

RESOLUÇÃO DE RELAÇÕES DE RECORRÊNCIAS

pg. 1

1. HOMOGENEAS, LINEARES de ORDEM k :

Seja uma relação de recorrência linear, homogênea, de ordem k dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \beta_0, a_1 = \beta_1, \dots, a_{k-1} = \beta_{k-1}, \\ a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}, \end{array} \right. \quad (1)$$

para $n \geq k$,

onde $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{k-1}$ são números dados das condições iniciais e c_1, c_2, \dots, c_k são constantes reais.

(a) Resolver a equação característica e achar as raízes:

Definindo $a_n = r^n$, onde $r \neq 0$ é um número real ou complexo, na equação de recorrência (1), obtemos:

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \dots + c_k r^{n-k} \quad (2)$$

Dividindo a equação (2) por r^{n-k} , obtemos:

$$r^k = c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \dots + c_k,$$

e assim obtemos a equação característica:

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \dots - c_k = 0, \quad (3)$$

que pode ser reescrita como:

$$(r - r_1)(r - r_2) \dots (r - r_k) = 0, \text{ onde } r_1, r_2, \dots, r_k$$

são as raízes da equação característica.

(b) Escrever a solução geral da equação de recorrência:

pg 2

(b.1) Se as raízes r_1, r_2, \dots, r_k da equação característica forem todas distintas, a solução geral é dada pela combinação linear das raízes elevadas a n :

$$r_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n + \dots + A_k r_k^n, \quad n \geq 0, \quad (4)$$

onde A_1, A_2, \dots, A_k são constantes reais.

(b.2) Se alguma raiz r_j tiver multiplicidade $m_j \geq 2$ vamos associar a essa raiz as funções:

$$r_j^n, nr_j^n, n^2 r_j^n, \dots, n^{m_j-1} r_j^n$$

Então, fazemos a combinação linear destas funções e somamos à combinação linear das raízes que são distintas elevadas a n . Logo, temos a solução geral:

$$\begin{aligned} r_n &= (A_j r_j^n + A_{j+1} nr_j^n + A_{j+2} n^2 r_j^n + \dots + A_{j+(m_j-1)} n^{m_j-1} r_j^n) \\ &\quad + A_{l_1} r_{e_1}^n + A_{l_2} r_{e_2}^n + \dots + A_{l_{k-m_j}} r_{e_{k-m_j}}^n, \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (5)$$

Onde $l_1, l_2, \dots, l_{k-m_j}$ são os índices das raízes que são distintas, e as constantes A_j são reais.

(c) Achar as constantes da solução geral através das condições iniciais e, consequentemente, obter a solução geral a_n .

Exemplo 1: Seja a relação de recorrência linear, homogênea, de ordem 2:

pg 3

$$\begin{cases} a_0 = 4, \quad a_1 = 10 \\ a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

1. Resolver a equação característica:

$$r^2 = 5r - 6 \Rightarrow r^2 - 5r + 6 = 0$$

$$(r-2)(r-3) = 0$$

Raízes: $r_1 = 2, \quad r_2 = 3$ (raízes distintas)

2. Soluções geral da equação de recorrência:

$$a_n = A_1 \cdot r_1^n + A_2 \cdot r_2^n = A_1 \cdot 2^n + A_2 \cdot 3^n, \quad n \geq 0.$$

3. Achar as constantes A_1, A_2 através das condições iniciais:

$$a_0 = 4 \Rightarrow A_1 \cdot 2^0 + A_2 \cdot 3^0 = 4 \Rightarrow A_1 + A_2 = 4$$

$$a_1 = 10 \Rightarrow A_1 \cdot 2^1 + A_2 \cdot 3^1 = 10 \Rightarrow 2A_1 + 3A_2 = 10$$

Resolvendo o sistema, encontramos $A_1 = A_2 = 2$.

Logo, a solução da relação de recorrência é:

$$a_n = 2 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n = 2^{n+1} + 2 \cdot 3^n, \quad n \geq 0.$$

Exemplo 2: Seja a relação de recorrência linear, homogênea, de ordem 2:

pg 4

$$\begin{cases} a_0 = \\ a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

1. Resolver a equação característica:

$$r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow (r-3)^2 = 0$$

1. Raiz de multiplicidade 2: $r_1 = 3$.

2. Soluções geral da equação de recorrência:

$$a_n = A_1 \cdot r_1^n + A_2 \cdot n \cdot r_1^n = A_1 \cdot 3^n + A_2 \cdot n \cdot 3^n, \quad n \geq 0.$$

3. Achar as constantes A_1, A_2 através das condições iniciais:

$$a_0 = 4 \Rightarrow A_1 \cdot 3^0 + A_2 \cdot 0 \cdot 3^0 = 4 \Rightarrow A_1 = 4;$$

$$a_1 = 10 \Rightarrow A_1 \cdot 3^1 + A_2 \cdot 1 \cdot 3^1 = 10 \Rightarrow 3A_1 + 3A_2 = 10$$

$$\Rightarrow 3(4) + 3A_2 = 10$$

$$\Rightarrow 3A_2 = -2$$

$$\Rightarrow A_2 = -\frac{2}{3}.$$

Logo, a solução da relação de recorrência é:

$$a_n = 4 \cdot 3^n - \frac{2}{3} \cdot n \cdot 3^n, \quad n \geq 0.$$

Exemplo 3 : Seja a relação de recorrência linear, homogênea, de ordem 3:

pg 5

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 2, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 4 \\ a_n = 7a_{n-1} - 16a_{n-2} + 12a_{n-3}, \quad n \geq 3 \end{array} \right.$$

1. Resolver a equação característica:

$$r^3 - 7r^2 + 16r - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (r-3)(r-2)^2 = 0$$

Raízes: $r_1 = 3$, $r_2 = 2$ (de multiplicidade 2).

2. Solução geral da equação de recorrência:

$$a_n = A_1 \cdot 3^n + A_2 \cdot 2^n + A_3 \cdot n \cdot 2^n, \quad n \geq 0.$$

3. Achar as constantes A_1, A_2, A_3 através das condições iniciais:

$$a_0 = 2 \Rightarrow A_1 \cdot 3^0 + A_2 \cdot 2^0 + A_3 \cdot 0 \cdot 2^0 = 2$$
$$\Rightarrow A_1 + A_2 = 2$$

$$a_1 = 2 \Rightarrow A_1 \cdot 3^1 + A_2 \cdot 2^1 + A_3 \cdot 1 \cdot 2^1 = 2$$
$$\Rightarrow 3A_1 + 2A_2 + 2A_3 = 2$$

$$a_2 = 4 \Rightarrow A_1 \cdot 3^2 + A_2 \cdot 2^2 + A_3 \cdot 2 \cdot 2^2 = 4$$
$$\Rightarrow 9A_1 + 4A_2 + 8A_3 = 4$$

Assim, devemos resolver o sistema

pg 6

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 2 \\ 3A_1 + 2A_2 + 2A_3 = 2 \\ 9A_1 + 4A_2 + 8A_3 = 4 \end{cases}$$

e encontramos $A_1 = 4$, $A_2 = -2$, $A_3 = -3$.

Logo, a solução da recorrência é:

$$a_n = 4 \cdot 3^n - 2 \cdot 2^n - 3 \cdot n \cdot 2^n, \quad n \geq 0.$$

2. NÃO HOMOGENEAS, LINEARES, de ORDEM k: pg 7

Seja uma relação de recorrência linear, não homogênea, de ordem k dada por:

$$a_0 = \beta_0, a_1 = \beta_1, \dots, a_{k-1} = \beta_{k-1},$$

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} + g(n),$$

para $n \geq k$,

onde $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{k-1}$ são números dados das condições iniciais, c_1, c_2, \dots, c_k são constantes reais e $g(n) \neq 0$.

(a) Resolver a equação característica da homogênea associada:

$$h_n = c_1 h_{n-1} + c_2 h_{n-2} + \dots + c_k h_{n-k},$$

que é, como já vimos anteriormente,

r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \dots - c_k = 0.

(b) Solução geral da homogênea associada:

(b.1) Se as raízes r_1, r_2, \dots, r_k forem todas distintas,

$$h_n = A_1 \cdot r_1^n + A_2 \cdot r_2^n + \dots + A_k \cdot r_k^n;$$

(b.2) Se alguma raiz r_j tiver multiplicidade $m_j \geq 2$,

$$h_n = (A_j r_j^n + A_{j+1} r_j^{n+1} + \dots + A_{j+(m_j-1)} r_j^{n+m_j-1}) r_j^n + A_{l_1} r_{l_1}^n + A_{l_2} r_{l_2}^n + \dots + A_{l_{k-m_j}} r_{l_{k-m_j}}^n, n \geq 0,$$

onde $l_1, l_2, \dots, l_{k-m_j}$ são os índices das raízes distintas e as constantes A_j são reais.

(c) Solução particular para a equação não homogênea (p_n):

pg 8

$$p_n = C_1 p_{n-1} + C_2 p_{n-2} + \dots + C_k p_{n-k} + g(n),$$

onde $g(n) \neq 0$.

Veremos dois casos para $g(n)$:

(c.1) $g(n) = c \cdot q^n$, onde c e q são constantes.

• Se q não é raiz da equação característica da homogênea associada, a solução particular é $p_n = A \cdot q^n$, onde A é uma constante.

• Se q é uma raiz de multiplicidade m da equação característica da homogênea associada, multiplique por n^m a solução particular: $p_n = A \cdot n^m \cdot q^n$.

(c.2) $g(n) = b_l n^l + b_{l-1} n^{l-1} + \dots + b_0$ (polinômio de grau l em n com coeficientes constantes b_l, b_{l-1}, \dots, b_0).

• Se 1 não é raiz da equação característica da homogênea associada, a solução particular é $p_n = B_l n^l + B_{l-1} n^{l-1} + \dots + B_0$, onde $B_0, B_1, B_2, \dots, B_l$ são constantes reais.

- Se 1 é uma raiz de multiplicidade m da equação característica da homogênea associada, a solução particular é multiplicada pelo fator n^m e se torna:

$$P_n = B_l n^{m+l} + B_{l-1} n^{m+l-1} + \dots + B_0 \cdot n^m,$$

onde B_0, B_1, \dots, B_l são constantes reais.

- (d) A solução geral da relação não homogênea é a soma da homogênea associada com a solução particular:

$$a_n = h_n + p_n, \quad n \geq 0.$$

- (e) Devemos achar os valores das constantes de $a_n = h_n + p_n$ através das condições iniciais e, deste modo, achamos a fórmula fechada para $a_n = h_n + p_n, \quad n \geq 0$.

RESOLUÇÃO de RECORRÊNCIAS LINEARES NÃO HOMOGENEAS

pg 10

Exemplo 1: (Pizza de Steiner – Divisão do plano por retas)

Vimos que a relação de recorrência é dada por:

$$a_0 = 1,$$

$$a_n = a_{n-1} + n, \quad \text{para } n \geq 1$$

\uparrow^a $g(n) = n$, não homogênea
 \downarrow^a Ordem

A equação de recorrência homogênea associada é:

$$h_n = h_{n-1} \Rightarrow h_n - h_{n-1} = 0$$

A equação característica é dada por:

$$r - 1 = 0 \Rightarrow r = 1$$

Logo, a solução da equação homogênea associada é:

$$h_n = A \cdot 1^n = A, \quad \text{onde } A \text{ é uma constante real.}$$

Tentaremos agora descobrir uma solução particular não homogênea p_n , pois:

$$\textcircled{+} \quad \begin{cases} h_n = h_{n-1} & (\text{eq. homogênea}) \\ p_n = p_{n-1} + n & (\text{eq. particular}) \end{cases}$$

$$\underbrace{h_n + p_n}_{a_n} = \underbrace{h_{n-1} + p_{n-1}}_{a_{n-1}} + n$$

OU seja, a soma de uma solução h_n da homogênea associada com uma solução p_n da eq. particular é uma solução da não homogênea

Então, da equação da solução particular, obtemos: pg 11

$$P_n - P_{n-1} = n$$

Que tipo de função deve ser P_n ? É bastante razoável imaginar que P_n seja um polinômio de grau n .

$$\text{Seja } P_n = B + Cn$$

Substituindo na equação da solução particular, obtemos

$$B + Cn - (B + C(n-1)) = n$$

$$B + Cn - B - Cn + C = n$$

$$C = n \quad (\text{Essa igualdade é impossível!})$$

\downarrow \curvearrowright
constante termo com variável n

Portanto, a recorrência não admite solução da forma

$P_n = B + Cn$.
Por que não deu certo? A raiz da equação característica da homogênea é 1. Logo, uma solução da homogênea associada é uma constante B , se colocarmos $A = B$. É claro que o termo B não poderia cumprir o seu papel, pois substituindo na equação, daria zero e não n .

Como $h_n = B$, se $A = B$, então $h_n - h_{n-1} = B - B = 0$.
Logo, não pode ser solução da particular, pois
 $P_n - P_{n-1} = n \neq 0$.

Vamos corrigir a nossa tentativa multiplicando por n

$$P_n = Bn + Cn^2$$

OBS : Sempre que na nossa tentativa em alguma blocos não cumprir o seu papel, fazemos a correção "aumentando o grau", isto é, multiplicando o bloco por n .

pág 12

Agora, substituindo na recorrência, obtemos:

$$Bn + Cn^2 - (B(n-1) + C(n-1)^2) = n$$

$$\cancel{Bn} + \cancel{Cn^2} - \cancel{Bn} + B - \cancel{Cn^2} + 2Cn - C = n$$

$$(B - C) + 2Cn = n \quad \checkmark \quad (\text{igualdade válida})$$

Para satisfazer a igualdade acima, resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} B - C = 0 \\ 2C = 1 \implies C = \frac{1}{2} \implies B = C = \frac{1}{2} . \end{cases}$$

A solução então é:

$$a_n = f_n + p_n = A + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 = A + \frac{n+n^2}{2} .$$

Para descobrir o valor de A , aplicamos a condição inicial $f_0 = 1$. Logo,

$$A + \frac{0+0^2}{2} = 1 \implies A = 1 .$$

Portanto, a solução da relação de recorrência é dada por:

$$a_n = 1 + \frac{n+n^2}{2} = \frac{n^2+n+2}{2}, \text{ para } n \geq 0 .$$

EXEMPLO 2: Resolva a relação de recorrência pg 13

$$a_n = 3a_{n-1} + \frac{1}{3} \cdot 3^n, \text{ para } n \geq 2, \quad a_1 = 2.$$

1) Homogênea associada:

$$h_n = 3h_{n-1} \implies h_n - 3h_{n-1} = 0$$

$$\text{Equação característica: } r - 3 = 0 \implies r = 3$$

Solução da homogênea associada: $h_n = A \cdot 3^n$,
onde A é uma constante real.

2) Soluções particular:

$$p_n = 3p_{n-1} + \frac{3^n}{3} \implies p_n - 3p_{n-1} = \frac{3^n}{3}.$$

1ª Tentativa: Vamos buscar uma solução particular
da forma $p_n = B \cdot 3^n$.

O problema é que não funciona, pois $B \cdot 3^n$
é solução da homogênea associada quando
 $A = B$.

2ª Tentativa: multiplicando por n , temos:

$$p_n = Bn \cdot 3^n$$

Assim, substituindo na relação de recorrência não
homogênea, obtemos:

$$Bn \cdot 3^n = 3B(n-1) \cdot 3^{n-1} + \frac{3^n}{3}$$

$$Bn \cdot 3^n = B(n-1) \cdot 3^n + (3^n / 3)$$

$$Bn \cdot 3^n = [B(n-1) + (1/3)] \cdot 3^n \Rightarrow Bn = B(n-1) + (1/3)$$

$$\Rightarrow Bn = Bn - B + \frac{1}{3}$$

pg 14

$$\Rightarrow -B + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow B = \frac{1}{3}$$

$$\text{Logo, } p_n = \frac{1}{3} \cdot n \cdot 3^n = n \cdot 3^{n-1}$$

A solução geral é dada por:

$$a_n = h_n + p_n = A \cdot 3^n + n \cdot 3^{n-1}$$

Para descobrir A, usamos a condição inicial:

$$a_1 = 2 \Rightarrow A \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 2 \Rightarrow 3A + 1 = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{3}.$$

Logo,

$$a_n = \frac{1}{3} \cdot 3^n + n \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1} + n \cdot 3^{n-1} = (n+1) 3^{n-1}, n \geq 1.$$

Exemplo 3.

Seja a relação de recorrência linear, não homogênea de ordem 3:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n = 4a_{n-1} - 5a_{n-2} + 2a_{n-3} + (n^2 + 2n + 1), \quad n \geq 2 \\ a_0, a_1, a_2 \text{ são dados} \end{array} \right.$$

Aqui, $g(n) = n^2 + 2n + 1$ é um polinômio de grau 2 em n .

1. Resolver a equação característica da homogênea associada:

$$h_n = 4h_{n-1} - 5h_{n-2} + 2h_{n-3},$$

que é dada por:

$$r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = 0 \Rightarrow (r-1)^2(r-2) = 0,$$

cujas raízes são: $r_1 = 1$ (multiplicidade 2);
 $r_2 = 2$.

2. A solução da homogênea associada é dada por:

$$\begin{aligned} h_n &= A_1 \cdot 1^n + A_2 \cdot n \cdot 1^n + A_3 \cdot 2^n \\ &= A_1 + A_2 n + A_3 \cdot 2^n, \quad \text{para } n \geq 0. \end{aligned}$$

3. Solução da particular p_n :

$$p_n = p_{n-1} - 5p_{n-2} + 2p_{n-3} + (n^2 + 2n + 1)$$

Como $g(n) = n^2 + 2n + 1$ é um polinômio de grau 2, podemos usar como solução particular um polinômio de grau 2, que segue o padrão

$$p_n = B_2 n^2 + B_1 n + B_0.$$

Mas, o que acontece é o seguinte: como

1 é raiz da equação característica da homogênea associada, uma constante qualquer B_0 , que é o mesmo que $B_0 \cdot 1$, também será solução da homogênea associada. Basta substituir a constante B_0 na homogênea associada para conferir:

$$h_n = 4h_{n-1} - 5h_{n-2} + 2h_{n-3}$$

$$- h_n = B_0 \Rightarrow B_0 = 4B_0 - 5B_0 + 2B_0 \\ (\text{identidade válida})$$

Logo, $p_n = B_2 n^2 + B_1 n + B_0$ não pode ser uma solução particular p_n para a não homogênea.

Como 1 é raiz de multiplicidade 2, devemos multiplicar o polinômio de grau 2, $B_2 n^2 + B_1 n + B_0$ por n^2 . É assim, obtemos como solução particular:

$$p_n = B_2 n^4 + B_1 n^3 + B_0 n^2.$$

Substituindo na equação de recorrência para p_n , obtemos:

$$B_2 n^4 + B_1 n^3 + B_0 n^2 = 4 [B_2 (n-1)^4 + B_1 (n-1)^3 + B_0 (n-1)^2] \\ - 5 [B_2 (n-2)^4 + B_1 (n-2)^3 + B_0 (n-2)^2] \\ + 2 [B_2 (n-3)^4 + B_1 (n-3)^3 + B_0 (n-3)^2] + (n^2 + 2n + 1).$$

Desenvolvendo os termos, obtemos:

$$\begin{aligned} -12B_2 n^2 + (-6B_1 + 72B_2) n + (-2B_0 + 18B_1 - 86B_2) \\ = n^2 + 2n + 1 \end{aligned}$$

Fazendo a correspondência dos coeficientes, obtemos o sistema:

$$-12B_2 = 1 \implies B_2 = -\frac{1}{12};$$

$$-6B_1 + 72B_2 = 2 \implies -6B_1 - 6 = 2 \implies B_1 = -\frac{4}{3};$$

$$-2B_0 + 18B_1 - 86B_2 = 1 \implies -2B_0 - 24 + \frac{43}{6} = 1$$

$$B_0 = -\frac{107}{12}.$$

Assim, uma solução particular é dada por:

$$p_n = -\frac{1}{12}n^4 - \frac{4}{3}n^3 - \frac{107}{12}n^2.$$

e a solução geral é dada por:

$$a_n = h_n + p_n = A_1 + A_2 n + A_3 \cdot 2^n - \frac{1}{12}n^4 - \frac{4}{3}n^3 - \frac{107}{12}n^2$$

$$n \geq 0.$$

4. Achar as constantes A_1, A_2, A_3 através das condições iniciais:

$$a_6 = 3 \Rightarrow A_1 + A_3 = 3$$

$$a_7 = 5 \Rightarrow A_1 + A_2 + 2A_3 - \frac{1}{12} - \frac{4}{3} - \frac{107}{12} = 5$$

$$\Rightarrow A_1 + A_2 + 2A_3 = \frac{46}{3}$$

$$a_8 = 7 \Rightarrow A_1 + 2A_2 + 4A_3 - \frac{4}{3} - \frac{32}{3} - \frac{107}{3} = 7$$

$$\Rightarrow A_1 + 2A_2 + 4A_3 = \frac{164}{3}$$

Devemos então resolver o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 + A_3 = 3 \\ A_1 + A_2 + 2A_3 = \frac{46}{3} \\ A_1 + 2A_2 + 4A_3 = \frac{164}{3} \end{array} \right.$$

De onde obtemos: $A_1 = -24$, $A_2 = -\frac{44}{3}$, $A_3 = 27$.

Portanto, a solução geral da relação de recorrência não homogênea é dada por:

$$a_n = -24 - \frac{44}{3}n + 27 \cdot 2^n - \frac{1}{12}n^4 - \frac{4}{3}n^3 - \frac{107}{12}n^2,$$

$$n \geq 0.$$