1 – Formulação de Problemas

- PL é uma das técnicas matemáticas usadas na área de Pesquisa Operacional para a resolução de problemas quantitativos.
- Outras técnicas: Programação Não-Linear, Programação Dinâmica, Programação em Redes, Teoria de Filas, Simulação, ...
- PL trata com problemas de otimizar (maximizar ou minimizar) uma função linear (função-objetivo) sujeita a restrições lineares (restrições estruturais e de sinal) sobre as variáveis.
- Exemplo: Uma empresa produz dois tipos de fertilizante (H e L). Três tipos de matéria-prima (MP) são utilizadas do seguinte modo:

Matéria prima	**kg de MP para produzir 1 kg de:**		**Quantidade máxima disponível (kg)**
	H	**L**	
1	2	1	1500
2	1	1	1200
3	1	0	500
Venda ($/kg)	15	10	

Quantos kg de cada fertilizante a empresa deve produzir para maximizar suas vendas?

- Variáveis de decisão: os valores das variáveis de decisão indicam as atitudes a serem tomadas.

  x_1 – quantidade do fertilizante H a ser produzido

  x_2 – quantidade do fertilizante L a ser produzido

- Cada variável de decisão está associada a uma atividade a ser executada (por exemplo: produzir 1 kg de H) e o valor da variável de decisão corresponde à quantificação desta atividade.

- Para formular matematicamente o problema, as seguintes hipóteses são assumidas:

1. Hipótese da Proporcionalidade

   1 kg de H precisa de 2 kg da MP_1

   x_1 kg de H precisam de $2x_1$ kg da MP_1 $(\forall x_1 \geq 0)$

   1 kg de H é vendido por \$15

   x_1 kg de H são vendidos por $\$15x_1$ $(\forall x_1 \geq 0)$

2. Hipótese da Adição

   1 kg de H precisa de 2 kg da MP_1

   1 kg de L precisa de 1 kg da MP_1

   x_1 kg de H + x_2 kg de L precisam de $(2x_1 + x_2)$ kg da MP_1

   $(\forall x_1, x_2 \geq 0)$

   - Esta hipótese implica que a produção (ou o consumo) de um item é igual à soma das quantidades produzidas (ou consumidas) deste item em cada uma das atividades individuais.
   - Isto implica também que a função-objetivo é separável nas variáveis, ou seja, se as variáveis de decisão são $x_1, \ldots, x_n$ e a função-objetivo é $z(x_1, \ldots, x_n)$, então essa função pode ser escrita como uma soma de n funções, uma para cada variável, ou seja, $z_1(x_1) + \ldots + z_n(x_n)$, onde $z_j(x_j)$ é a contribuição da variável x_j para a função-objetivo.

3. Hipótese da Continuidade
   - Cada variável de decisão pode assumir qualquer valor de seu intervalo de definição. Por exemplo: $x_1 \in [0, \infty)$

- Com estas hipóteses, podemos formular o problema como:

função-objetivo

restrições estruturais

$$
\begin{array}{lll}
\max & 15\,x_1 + 10\,x_2 & \text{(venda total)} \\
\text{s.a} & 2\,x_1 + x_2 \le 1500 & \text{(disponibilidade da MP}_1\text{)} \\
 & x_1 + x_2 \le 1200 & \text{(disponibilidade da MP}_2\text{)} \\
 & x_1 \le 500 & \text{(disponibilidade da MP}_3\text{)} \\
 & x_1 \ge 0 & \text{(nível da atividade 1)} \\
 & x_2 \ge 0 & \text{(nível da atividade 2)}
\end{array}
$$

restrições de sinal

- Para alguns problemas, pode haver variáveis restritas a assumirem apenas valores inteiros (por exemplo, uma variável que represente o número de pessoas transportadas de um local para outro), ou mesmo valores binários 0-1 (por exemplo, uma variável que represente se um local é ou não é um ponto de parada de ônibus). Tais restrições levam a problemas de Programação Linear Inteira, que são muito mais difíceis de serem resolvidos do que os PPL.

- Forma padrão para os Problemas de Programação Linear (PPL):
  - a função-objetivo deve ser minimizada;
  - as restrições devem ser igualdades;
  - o nível das variáveis deve ser não-negativo.

- Forma padrão:

$$\min \ -15\, x_1 - 10\, x_2$$

$$\text{s.a} \quad 2\, x_1 + x_2 + x_3 = 1500$$

$$x_1 + x_2 + x_4 = 1200$$

$$x_1 + x_5 = 500$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

x_3, x_4 e x_5 são conhecidas como variáveis de folga. Interpretação das variáveis de folga: x_j = quantidade não utilizada da MP_j (j = 3, 4, 5).

- Na forma padrão, um PPL pode ser escrito como uma tabela:

Ítens	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Recursos
1	2	1	1	0	0	1500
2	1	1	0	1	0	1200
3	1	0	0	0	1	500
FO	-15	-10	0	0	0	min

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	2	1	1	0	0	1500
2	1	1	0	1	0	1200
3	1	0	0	0	1	500
FO	-15	-10	0	0	0	

Seja: *m* = número de restrições estruturais (linhas)

n = número de variáveis (colunas)

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{m \times n}$$

matriz de coeficientes tecnológicos (ou matriz de restrições)

$$b = \begin{vmatrix} 1500 \\ 1200 \\ 500 \end{vmatrix}_{m \times 1}$$

vetor de termos independentes (ou vetor do lado direito)

$$c = \begin{vmatrix} -15 & -10 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}_{1 \times n}$$

vetor de coeficientes de custo

$$x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{vmatrix}_{n \times 1}$$

vetor de variáveis de decisão

- O PPL na forma padrão pode ser escrito como:

$$\min \{ c\,x \mid A\,x = b,\ x \geq 0 \}$$

- Notar que: min { cx | Ax = b, x ≥ 0 }

$$cx = \begin{vmatrix} -15 & -10 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}_{1\times 5} \times \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{vmatrix}_{5\times 1} = -15x_1 - 10x_2$$

$$Ax = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{3\times 5} \times \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{vmatrix}_{5\times 1} = \begin{vmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_4 \\ x_1 + x_5 \end{vmatrix}_{3\times 1}$$

$$Ax = b \Rightarrow \begin{vmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_4 \\ x_1 + x_5 \end{vmatrix}_{3\times 1} = \begin{vmatrix} 1500 \\ 1200 \\ 500 \end{vmatrix}_{3\times 1} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1500 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1200 \\ x_1 + x_5 = 500 \end{cases}$$

- Exemplo: Uma refinaria usa 4 tipos de gasolina bruta para produzir 3 tipos de combustível, que são colocados à venda. A refinaria também vende a gasolina bruta não utilizada para produzir combustível, conforme o quadro abaixo.

Gasolina bruta	Octanagem	Disponibilidade diária	Preço de compra	Preço de venda
1	68	4000	1,02	1,85
2	86	5050	1,15	1,85
3	91	7100	1,35	2,95
4	99	4300	2,75	2,95
Combustível	**Octanagem mínima**	**Demanda diária**	**Preço de venda**	
1	95	≤ 10000	5,15	
2	90	qualquer	3,95	
3	85	≥ 15000	2,99	

- O que (e quanto) a refinaria deve vender para maximizar seu lucro?

- Variáveis de decisão:

  x_{ij} = quantidade de gasolina bruta do tipo i usada para produzir combustível do tipo j, por dia (i = 1, ...,4; j = 1, ..., 3)

  y_i = quantidade de gasolina bruta do tipo i vendida (i = 1, ..., 4)

- Lucro (função-objetivo a ser maximizada):

  $5.15(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}) + 3.95(x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42}) +$

  $2.99(x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43}) + (1.85 - 1.02)y_1 + (1.85 - 1.15)y_2 +$
  $(2.95 - 1.35)y_3 + (2.95 - 2.75)y_4$

- Disponibilidade das gasolinas brutas:

  $x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1 = 4000$

  $x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2 = 5050$

  $x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3 = 7100$

  $x_{41} + x_{42} + x_{43} + y_4 = 4300$

> Notar que as variáveis y_i funcionam como **variáveis de folga** e, portanto, as restrições são de igualdade.

- Demanda dos combustíveis:

  $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \leq 10000$

  $x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \geq 0$

  $x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \geq 15000$

> Notar que esta restrição é **desnecessária**, pois todas as variáveis são não-negativas.

- Octanagem dos combustíveis:

$$\frac{68x_{11} + 86x_{21} + 91x_{31} + 99x_{41}}{x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}} \geq 95$$

ou seja:

$68x_{11} + 86x_{21} + 91x_{31} + 99x_{41} \geq 95x_{11} + 95x_{21} + 95x_{31} + 95x_{41}$

e portanto:

$(68 - 95)x_{11} + (86 - 95)x_{21} + (91 - 95)x_{31} + (99 - 95)x_{41} \geq 0$

As demais restrições de octanagem dos combustíveis:

$(68 - 90)x_{12} + (86 - 90)x_{22} + (91 - 90)x_{32} + (99 - 90)x_{42} \geq 0$

$(68 - 85)x_{13} + (86 - 85)x_{23} + (91 - 85)x_{33} + (99 - 85)x_{43} \geq 0$

Portanto, as restrições de octanagem são:

$- 27x_{11} - 9x_{21} - 4x_{31} + 4x_{41} \geq 0$

$- 22x_{12} - 4x_{22} + 1x_{32} + 9x_{42} \geq 0$

$- 17x_{13} + 1x_{23} + 6x_{33} + 14x_{43} \geq 0$

- Portanto, este problema pode ser formulado como:

max $5.15x_{11} + 5.15x_{21} + 5.15x_{31} + 5.15x_{41} +$
$3.95x_{12} + 3.95x_{22} + 3.95x_{32} + 3.95x_{42} +$
$2.99x_{13} + 2.99x_{23} + 2.99x_{33} + 2.99x_{43} +$
$0.83y_1 + 0.70y_2 + 1.60y_3 + 0.20y_4$

s.a
$x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1 = 4000$
$x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2 = 5050$
$x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3 = 7100$
$x_{41} + x_{42} + x_{43} + y_4 = 4300$
$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \leq 10000$
$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \geq 15000$
$-27x_{11} - 9x_{21} - 4x_{31} + 4x_{41} \geq 0$
$-22x_{12} - 4x_{22} + 1x_{32} + 9x_{42} \geq 0$
$-17x_{13} + 1x_{23} + 6x_{33} + 14x_{43} \geq 0$

$x_{ij} \geq 0,\ y_i \geq 0\ (i = 1, \ldots, 4;\ j = 1, \ldots, 3)$

- Este PPL na forma padrão:

variáveis de decisão

x^T

variáveis de folga

b

item	x_{11}	x_{21}	x_{31}	x_{41}	x_{12}	x_{22}	x_{32}	x_{42}	x_{13}	x_{23}	x_{33}	x_{43}	y_1	y_2	y_3	y_4	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	recursos
1	1				1				1				1									4000
2		1				1				1				1								5050
3			1				1				1				1							7100
4				1				1				1				1						4300
5	1	1	1	1													1					10000
6									1	1	1	1						-1				15000
7	-27	-9	-4	4															-1			
8					-22	-5	1	9												-1		
9									-17		6	14									-1	
FO	-5.15	-5.15	-5.15	-5.15	-3.95	-3.95	-3.95	-3.95	-2.99	-2.99	-2.99	-2.99	-0.83	-0.70	-1.60	-0.20						min

A

vetor dos custos

c

matriz dos coeficientes

vetor dos termos independentes

- Em termos do modelo:

$$\min \{ cx \mid Ax = b, x \geq 0 \}$$

Solução de PPLs com Duas Variáveis

- Dado um PPL, uma solução viável é um vetor que especifica o valor de cada variável tal que, se as variáveis são substituídas por estes valores, então todas as restrições (estruturais e de sinal) serão satisfeitas.

- Uma solução ótima é uma solução **viável** que maximiza (minimiza) a função-objetivo.

- Para um PPL envolvendo apenas duas variáveis, o conjunto das soluções viáveis pode ser identificado como uma região do plano cartesiano e, assim, o PPL pode ser resolvido graficamente.

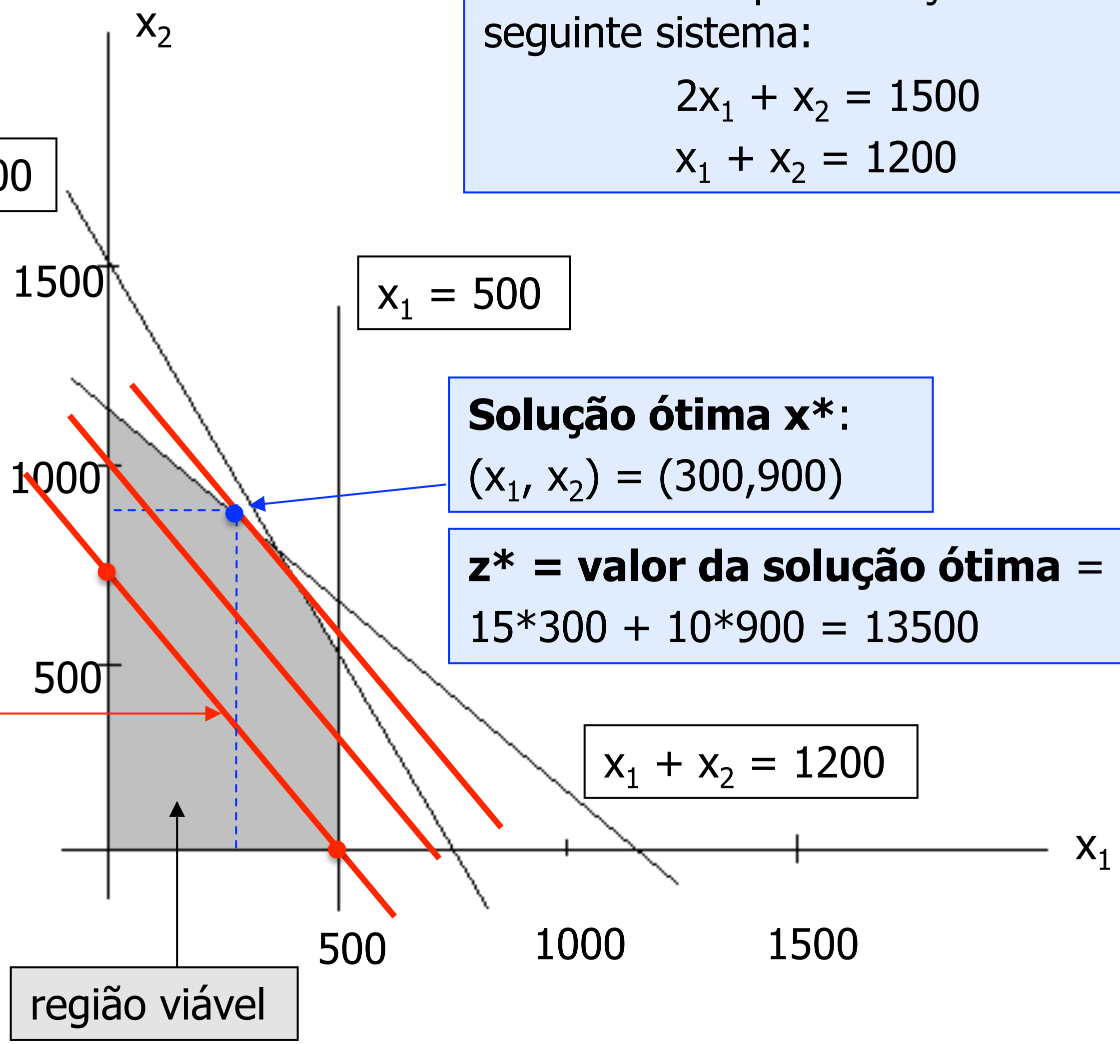
- A solução ótima pode ser identificada traçando-se uma reta que corresponde a um valor específico da função-objetivo para um ponto da região viável e traçando-se retas paralelas a esta até um ponto da região viável que maximiza (minimiza) a função-objetivo.

$$\begin{array}{ll} \max & 15\,x_1 + 10\,x_2 \\ \text{s.a} & 2\,x_1 + x_2 \leq 1500 \\ & x_1 + x_2 \leq 1200 \\ & x_1 \leq 500 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Observe que a **solução x*** é **única** e dada pela solução do seguinte sistema:

$$2x_1 + x_2 = 1500$$
$$x_1 + x_2 = 1200$$

Até que ponto, **dentro da região viável**, podemos traçar **níveis paralelos** da FO, de forma a **maximizar** a função-objetivo?



Solução ótima x*:

$(x_1, x_2) = (300,900)$

z* = valor da solução ótima =

15*300 + 10*900 = 13500

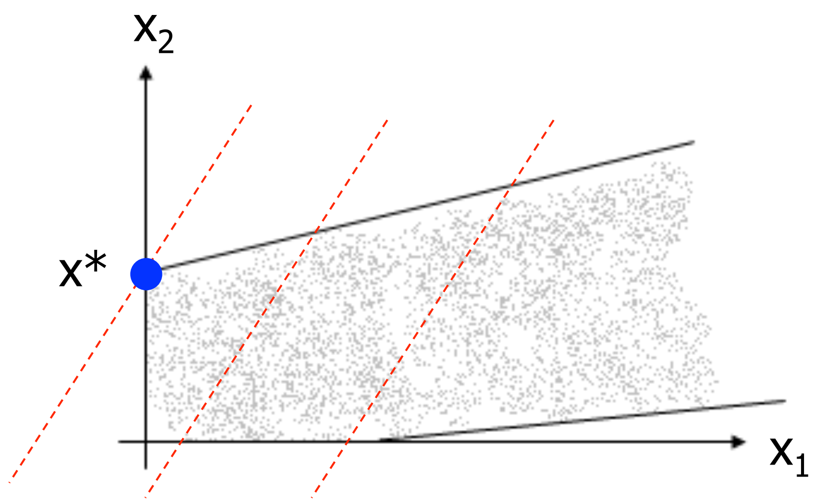
Seja **FO = 7500**

Então:

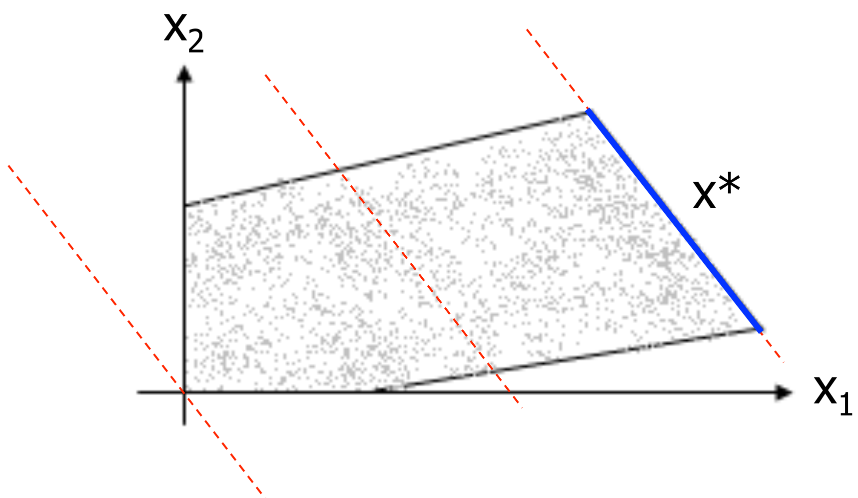
$15x_1 + 10x_2 = 7500$

Escolha dois pontos da região viável por onde a reta deve passar.

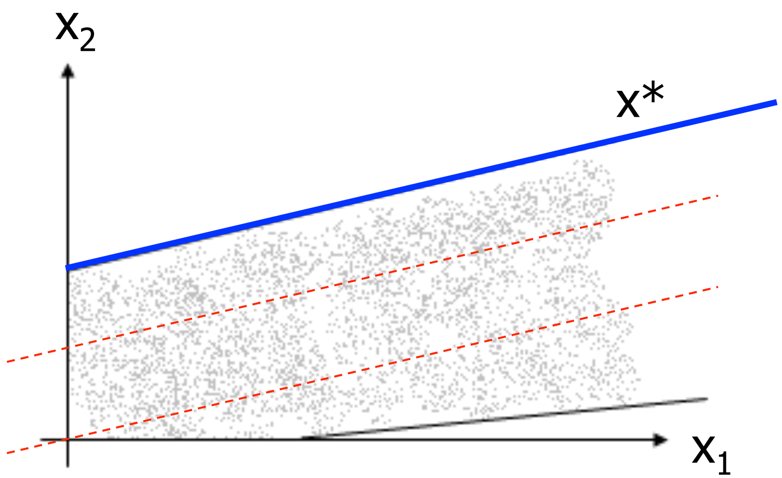
- O problema anterior tem a região viável limitada e apresenta uma única solução ótima. Entretanto, várias outras possibilidades podem ocorrer em PPLs. As figuras a seguir ilustram essas possibilidades.



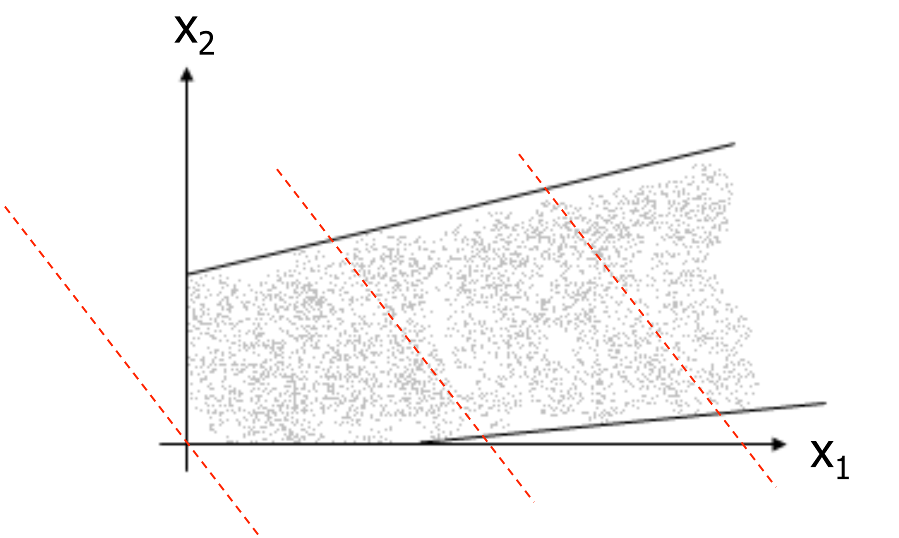
Região viável ilimitada e solução ótima única (problema de minimização).



Região viável limitada e infinitas soluções ótimas (problema de maximização). No entanto, o conjunto de soluções ótimas é limitado (segmento de reta).



O conjunto de soluções ótimas (problema de maximização) é ilimitado (semi-reta)



Não existe solução ótima (problema de maximização), embora existam soluções viáveis (região viável ilimitada). Neste caso, diz-se que a solução ótima é ilimitada ($z^* \rightarrow \infty$).

- A inexistência de solução ótima também pode ocorrer devido à inexistência de solução viável (região viável = $\varnothing$), ou seja, as restrições do problema são conflitantes.