2 – O Método Simplex

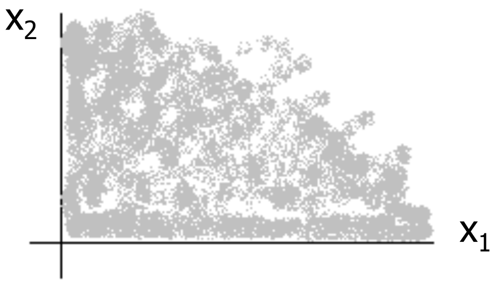
- O método simplex é um algoritmo que procura pela solução ótima de um PPL, realizando duas operações elementares sobre as linhas do problema:
  - Multiplicar todos os coeficientes de uma linha por uma constante não-nula.
  - Substituir uma linha por outra, obtida a partir de uma combinação linear de duas linhas do problema.
- Estas operações elementares, quando são feitas sobre equações, não alteram o conjunto de soluções factíveis do problema (ou seja, não altera a solução do problema).
- Exemplo:

(a): $\mathbf{3x_1 - 7x_2 = -21}$	**2(b) + (a):** $\mathbf{5x_1 - 5x_2 = -17}$
(b): $\mathbf{x_1 + x_2 = 2}$	**4(b):** $\mathbf{4x_1 + 4x_2 = 8}$
$x_1 = 2 - x_2$	$x_1 = (8 - 4x_2)/4 = 2 - x_2$
$3(2 - x_2) - 7x_2 = -21$	$5(2 - x_2) - 5x_2 = -17$
$-10x_2 = -27$	$-10x_2 = -27$
$x_2 = 27/10$	$x_2 = 27/10$
$x_1 = 2 - 27/10 = -7/10$	$x_1 = 2 - 27/10 = -7/10$

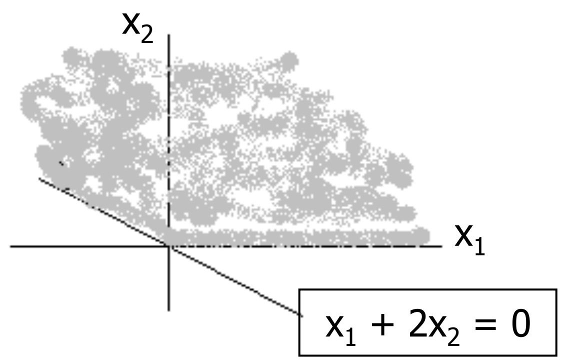
- Mas, em geral, um PPL é um conjunto de inequações e, neste caso, estas duas operações elementares, normalmente, alteram o conjunto de soluções viáveis.

  Exemplo:

  (a): $x_1 \geq 0$
  (b): $x_2 \geq 0$



  (a) + 2(b): $x_1 + 2x_2 \geq 0$
  (b): $x_2 \geq 0$



- Portanto, para que as operações elementares possam ser feitas é importante transformar o PPL em um sistema de equações.

Transformação do PPL para a Forma Padrão

- PPL na forma padrão: $\min \{ cx \mid Ax = b, x \geq 0 \}$. Portanto, além de transformar as inequações em equações, a forma padrão de um PPL exige transformações para as seguintes situações:

- Restrição de limite inferior

  $x \geq L$ (L = constante) pode ser substituída por: $y + L$, $y \geq 0$. Portanto, todas as variáveis do problema podem ter limites inferiores iguais a zero.

- Inequações
  - $a_1x_1 \leq b_1$ pode ser substituída por: $a_1x_1 + y_1 = b_1$, onde $y_1 \geq 0$.
  - $a_2x_2 \geq b_2$ pode ser substituída por: $a_2x_2 - y_2 = b_2$, onde $y_2 \geq 0$.

- Variáveis irrestritas em sinal

  A forma padrão exige que $x \geq 0$. Se um problema (com n variáveis e m restrições) contém variáveis irrestritas em sinal, pode-se transformar o problema de duas maneiras. Seja x_1 a variável irrestrita em sinal.
  - Substituir x_1 por $p_1 - q_1$, com $p_1 \geq 0$ e $q_1 \geq 0$. Neste caso, o problema passa a ter (n+1) variáveis (fica mais difícil).
  - Como x_1 é uma variável do problema, o coeficiente de x_1 em pelo menos uma restrição deve ser não-nulo (pois, do contrário, a variável x_1 poderia ser eliminada do problema).

Vamos supor que isto ocorre na i-ésima restrição:

$$a_{i1}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \qquad \text{onde } a_{i1} \neq 0.$$

Logo, podemos escrever:

$$x_1 = (b_i - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n)/a_{i1}$$

e, portanto, x_1 pode ser eliminada do problema (substituída pelo lado direito da equação). Isto é interessante porque reduz o problema para $(n - 1)$ variáveis e $(m - 1)$ restrições (a i-ésima restrição será eliminada). Se o lado direito da equação acima for negativo ($x_1 < 0$), pode-se transformar o problema substituindo x_1 por $-y_1$, $y_1 > 0$.

- Restrições com lados direitos negativos

  Se existir restrição tal que $b_i < 0$, multiplicar toda a restrição por -1.

- Função-objetivo

  O primeiro passo é eliminar termos constantes da função-objetivo. Isto não altera o conjunto de soluções ótimas do problema. Em seguida, expressar a função-objetivo na forma de minimização:

$$\max \{ cx \} \text{ é equivalente a } \min \{ -cx \}$$

- Com tais transformações, um PPL na forma padrão pode ser escrito como:

$$Min\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - z = 0 \right)$$

$$s.a \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i = 1, \cdots, m)$$

- Portanto, podemos representar um PPL padrão como uma tabela:

variáveis do problema (incluindo as variáveis de folga)

$$\begin{array}{cccc|c|c}
x_1 & x_2 & \cdots & x_n & -z & b \\
\hline
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & b_1 \\
\vdots & & & & \vdots & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & 0 & b_i \\
\vdots & & & & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & b_m \\
\hline
c_1 & c_2 & \cdots & c_n & 1 & 0
\end{array}$$

matriz de restrições

termos independentes

coeficientes de custo (função-objetivo)

Forma Canônica de um PPL

- Estando o PPL na forma padrão, as operações elementares sobre as linhas da tabela transformam o sistema de equações em um sistema equivalente (ou seja, com mesmo conjunto de soluções viáveis).
- A tabela da forma padrão está na forma canônica se existir uma matriz identidade de ordem m, como submatriz da matriz de restrições. Quando isto ocorre, é fácil obter uma solução viável para o problema, que é conhecida como solução viável básica (SVB).
- Estratégia do método simplex: a cada iteração, realizar as operações elementares sobre as linhas da tabela de modo a passar de uma SVB para outra SVB que diminua o valor da função-objetivo, até que isto não seja mais possível. Neste ponto, tem-se a solução ótima.
- Ao estabelecer uma SVB, as variáveis do problema são particionadas em dois conjuntos:
  - as variáveis básicas (ou variáveis dependentes)
  - as variáveis não-básicas (ou variáveis independentes)

- Numa SVB:
  - valores das variáveis não-básicas = zero
  - vetores-coluna das variáveis básicas: matriz identidade
- Exemplo:

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + 2x_2 \le 6 \\ & 2x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$$

forma padrão: ⇒

$$\begin{array}{ll} \min & - x_1 - x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{array}$$

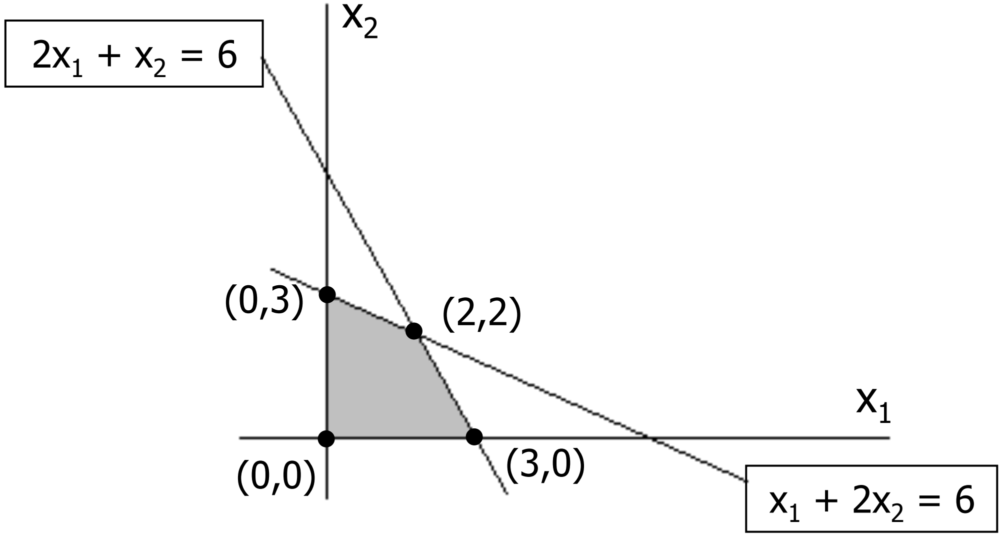
x1	x2	x3	x4	-z	b
1	2	1	0	0	6
2	1	0	1	0	6
-1	-1	0	0	1	**0**

- Portanto, uma SVB é: $\underbrace{x_1 = 0, x_2 = 0,}_{\text{variáveis não- básicas}}$ $\underbrace{x_3 = 6, x_4 = 6}_{\text{variáveis básicas}}$

valor de –z (negativo do valor da FO)

- O valor da FO, neste caso, é: z = – x1 – x2 = 0

- Neste caso, é fácil obter a região viável graficamente:



Observe que o ponto $(x_1, x_2) = (0, 0)$ é um vértice da região viável. Toda SVB corresponde a um ponto extremo (vértice) do conjunto de soluções viáveis.

- Método simplex: caminha pelos pontos extremos para encontrar a solução ótima do problema.
- O problema na forma canônica também pode ser representado por uma tabela (conhecida como tabela canônica):

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	-z	b
x_3	1	2	1	0	0	6
x_4	2	1	0	1	0	6
-z	-1	-1	0	0	1	0

variáveis básicas

mais à frente, esta coluna ficará subentendida.

- Solução atual: $SVB_1 = (0, 0, 6, 6)^T$. FO: $z = -x_1 - x_2 = 0$. Como diminuir o valor de z? Aumentar o valor das variáveis não-básicas que possuem custos negativos na FO.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	-z	b
x_3	1	2	1	0	0	6
x_4	2	1	0	1	0	6
-z	-1	-1	0	0	1	0

- Vamos aumentar o valor de x_1, mantendo $x_2 = 0$. Seja $x_1 = \lambda \geq 0$. Então:

$$x_3 = 6 - \lambda \qquad (x_3 \geq 0)$$
$$x_4 = 6 - 2\lambda \qquad (x_4 \geq 0)$$

$$\boxed{\lambda = 3}$$

Qual é o maior valor de λ que atende às restrições de sinal?

Então: $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 3, x_4 = 0$.

Portanto, temos uma nova SVB, onde x_1 e x_3 são as variáveis básicas e x_2 e x_4 são as variáveis não-básicas.

Note que $(x_1, x_2) = (3, 0)$ é outro vértice da região viável.

Neste ponto, o valor da FO passa para $z = -x_1 - x_2 = -3$.

- Esta nova SVB pode ser obtida modificando-se a tabela da SVB_1 de modo que os vetores-coluna da variáveis x_3 e x_1 formem uma matriz identidade, ou seja, de forma que (x_3, x_1) forme uma nova base.

SVB_1:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	-z	b
x_3	1	2	1	0	0	6
x_4	2	1	0	1	0	6
-z	-1	-1	0	0	1	0

Base atual: $\mathbf{(x_3, x_4)}$

Nova base: $\mathbf{(x_3, x_1)}$

Sai da base: variável x_4

Entra na base: variável x_1

Pivô: interseção da linha da variável que sai da base com a coluna da variável que entra na base.

- Como obter a nova SVB?

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	-z	b
x_3	0	3/2	1	-1/2	0	3
x_1	1	1/2	0	1/2	0	3
-z	0	-1/2	0	1/2	1	3

Notar que $-z = 3$, ou seja, $\mathbf{z = -3}$

- SVB_2:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	-z	b
x_3	0	3/2	1	-1/2	0	3
x_1	1	1/2	0	1/2	0	3
-z	0	-1/2	0	1/2	1	3

- Dá para diminuir ainda mais o valor da FO?
- Existe nesta SVB uma variável não-básica com custo negativo?
- Variável que entra na base: x_2
- Vamos admitir que x_3 sai da base. Por que esta escolha?

Temos:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	-z	b
x_3	0	3/2	1	-1/2	0	3
x_1	1	1/2	0	1/2	0	3
-z	0	-1/2	0	1/2	1	3

Devemos, então:

- dividir a 1ª linha pelo valor do pivô = 3/2
- substituir a 2ª linha por: (2ª linha) – (1/2)*(nova 1ª linha)
- substituir a 3ª linha por: (3ª linha) – (-1/2)*(nova 1ª linha)

- SVB_3:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	-z	b
x_2	0	1	2/3	-1/3	0	2
x_1	1	0	-1/3	2/3	0	2
-z	0	0	1/3	1/3	1	4

Note que: **z = -4**

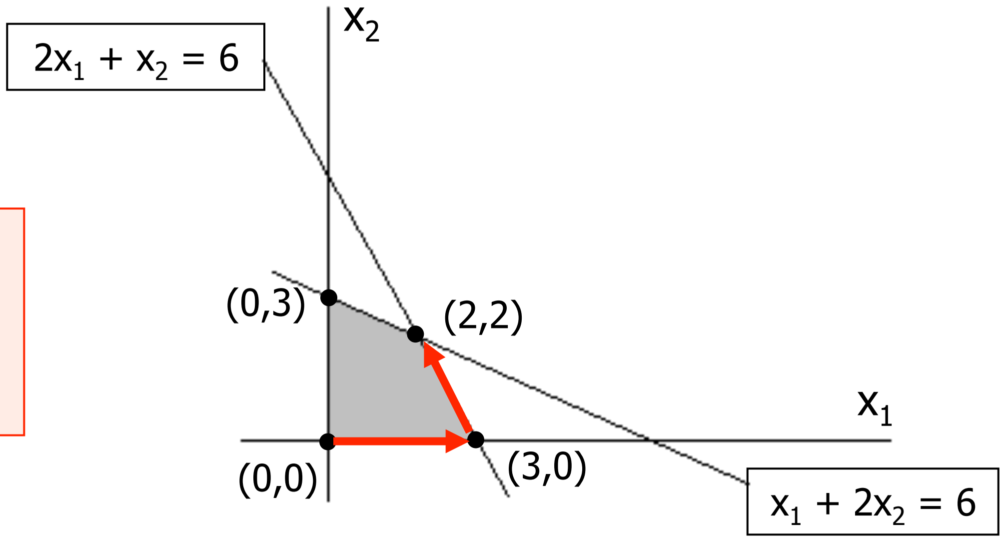
- Dá para diminuir ainda mais o valor da FO?
- Então, a solução atual é ótima. Qual é esta solução?
- $SVB_3 = (2, 2, 0, 0)^T$ e $z^* = -x_1 - x_2 = -4$.

  Logo:

  $SVB_1 = (0, 0, 6, 6)^T$

  $SVB_2 = (3, 0, 3, 0)^T$

  $SVB_3 = (2, 2, 0, 0)^T$



O método simplex encontra a solução ótima do problema percorrendo os **vértices** da região viável.

- Algumas questões:
  - Por que, na 1ª iteração, foi escolhida a variável não-básica x_1? Poderia ter sido escolhida a variável não-básica x_2, pois seu custo também era negativo.
  - Por que a variável x_1 substituiu a variável x_4 e não a variável x_3 na base?
  - Por que, na 2ª iteração, a variável não-básica x_2 (a única escolha possível) substituiu a variável x_3 e não a variável x_1 na base?
- Estas questões podem ser resumidas como:

Como escolher a variável (básica) que **sai da base** e como escolher a variável (não-básica) que **entra na base**?

- Na forma canônica, os custos referentes às variáveis básicas devem ser iguais a zero. Os demais valores da linha de custos são denominados coeficientes de custo relativo. O termo "relativo" é usado porque os valores desses coeficientes dependem do vetor-base escolhido. Os valores desses coeficientes correspondem a quanto é possível alterar o valor da FO, para cada alteração unitária na variável não-básica correspondente, mantida a viabilidade.

Solução Ótima

- Como vimos, o critério de otimalidade do algoritmo simplex é:

> A SVB atual é **ótima** se todos os coeficientes de **custo relativo** são **não-negativos**.

- Observe, pela última linha da tabela, que:

VB	x_1	...	x_n	-FO	b
	c'_1	...	c'_n	1	-z'

$$\sum c'_j x_j - FO = -z'$$

$$FO = z' + \sum c'_j x_j$$

Como todos os $x_j \geq 0$, se $c'_j \geq 0$, então $FO \geq z'$. Logo, como o problema é de minimização, z' é o valor da solução ótima.

Solução Ilimitada

- A solução de um problema será ilimitada (ou seja, diverge para $-\infty$) se, na tabela canônica correspondente a uma SVB existir uma coluna s tal que:

$$c'_s < 0 \quad \text{e} \quad a'_{is} \leq 0 \quad (i = 1, ..., m)$$

- Considere que as variáveis do problema foram convenientemente renomeadas de tal forma que o vetor-base atual é $(x_1, ..., x_m)$:

VB	...	x_s	x_1	...	x_m	b
x_1		a'_{1s}	1	...	0	b'_1
...		...	...		...	...
x_m		a'_{ms}	0	...	1	b'_m
$-z(x)$	...	c'_s				$-z'$

$c'_s < 0 \quad e \quad a'_{is} \leq 0 \quad (i = 1, ..., m)$

Portanto, temos:

$x_i = b'_i \quad (i = 1, ..., m)$

todas as demais variáveis (não-básicas), inclusive x_s, são iguais a 0

FO = z'.

- Como esta é uma solução viável, $x_i \geq 0$, e portanto, $b'_i \geq 0$. Imagine que, a partir dessa solução, se construa uma outra solução aumentando o valor de x_s para um valor λ qualquer ($\lambda \geq 0$), mantendo todas as demais variáveis não-básicas fixadas em zero.

Neste caso, teremos:

VB	...	x_s	x_1	...	x_m	b
x_1		a'_{1s}	1	...	0	b'_1
...		...	...		...	...
x_m		a'_{ms}	0	...	1	b'_m
-FO	...	c'_s				-z'

$$
\begin{aligned}
a'_{1s}\lambda + x_1 &= b'_1 \\
&\vdots \\
a'_{ms}\lambda + x_m &= b'_m \\
c'_s\lambda - FO &= -z'
\end{aligned}
$$

- Então: $x_1 = b'_1 - a'_{1s}\lambda$
  ...
  $x_m = b'_m - a'_{ms}\lambda$

Como $a'_{is} \le 0$ ($i = 1, ..., m$) e $\lambda \ge 0$, então $x_i \ge 0$ ($i = 1, ..., m$), ou seja, esta é uma **solução viável** (não necessariamente um vértice da região viável).

- Por outro lado: $FO = z' + c'_s\lambda$ e, portanto, como $c'_s < 0$ e $\lambda \ge 0$, $FO \le z'$. Assim, quanto maior for o λ escolhido, menor será o valor da solução. Portanto, para um λ arbitrariamente grande, teremos uma solução viável e o valor de FO irá divergir para $-\infty$.

Analogamente: um PPL cuja FO deve ser **maximizada** terá solução ilimitada (diverge para $+\infty$) se para uma SVB existir uma coluna s tal que: $c'_s > 0$ e $a'_{is} \le 0$ ($i = 1, ..., m$).

- Se nem o critério de otimalidade e nem o critério de solução ilimitada são satisfeitos, o algoritmo simplex move-se de uma solução viável x' para uma solução viável x" melhor ($z(x'') \leq z(x')$) escolhendo uma variável não-básica para entrar na base.

- Toda variável não-básica x_j tal que $c'_j < 0$ é uma candidata a ser selecionada.

- Quando várias escolhas são possíveis, um bom critério é escolher a variável x_k tal que:

$$c'_k = \text{mínimo} \{ c'_j \} \; (j = 1, \ldots, n)$$

> Não existe uma **justificativa teórica** sustentando que esta regra resulte em um esforço computacional menor para resolver o problema (menor número de iterações). Existe apenas uma evidência empírica de que se trata de um bom critério.

- Vamos imaginar que o vetor-base atual é $(x_1, \ldots, x_m)$ e que a variável não-básica x_r foi escolhida para entrar na base. Neste caso, podemos escrever:

variáveis básicas: $x_i = b'_i - a'_{ir}\lambda$ $(i = 1, ..., m)$

$x_r = \lambda$ $(\lambda \geq 0)$

demais variáveis (não-básicas): todas iguais a zero

função-objetivo: $FO = z' + c'_r\lambda$

Notar que $FO \leq z'$, pois $c'_r < 0$ e $\lambda \geq 0$.

- Assim, quanto maior for o valor de λ, melhor. No entanto, o valor de λ deve ser tal que os valores das atuais variáveis básicas mantenham-se não-negativos. Se $a'_{ir} < 0$, o valor da variável x_i correspondente continuará sendo não-negativo, qualquer que seja o valor de λ.

- Para $a'_{ir} > 0$, a condição $b'_i - a'_{ir}\lambda \geq 0$ implica em $\lambda \leq (b'_i/a'_{ir})$. Portanto, o maior valor possível para x_r será:

$$\theta = \text{mínimo} \{ b'_i/a'_{ir} \mid a'_{ir} > 0, i = 1, ..., m \}$$

Observe que deve existir pelo menos um $a'_{ir} > 0$ pois, do contrário, o critério de solução ilimitada estaria satisfeito. Esta operação é conhecida como teste da razão (θ é denominado razão mínima) e identifica a linha correspondente à variável (básica) que deve sair da base (linha do pivô).

- Uma vez escolhidas a variável que entra (x_r) e a variável que sai (x_s) da base deve-se produzir uma nova tabela canônica relativa à nova base. Para isso, devem ser efetuadas as seguintes operações:
  - dividir a linha do pivô (linha s) pelo valor do pivô = a'_{sr}
  - substituir cada uma das demais linhas $i \neq s$ da tabela por:

    (linha i atual) – a'_{ir} * (nova linha do pivô)

Exemplo:

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \\ \text{s.a} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 15 \\ & 2x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 20 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

forma padrão

$$\begin{array}{ll} \min & -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 \\ \text{s.a} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 15 \\ & 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_6 = 20 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_7 = 10 \\ & x_i \geq 0 \ (i = 1, ..., 7) \end{array}$$

Tabela canônica:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_5	1	2	3	0	1	0	0	15
x_6	2	1	5	0	0	1	0	20
x_7	1	2	1	1	0	0	1	10
-FO	-1	-2	-3	1	0	0	0	0

SVB$_1$:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	razões
x_5	1	2	3	0	1	0	0	15	15/3 = 5
x_6	2	1	5	0	0	1	0	20	20/5 = 4 $\Leftarrow \theta$
x_7	1	2	1	1	0	0	1	10	10/1 = 10
-FO	-1	-2	-3	1	0	0	0	0	

variável que sai:
linha do pivô

variável que entra:
coluna do pivô

pivô = 5

SVB$_2$:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	razões
x_5	-1/5	7/5	0	0	1	-3/5	0	3	3/(7/5) = 15/7
x_3	2/5	1/5	1	0	0	1/5	0	4	4/(1/5) = 20
x_7	3/5	9/5	0	1	0	-1/5	1	6	6/(9/5) = 30/9
-FO	1/5	-7/5	0	1	0	3/5	0	12	

SVB_3:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_2	-1/7	1	0	0	5/7	-3/7	0	15/7
x_3	15/35	0	1	0	-5/35	10/35	0	25/7
x_7	30/35	0	0	1	-45/35	20/35	1	15/7
-FO	0	0	0	1	1	0	0	15

- Portanto, a SVB atual é solução ótima.

  $SVB^* = (0, 15/7, 25/7, 0, 0, 0, 15/7)^T$

  $z^* = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -2(15/7) - 3(25/7) = -105/7 = -15$

- Vamos considerar agora o seguinte problema:

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + x_2 \\ \text{s.a} & 2x_1 - x_2 \geq 6 \\ & -x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + x_2 \\ \text{s.a} & 2x_1 - x_2 - x_3 = 6 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_4 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
	2	-1	-1	0	6
	-1	2	0	-1	6
-z	1	1	0	0	

Neste caso, **não existe uma SVB inicial** e, portanto, **não é possível aplicar o algoritmo simplex**.

- O problema de como encontrar uma SVB inicial pode ser formulado como um PPL, introduzindo-se variáveis artificiais que formem uma base.
- Este PPL é conhecido como PPL Artificial (PPLA) ou Problema da Fase 1. A solução ótima do PPLA fornece uma SVB inicial para o problema original (ou então uma prova de que o problema original não possui solução viável).
- Obtida uma SVB para o problema original, que passa então a ser conhecido como PPL Original (PPLO) ou Problema da Fase 2, o método simplex pode ser aplicado.
- Nestes casos, o método de solução é conhecido como Método das Duas Fases, sendo o algoritmo simplex usado em ambas as fases.

Método das Duas Fases

Fase 1:	PPLA = PPL + variáveis artificiais	→	Método simplex	→	solução ótima do PPLA = SVB inicial para PPLO
Fase 2:	PPLO + SVB inicial	→	Método simplex	→	solução ótima do PPLO

A Base Artificial

- Aumentar a tabela com as variáveis artificiais $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$, cujos vetores-coluna formam uma matriz identidade:

VB	x_1	...	x_n	x_{n+1}	...	x_{n+m}	b
x_{n+1}	a_{11}	...	a_{1n}	1	...	0	b_1
...	...			...			...
x_{n+m}	a_{m1}	...	a_{mn}	0	...	1	b_m
-z	c_1	...	c_n	0	...	0	0

- Qualquer solução viável do problema aumentado:

$$(x'_1, \ldots, x'_n, x'_{n+1}, \ldots, x'_{n+m})$$

na qual todas as variáveis artificiais $x'_{n+1}, \ldots, x'_{n+m}$ são iguais a zero fornece uma solução viável para o problema original. Isto pode ser obtido, restringindo as variáveis artificiais a serem não-negativas e resolvendo-se o problema:

$$\min w = x_{n+1} + \ldots + x_{n+m}$$

- Tabela padrão para a Fase 1 do Método das Duas Fases:

VB	x_1	...	x_n	x_{n+1}	...	x_{n+m}	b
x_{n+1}	a_{11}	...	a_{1n}	1	...	0	b_1
...	...			...			...
x_{n+m}	a_{m1}	...	a_{mn}	0	...	1	b_m
-z	c_1	...	c_n	0	...	0	0
-w	0	...	0	1	...	1	0

onde a última linha corresponde à função-objetivo da Fase 1.

Realizando operações de pivotamento adequadas (conhecidas como "pricing out"), podemos transformar esta tabela para a seguinte:

VB	x_1	...	x_n	x_{n+1}	...	x_{n+m}	b
x_{n+1}	a_{11}	...	a_{1n}	1	...	0	b_1
...	...			...			...
x_{n+m}	a_{m1}	...	a_{mn}	0	...	1	b_m
-z	c_1	...	c_n	0	...	0	0
-w	d_1	...	d_n	0	...	0	-w

Tabela canônica para a **Fase 1**

Note que a operação de "pricing out" reduz os custos relativos das variáveis básicas ao valor zero.

- Então: o PPLA é um PPL com uma SVB inicial e, portanto, podemos usar o método simplex para resolvê-lo.
- Se o PPLO tem uma solução viável $(x'_1, ..., x'_n)$, então fazendo $x_{n+1} = ... = x_{n+m} = 0$ teremos uma solução viável para o PPLA. Para esta solução viável: $w = x_{n+1} + ... + x_{n+m} = 0$. Como $w \geq 0$ para o conjunto de soluções viáveis do PPLA (pois $x_{n+i} \geq 0$, $i = 1, ..., m$), qualquer solução viável que torna $w = 0$ é uma solução ótima do PPLA. Portanto, se o PPLO tem uma solução viável, o valor mínimo de w no PPLA será zero. O mesmo raciocínio se aplica no sentido contrário, de modo que podemos concluir:

O PPLO tem uma solução viável $\Leftrightarrow$ O valor mínimo de w é zero.

- Portanto, ao resolver o PPLA, duas situações podem ocorrer:
  - O valor mínimo de w é igual a zero. Então, a partir da solução ótima do PPLA obtém-se uma SVB inicial para o PPLO.
  - O valor mínimo de w é maior do que zero. Isto implica que o problema original não tem uma solução viável. Portanto, as restrições (estruturais e de sinal) são inconsistentes.

Uma observação importante:

- Se a tabela canônica original contém alguns vetores-coluna da matriz identidade, as variáveis correspondentes a estas colunas podem (mas não precisam) ser consideradas como variáveis básicas no vetor-base inicial do PPLA.
- Neste caso, seria necessário aumentar a tabela apenas com as variáveis artificiais para as colunas que ainda não aparecem na matriz identidade. Se isso for feito, o vetor-base inicial irá conter algumas variáveis do problema original e algumas variáveis artificiais.
- No entanto, a função-objetivo da Fase 1 é sempre a soma das variáveis artificiais introduzidas no problema.
- Portanto, o coeficiente de custo na Fase 1 de qualquer variável original é 0 e de qualquer variável artificial é 1.

Exemplo:

$$\begin{aligned} \min\ & x_1 + x_2 \\ \text{s.a}\ & 2x_1 - x_2 - x_3 = 6 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_4 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_5	2	-1	-1	0	1	0	6
x_6	-1	2	0	-1	0	1	6
-z	1	1	0	0	0	0	0
-w	0	0	0	0	1	1	0

- Efetuando-se o "pricing out", teremos a tabela canônica inicial para a Fase 1:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_5	2	-1	-1	0	1	0	6
x_6	-1	2	0	-1	0	1	6
-z	1	1	0	0	0	0	0
-w	-1	-1	1	1	0	0	-12

- A nova tabela canônica será:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_1	1	-1/2	-1/2	0	1/2	0	3
x_6	0	3/2	-1/2	-1	1/2	1	9
-z	0	3/2	1/2	0	-1/2	0	-3
-w	0	-3/2	1/2	1	1/2	0	-9

- A nova tabela canônica será:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_1	1	0	-2/3	-1/3	2/3	1/3	6
x_2	0	1	-1/3	-2/3	1/3	2/3	6
-z	0	0	1	1	-1	-1	-12
-w	0	0	0	0	1	1	$\boxed{0}$

Valor ótimo de w

- Logo, a SVB atual é solução ótima do PPLA ($x_5 = x_6 = 0$) e pode ser considerada como SVB inicial para a Fase 2.

- Tendo obtido uma solução viável para o problema original ao final da Fase 1, o algoritmo continua de modo que todas as soluções viáveis subsequentes sejam soluções viáveis para o problema original. Isto requer que o valor de w seja mantido em zero em todos os passos subsequentes. Logo, qualquer variável artificial não-básica neste estágio do algoritmo jamais será considerada como uma candidata a entrar na base. Portanto, todas estas variáveis (e seus vetores-coluna correspondentes) podem ser excluídas da tabela. A rigor, as variáveis artificiais podem ser excluídas da tabela assim que saem da base, durante a Fase 1.

- Ao final da Fase 1 teremos:

VB	x_1	...	x_n	x_{n+1}	...	x_{n+m}	b
-w	d'_1	...	d'_n	e'_1	...	e'_m	0

ou seja:

$$w = \sum_{j=1}^{n} d'_j \, x_j + \sum_{i=1}^{m} e'_i \, x_{n+i} \quad \text{com} \quad d'_j \geq 0, e'_i \geq 0.$$

- Como w deve ser mantido igual a zero em todas as iterações seguintes, qualquer variável artificial que ainda exista na tabela (imaginando-se que as variáveis artificiais foram excluídas da tabela ao saírem da base durante a Fase 1) deve continuar igual a zero.

- Variáveis artificiais básicas podem ser mantidas no vetor-base até que sejam substituídas por alguma variável original do problema durante a Fase 2, mas devem permanecer iguais a zero em todas as SVB subsequentes.

- Além disso: se qualquer variável x_j do problema original é tal que $d'_j > 0$, então x_j deverá ser mantida igual a zero nas iterações subsequentes, pois w deve permanecer igual a zero. Assim, x_j jamais será candidata a entrar na base durante a Fase 2. Portanto, x_j pode ser fixada em 0 e excluída da tabela.
- Logo, nas iterações seguintes, as variáveis candidatas a entrar na base são as variáveis x_j do problema original tais que $d'_j = 0$.
- Portanto, passar da Fase 1 para a Fase 2 requer os seguintes passos:
  - todas as variáveis artificiais são excluídas da tabela;
  - todas as variáveis x_j do problema original tais que $d'_j > 0$ são fixadas em 0 e excluídas da tabela;
  - a linha referente à função-objetivo da Fase 1 é excluída da tabela;
  - os valores de todas as variáveis artificiais ainda presentes na tabela são iguais a zero;
  - a linha da função-objetivo da Fase 2 passa a ser usada para a verificação da condição de parada do algoritmo.

- Portanto, podemos iniciar a Fase 2 com a seguinte tabela canônica:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	-2/3	-1/3	6
x_2	0	1	-1/3	-2/3	6
-z	0	0	1	1	-12

Neste caso, como os coeficientes de custo relativos desta SVB são todos não-negativos, a solução atual é ótima, ou seja:

$$x^* = (6, 6, 0, 0)^T \quad z^* = 12$$

- Considere agora o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \min\ & -x_1 - x_2 \\ \text{s.a}\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 - x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Introduzindo as variáveis de folga e as variáveis artificiais, a tabela do problema para a Fase 1 será:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_5	1	1	-1	0	1	0	1
x_6	1	-1	0	-1	0	1	0
-z	-1	-1	0	0	0	0	0
-w	0	0	0	0	1	1	0

- Efetuando o "pricing out" teremos a seguinte tabela canônica:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_5	1	1	-1	0	1	0	1
x_6	1	-1	0	-1	0	1	0
-z	-1	-1	0	0	0	0	0
-w	-2	0	1	1	0	0	-1

- Neste caso, tem-se a seguinte SVB:
  - variáveis básicas: $x_5 = 1, x_6 = 0$
  - variáveis não-básicas: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$

- Quando uma SVB contém pelo menos uma variável básica igual a zero, diz-se que esta SVB é uma solução degenerada.

- Para uma SVB não-degenerada (todas as variáveis básicas são positivas), a aplicação do algoritmo simplex garante que o valor da função-objetivo diminui (pois, para uma variável entrar na base, seu coeficiente de custo deve ser negativo). Portanto, a aplicação do algoritmo diminui monotonicamente o valor da FO até alcançar valor ótimo e não haverá repetição de qualquer SVB.

- Quando uma SVB é degenerada, ao executarmos as operações de pivotamento pode ocorrer do vetor-base mudar mas a SVB e o valor da função-objetivo continuarem inalterados.

- O mesmo pode ocorrer no passo seguinte e após uma série de passos como esses, pode ocorrer do algoritmo retornar ao vetor-base que deu origem a esta seqüência de passos degenerados.

- Neste caso, diz-se que houve uma ciclagem no algoritmo simplex devido à degenerescência. Isto é uma situação muito ruim, pois o algoritmo "entra em loop" e não encontra a solução ótima do problema.

- Existem técnicas especiais para evitar que o problema da ciclagem sob degenerescência ocorra (veremos mais à frente).

O Método Big-M

- Existem várias propostas de combinar as duas fases do método simplex em um único problema. O método Big-M é uma delas.
- Seja um PPL na forma padrão: min { cx | Ax = b, x ≥ 0 }
- Vamos supor que um vetor-base artificial foi introduzido no problema e sejam $t_1, \ldots, t_m$ as variáveis artificiais. O problema aumentado será:

$$\min \quad z(x,t) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + M(t_1 + \cdots + t_m)$$

$$s.a \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + t_i = b_i \quad (i = 1, \cdots, m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, n)$$

$$t_i \geq 0 \quad (i = 1, \cdots, m)$$

onde M é um número positivo arbitrariamente grande.

- Durante a aplicação do método simplex, o coeficiente de custo relativo de x_j será da forma $c'_j = \alpha + M\beta$.
  - se $\beta < 0$, c'_j será negativo, qualquer que seja o valor de α, pois M é um número arbitrariamente grande;
  - se $\beta > 0$, c'_j será positivo;
  - se $\beta = 0$, c'_j será igual a α.
- Para facilitar os cálculos, vamos manter as partes α e β de c'_j em linhas separadas da tabela canônica (se necessário, o "pricing out" deverá ser efetuado em ambas as linhas).
- Se o algoritmo simplex terminar com uma solução ótima (x^*,t^*) para o problema aumentado, tal que $t^* = 0$, então x^* será uma solução ótima para o PPL original. Se $t^* \neq 0$, então o PPL original não tem solução viável.

- Se o critério de solução ilimitada for satisfeito então o PPL original terá solução ilimitada, caso seja viável.

- Um passo adicional do algoritmo simplex será necessário para verificar se o PPL original é ilimitado (viável) ou inviável. Esse passo adicional compreende:

  - Para verificar a viabilidade do PPL original, deve-se substituir a função-objetivo original para 0 (zero) e continuar a aplicação do método simplex. Fazer essa mudança na função-objetivo é equivalente a tornar todos os coeficientes na linha α iguais a zero, ou seja, os coeficientes de custo relativo passarão a ser da forma $c'_j = M\beta$.

  - Deve-se, então, continuar a aplicação do método simplex a partir da base atual. Se o algoritmo terminar com uma solução ótima tal que $t^* = 0$, então o PPL original é ilimitado. Se $t^* \neq 0$, então o PPL original não tem solução viável.

- Exemplo - Seja o PPL na forma padrão:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	-1	0	1	-2	1
0	1	0	-2	2	4
0	-1	1	2	1	6
3	-12	5	23	-9	0

- Acrescentando as variáveis artificiais (notar que, a rigor, bastaria apenas uma variável artificial, pois x1 e x3 poderiam compor o vetor-base inicial) teremos:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t_1	t_2	t_3	b
t_1	1	-1	0	1	-2	1	0	0	1
t_2	0	1	0	-2	2	0	1	0	4
t_3	0	-1	1	2	1	0	0	1	6
α	3	-12	5	23	-9	0	0	0	0
β	0	0	0	0	0	1	1	1	0

Efetuando o "pricing out":

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t_1	t_2	t_3	b
t_1	1	-1	0	1	-2	1	0	0	1
t_2	0	1	0	-2	2	0	1	0	4
t_3	0	-1	1	2	1	0	0	1	6
α	3	-12	5	23	-9	0	0	0	0
β	-1	1	-1	-1	-1	0	0	0	-11

x*

t*

Lembrar: os coeficientes de custo relativo são da forma α **+** β**M**. Por exemplo, $c'_1 = 3 - M$ (negativo, pois M >> 0), $c'_2 = -12 + M$ (positivo), e assim por diante. Portanto: x_1, x_3, x_4 e x_5 são candidatas a entrar no vetor-base. Vamos escolher $\mathbf{x_5}$. Esta é uma **boa escolha**? Neste caso, quem é o **pivô**?

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t_1	t_2	t_3	b
t_1	1	0	0	-1	0	1	1	0	5
x_5	0	1/2	0	-1	1	0	1/2	0	2
t_3	0	-3/2	1	3	0	0	-1/2	1	4
α	3	-15/2	5	14	0	0	9/2	0	18
β	-1	3/2	-1	-2	0	0	1/2	0	-9

Notar que esta não é uma "boa" escolha, pois escolhendo x_1 ou x_3, muitas operações de pivotamento seriam evitadas.

Vamos agora escolher $\mathbf{x_1}$ para entrar na base.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t_1	t_2	t_3	b
x_1	1	0	0	-1	0	1	1	0	5
x_5	0	1/2	0	-1	1	0	1/2	0	2
t_3	0	-3/2	1	3	0	0	-1/2	1	4
α	0	-15/2	5	17	0	-3	3/2	0	3
β	0	3/2	-1	-3	0	1	3/2	0	-4

Vamos agora escolher $\mathbf{x_3}$ para entrar na base.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t_1	t_2	t_3	b
x_1	1	0	0	-1	0	1	1	0	5
x_5	0	1/2	0	-1	1	0	1/2	0	2
x_3	0	-3/2	1	3	0	0	-1/2	1	4
α	0	0	0	2	0	-3	4	-5	-17
β	0	0	0	0	0	1	1	1	0

- Logo, como $t^* = 0$, tem-se uma SVB = $(5, 0, 4, 0, 2, 0, 0, 0)^T$ que é ótima para o PPL original. Notar que:
  $z^* = 3*5 - 12*0 + 5*4 + 23*0 - 9*2 = 17$

Degenerescência e Ciclagem no Algoritmo Simplex

- Seja o PPL na forma padrão: min { $z(x) = cx$ | $Ax = b$, $x \geq 0$ }. Seja B uma base para este problema.
  - B é uma base não-degenerada se todas as variáveis básicas são diferentes de zero (ou seja, são positivas);
  - Caso contrário, B é uma base degenerada.

- Quando um pivotamento degenerado ocorre, o algoritmo simplex move-se de uma base para outra, ambas representando a mesma solução. No caso geral, pode haver uma seqüência de bases B_1, ..., B_k tal que $B_k = B_1$, o que leva ao problema de ciclagem.

Exemplo:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_1	1	0	0	1/4	-8	-1	9	0
x_2	0	1	0	1/2	-12	-1/2	3	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
-z	0	0	0	-3/4	20	-1/2	6	0

A **solução ótima** deste problema é:
$x^* = (3/4, 0, 0, 1, 0,1, 0)^T$
com $z^* = -5/4$

Note que: $SVB_1 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_4	4	0	0	1	-32	-4	36	0
x_2	-2	1	0	0	4	3/2	-15	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
-z	3	0	0	0	-4	-7/2	33	0

$SVB_2 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_4	-12	8	0	1	0	8	-84	0
x_5	-1/2	1/4	0	0	1	3/8	-15/4	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
-z	1	1	0	0	0	-2	18	0

$SVB_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_6	-3/2	1	0	1/8	0	1	-21/2	0
x_5	1/16	-1/8	0	-3/64	1	0	3/16	0
x_3	3/2	-1	1	-1/8	0	0	21/2	1
-z	-2	3	0	1/4	0	0	-3	0

$SVB_4 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$

Observe que para **diferentes bases** pode-se ter a **mesma solução** viável básica.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_6	2	-6	0	-5/2	56	1	0	0
x_7	1/3	-2/3	0	-1/4	16/3	0	1	0
x_3	-2	6	1	5/2	-56	0	0	1
-z	-1	1	0	-1/2	16	0	0	0

$SVB_5 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_1	1	-3	0	-5/4	28	1/2	0	0
x_7	0	1/3	0	1/6	-4	-1/6	1	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
-z	0	-2	0	-7/4	44	1/2	0	0

$SVB_6 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_1	1	0	0	1/4	-8	-1	9	0
x_2	0	1	0	1/2	-12	-1/2	3	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
-z	0	0	0	-3/4	20	-1/2	6	0

$SVB_7 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$

Note que esta tabela é **idêntica à primeira** o que caracteriza a **ciclagem**.

- Embora a ciclagem seja altamente improvável, existe um interesse teórico em regras que garantem que a ciclagem não vai ocorrer.

Regra Lexicográfica para Selecionar a Variável que Sai da Base

- Dada uma base B, seja x_r a variável não-básica escolhida para entrar na base ($c_r < 0$). O índice s da variável que deve sair da base é determinado como:

$$I_0 = \left\{ s \mid \frac{b'_s}{a'_{sr}} = \min \left[\frac{b'_i}{a'_{ir}} \mid a'_{ir} > 0 \right] \right\} \qquad \text{(teste da razão)}$$

- Se $I_0 = \{ s \}$, ou seja, não há empate, então x_s sai da base. Caso contrário, seja $I_0 = \{ s_1, \ldots, s_k \}$. Determinar os novos conjuntos de índices I_j da seguinte forma:

$$I_j = \left\{ s \mid \frac{a'_{sj}}{a'_{sr}} = \min_{i \in I_{j-1}} \left[\frac{a'_{ij}}{a'_{ir}} \mid a'_{ir} > 0 \right] \right\} \quad j = 1, \cdots$$

- Note que, para determinar I_j os elementos da coluna j de A', para as linhas onde houve empate, são usados em vez dos coeficientes de b' no teste da razão. Os conjuntos de índice I_j são determinados até que para um $j \leq m$, I_j contém apenas um índice.

- O processo de calcular os conjuntos de índice I_j realmente termina, no máximo, quando j = m. A razão disto é porque, do contrário, haveria ao menos duas linhas proporcionais na base B, o que é impossível, uma vez que as linhas de B são linearmente independentes.

> Para uma prova formal, ver a validação das regras para prevenir a ciclagem, na **Seção 4.7** do livro **Linear Programming and Network Flows** (BAZARAA, M.S.; JARVIS, J.J.; SHERALI, H.D.)

- Exemplo (mesmo problema considerado anteriormente):

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	I_0	I_1
x_1	1	0	0	1/4	-8	-1	9	0	0/(1/4) = 0	1/(1/4) = 4
x_2	0	1	0	1/2	-12	-1/2	3	0	0/(1/2) = 0	0/(1/2) = 0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1		
-z	0	0	0	-3/4	20	-1/2	6	0		

Neste caso, $I_0 = \{ 1,2 \}$ e $I_1 = \{ 2 \}$. Logo x_2 deve sair da base (notar que na discussão anterior, x_1 havia sido escolhida para sair da base).

- Teremos, então:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_1	1	-1/2	0	0	-2	-3/4	15/2	0
x_4	0	2	0	1	-24	-1	6	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
-z	0	3/2	0	0	2	-5/4	21/2	0

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_1	1	-1/2	3/4	0	-2	0	15/2	3/4
x_4	0	2	1	1	-24	0	6	1
x_6	0	0	1	0	0	1	0	1
-z	0	3/2	5/4	0	2	0	21/2	5/4

chegando, portanto, à solução ótima:

$$x^* = (3/4, 0, 0, 1, 0, 1, 0)^T$$
$$z^* = -5/4$$

Regra de Bland

- Outra regra proposta para evitar a ciclagem é conhecida como regra de Bland, que restringe a escolha tanto da variável que entra como da variável que sai da base, da seguinte forma:
  - Ordenar as variáveis em uma seqüência qualquer (por exemplo, $x_1, x_2, \ldots, x_n$);
  - Dentre as variáveis não-básicas x_j candidatas a entrar na base ($c'_j < 0$), escolher a que tiver o menor índice na seqüência;
  - Efetuar o teste da razão mínima para determinar a variável que deve sair da base. Em caso de empate, escolher a variável de menor índice na seqüência.

- Exemplo (mesmo problema considerado anteriormente):

Usando a regra de Bland, as 4 primeiras tabelas seriam como aparecem anteriormente. Na 4ª tabela x_1 e x_7 seriam candidatas a entrar na base e a escolha recairia sobre x_1 (menor índice):

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_6	-3/2	1	0	1/8	0	1	-21/2	0
x_5	1/16	-1/8	0	-3/64	1	0	3/16	0
x_3	3/2	-1	1	-1/8	0	0	21/2	1
-z	-2	3	0	1/4	0	0	-3	0

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_6	0	-2	0	-1	24	1	-6	0
x_1	1	-2	0	-3/4	16	0	3	0
x_3	0	2	1	1	-24	0	6	1
-z	0	-1	0	-5/4	32	0	3	0

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_6	0	0	1	0	0	1	0	1
x_1	1	0	1	1/4	-8	0	9	1
x_2	0	1	1/2	1/2	-12	0	3	1/2
-z	0	0	1/2	-3/4	20	0	6	1/2

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_6	0	0	1	0	0	1	0	1
x_1	1	-1/2	3/4	0	-2	0	15/2	3/4
x_4	0	2	1	1	-24	0	6	1
-z	0	3/2	5/4	0	2	0	21/2	5/4

Solução ótima: $x^* = (3/4, 0, 0, 1, 0, 1, 0)^T$ $z^* = -5/4$