prod_{i=1}^{n} \dfrac{i}{i+1}$;

(e) $\prod_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{x_{i-1}}$, dado que $x_0 = 1$;

(f) $\prod_{i=1}^{n} x^{i^3}$. (Sugestão: Escreva o produto pedido e transforme o expoente numa soma, cujo resultado você encontra no Exemplo 1.13.)

26. Dê a forma simplificada e calcule o valor de:

(a) $\prod_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} j(j+1)\right)$;

(b) $\sum_{m=j-1}^{j}\left(\dfrac{\prod_{i=1}^{n} i}{\prod_{k=1}^{m} k \cdot \prod_{\ell=m}^{n-1}(n-\ell)}\right)$;

(c) $\dfrac{\prod_{k=1}^{n+1} k}{\prod_{m=1}^{j} m \cdot \prod_{i=j-1}^{n-1}(n-i)}$;

(d) Nas formas simplificadas (b) e (c), assuma os valores $n = 5$ e $j = 3$ e compare os resultados.

27. Determine o valor de $\prod_{n=1}^{5}\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)$.

28. Use o princípio de indução matemática para provar as identidades:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

(c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1}$; (d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(2j-1) = n^2$;

(e) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(2j-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$; (f) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = n+1$;

(g) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}i^2 = \frac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2}$; (h) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(i-1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

29. Use o princípio da indução matemática para provar as desigualdades:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$, para todo inteiro positivo n;

(b) $\displaystyle 2^n < \prod_{j=1}^{n} j$, para $n \geq 4$;

(c) $\displaystyle n^2 < \prod_{j=1}^{n} j$, para $n \geq 4$;

(d) $\displaystyle \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$, para $n > 1$.

30. Prove pelo princípio da indução matemática que o termo geral da progressão:
(a) aritmética é: $a_n = a_1 + (n-1)r$; (b) geométrica é: $a_n = a_1 q^{n-1}$.

31. Prove pelo princípio da indução matemática que a fórmula para a soma dos termos de uma progressão:
(a) aritmética é: $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$; (b) geométrica é: $S_n = \dfrac{a_n q - a_1}{q-1}$.

32. Considere o produto

$$P_n = \prod_{i=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{i^2}\right).$$

(a) Calcule P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6.

(b) Observe os denominadores de P_3 e P_5 e, em separado, de P_2, P_4 e P_6.

(c) Observe os numeradores e denominadores em relação ao índice n e P_n.

(d) Faça a sua conjectura para P_n.

(e) Prove-a pelo princípio da indução matemática.

33. Faça uma conjectura para as fórmulas e depois prove-as pelo princípio da indução matemática:

(a) $\prod_{j=1}^{n} 2^j$; (b) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4i^2-1}$.

34. Para construir uma janela ornamental, um operário precisa de pedaços triangulares de vidro. Ele pretende aproveitar um vidro retangular defeituoso, com 10 bolhas de ar, sendo que não há 3 bolhas alinhadas entre si, nem duas delas com algum vértice do retângulo, ou uma delas com dois vértices do retângulo.

Para evitar bolhas de ar no seu projeto final, ele decidiu cortar os pedaços triangulares com os vértices coincidindo ou com uma bolha de ar, ou com um dos cantos do vidro original.

Quantos pedaços triangulares ele cortou?

(Sugestão: Faça uma conjectura para se determinar, através de uma fórmula, o número de triângulos formados, quando se tem uma quantidade qualquer n de bolhas. A partir daí, prove a conjectura usando o princípio da indução matemática para que a mesma possa ser usada como fórmula válida. Só então é que você poderá fazer uso da mesma e determinar o número de triângulos, sabendo-se que o número de bolhas é 10.)

35. Considere F_n o número de Fibonacci. Prove, usando o princípio da indução matemática, que, para todo inteiro positivo n:

(a) $\sum_{j=1}^{n} F_j^2 = F_n F_{n+1}$; (b) $\sum_{j=1}^{n} F_{2j-1} = F_{2n}$;

(c) $\sum_{j=1}^{n} F_{2j} = F_{2n+1} - 1$; (d) $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$;

(e) $F_{n+1}F_n - F_{n-1}F_{n-2} = F_{2n-1}$; (f) $\sum_{j=1}^{2n-1} F_j F_{j+1} = F_{2n}^2$;

(g) $\sum_{j=1}^{2n} F_j F_{j+1} = F_{2n+1}^2 - 1$.

36. Prove, usando o princípio da indução matemática, que a permutação caótica D_n (definida no Capítulo 4) com $D_1 = 0$, satisfaz $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$, para $n \geq 2$.