4 – Dualidade em Programação Linear

- Seja B uma base viável do PPL: $\min \{ cx \mid Ax = b, x \geq 0 \}$. Seja x_B o vetor-base e c_B o correspondente vetor de coeficientes de custo. Seja x_N o vetor de variáveis não-basicas e c_N, o vetor de seus coeficientes de custo.

Exemplo:

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	1	-1	0	1
1	-1	0	-1	0
-1	-1	0	0	0

$x_B = (x_1, x_2)^T \quad c_B = (-1, -1)$

$x_N = (x_3, x_4)^T \quad c_N = (0, 0)$

- Assim, separando-se as partes básica e não-básica, o PPL pode ser representado pela seguinte tabela:

x_B	x_N	b
B	N	b
c_B	c_N	0

A tabela canônica associada a esta base B é obtida transformando-se a submatriz que aparece abaixo de x_B em uma matriz identidade e c_B no vetor zero.

- Para obter a matriz identidade, basta multiplicar cada uma das matrizes B, N e b por B^{-1}. A nova tabela será:

x_B	x_N	b
$B^{-1}B$	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
c_B	c_N	0

x_B	x_N	b
I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
c_B	c_N	0

- Para transformar c_B no vetor zero, basta substituir a linha de coeficientes de custo por:

(linha atual) – c_B*(linha das novas matrizes)

- Portanto, a tabela canônica associada à base B será:

x_B	x_N	b
I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
$c_B - c_B I$	$c_N - c_B B^{-1}N$	$0 - c_B B^{-1}b$

⇨

x_B	x_N	b
I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
0	$c_N - c_B B^{-1}N$	$- c_B B^{-1}b$

Exemplo:

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	1	-1	0	1
1	-1	0	-1	0
-1	-1	0	0	0

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \quad c_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad c_N - c_B B^{-1}N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \quad - c_B B^{-1}b = 1$$

Logo, a nova tabela será:

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0	-1/2	-1/2	1/2
0	1	-1/2	1/2	1/2
0	0	-1	0	1

- Se o vetor-coluna de x_j na tabela original é $\begin{pmatrix} A_{\cdot j} \\ c_j \end{pmatrix}$, na tabela canônica o vetor-coluna de x_j passa a ser:

$$\begin{pmatrix} A'_{\cdot j} \\ c'_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}A_{\cdot j} \\ c_j - c_B B^{-1} A_{\cdot j} \end{pmatrix}$$

- O vetor correspondente do lado direito na tabela canônica é:

$$\begin{pmatrix} b' \\ -z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ -c_B B^{-1} b \end{pmatrix}$$

- Então: $c'_j = c_j - \underbrace{(c_B B^{-1})}_{\pi} A_{\cdot j}$ $(\forall j)$, ou seja: $c' = c - (c_B B^{-1})A = c - \pi A$.

Se B é uma base ótima, $c' \geq 0$. Logo: $c - \pi A \geq 0$, ou seja: $\pi A \leq c$.

Assim: $\min (z - c_B B^{-1} b) = \min (z - \underbrace{\boxed{\pi b}}_{\max})$

Problema Primal
min cx
s.a $Ax = b$
$x \geq 0$

Problema Dual
max πb
s.a $\pi A \leq c$
π irrestrito

- A dualidade em PL admite uma interpretação econômica elegante.

Exemplo: Problema da dieta

	unidades de nutriente / kg de alimento						qtd mínima de nutriente requerida
alimento	1	2	3	4	5	6	
vitamina 1	1	0	2	2	1	2	9
vitamina 2	0	1	3	1	3	2	19
custo/kg do alimento	35	30	60	50	27	22	

$x_i \equiv$ qtd do alimento i na dieta (kg)

$$
\begin{array}{ll}
\min & 35x_1 + 30x_2 + 60x_3 + 50x_4 + 27x_5 + 22x_6 \\
\text{s.a} & x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 \geq 9 \\
 & x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 \geq 19 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{array}
$$

Problema primal, com:
$m = 2$
$n = 6$.

- Como muita gente faz dieta, um empreendedor visualizou um bom negócio: fabricar pílulas de vitamina. A pessoa que deseja fazer dieta, em vez de consumir uma determinada quantidade de cada alimento, consumiria apenas as pílulas de vitamina. Mas, ninguém quer gastar mais tomando as pílulas do que gastaria consumindo os alimentos.

- Seja π_i o preço da pílula de vitamina i (\$/unid). Considere um alimento qualquer, por exemplo, o alimento 5. Um kg deste alimento contém 1 unidade da vitamina 1 e 3 unidades da vitamina 2. Do ponto de vista do fabricante de pílulas, este alimento vale:

$$\pi_1 + 3\,\pi_2.$$

Portanto, para que o preço das pílulas seja competitivo com este alimento, deve-se ter: $\pi_1 + 3\,\pi_2 \leq 27$ (preço do kg do alimento 5).

Como o fabricante de pílulas quer ganhar dinheiro, $\pi_1 \geq 0$ e $\pi_2 \geq 0$. Como uma pessoa deve consumir pelo menos 9 unidades de vitamina 1 e 19 unidades de vitamina 2, o valor de venda para o fabricante será:

$$v(\pi) = 9\,\pi_1 + 19\,\pi_2$$

e o fabricante irá querer maximizar este valor. Isto leva ao problema:

$$\begin{array}{ll}
\max & 9\,\pi_1 + 19\,\pi_2 \\
\text{s.a} & \pi_1 \leq 35 \\
& \pi_2 \leq 30 \\
& 2\,\pi_1 + 3\,\pi_2 \leq 60 \\
& 2\,\pi_1 + \pi_2 \leq 50 \\
& \pi_1 + 3\,\pi_2 \leq 27 \\
& 2\,\pi_1 + 2\,\pi_2 \leq 22 \\
& \pi_1\,,\ \pi_2 \geq 0
\end{array}$$

Problema dual, com:
m = 6
n = 2.

Problema primal

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	0	2	2	1	2	≥ 9
0	1	3	1	3	2	≥ 19
35	30	60	50	27	22	min z(x)

Problema dual

π_1	π_2	
1	0	≤ 35
0	1	≤ 30
2	3	≤ 60
2	1	≤ 50
1	3	≤ 27
2	2	≤ 22
9	19	max $v(\pi)$

Note que a tabela de um problema corresponde à **tabela transposta** do outro problema (e vice-versa). Portanto, cada problema é o **dual do outro**.

- Do ponto de vista da pessoa (que prefere consumir os alimentos, a menos que valha a pena tomar as pílulas):

  valor máximo de $v(\pi) \leq$ valor mínimo de $z(x)$

  Isto será provado mais à frente (Teorema fraco da dualidade).
- Para um PPL em geral, o problema dual associado pode ser construído de forma similar. Estes dois problemas constituem um par de PPLs conhecido como par primal-dual.
- Em um PPL, cada restrição requer, em geral, que a quantidade total de algum item seja menor ou igual à quantidade disponível deste item, ou que o número de unidades de algum item produzido seja maior ou igual ao número de unidades necessárias deste item.

- No problema dual haverá uma variável associada a cada restrição primal, que pode ser interpretada como o preço daquele item (variáveis duais também são conhecidas como preços-sombra, valores marginais ou multiplicadores simplex). Uma variável dual negativa pode ser interpretada como um subsídio.
- Para determinar o problema dual não é necessário transformar o PPL (problema primal) para a forma padrão. Basta que as inequações sejam do tipo certo:
  - para problemas de minimização, as inequações devem ser do tipo $\geq$
  - para problemas de maximização, as inequações devem ser do tipo $\leq$
- Qualquer inequação pode ser transformada para o tipo certo multiplicando-se ambos os lados por -1 e invertendo-se o sinal de inequação.
- Para variáveis primais não-negativas:
  - se a restrição primal é uma inequação do tipo certo, a variável dual associada será não-negativa no problema dual;
  - se a restrição primal é uma igualdade, a variável dual associada será irrestrita em sinal no problema dual (lembrar que uma restrição do tipo $Ax = b$ é equivalente a duas restrições $\{ Ax \leq b$ e $Ax \geq b \}$).
- Reciprocamente, variáveis primais irrestritas em sinal levarão a restrições de igualdade no problema dual.

- Exemplo: min $z(x) = 5x_1 - 6x_2 + 7x_3 + x_4$

  s.a $x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = -7$

  $6x_1 - 3x_2 + x_3 - 7x_4 \geq 14$

  $-2x_1 - 17x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq -3$

  $x_1, x_2 \geq 0$; x_3, x_4 irrestritas em sinal

Convertendo as inequações para o tipo certo:

		variável dual associada
min	$z(x) = 5x_1 - 6x_2 + 7x_3 + x_4$	
s.a	$x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = -7$	π_1
	$6x_1 - 3x_2 + x_3 - 7x_4 \geq 14$	π_2
	$2x_1 + 17x_2 - 4x_3 - 2x_4 \geq 3$	π_3
	$x_1, x_2 \geq 0$; x_3, x_4 irrestritas em sinal	

Problema dual:

max $v(\pi) = -7\pi_1 + 14\pi_2 + 3\pi_3$

s.a $\pi_1 + 6\pi_2 + 2\pi_3 \leq 5$

$2\pi_1 - 3\pi_2 + 17\pi_3 \leq -6$

$-\pi_1 + \pi_2 - 4\pi_3 = 7$

$-\pi_1 - 7\pi_2 - 2\pi_3 = 1$

π_1 irrestrita; $\pi_2, \pi_3 \geq 0$

Observe que o dual do problema dual é o problema primal.

Teoria da Dualidade

- **Teorema**: Sejam P e P' dois PPLs equivalentes ($P \equiv P'$). Sejam D = dual(P) e D' = dual(P'). Então: $D \equiv D'$.

Os duais de problemas equivalentes são equivalentes.

Prova: P: $\min \{ z(x) = cx \mid Ax \geq b;\ x \geq 0 \}$

D: $\max \{ v(\pi) = \pi b \mid \pi A \leq c;\ \pi \geq 0 \}$

Introduzindo-se um vetor de folga s, o problema P pode ser escrito de forma equivalente como:

P': $\min \{ z(x,s) = cx + 0s \mid Ax - Is = b;\ x, s \geq 0 \}$

D': $\max \{ v(\pi) = \pi b \mid \pi A \leq c;\ \pi(-I) \leq 0;\ \pi \text{ irrestrito} \}$

Mas, $\pi(-I) \leq 0$ implica em $\pi \geq 0$. Logo:

D': $\max \{ v(\pi) = \pi b \mid \pi A \leq c;\ \pi \geq 0 \} \equiv D$.

- **Teorema Fraco da Dualidade**: Seja $\min \{ z(x) = cx \mid Ax = b;\ x \geq 0 \}$ um problema primal na forma padrão e $\max \{ v(\pi) = \pi b \mid \pi A \leq c;\ \pi \text{ irrestrito} \}$ seu problema dual correspondente. Então, para x e π viáveis, $z(x) \geq v(\pi)$.

No par primal-dual, o valor da função-objetivo do **problema de minimização** é **maior ou igual** ao valor da função-objetivo do **problema de maximização**.

Prova: $Ax = b$, pois x é primal viável.

então: $\pi Ax = \pi b$

Mas, $\pi A \leq c$, pois π é dual viável.

logo: $\pi Ax \leq cx$, pois $x \geq 0$.

Portanto: $cx \geq \pi Ax = \pi b$, ou seja: $z(x) \geq v(\pi)$.

Corolários do Teorema Fraco da Dualidade

Vamos supor: P (primal): problema de minimização

D (dual): problema de maximização

1) Qualquer solução viável de P é um limitante superior para o valor da função-objetivo de D.
2) Qualquer solução viável de D é um limitante inferior para o valor da função-objetivo de P.
3) Se P é viável e sua solução é ilimitada, então D é inviável (não pode ter uma solução viável).
4) Se D é viável e sua solução é ilimitada, então P é inviável.

- Note que num par primal-dual, ambos os problemas podem ser inviáveis. Por exemplo:

min	$2x_1 - 4x_2$
s.a	$x_1 - x_2 = 1$
	$- x_1 + x_2 = 2$
	$x_1, x_2 \geq 0$

$x_1 = 1 + x_2$

$-(1+x_2) + x_2 = -1 - x_2 + x_2 = -1 \neq 2$

max	$\pi_1 + 2\pi_2$
s.a	$\pi_1 - \pi_2 \leq 2$
	$- \pi_1 + \pi_2 \leq -4$
	π_1, π_2 irrestritos

$\pi_1 - \pi_2 \leq 2$

$- \pi_1 + \pi_2 \leq -4 \Rightarrow \pi_1 - \pi_2 \geq 4$

Portanto, os reversos dos corolários 3 e 4 são:

3') Se D é inviável e P é viável, então a solução de P é ilimitada.

4') Se P é inviável e D é viável, então a solução de D é ilimitada.

Condição Suficiente de Otimalidade

- Seja um par primal-dual onde $z(x)$ é a função-objetivo primal (problema de minimização) e $v(\pi)$ é a função-objetivo dual (problema de maximização). Se x' é uma solução primal viável e π' é uma solução dual viável tais que $z(x') = v(\pi')$, então x' é solução ótima do problema primal e π' é solução ótima do problema dual.

Prova: Pelo Teorema Fraco da Dualidade, $z(x) \geq v(\pi')$, $\forall x$ primal viável. Mas, $z(x') = v(\pi')$ por hipótese. Logo, $z(x) \geq z(x')$, $\forall x$ primal viável. Logo, x' é solução ótima do problema primal.

Analogamente: $v(\pi) \leq z(x')$, $\forall \pi$ dual viável. Como $z(x') = v(\pi')$, temos: $v(\pi) \leq v(\pi')$, $\forall \pi$ dual viável. Logo, π' é solução ótima do problema dual.

- O reverso da condição suficiente de otimalidade é o teorema fundamental da dualidade.
- Teorema Fundamental da Dualidade: Num par primal-dual, se um dos problemas tem uma solução viável ótima então o outro problema também tem uma solução viável ótima e os valores das duas funções-objetivo são iguais.

Prova: P: $\min \{ z(x) = cx \mid Ax = b; x \geq 0 \}$

D: $\max \{ v(\pi) = \pi b \mid \pi A \leq c; \pi$ irrestrito $\}$

A linha de custos da tabela canônica corresponde a: $c' = c - c_B B^{-1} A$

Pelo critério de otimalidade, esta base é ótima somente se $c' \geq 0$.

Logo, se $c - c_B B^{-1} A \geq 0$, então $(c_B B^{-1}) A \leq c$.

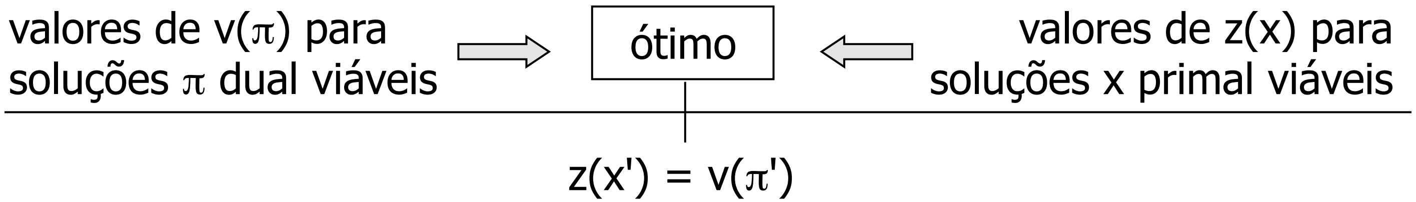
Pela tabela canônica, o valor ótimo da função-objetivo é $(c_B B^{-1}) b$.

Definindo $\pi = c_B B^{-1}$, temos que: $\pi A \leq c$ e πb = valor ótimo primal. Mas, se $\pi A \leq c$, então π é solução dual viável e $v(\pi) = \pi b$. Logo, o valor ótimo primal (πb) é igual ao valor $v(\pi)$ de uma solução dual viável π. Pela condição suficiente de otimalidade, π é solução ótima dual.

Corolários do Teorema Fundamental da Dualidade

1) Forma alternativa do teorema fundamental da dualidade: Se ambos os problemas em um par primal-dual têm soluções viáveis, então ambos têm solução ótima e os valores ótimos de ambos os problemas são iguais.

2) Propriedade da separação dos valores-objetivo:



3) Valor-objetivo ilimitado: Se o problema primal (dual) é viável e o problema dual (primal) é inviável, então o problema primal (dual) não pode ter uma solução viável ótima, ou seja, o valor-objetivo primal (dual) é ilimitado.

Viabilidade Dual de uma Base

- Problema primal na forma padrão: $\min \{z(x) = cx \mid Ax = b, x \geq 0\}$.

  Seja B uma base, x_B o correspondente vetor básico e c_B, o vetor básico de coeficientes de custo. Sejam N, x_N e c_N os correspondentes não-básicos. Separando as partes básica e não-básica podemos escrever o problema como:

$$
\begin{array}{ll}
\min & z(x) = c_B x_B + c_N x_N \\
\text{s.a} & Bx_B + Nx_N = b \\
 & x_B, x_N \geq 0
\end{array}
$$

  O dual deste problema pode ser escrito como:

$$
\begin{array}{ll}
\max & v(\pi) = \pi b \\
\text{s.a} & \pi B \leq c_B \\
 & \pi N \leq c_N \\
 & \pi \text{ irrestrito}
\end{array}
$$

  A solução básica primal, correspondente à base B, é tal que:

$$x_N = 0 \qquad \text{e} \qquad Bx_B = b$$

A base B é primal viável $\Leftrightarrow$ a solução satisfaz as restrições de não-negatividade das variáveis, ou seja, $x_B = B^{-1}b \geq 0$.

A solução dual correspondente à base B é obtida resolvendo-se o sistema: $\pi B = c_B$

e esta base é dual viável se a solução dual satisfaz à outra restrição, ou seja: $\pi N \leq c_N$

Portanto, se B é uma base dual viável, a solução dual correspondente é $\pi = c_B B^{-1}$ e esta solução irá satisfazer todas as restrições duais se $\pi A \leq c$, ou seja, $(c - c_B B^{-1} A) \geq 0$.

Mas, como vimos na prova do Teorema Fundamental da Dualidade, $(c - c_B B^{-1} A) \geq 0$ é exatamente o critério de otimalidade, se B é primal viável.

Portanto, uma base B é ótima se ela é, ao mesmo tempo, primal viável e dual viável.

Observação:

O algoritmo simplex trabalha com bases primal viáveis. Mas, até que a condição $(c - c_B B^{-1} A) \geq 0$ seja satisfeita, o algoritmo não alcança uma base ótima. Logo, durante a execução do algoritmo, as bases consideradas são primal viáveis mas dual inviáveis. Quando a viabilidade dual for alcançada, a base ótima terá sido obtida e a execução do algoritmo termina.

É possível desenvolver um algoritmo que começa com uma base dual viável (mas primal inviável) e tenta obter a viabilidade primal, mantendo a cada passo a viabilidade dual. Este algoritmo é conhecido como algoritmo dual simplex e será estudado no Capítulo 6.

Coeficientes de Custo Relativo e Variáveis de Folga Duais

- Seja B uma base primal viável para um PPL na forma padrão. Já sabemos que $\pi = c_B B^{-1}$ é uma solução do problema dual associado. As restrições do problema dual são: $\pi A_{\cdot j} \leq c_j$ $(j = 1, ..., n)$.

  Portanto, as folgas duais correspondentes à solução π são:

$$c_j - \pi A_{\cdot j} = \underbrace{(c_j - c_B B^{-1} A_{\cdot j})}_{\boxed{\textbf{coeficiente de custo relativo}}} = c'_j$$

- Se existir algum coeficiente de custo relativo negativo, a folga dual correspondente será negativa e a solução dual associada será dual inviável (pois uma solução dual é viável se $\pi A_{\cdot j} \leq c_j$, ou seja, se $c'_j = (c_j - c_B B^{-1} A_{\cdot j}) \geq 0$) e, portanto, a base B será dual inviável.

- Quando o critério de otimalidade do algoritmo simplex for alcançado, todas as folgas duais serão não-negativas e a solução dual associada será viável e, portanto, a base B será dual viável. Logo, o critério de otimalidade do algoritmo simplex é exatamente o critério de viabilidade dual.

Exemplo - PPL na forma padrão:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
1	0	0	-1	2	4	7
0	1	0	1	-2	6	19
0	0	1	2	3	-7	21
3	-4	-8	16	-17	19	0

(1)

$x_i \geq 0$

O problema dual correspondente é:

$$
\begin{array}{ll}
\max & 7\,\pi_1 + 19\,\pi_2 + 21\,\pi_3 \\
\text{s.a} & \pi_1 \leq 3 \\
& \pi_2 \leq -4 \\
& \pi_3 \leq -8 \\
& -\,\pi_1 + \pi_2 + 2\,\pi_3 \leq 16 \\
& 2\,\pi_1 - 2\,\pi_2 + 3\,\pi_3 \leq -17 \\
& 4\,\pi_1 + 6\,\pi_2 - 7\,\pi_3 \leq 19
\end{array}
$$

(2)

π_i irrestrito

As restrições do problema dual podem ser reescritas como:

$$
\begin{array}{l}
3 - \pi_1 \geq 0 \\
-4 - \pi_2 \geq 0 \\
-8 - \pi_3 \geq 0 \\
16 + \pi_1 - \pi_2 - 2\,\pi_3 \geq 0 \\
-17 - 2\,\pi_1 + 2\,\pi_2 - 3\,\pi_3 \geq 0 \\
19 - 4\,\pi_1 - 6\,\pi_2 + 7\,\pi_3 \geq 0
\end{array}
$$

(3)

folgas duais

- Seja (x_1, x_2, x_3) o vetor básico para (1). A tabela canônica relativa a este vetor básico será:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
1	0	0	-1	2	4	7
0	1	0	1	-2	6	19
0	0	1	2	3	-7	21
0	0	0	39	-7	-25	223

- Portanto, o vetor de coeficientes de custo relativo referente a este vetor básico é $c' = (0, 0, 0, 39, -7, -25)$.
- A solução dual associada a este vetor básico é obtida considerando-se as três primeiras restrições de (2) como equações, ou seja: $\pi = (3, -4, -8)$.
- Substituindo a solução π em (3) verifica-se que o vetor de folgas duais será:
  $3 - \pi_1 = 3 - 3 = 0$
  $-4 - \pi_2 = -4 - (-4) = 0$
  $-8 - \pi_3 = -8 - (-8) = 0$
  $16 + \pi_1 - \pi_2 - 2\,\pi_3 = 16 + 3 - (-4) - 2(-8) = 39$
  $-17 - 2\,\pi_1 + 2\,\pi_2 - 3\,\pi_3 = -17 - 2(3) + 2(-4) - 3(-8) = -7$
  $19 - 4\,\pi_1 - 6\,\pi_2 + 7\,\pi_3 = 19 - 4(3) -6(-4) + 7(-8) = -25$

ou seja, o vetor de folgas duais é igual ao vetor de custos relativos.

O **método simplex revisado** (Capítulo 5) obtém e usa a solução dual a cada passo para calcular os coeficientes de custo relativo.

Critério de Solução Ilimitada e Inviabilidade Dual

- Seja a tabela canônica de um PPL:

VB	x_1	...	x_m	x_{m+1}	...	x_n	b
x_1	1	...	0	$a'_{1,m+1}$	...	$a'_{1,n}$	b'_1
...	...			...		...	...
x_m	0	...	1	$a'_{m,m+1}$		$a'_{m,n}$	b'_m
$-z(x)$	0	...	0	c'_{m+1}	...	c'_n	$-z'$

Vamos supor que satisfaz o critério de solução ilimitada.

Então: $c'_{m+1} < 0$ e $a'_{i,m+1} \le 0$ $(i = 1, ..., m)$.

O problema correspondente a esta tabela canônica pode ser expresso como:

$$\min \quad z(x) = \left(\sum_{j=m+1}^{n} c'_j x_j \right)$$

$$s.a \quad x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a'_{ij} x_j = b'_i \quad (i = 1, \cdots, m)$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1, \cdots, n)$$

- O dual deste problema é:

$$\max \quad v(\pi) = \left(\sum_{i=1}^{m} \pi_i b'_i \right)$$

$$s.a \quad \pi_i \leq 0 \qquad (i = 1, \cdots, m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \pi_i a'_{ij} \leq c'_j \qquad (j = m+1, \cdots, n)$$

No entanto, as restrições: $\pi_i \leq 0 \qquad (i = 1, \cdots, m)$

$$\sum_{i=1}^{m} \pi_i a'_{i,m+1} \leq c'_{m+1}$$

são inconsistentes, pois:

$$c'_{m+1} < 0 \text{ e } a'_{i,m+1} \leq 0 \quad (i = 1, \ldots, m)$$

Logo, as restrições duais são inconsistentes e, portanto, o problema dual é inviável. Portanto, o critério de solução ilimitada no algoritmo primal simplex corresponde exatamente à inviabilidade dual.

- Observe também que a inviabilidade dual independe do vetor b primal e, portanto, se o problema dual é inviável para algum vetor b, ele será inviável para qualquer vetor b. Logo, podemos concluir:
  - Se um PPL tem solução ilimitada para algum vetor b, este PPL será ilimitado para qualquer vetor b que o mantenha viável.

- Se um PPL tem uma solução viável ótima, este PPL terá uma solução viável ótima mesmo se o vetor b for alterado, desde que o problema se mantenha viável.

Estes resultados serão utilizados no estudo sobre **Análise de Sensibilidade**, no Capítulo 7.

Teorema das Folgas Complementares (ou Teorema do Equilíbrio)

- Num par primal-dual, existe uma variável dual para cada restrição primal. A variável dual é não-negativa $\Leftrightarrow$ a restrição primal correspondente é uma desigualdade. Logo, associada a qualquer variável dual não-negativa existe uma variável de folga primal.

- Teorema: Um par de soluções viáveis (x', π') é ótimo em relação ao problema correspondente de um par primal-dual $\Leftrightarrow$ sempre que para este par de soluções existir uma variável de folga estritamente positiva em um dos problemas, o valor da variável não-negativa associada do outro problema é zero.

  Prova: Sejam $\quad P: \min \{ cx \mid Ax \geq b,\ x \geq 0 \}$

  $\qquad D: \max \{ \pi b \mid \pi A \leq c,\ \pi \geq 0 \}$

  Variáveis de folga primais: $\quad v_i = A_i.\ x - b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$

  Variáveis de folga duais: $\quad u_j = c_j - \pi\ A._j \quad (j = 1, \ldots, n)$

- Então: $v' = A x' - b$ e $u' = c - \pi' A$ são os vetores de folga associados ao par de soluções (x', π'). O teorema estabelece que:

$$(x', \pi') \text{ é otimo} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{se } v'_i > 0 \text{ então } \pi'_i = 0 \\ \text{se } u'_j > 0 \text{ então } x'_j = 0 \end{cases}$$

Observar que estas condições implicam que se $\pi'_i > 0$ então $v'_i = 0$ e se $x'_j > 0$ então $u'_j = 0$

Isto pode ser reescrito como:

$$v'_i\, \pi'_i = (A_i.\, x' - b_i)\, \pi'_i = 0$$

$$u'_j\, x'_j = (c_j - \pi' A._j)\, x'_j = 0$$

($\Leftarrow$) Das equações acima segue que:

$$\sum_{i=1}^{m} \pi'_i\,(A_i.\,x') = \sum_{i=1}^{m} \pi'_i\, b_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x'_j = \sum_{j=1}^{n} (\pi' A._j) x'_j$$

Mas, $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \pi'_i\,(A_i.\,x') = \sum_{j=1}^{n} (\pi' A._j) x'_j$ Logo: $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x'_j = \sum_{i=1}^{m} \pi'_i\, b_i$

ou seja: $c\, x' = \pi'\, b$ e pela condição suficiente de otimalidade, x' e π' são soluções ótimas.

($\Rightarrow$) Exercício!

- Veja um exemplo para ilustrar:

$$\sum_{i=1}^{m} \pi'_i \,(A_i . x') = \sum_{j=1}^{n} (\pi' A_{.j}) x'_j$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \quad m = 2 \quad n = 3$$

$$x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \qquad \pi' = \begin{pmatrix} \pi'_1 & \pi'_2 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \pi'_i \,(A_i . x') =$$

$$\pi'_1 (A_1 . x') + \pi'_2 (A_2 . x') =$$

$$\pi'_1 (a_{11}\ x'_1 + a_{12}\ x'_2 + a_{13}\ x'_3) + \pi'_2 (a_{21}\ x'_1 + a_{22}\ x'_2 + a_{23}\ x'_3) =$$

$$\begin{pmatrix} \pi'_1 & \pi'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} x'_1 + \begin{pmatrix} \pi'_1 & \pi'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} x'_2 + \begin{pmatrix} \pi'_1 & \pi'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} x'_3 =$$

$$(\pi' A_{.1}) x'_1 + (\pi' A_{.2}) x'_2 + (\pi' A_{.3}) x'_3 =$$

$$\sum_{j=1}^{n} (\pi' A_{.j}) x'_j$$

Corolários do Teorema do Equilíbrio

- Se $x_j \geq 0$ no problema primal e se $x'_j > 0$, então a restrição dual associada a esta variável deve ser satisfeita como uma equação por toda solução dual viável ótima.
- Seja v' o valor das variáveis de folga primais para a solução x'. Se $v'_i > 0$, então a variável dual associada π_i é igual a zero em toda solução dual viável ótima.

Exemplo. Seja o problema da dieta visto anteriormente:

$$\begin{array}{ll} \min & 35x_1 + 30x_2 + 60x_3 + 50x_4 + 27x_5 + 22x_6 \\ \text{s.a} & x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 \geq 9 \\ & x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 \geq 19 \\ & x_i \geq 0 \ (i = 1, \ldots, 6) \end{array}$$

As variáveis de folga para este problema são:

$$v_1 = x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 - 9$$
$$v_2 = x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 - 19$$

Seja $x' = (0, 0, 0, 0, 5, 2)^T$. Então, qualquer solução dual viável ótima deve satisfazer:

$$\begin{cases} \pi_1 + 3\,\pi_2 = 27 \\ 2\,\pi_1 + 2\,\pi_2 = 22 \end{cases}$$

Este sistema tem um única solução: $\pi' = (3, 8)$.

Logo, como o valor das variáveis duais não é zero, o valor das folgas primais correspondentes deve ser igual a zero.

De fato: $v_1 = 0 + 2(0) + 2(0) + 5 + 2(2) - 9 = 0$

$v_2 = 0 + 3(0) + 0 + 3(5) + 2(2) - 19 = 0$

Interpretação Econômica do Problema Dual

Considere o problema da dieta de uma forma geral:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.a} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i = 1, \cdots, m) \\ & x_j \geq 0 \qquad\qquad (j = 1, \cdots, n) \end{aligned}$$

a_{ij} - número de unidades do nutriente i por unidade do alimento j

c_j - custo por unidade do alimento j

b_i - necessidade mínima do nutriente i

x_j - número de unidades do alimento j a serem compradas

Seja π_i o preço por unidade da pílula de nutriente i.

Então, o preço a ser pago por uma pessoa que, apenas tomando as pílulas, consiga a mesma quantidade de nutriente contida numa unidade do alimento j é igual a:

$$\sum_{i=1}^{m} \pi_i a_{ij}$$

Essa pessoa irá optar pelas pílulas apenas se: $$\sum_{i=1}^{m} \pi_i a_{ij} < c_j \qquad (1)$$

Logo, se (1) vale, a pessoa não irá comprar o alimento, ou seja, $x_j = 0$.

Analogamente, se o fabricante de pílulas estabelece um preço positivo para a pílula de nutriente i, ou seja, $\pi_i > 0$, a pessoa vai procurar obter apenas a quantidade mínima necessária deste nutriente, pois qualquer quantidade além do mínimo implicará em gasto adicional. Portanto, se $\pi_i > 0$, para esta pessoa:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (2)$$

Isto é o que estabelece o Teorema das Folgas Complementares:

a) se folga dual > 0 (1) ➔ variável primal correspondente = 0

b) se variável dual > 0 ➔ folga primal correspondente = 0 (2).

O mesmo raciocínio pode ser feito sobre o preço que o fabricante de pílulas deve adotar, conhecendo-se as quantidades de alimento compradas por uma pessoa.

Neste caso, a análise deve ser feita a partir do problema dual da dieta:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i=1}^{m} \pi_i b_i \\
\text{s.a} \quad & \sum_{j=1}^{n} \pi_i a_{ij} \le c_j \qquad (j = 1, \cdots, n) \\
& \pi_i \ge 0 \qquad\qquad\quad (i = 1, \cdots, m)
\end{aligned}
$$

O custo mínimo pago pela pessoa que faz dieta será exatamente o lucro máximo que o fabricante de pílulas irá obter.

Por isto, as condições de folga complementares são também conhecidas como condições de equilíbrio.