Matemática Discreta

Profa Dra Aline Guedes

Departamento de Matemática Aplicada

ime
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
UERJ

AULA 1

Conjuntos

Conceitos e notações: conjuntos

Definição:

Um conjunto é uma coleção de zero ou mais objetos distintos, chamados elementos de um conjunto, os quais não possuem qualquer ordem associada.

Exemplo:

a) Pessoas
b) Os números pares: 0,2,4...
c) As letras do alfabeto: a,b,c...

Notação:

Conjuntos -> letras maiúsculas: A, B, C...

Elementos -> letras minúsculas: a, b, c...

Conceitos e notações: conjuntos

Representação:

- Explícita:

$A = \{0,1,2\}$, $B = \{a,b,c\}$, $C = \{a,e,i,o,u\}$

- Implícita:

$B = \{x \mid 3 < x < 9 \text{ e } x \text{ é par}\}$

$C = \{x \mid x \text{ é vogal}\}$

Conceitos e notações: conjuntos

Exemplo:

Dê a representação implícita do conjunto

A = { 1,3,5,7,9,...}

A = ?

Conceitos e notações: conjuntos

Exemplo:

Dê a representação implícita do conjunto

A = { 1,3,5,7,9,...}

A = {x∈N|x=2k+1, k ∈ Z_+}

Para refletir: y = x2 +41x+41 gera números primos?

Conceitos e notações: conjuntos

Cardinalidade de um conjunto

A cardinalidade é o número de elementos de um conjunto.

Denota-se por $|A|$ ou $n(A)$, onde A é o conjunto.

Exemplo:

$A = \{a,b,c,d\}$

$n(A) = 4$

Conceitos e notações: conjuntos

Conjuntos finitos e infinitos

- Conjunto finito: possui um número finito de elementos

Exemplo: A = {1,2,3}

- Conjunto infinito: possui infinitos elementos

Exemplo: B = {...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...}

Conceitos e notações: conjuntos

Conjunto vazio

É aquele que não possui nenhum elemento.

Denota-se por: ∅ ou { }

Conjunto unitário

É aquele que só possui um elemento.

Exemplo: A = {a}

Conceitos e notações: conjuntos

Relação entre elemento e conjunto

Um elemento pertence ($\in$), isto é, ele é elemento do conjunto ou não pertence ($\notin$), ou seja, não pertence a um determinado conjunto.

Exemplo: $A=\{1,2,3\}$. $2 \in A$ e $5 \notin A$.

Relação entre conjuntos

- **Está contido $\subset$ e não está contido $\not\subset$**

Dados dois conjuntos A e B, diz-se que A é subconjunto de B ou B está contido em A, quando todo elemento de A também é elemento de B.

Exemplo: $A = \{1, 2, 3\}$, $B= \{1,2,3,4,5\}$ e $C = \{4,5,6\}$

$A \subset B$. $C \not\subset B$.

Conceitos e notações: conjuntos

Relação entre conjuntos

- **Contém $\supset$ e não contém $\not\supset$**

Dados dois conjuntos A e B, diz-se que B contém A, quando o conjunto B contém todos os elementos do conjunto A.

Exemplo: A = {1, 2, 3} , B= {1,2,3,4,5} e C = {4,5,6}

$B \supset A$. $B \not\supset C$.

Conceitos e notações: conjuntos

Exemplos:

A = {0,1,2,3}, B = {1,2,3}, C = {0,2,4}

Use os operadores corretamente: $\in, \notin, \subset, \supset$

a) 2 ___ A

b) {2} ___ A

c) A ___ B

d) B ___ A

e) A___ C

f) 1___ C

Conceitos e notações: conjuntos

Exemplos:

A = {0,1,2,3}, B = {1,2,3}, C = {0,2,4}

Use os operadores corretamente: $\in, \notin, \subset, \supset$

a) 2 _ $\in$ _ A

b) {2} _ $\subset$ __ A

c) A _ $\supset$ __ B

d) B _ $\subset$ __ A

e) A_ $\not\supset$ __ C

f) 1_ $\notin$ __ C

Conceitos e notações: conjuntos

Exemplos:

Dado A = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}, represente os subconjuntos:

a) Implicitamente:

B = {2,4,6,8}

B = {x ∈A|x=2k e 1<=k<=4}

D = {2,4,6,8,...}

B = {x ∈ R(ou N ou Z)|x=2k e k>=1}

b) Explicitamente:

C = {x ∈ A|x+1=6} = {5}

Conceitos e notações: conjuntos

Igualdade de conjuntos

Dois conjuntos A e B são iguais, quando possuem os mesmos elementos.

OBS: Isso equivale a dizer que $A \subset B$ e $B \subset A$.

Exemplo:

- $A = \{1,2,2,4,6,8,8,8\}$ e $B = \{1,2,4,6,8\}$

A e B são iguais -> a repetição não deve ser considerada.

- $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{3,1,2\}$

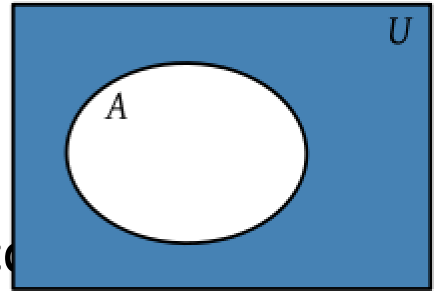
A e B são iguais -> a ordem não importa

Conceitos e notações: conjuntos

Conjunto Universo

É aquele que contém todos os elementos que estão sendo representados numa determinada situação.

Detona-se por $\mathbb{U}$



Conjunto Complementar em relação ao conjunto $\mathbb{U}$

É aquele que contém todos os elementos que faltam num c chegar no Universo.

Detona-se por: Complementar de A em relação a $\mathbb{U}$:$\bar{A}$ ou $A^C =$ $\{x \in \mathbb{U} | \boldsymbol{x \notin A}\}(\boldsymbol{parte\ azul})$

Exemplo: A = {1,2,3,4,5}. Complementar de A em relação a $\mathbb{U}$ = $\mathbb{U} - A$,

Ou seja, os elementos de $\mathbb{U}$ que não estão em A.

Conceitos e notações: conjuntos

Conjunto Diferença

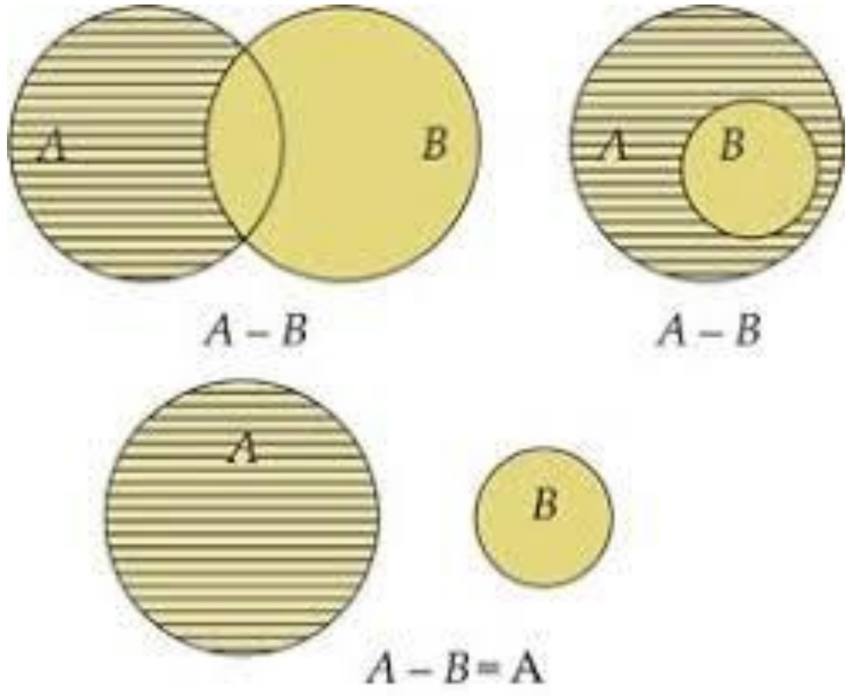
Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{U}$. O conjunto diferença A – B é aquele que contém todos os elementos de $\mathbb{U}$ que estão em A, mas que não estão em B.

Detona-se por $\boldsymbol{A - B}$

Exemplo:

A – B = $\{x \in \mathbb{U} | \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{B}\}$.

(parte riscada)



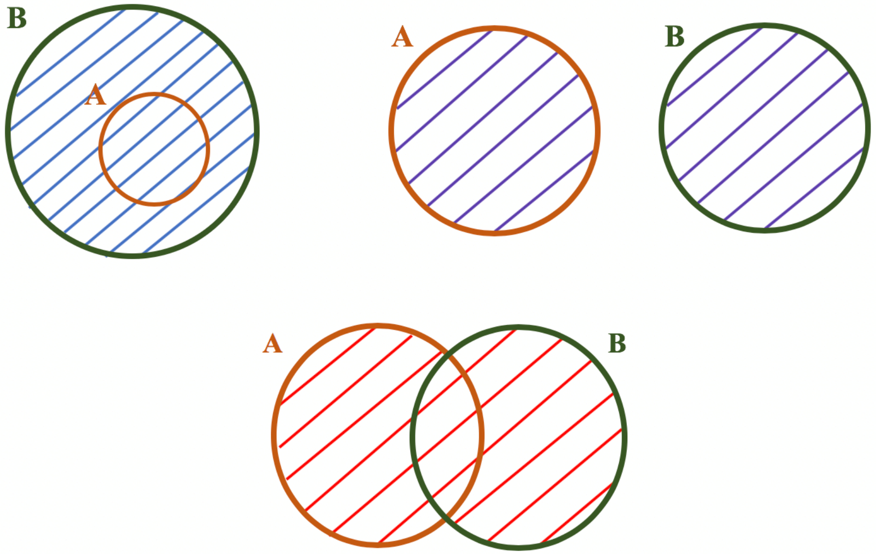
Conceitos e notações: conjuntos

União de conjuntos

Dados dois conjuntos A e B , a união desses conjuntos forma um conjunto que possui elementos que pertencem a pelo menos um desses conjuntos.

Detona-se por $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$

$A \cup B = \{x \in \mathbb{U} | x \in A\ ou\ x \in B\}$



Conceitos e notações: conjuntos

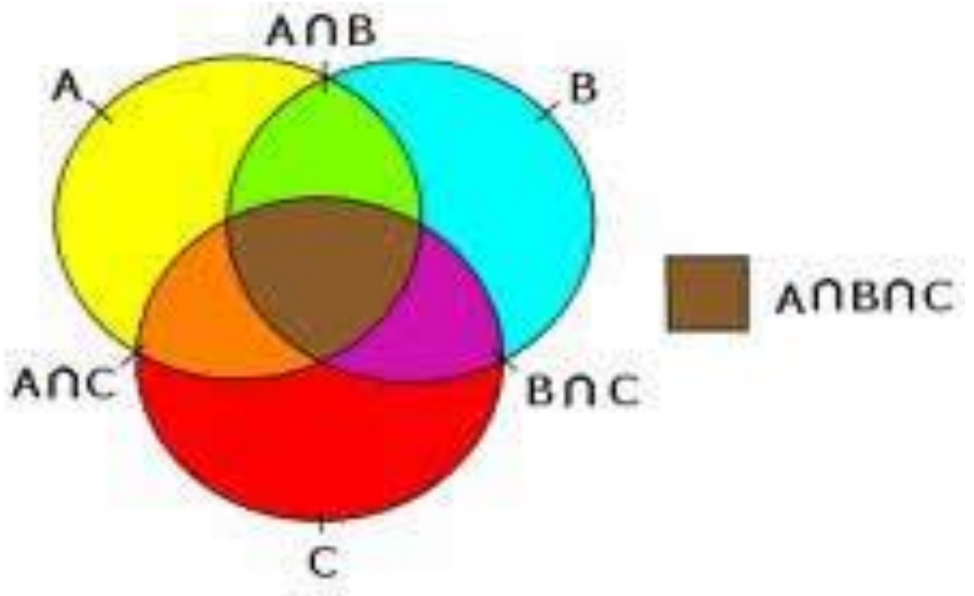
União de conjuntos

GENERALIZAÇÃO

Dados n conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$

a união desses conjuntos é dada por:

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \in \mathbb{U} | x \in A_1 \; ou \; x \in A_2 \; ou \dots \; x \in A_n \}$



Conceitos e notações: conjuntos

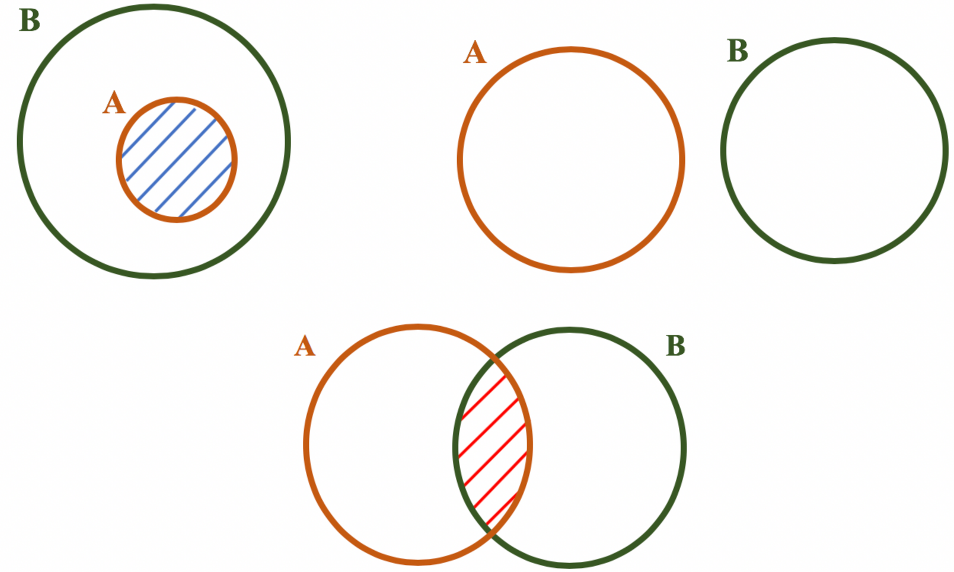
Interseção de conjuntos

Dados dois conjuntos A e B , a interseção desses conjuntos forma um conjunto que possui elementos que pertencem aos dois conjuntos ao mesmo tempo, ou seja, pertence a A e a B.

Detona-se por $\boldsymbol{A \cap B}$

$A \cap B = \{x \in \mathbb{U} | x \in A \ e \ x \in B\}$

$A_1 \cap A_2 = \{x \in \mathbb{U} | x \in A_1 \ e \ x \in A_2\}$



Conceitos e notações: conjuntos

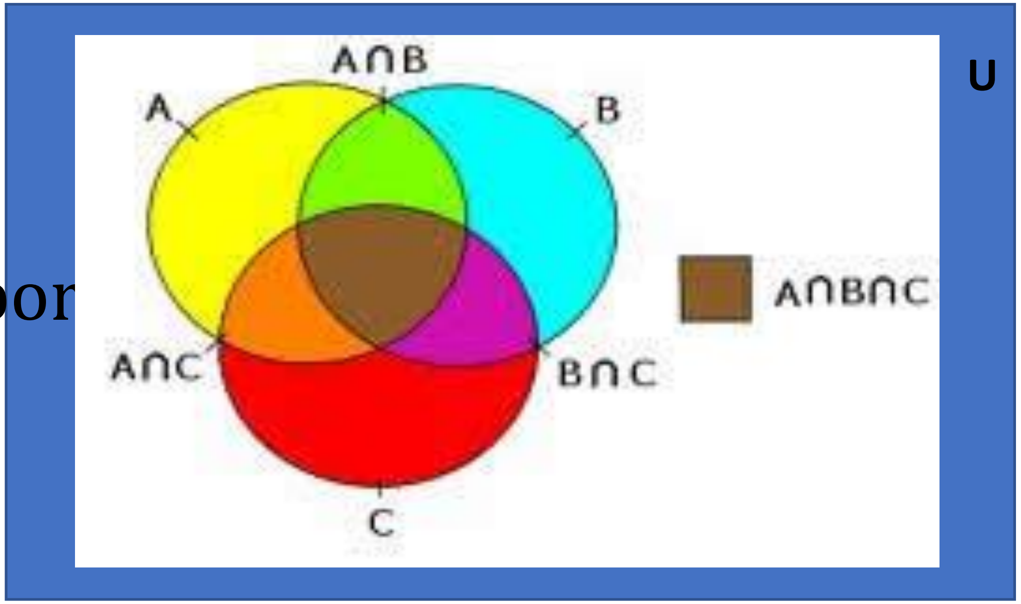
Interseção de conjuntos

GENERALIZAÇÃO

Dados n conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$

a interseção desses conjuntos é dada por

$\cap_{i=1}^{n} A_i = \{x \in \mathbb{U} | x \in A_1 \ e \ x \in A_2 \ e \dots \ x \in A_n \}$



Com 3 conjuntos:

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{x \in \mathbb{U} | x \in A_1 \ e \ x \in A_2 e \ x \in A_3\}$

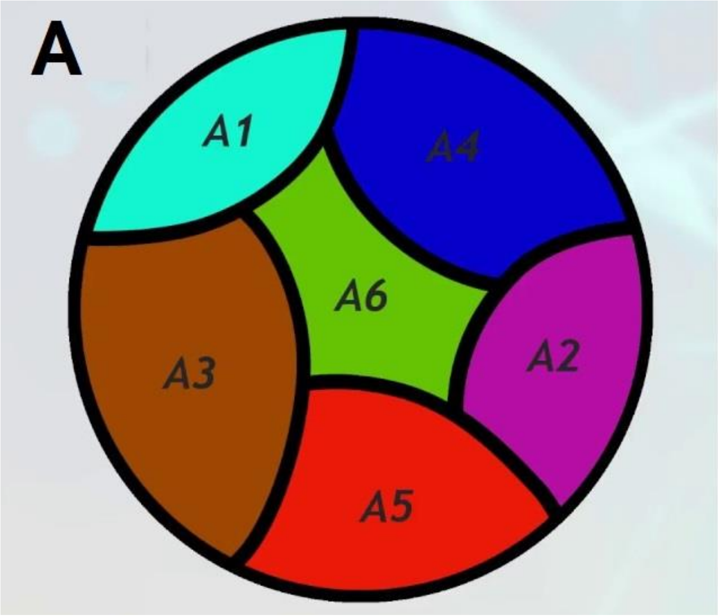
Conceitos e notações: conjuntos

Partição de conjuntos

Seja A um conjunto não-vazio. Uma partição de A é uma família de subconjuntos não-vazios $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tais que:

1) $\cup_{i=1}^{n} A_i = A$

2) $A_i \cap A_j = \emptyset, se\ i \neq j$



Sendo 3 subconjuntos de A, para serem uma

Partição, deveriam:

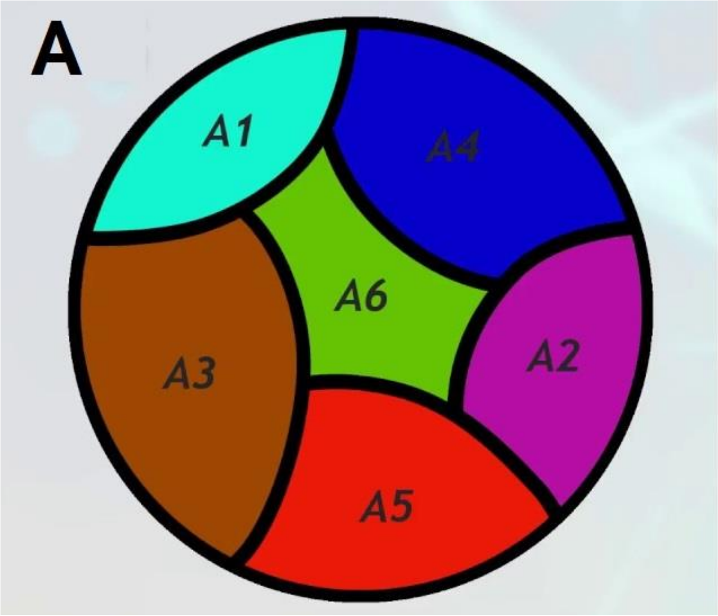
$$A_1 \cap A_2 = \emptyset$$
$$A_1 \cap A_3 = \emptyset$$
$$A_2 \cap A_3 = \emptyset$$
$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A$$

Conceitos e notações: conjuntos

Partição de conjuntos

Exemplo:

$\boldsymbol{A_1 = \{1, 2, 3\}, A_2 = \{4, 5, 6, 7\}, A_3 = \{8, 9, 10\},}$
$\boldsymbol{A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}}$



1) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A$

2) $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
$A_2 \cap A_3 = \emptyset$
$A_1 \cap A_3 = \emptyset$

Conceitos e notações: conjuntos

Propriedades

1) Para todo $A \subset \mathbb{U}, A \cup \emptyset = A \; e \; A \cap \emptyset = \emptyset$
2) $A \subset B \leftrightarrow A \cup B = B$
3) $A \subset B \leftrightarrow A \cap B = A$
4) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \; e \; A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \rightarrow associativa$
5) $A \cup B = B \cup A \; e \; A \cap B = B \cap A \rightarrow comutativa$
6) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \; e$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \rightarrow distributiva$

7) $A \cup \bar{A} = \mathbb{U}; A \cap \bar{A} = \emptyset; \; \bar{\emptyset} = \mathbb{U}; \bar{\mathbb{U}} = \emptyset$

8) $\overline{(A \cup D)} = \bar{A} \cap \bar{D} \; e \overline{(A \cap D)} = \bar{A} \cup \bar{D} \rightarrow Leis \; de \; De \; Morgan$

Conceitos e notações: conjuntos

Exercícios:

1) Escreva os conjuntos abaixo, explicitando seus elementos:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} | 2x^2 - 50 = 0\}$

A = {-5,5}

a) $B = \{x \in \mathbb{N} | 3x + 7 = 1\}$

B= Ø

a) C= $\{x \in \mathbb{Z} | -2 < x \leq 2\}$

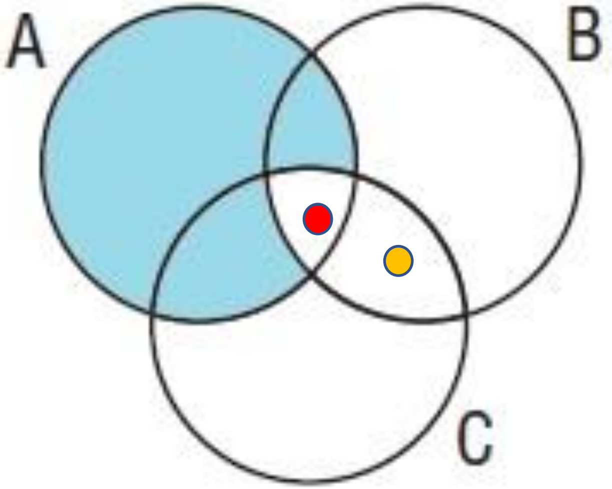
C={-1,0,1,2}

a) D= $\{x \in \mathbb{R} | x^2 + 4 = 0\}$

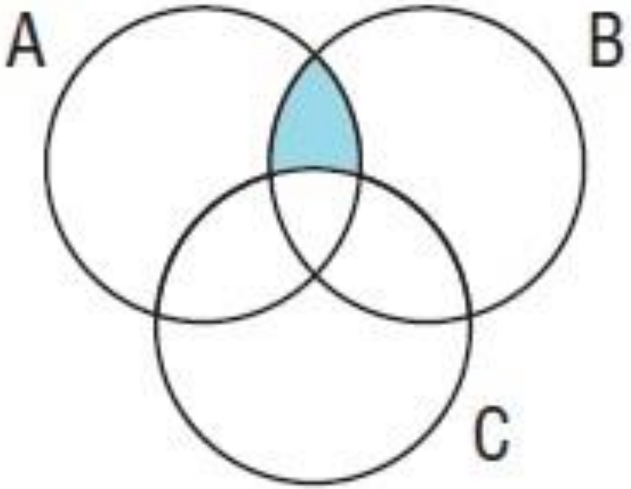
D= Ø

(UFJF-MG) A parte colorida no diagrama que melhor representa o conjunto $D = A - (B \cap C)$ é:

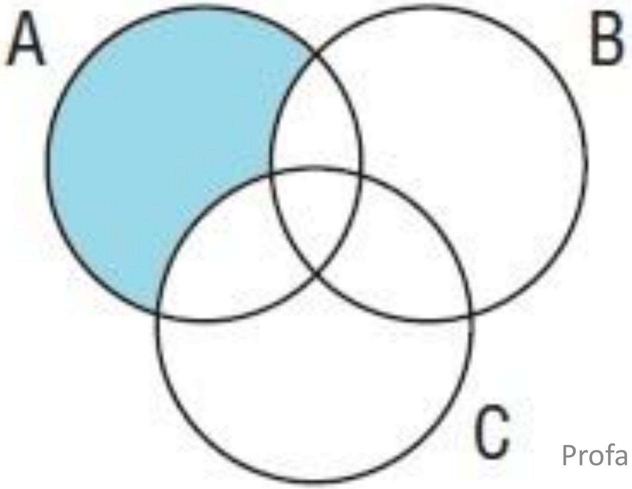
a)



c)



b)



d)