PROGRAMAÇÃO LINEAR
UERJ/2024

02 - Método Simplex

Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br
IME-UERJ

Sumário

Problema de maximização - Forma canônica

$$
\begin{array}{lrcl}
\max & z & = & cx \\
\text{s.a.} & & & \\
 & Ax & \leq & b \\
 & x & \geq & 0,
\end{array}
$$

onde:

$$c = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T;$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Problema de maximização - Forma padrão

Restrições ($\leq$) passam a ser restrições ($=$).

$$\begin{array}{llcl} \max & z & = & c'x' \\ \text{s.a.} & & & \\ & A'x' & = & b \\ & x' & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \max & z = & C_N x_N + C_B x_B \\ \text{s.a.} & & \\ & & N x_N + B x_B = b \\ & & x_N \;,\; x_B \geq 0 \end{array}$$

onde:

$$c' = [\; \underbrace{c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n}_{C_N} \mid \underbrace{0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0}_{C_B} \;];$$

$$x' = [\; \underbrace{x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n}_{x_N} \mid \underbrace{s_1 \quad s_2 \quad \cdots \quad s_m}_{x_B} \;]^T;$$

$$A' = \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}}_{N} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix}}_{B = I} \end{array} \right]; \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Problema de maximização - Algoritmo Simplex

No início do algoritmo Simplex, fixamos:

$$x_N = 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T_{1\times n},$$

e consequentemente,

$x_B = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_m \end{bmatrix}^T$.

Também no início do algoritmo, $B = I$.

Além disso, sabemos das restrições do problema que:

$$N\ x_N + B\ x_B = b$$

Multiplicando à esquerda por B^{-1}, obtemos:

$$B^{-1}N\ x_N + \underbrace{B^{-1}B}_{I}\ x_B = B^{-1}b \Rightarrow x_B = \underbrace{B^{-1}b}_{\bar{x}_B} - B^{-1}N\ x_N$$

Como fixamos $x_N = 0$, então

$$\Rightarrow x_B = \bar{x}_B = B^{-1}b$$

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

No início do algoritmo, $B = I$, e temos também que

$$\bar{x}_B = I^{-1}b \Rightarrow \bar{x}_B = b$$

Ou seja, $\bar{x}_B = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_m \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{bmatrix}^T$.

Agora, vamos expressar a função objetivo z em termos das variáveis não básicas x_N.

Sabemos das restrições do problema que:

$$N\ x_N + B\ x_B = b$$

Multiplicando à esquerda por B^{-1}, obtemos:

$$B^{-1}N\ x_N + \underbrace{B^{-1}B}_{I}\ x_B = B^{-1}b \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}N\ x_N$$

Substituindo x_B na função z, obtemos:

$$z = C_N\ x_N + C_B(B^{-1}b - B^{-1}N\ x_N) \Rightarrow z = C_B \underbrace{B^{-1}b}_{\bar{x}_B} - (\underbrace{C_B B^{-1}N}_{z_N} - C_N)\ x_N$$

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

Denotando $\bar{z} = C_B \bar{x}_B$ e $z_N = C_B B^{-1} N$, obtemos:

$$\Rightarrow z = \bar{z} - (z_N - C_N)\, x_N \,,$$

onde $\bar{z}$ é o valor atual da função objetivo z.

Podemos reescrever z_N como:

$$\begin{aligned}
z_N &= C_B B^{-1} N \\
&= C_B B^{-1} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\
&= C_B B^{-1} \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} C_B B^{-1} a_1 & C_B B^{-1} a_2 & \cdots & C_B B^{-1} a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

Como $c_N = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$, então:

$$(z_N - C_N)x_N$$

$$= \left(\begin{bmatrix} C_B B^{-1} a_1 & C_B B^{-1} a_2 & \cdots & C_B B^{-1} a_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} C_B B^{-1} a_1 - c_1 & C_B B^{-1} a_2 - c_2 & \cdots & C_B B^{-1} a_n - c_n \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= (C_B B^{-1} a_1 - c_1)x_1 + (C_B B^{-1} a_2 - c_2)x_2 + \cdots + (C_B B^{-1} a_n - c_n)x_n$$

$$= \sum_{j \in I_N} (C_B B^{-1} a_j - c_j)x_j = \sum_{j \in I_N} (z_j - c_j)x_j,$$

onde I_N é o conjunto dos índices das variáveis não básicas.

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

Assim,

$$\Rightarrow z = \bar{z} - \sum_{j \in I_N} (z_j - c_j) x_j,$$

e podemos reescrever o problema de maximização na forma padrão como:

$$\max \quad z = \bar{z} - (z_N - c_N) x_N = \bar{z} - \sum_{j \in I_N} (z_j - c_j) x_j$$

$$\text{s.a.}$$

$$x_B = \bar{x}_B - B^{-1} N x_N$$
$$x_N \ , \ x_B \geq 0$$

Devemos analisar a subtração $(z_j - c_j)$, pois é através dela que vamos obter o critério de entrada de uma nova variável na base.

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

Num problema de maximização:

- Se $(z_j - c_j) < 0$, há contribuição para aumentar $\bar{z}$ (valor atual) na função objetivo z, o que é desejado.

Então, o critério de entrada na base é:

Para cada variável não básica x_j, calcularemos $(z_j - c_j)$.

- Caso haja mais de uma variável não básica x_j com $(z_j - c_j) < 0$, entrará na base a que tiver o menor valor de $(z_j - c_j)$.
- Caso $(z_j - c_j) \geq 0$ para todas as variáveis, teremos que a solução atual é ótima e podemos parar o algoritmo.

Falta verificar ainda: qual variável será escolhida para sair da base?

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

Sabemos do sistema de equações das restrições do PPL que:

$$Nx_N + Bx_B = b \Rightarrow x_B = \underbrace{B^{-1}b}_{\bar{x}_B} - B^{-1}Nx_N \Rightarrow x_B = \bar{x}_B - B^{-1}Nx_N \ ,$$

onde $\bar{x}_B$ é a solução básica atual.

Então, podemos reescrever essa equação como:

$$\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{B_1} \\ \bar{x}_{B_2} \\ \vdots \\ \bar{x}_{B_m} \end{bmatrix} - B^{-1}N \begin{bmatrix} x_{N_1} \\ x_{N_2} \\ \vdots \\ x_{N_n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{x}_{B_1} \\ \bar{x}_{B_2} \\ \vdots \\ \bar{x}_{B_m} \end{bmatrix} - B^{-1} \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{N_1} \\ x_{N_2} \\ \vdots \\ x_{N_n} \end{bmatrix}$$

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{B_1} \\ \bar{x}_{B_2} \\ \vdots \\ \bar{x}_{B_m} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} | & | & & | \\ B^{-1}a_1 & B^{-1}a_2 & \cdots & B^{-1}a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{N_1} \\ x_{N_2} \\ \vdots \\ x_{N_n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{x}_{B_1} \\ \bar{x}_{B_2} \\ \vdots \\ \bar{x}_{B_m} \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} | \\ B^{-1}a_1 \\ | \end{bmatrix} x_{N_1} + \begin{bmatrix} | \\ B^{-1}a_2 \\ | \end{bmatrix} x_{N_2} + \cdots + \begin{bmatrix} | \\ B^{-1}a_n \\ | \end{bmatrix} x_{N_n} \right)$$

Denotando o vetor coluna $B^{-1}a_k = y_k$, temos:

$$\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{B_1} \\ \bar{x}_{B_2} \\ \vdots \\ \bar{x}_{B_m} \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} | \\ y_1 \\ | \end{bmatrix} x_{N_1} + \begin{bmatrix} | \\ y_2 \\ | \end{bmatrix} x_{N_2} + \cdots + \begin{bmatrix} | \\ y_n \\ | \end{bmatrix} x_{N_n} \right)$$

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

Suponha que a variável que tenha entrado na base foi $x_{N_k} = x_k$.

Se x_k vai entrar na base, então vai deixar de ser nula.

Além disso, as demais variáveis $x_{N_1}, x_{N_2}, \cdots, x_{N_{k-1}}, x_{N_{k+1}}, \cdots, x_{N_n}$ continuam nulas, pois continuam fora da base.

Assim, fazendo $x_{N_k} = x_k$ e $x_{N_1} = x_{N_2} = \cdots = x_{N_{k-1}} = x_{N_{k+1}} = \cdots = x_{N_n} = 0$ na equação anterior, obtemos:

$$\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{B_1} \\ \bar{x}_{B_2} \\ \vdots \\ \bar{x}_{B_m} \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} | \\ y_1 \\ | \end{bmatrix} 0 + \begin{bmatrix} | \\ y_2 \\ | \end{bmatrix} 0 + \cdots + \begin{bmatrix} | \\ y_{k-1} \\ | \end{bmatrix} 0 \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} | \\ y_k \\ | \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} | \\ y_{k+1} \\ | \end{bmatrix} 0 + \cdots + \begin{bmatrix} | \\ y_n \\ | \end{bmatrix} 0 \right)$$

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

Ou seja,

$$\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{B_1} \\ \bar{x}_{B_2} \\ \vdots \\ \bar{x}_{B_m} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} | \\ y_k \\ | \end{bmatrix} x_k = \begin{bmatrix} \bar{x}_{B_1} \\ \bar{x}_{B_2} \\ \vdots \\ \bar{x}_{B_m} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix} x_k$$

Como devemos satisfazer as condições de não negatividade ($x_B \geq 0$), então:

$$x_{B_i} \geq 0 \Rightarrow \bar{x}_{B_i} - y_{ik}x_k \geq 0 \Rightarrow x_k \leq \frac{\bar{x}_{B_i}}{y_{ik}}, \ \forall i = 1, 2, \cdots, m.$$

Note que se $y_{ik} \leq 0$ e, como já sabemos que $\bar{x}_{B_i} > 0$, então neste caso, $x_k \leq 0$ e isso violaria a restrição de não negatividade.

Satisfazendo a condição $y_{ik} > 0$, temos que escolher para sair da base a variável x_{B_i} que limita mais o crescimento de x_k. Ou seja, deve sair da base a variável x_{B_i} cujo índice i se relacione ao $\min\left\{\frac{\bar{x}_{B_i}}{y_{ik}}, i = 1, 2, \cdots, m; \ y_{ik} > 0\right\}$

Problema de maximização - Algoritmo Simplex

1. **Passo 1:** Encontre uma solução básica viável inicial para o problema.
2. **Passo 2:** Calcule os $z_j - c_j$ das variáveis não básicas da solução atual. Caso $z_j - c_j > 0$ para todas as variáveis não básicas, pare, pois a solução atual é ótima. Senão, vá para o Passo 3.
3. **Passo 3:** Caso haja mais de um $z_j - c_j > 0$, uma regra razoável é escolher a variável associada ao maior $z_j - c_j$ a entrar na base. Vá para o Passo 4.
4. **Passo 4:** Encontre a variável x_{B_r} que deixará a base relacionada à linha r tal que: $\min\left\{\frac{\bar{x}_{B_r}}{y_{rk}}, r = 1, 2, \cdots, m;\ y_{rk} > 0\right\}$.
   Se $y_{rk} < 0, \forall r = 1, 2, \cdots, m$, então pare, pois a solução é ilimitada.
5. **Passo 5:** Encontre a nova base inserindo a coluna relativa à variável x_j, escolhida no Passo 3, no lugar da coluna da variável x_{B_r}, definida no Passo 4. Calcule a nova B^{-1} e, então, a nova solução solução básica viável $\bar{x}_B = B^{-1}b$. Volte para o Passo 2.

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

Exemplo: Usando o algoritmo Simplex, ache a solução ótima de:

$$
\begin{array}{llrcrcl}
\max & z = & 18x_1 & + & 12x_2 & & \\
\text{s.a.} & & & & & & \\
& & 4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 20 \\
& & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\
& & & & x_2 & \leq & 2 \\
& & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Passando para a forma padrão, temos:

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrcl}
\max & z = & 18x_1 & + & 12x_2 & + & 0s_1 & + & 0s_2 & + & 0s_3 & & \\
\text{s.a.} & & & & & & & & & & & & \\
& & 4x_1 & + & 5x_2 & + & s_1 & & & & & = & 20 \\
& & 2x_1 & + & x_2 & & & + & s_2 & & & = & 6 \\
& & & & x_2 & & & & & + & s_3 & = & 2 \\
& & x_1 & , & x_2 & , & s_1 & , & s_2 & , & s_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

(1) Dados iniciais:

$$N = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 20 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad x_B = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \bar{x}_B;$$

$$c_N = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 12 \end{bmatrix}; \quad c_B = \begin{bmatrix} c_3 & c_4 & c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\bar{z} = C_B \bar{x}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = 0.$$

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

Quem entra na base - Cálculo de $(z_N - c_N)$ para verificar a variável que entra na base:

$$
\begin{aligned}
z_N - c_N &= c_B B^{-1} N - c_N \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 18 & 12 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -18 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 - c_1 & z_2 - c_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$z_1 - c_1 = -18 < 0$ e $z_2 - c_2 = -12 < 0$ (ainda é possível maximizar a função objetivo z).

$\Rightarrow x_1$ entra na base, pois $z_1 - c_1 < z_2 - c_2$.

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

Quem sai da base - Sabemos que pelas condições de não negatividade, $x_B \geq 0$. **Então:**

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N = \bar{x}_B - B^{-1}Nx_N$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 - 4x_1 \\ 6 - 2x_1 \\ 2 \end{bmatrix} \geq 0$$

(1) $s_1 \geq 0 \Rightarrow 20 - 4x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 20/4;$

(2) $s_2 \geq 0 \Rightarrow 6 - 2x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 6/2;$

(3) $s_3 \geq 0 \Rightarrow 2 \geq 0;$ (não limita o crescimento de x_1)

As condições (1) e (2) limitam o crescimento de x_1, sendo que (2) limita mais.

Portanto, $\min\left\{\frac{20}{4}, \frac{6}{2}\right\} = \frac{6}{2} \Rightarrow s_2$ sai da base.

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

(2) x_1 entra na base, s_2 sai da base:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 20 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$x_N = \begin{bmatrix} s_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; x_B = \begin{bmatrix} s_1 \\ x_1 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \bar{x}_B$$

$$c_N = \begin{bmatrix} c_4 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 12 \end{bmatrix}; \quad c_B = \begin{bmatrix} c_3 & c_1 & c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 18 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\bar{z} = C_B \bar{x}_B = \begin{bmatrix} 0 & 18 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 54.$$

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

Quem entra na base - Cálculo de $(z_N - c_N)$ para verificar a variável que entra na base:

$$
\begin{aligned}
z_N - c_N &= c_B B^{-1} N - c_N \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 18 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 12 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 9 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_4 - c_4 & z_2 - c_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$z_2 - c_2 = -3 < 0$ (ainda é possível maximizar a função objetivo z).

$\Rightarrow x_2$ entra na base.

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

Quem sai da base - Sabemos que pelas condições de não negatividade, $x_B \geq 0$. **Então:**

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N = \bar{x}_B - B^{-1}Nx_N$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} s_1 \\ x_1 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0,5 & 0,5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 - 3x_2 \\ 3 - 0,5x_2 \\ 2 - x_2 \end{bmatrix} \geq 0$$

$(1) \quad s_1 \geq 0 \Rightarrow 8 - 3x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 8/3;$

$(2) \quad x_1 \geq 0 \Rightarrow 3 - 0,5x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 3/0,5;$

$(3) \quad s_3 \geq 0 \Rightarrow 2 - x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 2.$

As condições acima limitam o crescimento de x_2, sendo que a condição (3) limita mais.

Portanto, $\min\left\{\frac{8}{3}, \frac{3}{0,5}, \frac{2}{1}\right\} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow s_3$ sai da base.

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

(2) x_2 entra na base, s_3 sai da base:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 20 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_N = \begin{bmatrix} s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \, x_B = \begin{bmatrix} s_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \bar{x}_B;$$

$$c_N = \begin{bmatrix} c_4 & c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad c_B = \begin{bmatrix} c_3 & c_1 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 18 & 12 \end{bmatrix};$$

$$\bar{z} = C_B \bar{x}_B = \begin{bmatrix} 0 & 18 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 60.$$

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

Quem entra na base - Cálculo de $(z_N - c_N)$ para verificar a variável que entra na base:

$$
\begin{aligned}
z_N - c_N &= c_B B^{-1} N - c_N \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 18 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_4 - c_4 & z_5 - c_5 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$z_4 - c_4 = 9 > 0$ e $z_4 - c_4 = 3 > 0$ (fim do algoritmo).

$\Rightarrow$ Encontramos a solução ótima: $(x_1^*, x_2^*) = (2, 2)$

$\Rightarrow$ Valor máximo da função objetivo: $z^* = 60$.

Simplex - Abordagem em *tableau*

Do sistema de equações lineares das restrições do PPL na forma padrão, temos:

$$Nx_N + Bx_B = b \Rightarrow B^{-1}Nx_N + B^{-1}Bx_B = B^{-1}b \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

A função objetivo z é dada por:

$$z = c_N x_N + c_B x_B$$

Expressando a função objetivo z em função do vetor de variáveis não básicas x_N, ao subsituir x_B em z, obtemos:

$$z = c_N x_N + c_B(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) \Rightarrow z = \underbrace{c_B \underbrace{B^{-1}b}_{\bar{x}_B}}_{\bar{z}} - (\underbrace{C_B B^{-1}N}_{z_N} - c_N)x_N$$

$$\Rightarrow z = \bar{z} - (z_N - c_N)x_N \Rightarrow z + (z_N - c_N)x_N + 0x_B = \bar{z}$$

Além disso, no sistema de restrições inicial: $Nx_N + x_B = b$, pois $B = I$.

Assim, o *tableau* inicial fica:

	z	x_N	x_B	
z	1	$z_N - c_N$	0	$\bar{z}$
x_B	0	N	I	b

Simplex - Abordagem em *tableau*

Além disso, a solução básica viável inicial é dada por:

$$x_N = x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T;$$

$$x_B = s = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_m \end{bmatrix}^T = b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{bmatrix}^T$$

Assim,

$$c_N = c = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}; \quad c_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{1\times m};$$

$$z_N - c_N = c_B N - c_N = -c_N; \quad \bar{z} = c_B b = 0.$$

Assim, o *tableau* inicial fica:

	z	x_N	x_B	
z	1	$-c_N$	0	$\bar{z}$
x_B	0	N	I	b

Seja I_N o conjunto dos índices das variáveis não básicas, que são elementos de x_N. Se $z_j - c_j < 0$ para algum $j \in I_N$, devemos realizar pivotagem no *tableau*, ou seja, realizar operações elementares nas linhas do *tableau*.

Simplex - Abordagem em *tableau*

Voltando ao exemplo anterior na forma padrão:

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrl}
\max & z = & 18x_1 & + & 12x_2 & + & 0s_1 & + & 0s_2 & + & 0s_3 & & \\
\text{s.a.} & & & & & & & & & & & & \\
& & 4x_1 & + & 5x_2 & + & s_1 & & & & & = & 20 \\
& & 2x_1 & + & x_2 & & & + & s_2 & & & = & 6 \\
& & & & x_2 & & & & & + & s_3 & = & 2 \\
& & x_1 & , & x_2 & , & s_1 & , & s_2 & , & s_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Solução básica viável inicial:

Fixamos $x_N = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$;

$$\Rightarrow x_B = s = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 20 & 6 & 2 \end{bmatrix}^T$$

Simplex - Abordagem em *tableau*

Tableau inicial:

(1)

$$\begin{array}{c|c|ccccc|c}
 & z & \Downarrow x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\
\hline
z & 1 & -18 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 = \bar{z} \\
\hline
s_1 & 0 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 20 \\
\Leftarrow s_2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
s_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
 & & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\qquad\qquad}_{N}} & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{B = I}} & \underbrace{\quad}_{b}
\end{array}$$

$$B = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

Quem entra na base:

$z_1 - c_1 = -18 < 0$ e $z_2 - c_2 = -12 < 0$

Como $z_1 - c_1 < z_2 - c_2$, então x_1 entra na base .

Quem sai da base:

$a_{11} = 4 > 0$ (OK); $a_{21} = 2 > 0$ (OK); $a_{31} = 0$ $(\times)$.

$\min\left\{\frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{21}}\right\} = \min\left\{\frac{20}{4}, \frac{6}{2}\right\} = \frac{6}{2} \Rightarrow s_2$ sai da base.

Simplex - Abordagem em *tableau*

Tableau inicial:
(1)

	z	$\Downarrow x_1$	x_2	s_1	s_2	s_3		
z	1	-18	-12	0	0	0	0	(L_1)
s_1	0	4	5	1	0	0	20	(L_2)
$\Leftarrow s_2$	0	2	1	0	1	0	6	(L_3)
s_3	0	0	1	0	0	1	2	(L_4)

Pivô: $a_{21} = 2$;
Linha do pivô: L_3;
Operações nas linhas para eliminar os elementos da coluna do pivô, diferentes do pivô:

$$L_1 \leftarrow L_1 - \left(\frac{-18}{2}\right)L_3 = L_1 + 9L_3;$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - \left(\frac{4}{2}\right)L_3 = L_2 - 2L_3.$$

Simplex - Abordagem em *tableau*

(2)

$$
\begin{array}{c|c|cc|ccc|c}
 & z & x_1 & \Downarrow x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\
\hline
z & 1 & 0 & -3 & 0 & 9 & 0 & 54 = \bar{z} \\
\hline
s_1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & 0 & 8 \\
x_1 & 0 & 1 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 3 \\
\Leftarrow s_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
 & & \multicolumn{2}{c|}{\underbrace{\qquad\qquad}_{B^{-1}N}} & \multicolumn{3}{c|}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{B^{-1}}} & \underbrace{\quad}_{B^{-1}b}
\end{array}
\qquad
B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};
$$

Quem entra na base:

$z_2 - c_2 = -3 < 0 \Rightarrow x_2$ entra na base .

Quem sai da base:

$a_{12} = 3 > 0$ (OK); $a_{22} = 0,5 > 0$ (OK); $a_{32} = 1 > 0$ (OK).

$$\min\left\{\frac{\bar{x}_1}{a_{12}}, \frac{\bar{x}_2}{a_{22}}, \frac{\bar{x}_3}{a_{32}}\right\} = \min\left\{\frac{8}{3}, \frac{3}{0,5}, \frac{2}{1}\right\} = \frac{2}{1} \Rightarrow s_3 \text{ sai da base.}$$

Simplex - Abordagem em *tableau*

(2)

	z	x_1	$\Downarrow x_2$	s_1	s_2	s_3		
z	1	0	-3	0	9	0	$54 = \bar{z}$	(L_1)
s_1	0	0	3	1	-2	0	8	(L_2)
x_1	0	1	$0,5$	0	$0,5$	0	3	(L_3)
$\Leftarrow s_3$	0	0	1	0	0	1	2	(L_4)

Pivô: $a_{32} = 1$;
Linha do pivô: L_4;
Operações nas linhas para eliminar os elementos da coluna do pivô, diferentes do pivô:

$$L_1 \leftarrow L_1 - \left(\frac{-3}{1}\right)L_4 = L_1 + 3L_4;$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - \left(\frac{3}{1}\right)L_4 = L_2 - 3L_4;$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - \left(\frac{0,5}{1}\right)L_4 = L_3 - 0,5L_4.$$

Simplex - Abordagem em *tableau*

(3)

$$
\begin{array}{c|c|ccccc|c}
 & z & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\
\hline
z & 1 & 0 & 0 & 0 & 9 & 3 & 60 = \bar{z} \\
\hline
s_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 \\
x_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0,5 & -0,5 & 2 \\
x_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
\end{array}
$$

$$\underbrace{\qquad}_{B^{-1}N} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{B^{-1}} \quad \underbrace{\quad}_{B^{-1}b}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$z_j - c_j \geq 0, j = 1, 2, \cdots, 5$. Logo, **a solução ótima foi encontrada**.

Solução ótima: $(x_1^*, x_2^*) = (2, 2)$.

Valor ótimo da função objetivo: $z^* = 60$.