6 – O Método Dual Simplex

- Seja o PPL: $\min \{ z(x) = cx \mid Ax = b, x \geq 0 \}$. Seja B uma base para este problema.
  - B é uma base primal viável se $B^{-1}b \geq 0$
  - B é uma base dual viável se $c - c_B B^{-1} A \geq 0$
  - B é uma base ótima se B é primal viável e dual viável.

- O algoritmo primal simplex (e suas variações) começa com uma base primal viável e caminha para uma base terminal (que pode ser ótima ou não), passando por uma seqüência de bases primal viáveis. Todas essas bases, com exceção possivelmente da base terminal, obtidas no algoritmo primal são bases dual inviáveis. A cada passo de pivotamento o algoritmo procura reduzir a inviabilidade dual ao mesmo tempo que mantém a viabilidade primal.

- O algoritmo dual simplex faz exatamente o contrário. Começa com uma base dual viável, mas primal inviável, e caminha para uma base terminal passando por bases dual viáveis adjacentes. À cada passo de pivotamento o algoritmo tenta reduzir a inviabilidade primal ao mesmo tempo que mantém a viabilidade dual.

- O algoritmo dual simplex pode ser executado usando a tabela canônica:

VB	x_1	...	x_m	x_{m+1}	...	x_j	...	x_n	b
x_1	1	...	0	$a'_{1,m+1}$	...	$a'_{1,j}$	...	$a'_{1,n}$	b'_1
...	...			...		...		...	...
x_m	0	...	1	$a'_{m,m+1}$		$a'_{m,j}$		$a'_{m,n}$	b'_m
-z	0	...	0	c'_{m+1}	...	c'_j	...	c'_n	-z'

ou usando a tabela inversa (método dual simplex revisado):

VB		T		b'
x_1	t_{11}	...	t_{1m}	b'_1
...	...			...
x_m	t_{m1}	...	t_{mm}	b'_m
-z	$-\pi_1$	...	$-\pi_m$	-z'

onde:
$(t_{ij}) = B^{-1}$
$\pi = c_B B^{-1}$
$A' = B^{-1}A$
$b' = B^{-1}b$
$c' = c + (-\pi)A$

Lembrar que b'_i será o valor da variável x_i e a solução será **primal viável** somente se $x_i \geq 0$.

Critério de Otimalidade no Algoritmo Dual Simplex

- No algoritmo dual simplex, B é base ótima se $b'_i \geq 0$ $(i = 1, ..., m)$.

A Linha do Pivô (ou Variável que Sai da Base)

- Se o critério de otimalidade não está satisfeito, então existe i tal que $b'_i < 0$. Seja r a linha do pivô, tal que:

$$b'_r = \min \{ b'_i, i = 1, ..., m \}$$

Se $b'_i < 0$, então na solução básica, o valor da i-ésima variável básica é igual a b'_i (ou seja, um valor negativo, o que caracteriza a inviabilidade primal). O objetivo do pivotamento nesta linha é obter um novo vetor básico tal que o valor da i-ésima variável básica correspondente seja positivo.

Para isso, o pivô a'_{ij} deve ser escolhido entre os valores negativos na linha do pivô. Portanto, no método dual simplex todos os pivôs serão negativos (exatamente o contrário do método primal simplex, onde todos os pivôs têm que ser positivos para manter a viabilidade primal). Como resultado do pivotamento, a constante do lado direito da linha do pivô torna-se positiva.

Critério de Inviabilidade do Problema

- O PPL será inviável se na tabela canônica existir uma linha i tal que:

$$b'_i < 0 \quad \text{e} \quad a'_{ij} \geq 0 \quad (j = 1, ..., m)$$

Note que esta linha corresponde à restrição:

$$\sum_{j=1}^{n} a'_{ij}\, x_j = b'_i \qquad (1)$$

que (como vem da tabela canônica) deve ser uma **combinação linear das restrições originais** do PPL. Logo, toda solução viável do PPL deve satisfazer (1). Mas, como $b'_i < 0$ e $a'_{ij} \geq 0$, e $x \geq 0$, a restrição (1) não pode ser satisfeita.

A Coluna do Pivô

- Se o critério de inviabilidade do problema não é satisfeito, seja r a linha do pivô. A coluna do pivô deve ser determinada de tal forma a se ter uma nova base dual viável. Se o pivô for o elemento a'_{rs}, os coeficientes de custo relativo na nova base serão:

$$c'_j - c'_s \frac{a'_{rj}}{a'_{rs}} \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

A nova base irá continuar dual viável se esses coeficientes forem não-negativos, ou seja:

$$c'_j - c'_s \frac{a'_{rj}}{a'_{rs}} \geq 0 \qquad (j = 1, \cdots, n) \qquad (2)$$

Como a base atual é dual viável, $c'_j \geq 0$ (j = 1, ..., n). Logo, para satisfazer (2),

$$a'_{rj} < 0 \quad \text{e} \quad c'_s \frac{a'_{rj}}{a'_{rs}} \leq c'_j \quad \text{ou seja} \quad \frac{c'_s}{-a'_{rs}} \leq \frac{c'_j}{-a'_{rj}}$$

ou seja, a coluna s do pivô deve ser tal que:

$$\frac{c'_s}{-a'_{rs}} = \min\left\{ \frac{c'_j}{-a'_{rj}} \mid a'_{rj} < 0 \right\}$$

Após as operações de pivotamento, a coluna do pivô será transformada em um **r-ésimo vetor unitário**.

Exemplo - Seja o PPL:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
1	0	0	4	-5	7	8
0	1	0	-2	4	-2	-2
0	0	1	1	-3	2	2
0	0	0	1	3	2	0

Temos, então, a seguinte tabela canônica:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_1	1	0	0	4	-5	7	8
x_2	0	1	0	-2	4	-2	-2
x_3	0	0	1	1	-3	2	2
-z	0	0	0	1	3	2	0
$c'_j/(-a'_{2j})$				1/2		1	

linha do pivô

coluna do pivô

Logo, a variável x_4 entra na base, em substituição a x_2.

A nova tabela canônica será:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_1	1	2	0	0	3	3	4
x_4	0	-1/2	0	1	-2	1	1
x_3	0	1/2	1	0	-1	1	1
-z	0	1/2	0	0	5	1	-1

Como todos os $b'_i \geq 0$, a base atual é ótima.

Logo, a solução ótima é: $x^* = (4, 0, 1, 1, 0, 0)^T$ e $z^* = 1$.

- Exercício: Resolver este PPL usando o método dual simplex revisado.

- Outro exemplo - Seja o PPL:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
1	1	1	1	0	0	1
-2	-4	-1	0	1	0	-8
-1	1	1	0	0	1	-2
8	8	9	0	0	0	0

Vamos resolver o PPL usando o método dual simplex revisado.

Neste caso, a tabela inversa será:

VB	T			b'
x_4	1	0	0	1
x_5	0	1	0	-8
x_6	0	0	1	-2
-z	0	0	0	0

linha do pivô

razões

x_1	x_2	x_3
8/2 = 4	8/4 = 2	9/1 = 9

coluna do pivô

Logo, x_2 irá substituir x_5 na nova base dual viável.

Para facilitar o pivotamento, vamos incluir (temporariamente) a coluna do pivô na tabela:

VB	T			b'	$A'_{.2}$
x_4	1	0	0	1	1
x_5	0	1	0	-8	-4
x_6	0	0	1	-2	1
-z	0	0	0	0	8

Efetuando as operações de pivotamento, teremos a nova tabela inversa:

VB	T			b'
x_4	1	1/4	0	-1
x_2	0	-1/4	0	2
x_6	0	1/4	1	-4
-z	0	2	0	-16

$-\pi$

linha do pivô

Para determinar a variável que deve entrar na base, temos que calcular a nova matriz de coeficientes A':

$A'_{\cdot j} = B^{-1}A_{\cdot j}$

A rigor, seriam necessárias apenas as colunas referentes às **variáveis não-básicas**: x_1, x_3 e x_5.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccccc} x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 & x'_5 & x'_6 \\ \hline 1/2 & 0 & 3/4 & 1 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/4 & 0 & -1/4 & 0 \\ \boxed{-3/2} & \boxed{0} & \boxed{3/4} & \boxed{0} & \boxed{1/4} & \boxed{1} \end{array}$$

Nem é preciso calcular a razão mínima, pois para a **linha do pivô** somente o coeficiente de x_1 é negativo.

Para efetuar o pivotamento, temos que calcular o novo coeficiente c'_1:

$$c'_1 = c_1 + (-\pi)A_{\cdot 1} = 8 + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 4$$

Logo, teremos a tabela:

VB	T			b'	$A'_{\cdot 1}$
x_4	1	1/4	0	-1	1/2
x_2	0	-1/4	0	2	1/2
x_6	0	1/4	1	-4	-3/2
-z	0	2	0	-16	4

Efetuando as operações de pivotamento, teremos a nova tabela inversa:

VB	T			b'
x_4	1	1/3	1/3	-7/3
x_2	0	-1/6	1/3	2/3
x_1	0	-1/6	-2/3	8/3
-z	0	8/3	8/3	-80/3

linha do pivô

Calculando as novas colunas (não-básicas) da matriz A':

$$\begin{vmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & -1/6 & 1/3 \\ 0 & -1/6 & -2/3 \end{vmatrix} \begin{array}{ccc} x_3 & x_5 & x_6 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} x'_3 & x'_5 & x'_6 \\ \hline \boxed{1 \quad 1/3 \quad 1/3} \\ 1/2 & -1/6 & 1/3 \\ -1/2 & -1/6 & -2/3 \end{array}$$

Como não existem coeficientes de variáveis não-básicas negativos nesta linha (linha do pivô), fica satisfeito o **critério de inviabilidade** do problema.

Observe que a nova matriz A' é:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/6 & 1/3 \\ 1 & 0 & -1/2 & 0 & -1/6 & -2/3 \end{vmatrix}$$

Ou seja, o problema contém a restrição:

$$0\ x_1 + 0\ x_2 + 1\ x_3 + 1\ x_4 + 1/3\ x_5 + 1/3\ x_6 = -7/3$$

que é inconsistente, pois $x_i \geq 0$ $(i = 1, ..., 6)$.

Vantagens e Desvantagens do Algoritmo Dual Simplex

- No algoritmo dual simplex, todas as soluções básicas (exceto a solução final) são primal inviáveis. Se tivermos que interromper a execução do algoritmo dual simplex, todo o esforço será perdido pois não teremos uma solução viável para o problema até que o algoritmo termine. No algoritmo primal simplex todas as soluções básicas obtidas são primal viáveis. Logo, se a execução do algoritmo for interrompida, poderemos não ter uma solução ótima, mas teremos, pelo menos, uma solução viável para o problema.

+ O algoritmo dual simplex é muito útil para a Análise de Sensibilidade ou Análise de Pós-otimalidade (que veremos no Capítulo 7). Imagine que tenhamos uma base ótima para um PPL. Se após obter a base ótima for necessário alterar o vetor de constantes do lado direito (b), a base ótima pode deixar de ser primal viável, mas continuará dual viável, assumindo que o vetor de custos (c) mantenha-se inalterado. A partir dessa base, o algoritmo dual simplex pode ser aplicado para o novo vetor b. Outra situação possível é precisar incluir uma nova restrição no modelo após ele ter sido resolvido. Neste caso, o algoritmo dual simplex poderá ser usado para encontrar uma solução ótima do novo modelo, partindo-se de uma solução ótima do modelo atual, como veremos no Capítulo 7.

E se não existir uma Base Dual Viável no início?

- Vamos supor que um vetor básico x_B tenha sido escolhido. Seja o PPL:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	0	0	1	-1	2
0	1	0	-1	-1	-4
0	0	1	-2	2	-3
2	1	0	0	0	0

$x_B = (x_1, x_2, x_3)$

Efetuando o "pricing out" teremos:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	0	0	1	-1	2
0	1	0	-1	-1	-4
0	0	1	-2	2	-3
0	0	0	-1	3	0

Prejudica a viabilidade dual ($c' = c - c_B B^{-1} A \geq 0$)

Nestes casos, a idéia é construir um "problema aumentado", acrescentando uma nova variável (x_0), com custo zero, e uma nova restrição ao problema:

$$x_0 + \text{(soma das variáveis não-basicas)} = M$$

onde M é um número bem grande.

- Para o problema do exemplo, teremos:

$$x_0 + x_4 + x_5 = M$$

e, portanto, a tabela do problema será:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	0	0	0	1	1	M
0	1	0	0	1	-1	2
0	0	1	0	-1	-1	-4
0	0	0	1	-2	2	-3
0	0	0	0	-1	3	0

Uma base dual viável para o problema pode ser obtida substituindo-se a variável x_0 (básica) pela variável x_s (não-básica) tal que $c'_s = \min \{ c'_j \}$. No problema acima x_s é a variável x_4.

Com isto, efetuando as operações de pivotamento teremos a seguinte tabela canônica:

base dual viável

VB	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_4	1	0	0	0	1	1	M
x_1	-1	1	0	0	0	-2	2 - M
x_2	1	0	1	0	0	0	M - 4
x_3	2	0	0	1	0	4	2M - 3
-z	1	0	0	0	0	4	M

linha do pivô

- Para determinar a variável que entra na base é preciso calcular a razão mínima:

VB	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_4	1	0	0	0	1	1	M
x_1	-1	1	0	0	0	-2	2 - M
x_2	1	0	1	0	0	0	M - 4
x_3	2	0	0	1	0	4	2M - 3
-z	1	0	0	0	0	4	M
$c_j/(-a_{ij})$	1/1 =1					4/2 =2	

linha do pivô

- Logo: x_0 entra na base em substituição a x_1. A nova tabela canônica será:

VB	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_4	0	1	0	0	1	-1	2
x_0	1	-1	0	0	0	2	M – 2
x_2	0	1	1	0	0	-2	– 2
x_3	0	2	0	1	0	0	1
-z	0	1	0	0	0	2	2

linha do pivô

- Portanto: x_2 sai da base, sendo substituida por x_5. A nova tabela canônica será:

VB	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_4	0	1/2	-1/2	0	1	0	3
x_0	1	0	1	0	0	0	M – 4
x_5	0	-1/2	-1/2	0	0	1	1
x_3	0	2	0	1	0	0	1
-z	0	2	1	0	0	0	0

- Portanto, como $b_i \geq 0, \forall i$ (pois M é um valor bem grande), a base atual é ótima para o problema aumentado.
- Ao final do algoritmo para o problema aumentado três casos podem ocorrer:
  - O problema aumentado é primal inviável

    Neste caso, o problema original também é primal inviável, pois se $x' = (x'_1, ..., x'_n)$ é uma solução viável para o problema original, então:

    $(x'_0, x'_1, ..., x'_n)$, onde x'_0 = M – (soma das variáveis x' não-básicas)

    é solução viável para o problema aumentado.
  - A variável x_0 está no vetor básico ótimo do problema aumentado

    Seja $(x'_0, x'_1, ..., x'_n)$ uma SVB ótima do problema aumentado. Neste caso, o valor ótimo da função-objetivo (z^*) independe de M, pois x_0 tem custo zero. Logo, $(x'_1, ..., x'_n)$ é uma SVB ótima do problema original.

Este é o caso do exemplo:

VB	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_4	0	1/2	-1/2	0	1	0	3
x_0	1	0	1	0	0	0	M – 4
x_5	0	-1/2	-1/2	0	0	1	1
x_3	0	2	0	1	0	0	1
-z	0	2	1	0	0	0	0

Neste caso, uma base ótima para o problema original é obtida eliminando-se a linha e a coluna correspondentes a x_0 da base ótima do problema aumentado. Note que, para o problema acima, o vetor $(M-4, 0, 0, 1, 3, 1)^T$ é uma solução viável ótima para o problema aumentado. Logo, o vetor $(0, 0, 1, 3, 1)^T$ é uma solução ótima para o problema original e o valor de $z^* = 0$ não se altera (pois x_0 tem custo zero).

- O problema aumentado tem um vetor básico ótimo que não contém x_0

Neste caso, o valor das variáveis básicas na SVB ótima do problema aumentado depende de M. Se o valor ótimo da função-objetivo para o problema aumentado depender de M, este valor deve tender para $-\infty$ à medida que M tende para $+\infty$. Neste caso, o problema original é viável mas ilimitado.

Se o valor ótimo da função-objetivo do problema aumentado não depender de M, então o problema original é viável e tem uma solução viável ótima, que pode ser obtida da solução ótima do problema aumentado eliminando-se x_0 (que é igual a zero nesta solução, pois é uma variável não-básica). Neste caso, uma SVB ótima para o problema original pode ser obtida diminuindo-se o valor de M até que uma das variáveis básicas se torne igual a zero.

- Vamos considerar um exemplo para ilustrar este caso em que o vetor básico ótimo do problema aumentado não contém x_0. Seja o PPL:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
1	0	0	1	-3	7	-5
0	1	0	-1	1	-1	1
0	0	1	3	1	-10	8
1	3	0	0	0	-2	0

$x_B = (x_1, x_2, x_3)$

- Efetuando o "pricing out" e incluindo a restrição artificial temos:

VB	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_0	1	0	0	0	1	1	1	M
x_1	0	1	0	0	1	-3	7	–5
x_2	0	0	1	0	-1	1	-1	1
x_3	0	0	0	1	3	1	-10	8
-z	0	0	0	0	2	0	-6	2

Trazendo x_6 para o vetor básico teremos uma tabela dual viável:

VB	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_6	1	0	0	0	1	1	1	M
x_1	-7	1	0	0	-6	-10	0	–5 – 7M
x_2	1	0	1	0	0	2	0	1 + M
x_3	10	0	0	1	13	11	0	8 + 10M
-z	6	0	0	0	8	6	0	2 + 6M
$c_j/(-a_{ij})$	6/7				8/6	6/10		

linha do pivô

Teremos então:

VB	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_6	3/10	1/10	0	0	4/10	0	1	(3M – 5)/10
x_5	7/10	-1/10	0	0	6/10	1	0	(7M + 5)/10
x_2	-4/10	2/10	1	0	-12/10	0	0	-4M/10
x_3	23/10	11/10	0	1	64/10	0	0	(23M +25)/10
-z	18/10	6/10	0	0	44/12	0	0	(18M – 10)/10
$c_j/(-a_{ij})$	18/4				44/10			

Logo, teremos:

VB	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_6	5/30	5/30	1/3	0	0	0	1	(M – 3)/6
x_5	5/10	0	1/2	0	0	1	0	(M + 1)/2
x_4	4/12	-2/12	-10/12	0	1	0	0	M/3
x_3	5/30	13/6	64/12	1	0	0	0	(M +15)/6
-z	10/30	8/6	44/12	0	0	0	0	(M – 3)/3

- Temos, portanto, uma base ótima para o problema aumentado que não contém x_0. O valor ótimo da função-objetivo é $z^* = -(M - 3)/3$ e este valor diverge para $-\infty$ à medida que M tende para $+\infty$.
- O problema original é viável, pois:

$$x' = (0, 0, (M+15)/6, M/3, (M+1)/2, (M-3)/6)^T$$

é solução viável para todo M suficientemente grande, mas ilimitado pois o valor da função-objetivo $z^* = -(M - 3)/3$, à medida que M aumenta, diverge para $-\infty$.

Note que, se z^* não dependesse de M, poderíamos fazer **M = 3** e teríamos:

$$x' = (0, 0, 3, 1, 2, 0)^T$$

como uma **SVB ótima** para o problema original.