

PROGRAMAÇÃO LINEAR UERJ/2024

02 - Método Simplex

Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br
IME-UERJ

Sumário

- 1 Método Simplex - Abordagem matricial
- 2 Algoritmo Simplex
- 3 Exemplo - Abordagem matricial
- 4 Simplex - Abordagem em *tableau*

Problema de maximização - Forma canônica

$$\max \quad z = cx$$

s.a.

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0,$$

onde:

$$c = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n]; \quad x = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T;$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Problema de maximização - Forma padrão

Restrições (\leq) passam a ser restrições ($=$).

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c'x' \\ \text{s.a.} \quad & A'x' = b \\ & x' \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & z = C_N x_N + C_B x_B \\ \text{s.a.} \quad & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N x_N + B x_B &= b \\ x_N, x_B &\geq 0 \end{aligned}$$

onde:

$$c' = \left[\underbrace{c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n}_{C_N} \mid \underbrace{0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0}_{C_B} \right];$$

$$x' = \left[\underbrace{x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n}_{x_N} \mid \underbrace{s_1 \quad s_2 \quad \cdots \quad s_m}_{x_B} \right]^T;$$

$$A' = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right]; \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_N$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{B=I}$

Problema de maximização - Algoritmo Simplex

No início do algoritmo Simplex, fixamos:

$$x_N = 0 = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]_{1 \times n}^T,$$

e conseqüentemente,

$$x_B = [s_1 \quad s_2 \quad \cdots \quad s_m]^T.$$

Também no início do algoritmo, $B = I$.

Além disso, sabemos das restrições do problema que:

$$N x_N + B x_B = b$$

Multiplicando à esquerda por B^{-1} , obtemos:

$$B^{-1}N x_N + \underbrace{B^{-1}B}_I x_B = B^{-1}b \Rightarrow x_B = \underbrace{B^{-1}b}_{\bar{x}_B} - B^{-1}N x_N$$

Como fixamos $x_N = 0$, então

$$\Rightarrow x_B = \bar{x}_B = B^{-1}b$$

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

No início do algoritmo, $B = I$, e temos também que

$$\bar{x}_B = I^{-1}b \Rightarrow \bar{x}_B = b$$

$$\text{Ou seja, } \bar{x}_B = [s_1 \quad s_2 \quad \cdots \quad s_m]^T = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_m]^T.$$

Agora, vamos expressar a função objetivo z em termos das variáveis não básicas x_N .

Sabemos das restrições do problema que:

$$N x_N + B x_B = b$$

Multiplicando à esquerda por B^{-1} , obtemos:

$$B^{-1}N x_N + \underbrace{B^{-1}B}_I x_B = B^{-1}b \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N$$

Substituindo x_B na função z , obtemos:

$$z = C_N x_N + C_B (B^{-1}b - B^{-1}N x_N) \Rightarrow z = C_B \underbrace{B^{-1}b}_{\bar{x}_B} - \underbrace{(C_B B^{-1}N - C_N)}_{z_N} x_N$$

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

Denotando $\bar{z} = C_B \bar{x}_B$ e $z_N = C_B B^{-1} N$, obtemos:

$$\Rightarrow z = \bar{z} - (z_N - C_N) x_N ,$$

onde \bar{z} é o valor atual da função objetivo z .

Podemos reescrever z_N como:

$$z_N = C_B B^{-1} N$$

$$= C_B B^{-1} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= C_B B^{-1} \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_B B^{-1} a_1 & C_B B^{-1} a_2 & \cdots & C_B B^{-1} a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{bmatrix}$$

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

Como $c_N = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n]$, então:

$$(z_N - C_N)x_N$$

$$= \left([C_B B^{-1} a_1 \ C_B B^{-1} a_2 \ \cdots \ C_B B^{-1} a_n] - [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n] \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= \left([C_B B^{-1} a_1 - c_1 \ C_B B^{-1} a_2 - c_2 \ \cdots \ C_B B^{-1} a_n - c_n] \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= (C_B B^{-1} a_1 - c_1)x_1 + (C_B B^{-1} a_2 - c_2)x_2 + \cdots + (C_B B^{-1} a_n - c_n)x_n$$

$$= \sum_{j \in I_N} (C_B B^{-1} a_j - c_j)x_j = \sum_{j \in I_N} (z_j - c_j)x_j,$$

onde I_N é o conjunto dos índices das variáveis não básicas.

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

Assim,

$$\Rightarrow z = \bar{z} - \sum_{j \in I_N} (z_j - c_j)x_j,$$

e podemos reescrever o problema de maximização na forma padrão como:

$$\max \quad z = \bar{z} - (z_N - c_N)x_N = \bar{z} - \sum_{j \in I_N} (z_j - c_j)x_j$$

s.a.

$$x_B = \bar{x}_B - B^{-1}N x_N$$

$$x_N, x_B \geq 0$$

Devemos analisar a subtração $(z_j - c_j)$, pois é através dela que vamos obter o critério de entrada de uma nova variável na base.

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

Num problema de maximização:

- Se $(z_j - c_j) < 0$, há contribuição para aumentar \bar{z} (valor atual) na função objetivo z , o que é desejado.

Então, o critério de entrada na base é:

Para cada variável não básica x_j , calcularemos $(z_j - c_j)$.

- Caso haja mais de uma variável não básica x_j com $(z_j - c_j) < 0$, entrará na base a que tiver o menor valor de $(z_j - c_j)$.
- Caso $(z_j - c_j) \geq 0$ para todas as variáveis, teremos que a solução atual é ótima e podemos parar o algoritmo.

Falta verificar ainda: qual variável será escolhida para sair da base?

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

Sabemos do sistema de equações das restrições do PPL que:

$$N\mathbf{x}_N + B\mathbf{x}_B = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x}_B = \underbrace{B^{-1}\mathbf{b}}_{\bar{\mathbf{x}}_B} - B^{-1}N\mathbf{x}_N \Rightarrow \mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{x}}_B - B^{-1}N\mathbf{x}_N ,$$

onde $\bar{\mathbf{x}}_B$ é a solução básica atual.

Então, podemos reescrever essa equação como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{x}_{B_1} \\ \bar{x}_{B_2} \\ \vdots \\ \bar{x}_{B_m} \end{bmatrix} - B^{-1}N \begin{bmatrix} x_{N_1} \\ x_{N_2} \\ \vdots \\ x_{N_n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{x}_{B_1} \\ \bar{x}_{B_2} \\ \vdots \\ \bar{x}_{B_m} \end{bmatrix} - B^{-1} \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{N_1} \\ x_{N_2} \\ \vdots \\ x_{N_n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{x}_{B_1} \\ \bar{x}_{B_2} \\ \vdots \\ \bar{x}_{B_m} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B^{-1}a_1 & B^{-1}a_2 & \cdots & B^{-1}a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{N_1} \\ x_{N_2} \\ \vdots \\ x_{N_n} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \bar{x}_{B_1} \\ \bar{x}_{B_2} \\ \vdots \\ \bar{x}_{B_m} \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} B^{-1}a_1 \end{bmatrix} x_{N_1} + \begin{bmatrix} B^{-1}a_2 \end{bmatrix} x_{N_2} + \cdots + \begin{bmatrix} B^{-1}a_n \end{bmatrix} x_{N_n} \right)
 \end{aligned}$$

Denotando o vetor coluna $B^{-1}a_k = y_k$, temos:

$$\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{B_1} \\ \bar{x}_{B_2} \\ \vdots \\ \bar{x}_{B_m} \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} y_1 \end{bmatrix} x_{N_1} + \begin{bmatrix} y_2 \end{bmatrix} x_{N_2} + \cdots + \begin{bmatrix} y_n \end{bmatrix} x_{N_n} \right)$$

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

Suponha que a variável que tenha entrado na base foi $x_{N_k} = x_k$.

Se x_k vai entrar na base, então vai deixar de ser nula.

Além disso, as demais variáveis $x_{N_1}, x_{N_2}, \dots, x_{N_{k-1}}, x_{N_{k+1}}, \dots, x_{N_n}$ continuam nulas, pois continuam fora da base.

Assim, fazendo $x_{N_k} = x_k$ e $x_{N_1} = x_{N_2} = \dots = x_{N_{k-1}} = x_{N_{k+1}} = \dots = x_{N_n} = 0$ na equação anterior, obtemos:

$$\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{B_1} \\ \bar{x}_{B_2} \\ \vdots \\ \bar{x}_{B_m} \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} | \\ y_1 \\ | \end{bmatrix} 0 + \begin{bmatrix} | \\ y_2 \\ | \end{bmatrix} 0 + \dots + \begin{bmatrix} | \\ y_{k-1} \\ | \end{bmatrix} 0 \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} | \\ y_k \\ | \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} | \\ y_{k+1} \\ | \end{bmatrix} 0 + \dots + \begin{bmatrix} | \\ y_n \\ | \end{bmatrix} 0 \right)$$

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

Ou seja,

$$\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{B_1} \\ \bar{x}_{B_2} \\ \vdots \\ \bar{x}_{B_m} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} | \\ y_k \\ | \end{bmatrix} x_k = \begin{bmatrix} \bar{x}_{B_1} \\ \bar{x}_{B_2} \\ \vdots \\ \bar{x}_{B_m} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix} x_k$$

Como devemos satisfazer as condições de não negatividade ($x_B \geq 0$), então:

$$x_{B_i} \geq 0 \Rightarrow \bar{x}_{B_i} - y_{ik}x_k \geq 0 \Rightarrow x_k \leq \frac{\bar{x}_{B_i}}{y_{ik}}, \forall i = 1, 2, \dots, m.$$

Note que se $y_{ik} \leq 0$ e, como já sabemos que $\bar{x}_{B_i} > 0$, então neste caso, $x_k \leq 0$ e isso violaria a restrição de não negatividade.

Satisfazendo a condição $y_{ik} > 0$, temos que escolher para sair da base a variável x_{B_i} que limita mais o crescimento de x_k . Ou seja, deve sair da base a variável x_{B_i} cujo índice i se relacione ao $\min \left\{ \frac{\bar{x}_{B_i}}{y_{ik}}, i = 1, 2, \dots, m; y_{ik} > 0 \right\}$

Problema de maximização - Algoritmo Simplex

- ❶ **Passo 1:** Encontre uma solução básica viável inicial para o problema.
- ❷ **Passo 2:** Calcule os $z_j - c_j$ das variáveis não básicas da solução atual. Caso $z_j - c_j > 0$ para todas as variáveis não básicas, pare, pois a solução atual é ótima. Senão, vá para o Passo 3.
- ❸ **Passo 3:** Caso haja mais de um $z_j - c_j > 0$, uma regra razoável é escolher a variável associada ao maior $z_j - c_j$ a entrar na base. Vá para o Passo 4.
- ❹ **Passo 4:** Encontre a variável x_{B_r} que deixará a base relacionada à linha r tal que: $\min \left\{ \frac{\bar{x}_{B_r}}{y_{rk}}, r = 1, 2, \dots, m; y_{rk} > 0 \right\}$.
Se $y_{rk} < 0, \forall r = 1, 2, \dots, m$, então pare, pois a solução é ilimitada.
- ❺ **Passo 5:** Encontre a nova base inserindo a coluna relativa à variável x_j , escolhida no Passo 3, no lugar da coluna da variável x_{B_r} , definida no Passo 4. Calcule a nova B^{-1} e, então, a nova solução básica viável $\bar{x}_B = B^{-1}b$. Volte para o Passo 2.

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

Exemplo: Usando o algoritmo Simplex, ache a solução ótima de:

$$\max \quad z = 18x_1 + 12x_2$$

s.a.

$$4x_1 + 5x_2 \leq 20$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Passando para a forma padrão, temos:

$$\max \quad z = 18x_1 + 12x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$

s.a.

$$4x_1 + 5x_2 + s_1 = 20$$

$$2x_1 + x_2 + s_2 = 6$$

$$x_2 + s_3 = 2$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

(1) Dados iniciais:

$$N = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 20 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad x_B = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \bar{x}_B;$$

$$c_N = [c_1 \quad c_2] = [18 \quad 12]; \quad c_B = [c_3 \quad c_4 \quad c_5] = [0 \quad 0 \quad 0];$$

$$\bar{z} = C_B \bar{x}_B = [0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 20 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = 0.$$

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

Quem entra na base - Cálculo de $(z_N - c_N)$ para verificar a variável que entra na base:

$$\begin{aligned}
 z_N - c_N &= c_B B^{-1} N - c_N \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 18 & 12 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -18 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 - c_1 & z_2 - c_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$z_1 - c_1 = -18 < 0$ e $z_2 - c_2 = -12 < 0$ (ainda é possível maximizar a função objetivo z).

$\Rightarrow x_1$ entra na base, pois $z_1 - c_1 < z_2 - c_2$.

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

Quem sai da base - Sabemos que pelas condições de não negatividade, $x_B \geq 0$. Então:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N = \bar{x}_B - B^{-1}Nx_N$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 20 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 20 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 - 4x_1 \\ 6 - 2x_1 \\ 2 \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned}$$

$$(1) \quad s_1 \geq 0 \Rightarrow 20 - 4x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 20/4;$$

$$(2) \quad s_2 \geq 0 \Rightarrow 6 - 2x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 6/2;$$

$$(3) \quad s_3 \geq 0 \Rightarrow 2 \geq 0; \text{ (não limita o crescimento de } x_1 \text{)}$$

As condições (1) e (2) limitam o crescimento de x_1 , sendo que (2) limita mais.

$$\text{Portanto, } \min \left\{ \frac{20}{4}, \frac{6}{2} \right\} = \frac{6}{2} \Rightarrow s_2 \text{ sai da base.}$$

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

(2) x_1 entra na base, s_2 sai da base:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 20 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$x_N = \begin{bmatrix} s_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad x_B = \begin{bmatrix} s_1 \\ x_1 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \bar{x}_B$$

$$c_N = [c_4 \quad c_2] = [0 \quad 12]; \quad c_B = [c_3 \quad c_1 \quad c_5] = [0 \quad 18 \quad 0];$$

$$\bar{z} = C_B \bar{x}_B = [0 \quad 18 \quad 0] \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 54.$$

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

Quem entra na base - Cálculo de $(z_N - c_N)$ para verificar a variável que entra na base:

$$\begin{aligned}
 z_N - c_N &= c_B B^{-1} N - c_N \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 18 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 12 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 9 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_4 - c_4 & z_2 - c_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$z_2 - c_2 = -3 < 0$ (ainda é possível maximizar a função objetivo z).

$\Rightarrow x_2$ entra na base.

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

Quem sai da base - Sabemos que pelas condições de não negatividade,

$x_B \geq 0$. Então:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N = \bar{x}_B - B^{-1}Nx_N$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} s_1 \\ x_1 \\ s_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0,5 & 0,5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 - 3x_2 \\ 3 - 0,5x_2 \\ 2 - x_2 \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned}$$

$$(1) \quad s_1 \geq 0 \Rightarrow 8 - 3x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 8/3;$$

$$(2) \quad x_1 \geq 0 \Rightarrow 3 - 0,5x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 3/0,5;$$

$$(3) \quad s_3 \geq 0 \Rightarrow 2 - x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 2.$$

As condições acima limitam o crescimento de x_2 , sendo que a condição (3) limita mais.

Portanto, $\min \left\{ \frac{8}{3}, \frac{3}{0,5}, \frac{2}{1} \right\} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow s_3$ sai da base.

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

(2) x_2 entra na base, s_3 sai da base:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 20 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_N = \begin{bmatrix} s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad x_B = \begin{bmatrix} s_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \bar{x}_B.$$

$$c_N = [c_4 \quad c_5] = [0 \quad 0]; \quad c_B = [c_3 \quad c_1 \quad c_2] = [0 \quad 18 \quad 12];$$

$$\bar{z} = C_B \bar{x}_B = [0 \quad 18 \quad 12] \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 60.$$

Problema de maximização - Simplex - Forma matricial

Quem entra na base - Cálculo de $(z_N - c_N)$ para verificar a variável que entra na base:

$$\begin{aligned}
 z_N - c_N &= c_B B^{-1} N - c_N \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 18 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_4 - c_4 & z_5 - c_5 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$z_4 - c_4 = 9 > 0$ e $z_5 - c_5 = 3 > 0$ (fim do algoritmo).

⇒ Encontramos a solução ótima: $(x_1^*, x_2^*) = (2, 2)$

⇒ Valor máximo da função objetivo: $z^* = 60$.

Simplex - Abordagem em *tableau*

Do sistema de equações lineares das restrições do PPL na forma padrão, temos:

$$N x_N + B x_B = b \Rightarrow B^{-1} N x_N + B^{-1} B x_B = B^{-1} b \Rightarrow x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N$$

A função objetivo z é dada por:

$$z = c_N x_N + c_B x_B$$

Expressando a função objetivo z em função do vetor de variáveis não básicas x_N , ao substituir x_B em z , obtemos:

$$z = c_N x_N + c_B (B^{-1} b - B^{-1} N x_N) \Rightarrow z = c_B \underbrace{B^{-1} b}_{\bar{x}_B} - \underbrace{(c_B B^{-1} N - c_N)}_{z_N} x_N$$

$$\Rightarrow z = \bar{z} - (z_N - c_N) x_N \Rightarrow z + (z_N - c_N) x_N + 0 x_B = \bar{z}$$

Além disso, no sistema de restrições inicial: $N x_N + x_B = b$, pois $B = I$.

Assim, o *tableau* inicial fica:

	z	x_N	x_B	
z	1	$z_N - c_N$	0	\bar{z}
x_B	0	N	I	b

Simplex - Abordagem em *tableau*

Além disso, a solução básica viável inicial é dada por:

$$x_N = x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T;$$

$$x_B = s = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_m \end{bmatrix}^T = b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{bmatrix}^T$$

Assim,

$$c_N = c = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}; \quad c_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{1 \times m};$$

$$z_N - c_N = c_B N - c_N = -c_N; \quad \bar{z} = c_B b = 0.$$

Assim, o *tableau* inicial fica:

	z	x_N	x_B	
z	1	$-c_N$	0	\bar{z}
x_B	0	N	I	b

Seja I_N o conjunto dos índices das variáveis não básicas, que são elementos de x_N . Se $z_j - c_j < 0$ para algum $j \in I_N$, devemos realizar pivotagem no *tableau*, ou seja, realizar operações elementares nas linhas do *tableau*.

Simplex - Abordagem em *tableau*

Voltando ao exemplo anterior na forma padrão:

$$\max \quad z = 18x_1 + 12x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$

s.a.

$$4x_1 + 5x_2 + s_1 = 20$$

$$2x_1 + x_2 + s_2 = 6$$

$$x_2 + s_3 = 2$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

Solução básica viável inicial:

$$\text{Fixamos } x_N = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T;$$

$$\Rightarrow x_B = s = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 20 & 6 & 2 \end{bmatrix}^T$$

Simplex - Abordagem em *tableau*

Tableau inicial:

(1)

	z	$\downarrow x_1$	x_2	s_1	s_2	s_3	
z	1	-18	-12	0	0	0	$0 = \bar{z}$
s_1	0	4	5	1	0	0	20
$\leftarrow s_2$	0	2	1	0	1	0	6
s_3	0	0	1	0	0	1	2
		N		B = I			b

$$B = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

Quem entra na base:

$$z_1 - c_1 = -18 < 0 \text{ e } z_2 - c_2 = -12 < 0$$

Como $z_1 - c_1 < z_2 - c_2$, então x_1 entra na base.

Quem sai da base:

$$a_{11} = 4 > 0 \text{ (OK)}; a_{21} = 2 > 0 \text{ (OK)}; a_{31} = 0 \text{ (X)}.$$

$$\min \left\{ \frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{21}} \right\} = \min \left\{ \frac{20}{4}, \frac{6}{2} \right\} = \frac{6}{2} \Rightarrow s_2 \text{ sai da base.}$$

Simplex - Abordagem em *tableau*

Tableau inicial:
(1)

	z	$\Downarrow x_1$	x_2	s_1	s_2	s_3	
z	1	-18	-12	0	0	0	0 (L ₁)
s_1	0	4	5	1	0	0	20 (L ₂)
$\Leftarrow s_2$	0	2	1	0	1	0	6 (L ₃)
s_3	0	0	1	0	0	1	2 (L ₄)

Pivô: $a_{21} = 2$;

Linha do pivô: L₃;

Operações nas linhas para eliminar os elementos da coluna do pivô, diferentes do pivô:

$$L_1 \leftarrow L_1 - \left(\frac{-18}{2}\right)L_3 = L_1 + 9L_3;$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - \left(\frac{4}{2}\right)L_3 = L_2 - 2L_3.$$

Simplex - Abordagem em *tableau*

(2)

	z	x_1	$\Downarrow x_2$	s_1	s_2	s_3	
z	1	0	-3	0	9	0	$54 = \bar{z}$
s_1	0	0	3	1	-2	0	8
x_1	0	1	0,5	0	0,5	0	3
$\Leftarrow s_3$	0	0	1	0	0	1	2
		$B^{-1}N$		B^{-1}		$B^{-1}b$	

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

Quem entra na base:

$$z_2 - c_2 = -3 < 0 \Rightarrow x_2 \text{ entra na base.}$$

Quem sai da base:

$$a_{12} = 3 > 0 \text{ (OK)}; a_{22} = 0,5 > 0 \text{ (OK)}; a_{32} = 1 > 0 \text{ (OK)}.$$

$$\min \left\{ \frac{\bar{x}_1}{a_{12}}, \frac{\bar{x}_2}{a_{22}}, \frac{\bar{x}_3}{a_{32}} \right\} = \min \left\{ \frac{8}{3}, \frac{3}{0,5}, \frac{2}{1} \right\} = \frac{2}{1} \Rightarrow s_3 \text{ sai da base.}$$

Simplex - Abordagem em *tableau*

(2)

	z	x_1	$\Downarrow x_2$	s_1	s_2	s_3	
z	1	0	-3	0	9	0	$54 = \bar{z} \quad (L_1)$
s_1	0	0	3	1	-2	0	8 (L_2)
x_1	0	1	0,5	0	0,5	0	3 (L_3)
$\Leftarrow s_3$	0	0	1	0	0	1	2 (L_4)

Pivô: $a_{32} = 1$;**Linha do pivô:** L_4 ;**Operações nas linhas para eliminar os elementos da coluna do pivô, diferentes do pivô:**

$$L_1 \leftarrow L_1 - \left(\frac{-3}{1}\right)L_4 = L_1 + 3L_4;$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - \left(\frac{3}{1}\right)L_4 = L_2 - 3L_4;$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - \left(\frac{0,5}{1}\right)L_4 = L_3 - 0,5L_4.$$

Simplex - Abordagem em *tableau*

(3)

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
z	1	0	0	0	9	3	$60 = \bar{z}$
s_1	0	0	0	1	-2	-3	2
x_1	0	1	0	0	0,5	-0,5	2
x_2	0	0	1	0	0	1	2
		$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$		$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$		$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$	
		$B^{-1}N$		B^{-1}		$B^{-1}b$	

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$z_j - c_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 5$. Logo, **a solução ótima foi encontrada.**

Solução ótima: $(x_1^*, x_2^*) = (2, 2)$.

Valor ótimo da função objetivo: $z^* = 60$.