

Gabarito - Lista de Exercícios 6 - Extra - Dualidade e Análise de Sensibilidade e Pós-Otimização

1. (a) **Interpretação econômica**

**Problema primal:** A empresa dispõe de 100 horas máquina, 80 horas de trabalho e máximo de produção de 40 unidades do produto  $A$ . Os lucros médios de cada unidade dos produtos  $A$  e  $B$  são respectivamente R\$ 3,00 e R\$ 2,00. Como os recursos  $R_1$  (horas máquina),  $R_2$  (horas de trabalho) e  $R_3$  (limite de produção do produto  $A$ ) já foram comprados, pretende-se estabelecer o plano de produção que maximiza o lucro.

Aqui, definimos:

$x_1$ : unidades do produto  $A$ ;

$x_2$ : unidades do produto  $B$ ;

e o problema primal é dado por:

$$\begin{aligned} \max z = & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 100 \quad (R_1 : \text{horas máquina}) \\ & x_1 + x_2 \leq 80 \quad (R_2 : \text{horas de trabalho}) \\ & x_1 \leq 40 \quad (R_3 : \text{limite de produção do produto } A) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

**Problema dual:** Um comprador está interessado nos recursos da empresa e quer pagar por seus recursos. Quanto ele deve pagar por cada unidade dos recursos?

Aqui, definimos:

$w_i$ : preço pago por cada unidade do recurso  $R_i$ , para  $i = 1, 2, 3$ ;

O comprador, obviamente, deseja minimizar o valor da compra dos recursos.

Assim, o problema dual é dado por:

$$\begin{aligned} \min v = & 100w_1 + 80w_2 + 40w_3 \\ \text{s.a.} \quad & 2w_1 + w_2 + w_3 \geq 3 \quad (D_1) \\ & w_1 + w_2 \geq 2 \quad (D_2) \\ & w_1, w_2, w_3 \geq 0 \end{aligned}$$

A interpretação das restrições do dual é a seguinte:

- Restrição  $D_1$ : pela quantidade  $2w_1 + w_2 + w_3$ , o comprador deverá oferecer pelo menos R\$ 3,00 (caso contrário, a empresa produziria uma unidade do produto  $A$  e a venderia por esse preço).
- Restrição  $D_2$ : pela quantidade  $w_1 + w_2$ , o comprador deverá oferecer pelo menos R\$ 2,00 (caso contrário, a empresa produziria uma unidade do produto  $B$  e a venderia por esse preço).

(b) O problema primal na forma padrão é dado por:

$$\begin{aligned} \max z = & 3x_1 + 2x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 \\ \text{s.a.} \quad & 2x_1 + x_2 + s_1 = 100 \quad (R_1 : \text{horas máquina}) \\ & x_1 + x_2 + s_2 = 80 \quad (R_2 : \text{horas de trabalho}) \\ & x_1 + s_3 = 40 \quad (R_3 : \text{limite de produção de } A) \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Aplicando o algoritmo Simplex, o tableau ótimo é dado por:

	$z$	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
$z$	1	0	0	1	1	0	$\bar{z} = 180$
$x_2$	0	0	1	-1	2	0	60
$s_3$	0	0	0	-1	1	1	20
$x_1$	0	1	0	1	-1	0	20

Pelo Teorema das Folgas Complementares, a solução ótima é:

Problema primal:

$$x_B = [x_2 \quad s_3 \quad x_1]^T = [60 \quad 20 \quad 20]^T;$$

$$x_N = [s_1 \quad s_2]^T = [0 \quad 0]^T.$$

Problema dual:

$$w_B = [w_1 \quad w_2]^T = [1 \quad 1]^T.$$

$$w_N = [t_2 \quad w_3 \quad t_1]^T = [0 \quad 0 \quad 0]^T.$$

- (c) Como  $s_1 = s_2 = 0$ , então os recursos escassos são  $R_1$  (horas máquina) e  $R_2$  (horas de trabalho).
- (d) Sim, se o pagamento mínimo fosse R\$ 1,00 por unidade vendida. A justificativa do preço mínimo (R\$ 1,00) é a de que uma redução em uma unidade do recurso  $R_1$  reduz o valor da função objetivo em R\$ 1,00 ( $w_1 = 1$ ).

- (e) Análogo ao item anterior, se o pagamento mínimo fosse R\$ 1,00 por unidade vendida. A justificativa do preço mínimo (R\$ 1,00) é a de que uma redução em uma unidade do recurso  $R_2$  reduz o valor da função objetivo em R\$ 1,00 ( $w_2 = 1$ ).
- (f) É o preço mínimo pelo qual deverá ser vendida uma unidade do recurso  $R_1$ .
- (g) Pagaria no máximo R\$ 0,00 ( $w_3 = 0$ ), pois já há sobra deste recurso ( $s_3 = 20$ ).
- (h) Variação de  $c_1$  (coeficiente de  $x_1$  na função objetivo do primal):

Como  $x_1$  é variável básica no tableau ótimo, então o vetor dos coeficientes das variáveis básicas  $c_B$  será modificado para  $c'_B$ .

Logo,  $z_N - c_N = c_B B^{-1} N - c_N$  será modificado para  $z'_N - c_N = c'_B B^{-1} N - c_N$ .

Sabemos que:

$$c'_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & c'_1 \end{bmatrix}; B^{-1}N = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; c_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, substituindo os valores, obtemos:

$$z'_N - c_N = \begin{bmatrix} -2 + c'_1 & 4 - c'_1 \end{bmatrix}.$$

Para que a solução permaneça ótima após a modificação de  $c_1 = 3$  para  $c'_1$ , devemos ter  $z'_N - c_N \geq 0$ , pois o problema primal é de maximização.

Portanto,

$$\begin{cases} -2 + c'_1 \geq 0 & \Rightarrow c'_1 \geq 2 \quad (\text{I}) \\ 4 - c'_1 \geq 0 & \Rightarrow c'_1 \leq 4 \quad (\text{II}) \end{cases}$$

Da interseção das desigualdades (I) e (II), obtemos  $2 \leq c'_1 \leq 4$ .

- (i) O elemento  $b_2 = 80$  do vetor independente  $b$  será alterado para  $b'_2 = 90$ .

Como o vetor  $b = [100 \ 80 \ 40]^T$  foi alterado para  $b' = [100 \ 90 \ 40]^T$ , então o vetor de variáveis básicas  $\bar{x}_B = B^{-1}b$  da solução ótima será alterado para  $\bar{x}'_B = B^{-1}b'$ .

$$\text{Como } B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ obtemos:}$$

$$\bar{x}'_B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 90 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Como  $x'_B \geq 0$ , esta solução é viável.

(j) Para que a solução permaneça ótima após a modificação de  $b_1 = 100$  para  $b'_1$ :

$$\bar{x}'_B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b'_1 \\ 80 \\ 40 \end{bmatrix} \geq 0.$$

Efetuando os cálculos, encontramos:  $80 \leq b'_1 \leq 120$ .

(k) Na forma padrão do problema primal original, o valor do elemento  $a_{11} = 2$  da matriz dos coeficientes  $A$  das restrições será modificado para  $a'_{11} = 3$ .

Logo, o vetor coluna  $a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  de  $A$  será modificado para  $a'_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Assim, o valor de  $z_1 - c_1 = c_B B^{-1} a_1 - c_1$  será modificado para  $z'_1 - c_1 = c_B B^{-1} a'_1 - c_1$ .

Denotando  $y_1 = B^{-1} a'_1$ , temos:

$$y_1 = B^{-1} a'_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + 2 \\ -3 + 2 \\ 3 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$z'_1 - c_1 = c_B B^{-1} a'_1 - c_1 = c_B y_1 - c_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - 3 = 1 \geq 0.$$

O tableau ótimo é então atualizado para:

	$z$	$\bar{x}_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
$z$	1	1	0	1	1	0	$\bar{z} = 180$
$x_2$	0	-1	1	-1	2	0	60
$s_3$	0	-1	0	-1	1	1	20
$x_1$	0	2	0	1	-1	0	20

Note que renomeamos a variável  $x_1$  na primeira linha do tableau para  $\bar{x}_1$ , pois  $x_1$  é uma variável básica, mas no tableau  $z'_1 - c_1 = 1 \neq 0$  (lembre que para toda variável básica  $x_k$ ,  $z_k - c_k = 0$ ).

Assim, para anular  $z'_1 - c_1$ , a variável nova  $\bar{x}_1$  deve entrar na base e a variável antiga  $x_1$  deve sair da base para que tenhamos  $z_1 - c_1 = 0$ , pois essa é a condição para que a variável nova  $\bar{x}_1$  seja básica.

Então, após o pivoteamento temos o novo tableau ótimo:

	$z$	$\bar{x}_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
$z$	1	0	0	1/2	3/2	0	$\bar{z} = 170$
$x_2$	0	0	1	-1/2	3/2	0	70
$s_3$	0	0	0	-1/2	1/2	1	30
$x_1$	0	1	0	1/2	-1/2	0	10

A nova solução ótima é:

$$x_B = [x_2 \quad s_3 \quad x_1]^T = [70 \quad 30 \quad 10]^T;$$

$$x_N = [s_1 \quad s_2]^T = [0 \quad 0]^T.$$

- (1) Na forma padrão do problema primal original, o valor do elemento  $a_{12} = 1$  da matriz dos coeficientes  $A$  das restrições será modificado para  $a'_{12}$ .

$$\text{Logo, o vetor coluna } a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ de } A \text{ será modificado para } a'_2 = \begin{bmatrix} a'_{12} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, o valor de  $z'_2 - c_2 = c_B B^{-1} a'_2 - c_2$  será modificado para  $z'_2 - c_2 = c_B B^{-1} a'_2 - c_2$ .

Denotando  $y_2 = B^{-1} a'_2$ , obtemos:

$$y_2 = B^{-1} a'_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_{12} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a'_{12} + 2 \\ -a'_{12} + 1 \\ a'_{12} - 1 \end{bmatrix}$$

$$z'_2 - c_2 = c_B B^{-1} a'_2 - c_2 = c_B y_2 - c_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a'_{12} + 2 \\ -a'_{12} + 1 \\ a'_{12} - 1 \end{bmatrix} - 2.$$

$$\Rightarrow z'_2 - c_2 = -2a'_{12} + 4 + 3a'_{12} - 3 - 2 = a'_{12} - 1.$$

Como o problema primal é de maximização, para que a solução permaneça ótima, devemos ter  $z'_2 - c_2 \geq 0$ . Então,

$$a'_{12} - 1 \geq 0 \Rightarrow a'_{12} \geq 1.$$

$$(m) \quad y_1 = B^{-1}a'_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ a'_{21} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + 2a'_{21} \\ -1 + a'_{21} \\ 2 - a'_{21} \end{bmatrix}$$

$$z'_1 - c_1 = c_B B^{-1}a'_1 - c_1 = c_B y_1 - c_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 + 2a'_{21} \\ -1 + a'_{21} \\ 2 - a'_{21} \end{bmatrix} - 3 \geq 0.$$

Para que a solução permaneça ótima,  $z'_1 - c_1 \geq 0$ . Então,

$$-4 + 4a'_{21} + 6 - 3a'_{21} - 3 \geq 0 \Rightarrow a'_{21} \geq 1.$$

(n) Na forma padrão do problema primal original, o valor do elemento  $a_{22} = 1$  da matriz dos coeficientes  $A$  das restrições será modificado para  $a'_{22} = 2$ .

$$\text{Logo, o vetor coluna } a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \textcolor{red}{1} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ de } A \text{ será modificado para } a'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \textcolor{red}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, o valor de  $z_2 - c_2 = c_B B^{-1}a_2 - c_2$  será modificado para  $z'_2 - c_2 = c_B B^{-1}a'_2 - c_2$ .

Denotando  $y_2 = B^{-1}a'_2$ , temos:

$$y_2 = B^{-1}a'_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$z'_2 - c_2 = c_B B^{-1}a'_2 - c_2 = c_B y_2 - c_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - 2 = 1 \geq 0.$$

O tableau ótimo é então atualizado para:

	$z$	$x_1$	$\bar{x}_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
$z$	1	0	1	1	1	0	$\bar{z} = 180$
$x_2$	0	0	3	-1	2	0	60
$s_3$	0	0	1	-1	1	1	20
$x_1$	0	1	-1	1	-1	0	20

Como  $z'_2 - c_2 = 1 \neq 0$  e  $x_2$  é uma variável básica, renomeamos a variável  $x_2$  na primeira linha do tableau para  $\bar{x}_2$ . Assim, a variável nova  $\bar{x}_2$  deve entrar na base e a variável antiga  $x_2$  deve sair da base para que possamos obter  $z'_2 - c_2 = 0$ , pois essa é a condição para que a variável nova  $\bar{x}_2$  seja básica.

Então, após o pivoteamento temos o novo tableau:

	$z$	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
$z$	1	0	0	4/3	1/3	0	$\bar{z} = 160$
$\bar{x}_2$	0	0	1	-1/3	2/3	0	20
$s_3$	0	0	0	-1/3	-1/3	1	0
$x_1$	0	1	0	2/3	-1/3	0	40

Como  $s_3 = 0$  e  $s_3$  é uma variável básica, trata-se de uma solução degenerada.

Então, a nova solução ótima é:

$$x_B = [x_2 \quad s_3 \quad x_1]^T = [20 \quad 0 \quad 40]^T;$$

$$x_N = [s_1 \quad s_2]^T = [0 \quad 0]^T.$$

2. (a)

$$\begin{aligned} \min \quad v &= 5w_1 + 7w_2 + 20w_3 \\ \text{s.a.} \quad &w_1 + 3w_3 \geq 4 \\ &w_2 + 4w_3 = 6 \\ &w_1 \geq 0, \quad w_2 \geq 0, \quad w_3 \text{ livre.} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{array}{ll} \min & v = 2w_1 - 4x_2 \\ \text{s.a.} & 2w_1 - 4w_2 \leq 8 \\ & -6w_1 + 7w_2 \geq 3 \\ & w_1 - 2w_2 = -2 \\ & w_1 \leq 0, \ w_2 \text{ livre.} \end{array}$$