

PROGRAMAÇÃO LINEAR UERJ/2024

02 - Método das Duas Fases

Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br
IME-UERJ

Sumário

1 Introdução

2 Fase I

3 Fase II

Introdução

Exemplo: Considere o problema a seguir:

$$\max \quad z = -2x_1 - 4x_2$$

s.a.

$$x_1 + 5x_2 \leq 80$$

$$4x_1 + 2x_2 \geq 20$$

$$x_1 + x_2 = 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Passando para a forma padrão, temos:

$$\max \quad z = -2x_1 - 4x_2 + 0s_1 + 0s_2$$

s.a.

$$x_1 + 5x_2 + s_1 = 80$$

$$4x_1 + 2x_2 - s_2 = 20$$

$$x_1 + x_2 = 10$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

Introdução

Em outros termos:

$$\max \quad z = [-2 \quad -4 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$$

s.a.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$x, s \geq 0$$

Note que nos problemas de maximização, nem sempre podemos trabalhar com restrições somente do tipo $A_j x_j \leq b_j$. Neste exemplo, temos uma restrição do tipo $A_j x_j \geq b_j$ e outra do tipo $A_j x_j = b_j$.

Assim, na matriz do sistema de restrições, não é possível ter vetores colunas formando uma matriz identidade para a base inicial B do método Simplex.

Introdução

Para resolver esse problema de não conseguir formar uma matriz identidade para a base inicial B, a ideia do **Método das Duas Fases** é acrescentar para cada restrição do tipo \geq ou $=$ uma variável artificial a_i .

Neste exemplo, o sistema de restrições se torna

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + s_1 &= 80 \\ 4x_1 + 2x_2 - s_2 + a_2 &= 20 \\ x_1 + x_2 + a_3 &= 10 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, a_2, a_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Em outros termos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Assim, as colunas A_3 , A_5 e A_6 formam uma base do sistema de restrições.

Introdução

A solução básica inicial fica:

$$x_B = [s_1 \quad a_2 \quad a_3]^T = [80 \quad 20 \quad 10]^T;$$

$$x_N = [x_1 \quad x_2 \quad s_2]^T = [0 \quad 0 \quad 0]^T.$$

O método consiste em:

Fase I: Resolver o subproblema P^a , que tem por objetivo eliminar as variáveis artificiais, isto é, reduzi-las a zero.

Assim, a Fase I consiste em

$$\max \quad z^a = \sum_k -a_k$$

$$\text{s.a.} \quad A'x' = b$$

$$x' \geq 0$$

Como $a_k \geq 0$, logo $z^a \leq 0$. Ou seja, $\max z^a = 0$. Portanto, as variáveis a_k devem sair da base neste subproblema P^a . Isso é o mesmo que tornar $a_k = 0$.

Fase I

No exemplo que estamos vendo, o subproblema P^a da Fase I fica assim:

$$\max \quad z^a = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

s.a.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, a_1, a_2 \geq 0$$

Fase I

No tableau inicial da Fase I, colocamos na linha L_1 os coeficientes com sinal trocado da função objetivo do subproblema P^a e na linha L_2 , os coeficientes com sinal trocado da função objetivo do problema original.

(1)

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	a_2	a_3		
z^a	1	0	0	0	0	1	1	$0 = \bar{z}^a$	(L_1)
z	1	2	4	0	0	0	0	$0 = \bar{z}$	(L_2)
s_1	0	1	5	1	0	0	0	80	(L_3)
a_2	0	4	2	0	-1	1	0	20	(L_4)
a_3	0	1	1	0	0	0	1	10	(L_5)

Note que não faz nenhum sentido começarmos com $\bar{z}^a = 0$ na linha L_1 do tableau, já que o objetivo da Fase I é eliminar as variáveis artificiais e consequentemente tornar $\bar{z}^a = 0$ ao longo das iterações.

Também não faz sentido que a_2 e a_3 , duas variáveis básicas, tenham coeficientes iguais a 1 na linha L_1 , pois variáveis básicas têm coeficientes nulos na linha da função objetivo.

Fase I

Então, a primeira tarefa é eliminar os coeficientes iguais a **1** na linha L_1 através de operações elementares nas linhas.

No tableau, notamos que na coluna de α_2 , há um elemento igual a **1** na linha L_4 , enquanto na coluna de α_3 , há um elemento igual a **1** na linha L_5 .

Logo, para eliminar os coeficientes iguais a **1** em L_1 , devemos subtrair de L_1 as linhas L_4 e L_5 . Ou seja, realizamos a operação:

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_4 - L_5.$$

Assim, o tableau resultante fica:

(2)

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	α_2	α_3		
z^a	1	-5	-3	0	1	0	0	$-30 = \bar{z}^a$	(L_1)
z	1	2	4	0	0	0	0	$0 = \bar{z}$	(L_2)
s_1	0	1	5	1	0	0	0	80	(L_3)
α_2	0	4	2	0	-1	1	0	20	(L_4)
α_3	0	1	1	0	0	0	1	10	(L_5)

Fase I

Agora, podemos aplicar o algoritmo Simplex no tableau resultante.
(2)

	z	↓ x ₁	x ₂	s ₁	s ₂	a ₂	a ₃		
z ^a	1	-5	-3	0	1	0	0	-30 = \bar{z}^a	(L ₁)
z	1	2	4	0	0	0	0	0 = \bar{z}	(L ₂)
s ₁	0	1	5	1	0	0	0	80	(L ₃)
← a ₂	0	4	2	0	-1	1	0	20	(L ₄)
a ₃	0	1	1	0	0	0	1	10	(L ₅)

Quem entra na base:

$$z_1 - c_1 = -5 < 0 \text{ e } z_2 - c_2 = -3 < 0$$

Como $z_1 - c_1 < z_2 - c_2$, então **x₁ entra na base**.

Quem sai da base:

$$a_{11} = 1 > 0 \text{ (OK); } a_{21} = 4 > 0 \text{ (OK); } a_{31} = 1 > 0 \text{ (OK).}$$

$$\min \left\{ \frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{21}}, \frac{b_3}{a_{31}} \right\} = \min \left\{ \frac{80}{1}, \frac{20}{4}, \frac{10}{1} \right\} = \frac{20}{4} = 5 \Rightarrow \mathbf{a_2 \text{ sai da base.}}$$

Fase I

Pivô: $a_{21} = 2$;

Linha do pivô: L_4 ;

Operações nas linhas para eliminar os elementos da coluna do pivô, exceto o pivô:

$$L_1 \leftarrow L_1 - \left(-\frac{5}{4}\right)L_4 = L_1 + \frac{5}{4}L_4;$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{4}L_4 = L_2 - \frac{1}{2}L_4;$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{4}L_4;$$

$$L_5 \leftarrow L_5 - \frac{1}{4}L_4;$$

$$L_4 \leftarrow \frac{1}{4}L_4.$$

Fase I

E o novo tableau fica:

(3)

	z	x_1	$\Downarrow x_2$	s_1	s_2	a_2	a_3		
z^a	1	0	$-1/2$	0	$-1/4$	$5/4$	0	$-5 = \bar{z}^a$	(L ₁)
z	1	0	3	0	$1/2$	$-1/2$	0	$-10 = \bar{z}$	(L ₂)
s_1	0	0	$9/2$	1	$1/4$	$-1/4$	0	75	(L ₃)
x_1	0	1	$1/2$	0	$-1/4$	$1/4$	0	5	(L ₄)
$\Leftarrow a_3$	0	0	$1/2$	0	$1/4$	$-1/4$	1	5	(L ₅)

Quem entra na base:

$z_2 - c_2 = -1/2 < 0 \Rightarrow x_2$ entra na base .

Quem sai da base:

$a_{12} = 9/2 > 0$ (OK); $a_{22} = 1/2 > 0$ (OK); $a_{32} = 1/2 > 0$ (OK).

$$\min \left\{ \frac{\bar{x}_1}{a_{12}}, \frac{\bar{x}_2}{a_{22}}, \frac{\bar{x}_3}{a_{32}} \right\} = \min \left\{ \frac{75}{9/2}, \frac{5}{1/2}, \frac{5}{1/2} \right\} = \frac{5}{1/2} = 10.$$

Houve empate para a escolha de x_1 e a_3 . Como o objetivo na Fase I é eliminar as variáveis artificiais, logo a_3 sai da base.

Fase I

Pivô: $a_{32} = 1/2$;

Linha do pivô: L_5 ;

Operações nas linhas para eliminar os elementos da coluna do pivô, exceto o pivô:

$$L_1 \leftarrow L_1 - \left(\frac{-1/2}{1/2} \right) L_5 = L_1 + L_5;$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{1/2} L_5 = L_2 - 6L_5;$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{9/2}{1/2} L_5 = L_3 - 9L_5;$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1/2}{1/2} L_5 = L_4 - L_5;$$

$$L_5 \leftarrow 2L_5.$$

Fase I

E o novo tableau fica:

(4)

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	a_2	a_3		
z^a	1	0	0	0	0	1	1	$0 = \bar{z}^a$	(L_1)
z	1	0	0	0	-1	1	-6	$-40 = \bar{z}$	(L_2)
s_1	0	0	0	1	-2	2	-9	30	(L_3)
x_1	0	1	0	0	-1/2	1/2	-1	0	(L_4)
x_2	0	0	1	0	1/2	-1/2	2	10	(L_5)

Na linha L_1 , $z_j - c_j \geq 0, \forall j \in I_N$, onde I_N é o conjunto dos índices das variáveis não básicas. Em particular, para a_2 , temos $z_5 - c_5 = 1$, e para a_3 , temos $z_6 - c_6 = 1$.

Logo, o **valor ótimo da função objetivo z^a na Fase I é: $z^{a*} = 0$.**

Note que a_2 e a_3 saíram da base e, conseqüentemente, $a_2 = a_3 = 0$. Assim, eliminamos as variáveis artificiais na Fase I.

Solução ótima do subproblema P^a da Fase I:

$$x^{B^a} = [s_1 \quad x_1 \quad x_2]^T = [30 \quad 0 \quad 10]^T; x^{N^a} = [a_2 \quad a_3 \quad s_2]^T = [0 \quad 0 \quad 0]^T$$

Fase II

Agora, começamos a **Fase II** do método: tomamos a solução básica ótima da **Fase I** como a solução básica inicial da **Fase II**.

Para o tableau inicial da Fase II, é necessário eliminar as colunas correspondentes às variáveis artificiais a_k e a linha da função objetivo z^a .

No exemplo que estamos vendo, o tableau inicial da Fase II fica assim:

(1)

	z	x_1	x_2	s_1	s_2		
z	1	0	0	0	-1	$-40 = \bar{z}$	(L_1)
s_1	0	0	0	1	-2	30	(L_2)
x_1	0	1	0	0	$-1/2$	0	(L_3)
x_2	0	0	1	0	$1/2$	10	(L_4)

Fase II

E assim, iniciamos o algoritmo Simplex na Fase II com o novo tableau:

(1)

	z	x_1	x_2	s_1	$\Downarrow s_2$		
z	1	0	0	0	-1	$-40 = \bar{z}$	(L ₁)
s_1	0	0	0	1	-2	30	(L ₂)
x_1	0	1	0	0	-1/2	0	(L ₃)
$\Leftarrow x_2$	0	0	1	0	1/2	10	(L ₄)

Quem entra na base:

$z_4 - c_4 = -1 < 0 \Rightarrow s_2$ entra na base.

Quem sai da base:

$a_{14} = -2 < 0$ (\times); $a_{24} = -1/2 < 0$ (\times); $a_{34} = 1/2 > 0$ (OK).

$\min \left\{ \frac{b_3}{a_{34}} \right\} = \min \left\{ \frac{10}{1/2} \right\} = \frac{10}{1/2} = 20 \Rightarrow x_2$ sai da base.

Fase II

Pivô: $a_{34} = 1/2$;

Linha do pivô: L_4 ;

Operações nas linhas para eliminar os elementos da coluna do pivô, exceto o pivô:

$$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_4; \quad L_2 \leftarrow L_2 + 4L_4; \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_4; \quad L_4 \leftarrow 2L_4.$$

E o novo tableau é dado por:

(2)

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	
z	1	0	2	0	0	$-20 = \bar{z} \quad (L_1)$
s_1	0	0	4	1	0	$70 \quad (L_2)$
x_1	0	1	1	0	0	$10 \quad (L_3)$
s_2	0	0	2	0	1	$20 \quad (L_4)$

Na linha L_1 , $z_j - c_j \geq 0, \forall j \in I_N$. Logo, temos:

Solução ótima do PPL original: $(x_1^*, x_2^*) = (10, 0)$.

Valor ótimo da função objetivo: $z^* = -20$.