Programação Linear - IME/UERJ

Lista de Exercícios 3 - Dualidade

(Exercícios da seção 3.6 do livro-texto)

1. Formule o dual dos problemas de Programação Linear a seguir (não é necessário resolvê-los):

   (a)

$$
\begin{array}{lrcl}
\max & 3x_1 + 5x_2 & & \\
\text{s.a.} & x_1 & \leq & 4 \\
 & x_2 & \leq & 6 \\
 & 3x_1 + 2x_2 & = & 18 \\
 & x_1 \geq & & 0,\ x_2 \in \mathbb{R} \text{ (i.e., } x_2 \text{ sem restrição de sinal)}
\end{array}
$$

   (b)

$$
\begin{array}{ll}
\max & 2x_1 + x_2 + 5x_3 \\
\text{s.a.} & x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\
 & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4 \\
 & x_1 \ ,\ x_2 \ ,\ x_3 \geq 0
\end{array}
$$

   (c)

$$
\begin{array}{ll}
\min & 5x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \\
\text{s.a.} & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 \geq 16 \\
 & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 13 \\
 & x_1 \ ,\ x_2 \ ,\ x_3 \ ,\ x_4 \geq 0
\end{array}
$$

2. Nos problemas a seguir, a fim de evitar a inclusão de variáveis artificiais, resolva os problemas duais respectivos, pelo algoritmo do Simplex, e deduza a solução dos

problemas primais.

(a)

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\min & 6x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & & \\
\text{s.a.} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & 6 \\
 & 2x_1 & & & - & 2x_3 & \geq & 9 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{ll}
\min & 1400x_1 + 1200x_2 \\
\text{s.a.} & 2x_1 + x_2 \geq 15 \\
 & x_1 + x_2 \geq 10 \\
 & x_1,\ x_2 \geq 0
\end{array}$$

3. Dado o problema a seguir:

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\min & 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & \\
\text{s.a.} & 2x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & \geq & 7 \\
 & 3x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & \geq & 4 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

(a) escreva seu dual;

(b) resolva *apenas* um dos problemas (primal ou dual);

(c) com base no *tableau* final obtido no item (b),

  (i) indique a solução básica do problema *primal* e o valor da sua função objetivo;

  (ii) indique a solução básica do problema *dual* e o valor da sua função objetivo;

4. Dado o problema a seguir:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 2x_1 + 4x_2 + x_3 \\
\text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\
& x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8 \\
& x_1 \ , \quad x_2 \ , \quad x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

e a matriz de base B da solução ótima $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

(a) reproduza o *tableau* final do Simplex deste problema;

(b) dê a solução báica ótima do problema e o valor ótimo da função objetivo;

(c) escreva seu dual;

(d) indique a solução básica do problema *dual* e o valor da sua função objetivo;

5. Um gerente de um SPA chamado Só é Magro Quem Quer contrata você para ajudá-lo com o problema da direta para os hóspedes, mais precisamente para o lanche das 17h. Existem dois alimentos que podem ser fornecidos: cheeseburguer e pizza. São unidades especiais de cheeseburguers e pizzas, grandes, com muito molho e queijo, e custam, cada, $R\$10,00$ e $R\$16,00$, respectivamente. Entretanto, o lanche tem que suprir requisitos mínimos de carboidratos e lipídios: 40 u.n. e 50 u.n., respectivamente (u.n. significa unidade nutricional). Sabe-se ainda que cada cheeseburguer fornece 1 u.n. de carboidrato e 2 u.n. de lipídios, e cada pizza fornece 2 u.n. de carboidrato e 5 u.n. de lipídios. Para atender à solicitação do gerente,

   (a) Formule um problema de programação linear para garantir que o SPA forneça os relacionados nutrientes descritos, ao menor custo possível;

   (b) A partir do problema obtido em (a), descreva seu dual, indicando o significado das variáveis deste novo problema;

   (c) Determine de quanto será o custo mínimo para o SPA. (Resolva-o pelo método Simplex);

   (d) Determine a quantidade de cada um dos alimentos fornecidos no lanche;

   (e) Diga se os nutrientes estão sendo fornecidos além do mínimo necessário e em que quantidade.