5 – O Método Simplex Revisado

- O método simplex revisado é um forma computacionalmente eficiente de aplicar o algoritmo simplex, evitando um grande número de operações a cada passo de pivotamento.

- Como vimos, se B é uma base viável para o problema:

$$\min \{ cx \mid Ax = b, x \geq 0 \}$$

então um passo de pivotamento transforma:

$$\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline c & -z \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c|c} A' & b' \\ \hline c' & -z' \end{array}$$

onde: $A' = B^{-1}A$, $b' = B^{-1}b$, $c' = c - \pi A$, $-z' = -\pi b$ com $\pi = c_B B^{-1}$

- Portanto, todas as transformações dependem de B^{-1} e $-\pi$. A ideia do método simplex revisado é manter a cada passo a tabela:

$$T = \begin{pmatrix} B^{-1} \\ -\pi \end{pmatrix}$$

(conhecida como **tabela inversa**)

recalculando A', b', c' e –z' na medida da necessidade.

Exemplo: min $z = -2x_1 - x_2$

s.a $3x_1 + 4x_2 \le 6$

$6x_1 + x_2 \le 3$

$x_1, x_2 \ge 0$

- Introduzindo as variáveis de folga, o problema pode ser representado pela seguinte tabela:

x_1	x_2	x_3	x_4	b
3	4	1	0	6
6	1	0	1	3
-2	-1	0	0	0

- Para iniciar o método simplex revisado é preciso determinar a tabela inversa:

$$T = \begin{pmatrix} B^{-1} \\ -\pi \end{pmatrix} \qquad \text{com } \pi = c_B B^{-1}.$$

No caso acima, como a base B é formada pelas variáveis de folga, temos:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi = c_B B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Logo}: \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Portanto, para o método simplex revisado teremos a seguinte tabela:

VB	B^{-1}	T	b'
x_3	1	0	6
x_4	0	1	3
-z	0	0	0

$-\pi$

Notar que:

$$b' = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- O próximo passo é determinar as variáveis que vão entrar e sair da base. Para determinar a variável que entra na base, devemos calcular o valor do coeficiente de custo relativo referente à base atual para as variáveis não-básicas (lembrar que para as variáveis básicas este custo é zero).

Então:

para a variável x_1: $c'_1 = c_1 + (-\pi)A._1 = -2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = -2$

para a variável x_2: $c'_2 = c_2 + (-\pi)A._2 = -1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$

Portanto, a variável x_1 deve entrar na base. Para atualizar a base, devemos calcular:

$$A'._1 = B^{-1}A._1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Para facilitar o cálculo da **razão mínima** (θ) a coluna $\begin{pmatrix} A'._1 \\ c'_1 \end{pmatrix}$ será incluída (temporariamente) na tabela do método simplex revisado.

- Temos então:

VB	T		b'	$A'_{.1}$	θ
x_3	1	0	6	3	6/3 = 2
x_4	0	1	3	6	3/6 = 1/2
-z	0	0	0	-2	

Observe que devemos calcular θ (razão mínima) para determinar a variável que deve **sair da base**.

- Portanto, x_4 deve sair da base (e ser substituída por x_1). Para isto, devemos efetuar as operações de pivotamento:

nova linha do pivô:	0	1/6	1/2	1
nova linha de x_3:	1	0	6	3
	0	1/2	3/2	3
	1	-1/2	9/2	0
nova linha de -z:	0	0	0	-2
	0	-1/3	-1	-2
	0	1/3	1	0

Os coeficientes da coluna $A'_{.1}$ são incluídos aqui apenas para **melhor compreensão** das operações de pivotamento.

Logo, teremos a nova tabela:

VB	T		b'
x_3	1	-1/2	9/2
x_1	0	1/6	1/2
-z	0	1/3	1

e o processo se repete, enquanto existir variável não-básica com coeficiente de custo relativo negativo.

- Os novos coeficientes de custo relativo para as variáveis não-básicas são:

$$c'_2 = c_2 + (-\pi)A_{.2} = -1 + \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = -2/3$$

$$c'_4 = c_4 + (-\pi)A_{.4} = 0 + \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1/3$$

Portanto, x_2 deve entrar na base. Então: $A'_{.2} = B^{-1}A_{.2} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 1/6 \end{pmatrix}$

Logo:

VB	T		b'	$A'_{.2}$	θ
x_3	1	-1/2	9/2	7/2	(9/2)/(7/2) = 9/7
x_1	0	1/6	1/2	1/6	(1/2)/(1/6) = 3
-z	0	1/3	1	-2/3	

e a variável x_3 deve sair da base.

Pivotamento:

2/7	-1/7	9/7	1
0	1/6	1/2	1/6
2/42	-1/42	9/42	1/6
-1/21	3/21	2/7	0
0	1/3	1	-2/3
-4/21	2/21	-18/21	-2/3
4/21	5/21	39/21	0

- Os novos coeficientes de custo relativo para as variáveis não-básicas serão:

$$c'_3 = c_3 + (-\pi)A_{.3} = -1 + \begin{pmatrix} 4/21 & 5/21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4/21$$

$$c'_4 = c_4 + (-\pi)A_{.4} = 0 + \begin{pmatrix} 4/21 & 5/21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5/21$$

Nova tabela:

VB	T		b'
x_2	2/7	-1/7	9/7
x_1	-1/21	3/21	2/7
-z	4/21	5/21	39/21

Portanto, a base é ótima e $z^* = -39/21$.

A solução é $x^* = (2/7, 9/7, 0, 0)^T$.

Além disso, $\pi = (-4/21, -5/21)$ corresponde à solução ótima do problema dual correspondente:

$$\begin{array}{ll} \max & v(\pi) = 6\pi_1 + 3\pi_2 \\ \text{s.a} & 3\pi_1 + 6\pi_2 \leq -2 \\ & 4\pi_1 + \pi_2 \leq -1 \\ & \pi_1, \pi_2 \leq 0 \end{array}$$

Evidentemente, o valor da solução ótima do problema dual deve ser $v^* = -39/21$.

Exercício: Verificar a solução do problema dual.

Comparação dos Métodos Simplex e Simplex Revisado

- Número de operações aritméticas por iteração
  - Simplex: $m + n + mn - m^2$
  - Simplex revisado: $3m + mn + m^2$

		operações aritméticas	
m	n	simplex	revisado
5	10	40	90
5	100	580	540
5	1000	5980	5040
5	10000	59980	50040

Para ser resolvido à mão, o método simplex revisado é pior do que o método simplex porque vários calculos precisam ser feitos "por fora" da tabela e a tabela de valores originais precisa estar disponível a todo tempo. Mas, para ser resolvido em um computador o método simplex revisado tem algumas vantagens (além do fato de, eventualmente, efetuar menos operações, para problemas onde o número de variáveis é muito maior do que o número de restrições).

Em problemas reais, a matriz A tem muitos zeros (matriz esparsa). No método simplex, como as operações são feitas sobre a matriz A, os zeros são rapidamente substituídos por valores diferentes de zero e, dessa forma, muito rapidamente todas as $(m + n + mn - m^2)$ operações precisam realmente ser executadas. No método simplex revisado, os zeros da matriz A são preservados e o número real de operações aritméticas por iteração pode ser bem menor do que $(3m + mn + m^2)$.

- Memória requerida

  No método simplex a tabela tem (m+1)(n+1) elementos, enquanto para o método simplex revisado a tabela tem (m+1)(m+1) elementos. No entanto, para o método simplex revisado é preciso uma forma eficiente para armazenar a tabela original do problema (que, normalmente, tem muitos zeros).

		elementos na tabela	
m	n	simplex	revisado
5	10	66	36
5	100	606	36
5	1000	6006	36
5	10000	60006	36

- Controle de erros de arredondamento

  Uma outra vantagem do método simplex revisado é com relação ao controle de erros de arredondamento, que ocorrem se os cálculos são feitos em um computador. Cada operação de multiplicação ou de divisão requer, em geral, um arredondamento. Após um número muito grande de operações, os erros de arredondamento podem ser muito significativos. No método simplex revisado, como a tabela do problema é menor, menos operações serão realizadas. Além disso, para um problema envolvendo um grande número de zeros (o que é muito comum), o método simplex revisado, ao preservar esses zeros, irá estar sujeito a muito menos erros de arredondamento do que o método simplex, onde esses zeros desaparecem rapidamente.

Método Simplex Revisado usando as Fases 1 e 2

- Se não existir uma base viável inicial, o método deve começar com uma base artificial. Neste caso, uma nova linha é acrescentada na tabela, correspondente a -w (função-objetivo da Fase 1). Neste caso:

$$T = \begin{pmatrix} B^{-1} \\ -\pi \\ -\phi \end{pmatrix} \quad \text{com} \quad \pi = c_B B^{-1} \quad \text{e} \quad \phi = d_B B^{-1}$$

onde c_B é o vetor de custos relativos e d_B é o vetor de custos artificiais, referentes à base B.

Exemplo: min $z = 3x_1 - x_2 - 7x_3 + 3x_4 + x_5$

s.a $5x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 = 20$

$x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 = 8$

$x_j \geq 0$ $(j = 1, ..., 5)$

Introduzindo as variáveis artificiais, teremos: B

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_6	5	-4	13	-2	1	1	0	20
x_7	1	-1	5	-1	1	0	1	8
-z	3	-1	-7	3	1	0	0	0
-w	0	0	0	0	0	1	1	0

c_B d_B

será atualizado, após a operação de "**pricing out**" para a linha -w

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; -c_B B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; -d_B B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Efetuando o "pricing out" para a linha -w temos:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_6	5	-4	13	-2	1	1	0	20
x_7	1	-1	5	-1	1	0	1	8
-z	3	-1	-7	3	1	0	0	0
-w	-6	5	-18	3	-2	0	0	-28

Logo, tem-se a seguinte tabela inicial para o método simplex revisado:

	VB	T		b'
B^{-1}	x_6	1	0	20
	x_7	0	1	8
$-\pi$	-z	0	0	0
$-\phi$	-w	-1	-1	-28

Para a Fase 1, a função-objetivo é:

$$w = \phi\, b$$

e o vetor de custos relativos é:

$$d'_B = (-6, 5, -18, 3, -2, 0, 0).$$

Portanto, a variável x_3 deve entrar na base.

Para determinar a variável que deverá sair da base, vamos incluir (temporariamente) na tabela a coluna: $\begin{pmatrix} A'_{\cdot 3} \\ c'_3 \\ d'_3 \end{pmatrix}$

VB	T		b'	A'	θ
x_6	1	0	20	13	20/13 = 1.54
x_7	0	1	8	5	8/5 = 1.60
-z	0	0	0	-7	
-w	-1	-1	-28	-18	

Notar que:

$A'_{\cdot 3} = B^{-1}A_{\cdot 3} = A_{\cdot 3}$

$c'_3 = c_3 + (-\pi)A_{\cdot 3} = c_3$

$d'_3 = -18$

Temos então a nova tabela do método simplex revisado:

VB	T		b'
x_3	1/13	0	20/13
x_7	-5/13	1	4/13
-z	7/13	0	140/13
-w	5/13	-1	-4/13

Os novos coeficientes de custo relativo da Fase 1 podem ser calculados como:

$$d'_j = d_j + (-\phi\, A_{\cdot j})$$

Observe que este é o custo relativo d_j original (antes da operação de "pricing out")

Portanto, teremos:

$$d'_1 = 0 + \begin{pmatrix} 5/13 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 12/13$$

$$d'_2 = 0 + \begin{pmatrix} 5/13 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} = -7/13$$

$$d'_4 = 0 + \begin{pmatrix} 5/13 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 3/13$$

$$d'_5 = 0 + \begin{pmatrix} 5/13 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -8/13$$

Notar que é preciso calcular os novos coeficientes apenas para as variáveis **não-básicas originais** do problema (as variáveis artificiais que saem da base não entram mais)

A variável $\mathbf{x_5}$ **deve entrar na base**.

Temos, então, que incluir na tabela a coluna: $\begin{pmatrix} A'_{\cdot 5} \\ c'_5 \\ d'_5 \end{pmatrix}$

$$A'_{\cdot 5} = \begin{pmatrix} 1/13 & 0 \\ -5/13 & 1 \end{pmatrix} A_{\cdot 5} = \begin{pmatrix} 1/13 & 0 \\ -5/13 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/13 \\ 8/13 \end{pmatrix}$$

$$c'_5 = c_5 + (-\pi) A_{\cdot 5} = 1 + \begin{pmatrix} 7/13 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 20/13$$

$$d'_5 = -8/13$$

Portanto, teremos:

VB	T		b'	A'	θ
x_3	1/3	0	20/13	1/13	(20/13)/(1/13) = 20
x_7	-5/13	1	4/13	8/13	(4/13)/(8/13) = 1/2
-z	7/13	0	140/13	20/13	
-w	5/13	-1	-4/13	-8/13	

e a variável x_5 deve substituir x_7 na base. Efetuando-se as operações de pivotamento teremos:

VB	T		b'
x_3	1/8	-1/8	3/2
x_5	-5/8	13/8	1/2
-z	3/2	-5/2	10
-w	0	0	0

Como w' = 0, temos o **final da Fase 1** (observe que todas as variáveis artificiais saíram da base)

Pode-se, portanto, iniciar a Fase 2 com a tabela:

VB	T		b'
x_3	1/8	-1/8	3/2
x_5	-5/8	13/8	1/2
-z	3/2	-5/2	10

Exercício: Concluir a resolução do problema.