3 – Geometria do Método Simplex

Conceitos Fundamentais

- $x \in R^n$

  x é um vetor ordenado da forma $x = (x_1, \ldots, x_n)$, onde $x_i \in R$.

  x é um ponto do espaço euclidiano n-dimensional.

- Vetor zero: $0 = (0, \ldots, 0)$

vetores

- $x \in R^n$ é não-negativo se $x_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ [notação: $x \geq 0$]

  $x \in R^n$ é semi-positivo se $x_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ e $\exists\, j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x_j > 0$.

  $x \in R^n$ é positivo se $x_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ [notação: $x > 0$]

- Seja $\{ x^1, \ldots, x^k \}$ um conjunto de pontos (vetores) em R^n. Uma combinação linear destes pontos é um ponto x da forma:

$$x = \alpha_1 x^1 + \ldots + \alpha_k x^k, \text{ onde } \alpha_i \in R \ (i = 1, \ldots, k)$$

Exemplo:
$x^1 = (1, 0, -1)$
$x^2 = (-2, 3, 4)$

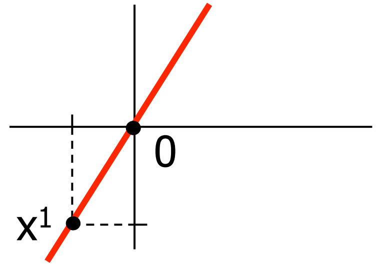
Sejam $\alpha, \beta \in R$. Qualquer ponto da forma:
$x = \alpha x^1 + \beta x^2 = (\alpha - 2\beta, 3\beta, -\alpha + 4\beta)$
é uma **combinação linear** de x^1 e x^2.

Por exemplo:
$\alpha = 2, \beta = 3$
$x = (-4, 9, 10)$

- O conjunto de todas as combinações lineares de { x^1, ..., x^k } é denominado fecho linear de { x^1, ..., x^k }.

Exemplo: x^1 = (-1, -2).

O **fecho linear** de { x^1 } é o conjunto de todos os pontos da forma $x = \alpha x^1$, ou seja, a **reta** que une x^1 ao ponto 0 (vetor zero ou origem).



- Combinação afim de { x^1, ..., x^k }: é um ponto da forma $x = \alpha_1 x^1 + \ldots + \alpha_k x^k$, tal que $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1$ ($\alpha_i \in R$, i = 1, ..., k).

  Fecho afim de { x^1, ..., x^k }: é o conjunto de todas as combinações afim de { x^1, ..., x^k }.

É claro que: Fecho afim de { x^1, ..., x^k } $\subseteq$ Fecho linear de { x^1, ..., x^k }

- Exemplo:

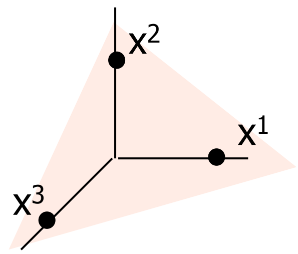
  x^1 = (1, 0, 0)

  x^2 = (0, 1, 0)

  x^3 = (0, 0, 1)

Um ponto $x = (\alpha, \beta, \lambda)$ tal que
$\alpha + \beta + \lambda = 1$
é uma **combinação afim** de $\{x^1,x^2,x^3\}$.

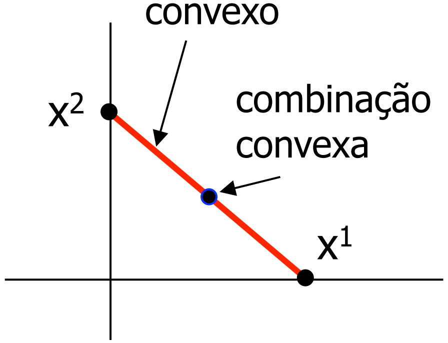
Fecho afim de $\{x^1,x^2,x^3\}$



Hiperplano que contém x^1, x^2 e x^3

- Combinação convexa de $\{ x^1, \ldots, x^k \}$: é um ponto da forma $x = \alpha_1 x^1 + \ldots + \alpha_k x^k$, tal que $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0$ ($\alpha_i \in R$, $i = 1, \ldots, k$). O fecho convexo de $\{ x^1, \ldots, x^k \}$ é o conjunto de todas as combinações convexas de $\{ x^1, \ldots, x^k \}$.

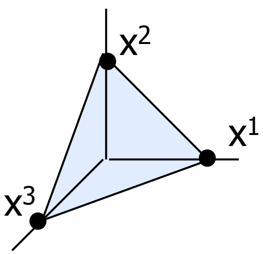
Exemplo: $x^1 = (1, 0)$, $x^2 = (0, 1)$
Um ponto $x = (\alpha, \beta)$ tal que
$\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \geq 0$
é uma **combinação convexa** de $\{x^1,x^2\}$



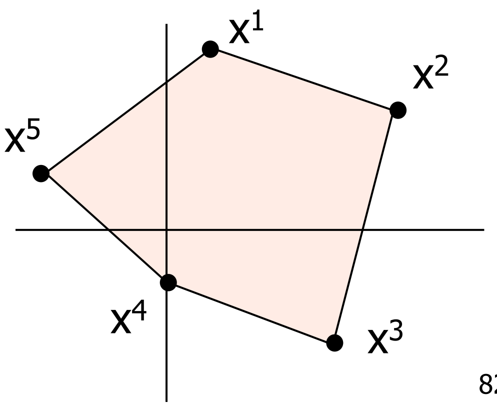
O **fecho convexo** de quaisquer dois pontos x^1 e x^2 em R^n é o conjunto de todos os pontos no **segmento de reta** que une x^1 e x^2.

- Se x^1 e x^2 são pontos distintos em R^n, $x(\theta) = x^1 + \theta(x^2 - x^1)$, $\theta \in R$, corresponde à reta que une x^1 e x^2. Se $0 \leq \theta \leq 1$, então $x(\theta)$ é o segmento de reta que une x^1 e x^2.
- Exemplos de fecho convexo

$x^1 = (1, 0, 0)$
$x^2 = (0, 1, 0)$
$x^3 = (0, 0, 1)$

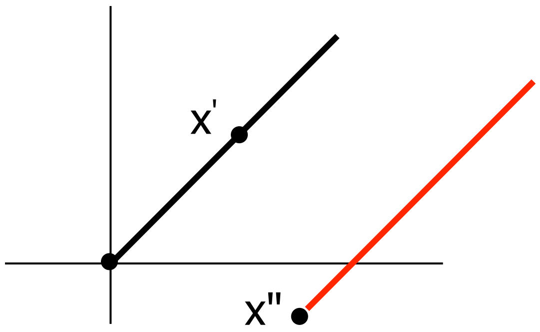


$x^1 = (1, 3)$
$x^2 = (4, 2)$
$x^3 = (3, -2)$
$x^4 = (0, -1)$
$x^5 = (-2,1)$



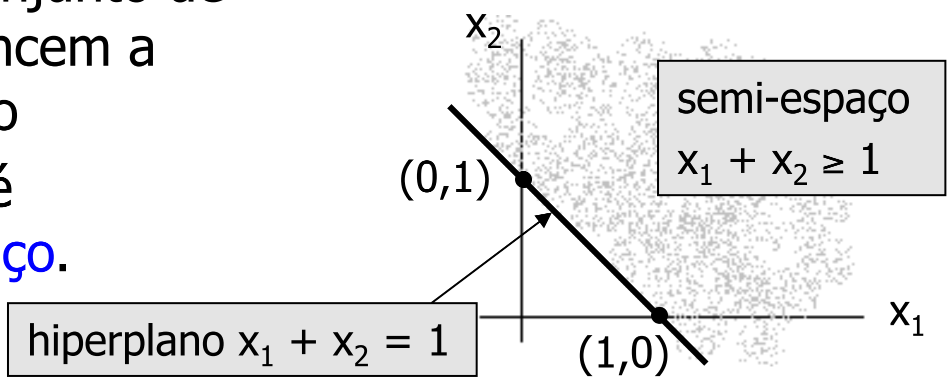
- Seja $x' \in R^n$, $x' \neq 0$. O raio gerado por x' é o conjunto $\{x \mid x = \alpha x', \alpha \geq 0\}$ (ou seja, é a semireta a partir da origem que passa por x')
- Se $x'' \in R^n$, então o conjunto $\{x \mid x = x'' + \alpha x', \alpha \geq 0\}$ é a semireta a partir de x'' paralela ao raio gerado por x'.

Em R^2



- Um hiperplano em R^n é o conjunto de todos os pontos $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ que satisfazem uma única equação linear da forma: $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$, onde $a_1, \ldots, a_n \in R$ e $(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$ (ou seja, existe pelo menos um $a_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$).
- O conjunto de todos os $x \in R^n$ que satisfazem uma inequação da forma: $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \geq b$ é o conjunto de todos os pontos que pertencem a um dos lados do hiperplano $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$, que é conhecido como semi-espaço.

Em R^2



Observação: Uma equação da forma $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$ é equivalente a um par de inequações:

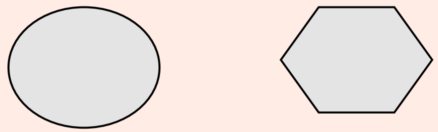
$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \geq b$$
$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \leq b$$

Num PPL existem restrições estruturais e restrições de sinal. Cada restrição de sinal é uma inequação e cada restrição estrutural é uma inequação ou um par de inequações (se a restrição for de igualdade). Como vimos, o conjunto de todos os pontos que satisfazem uma inequação é um semi-espaço. Toda solução viável de um PPL deve satisfazer a **todas** suas restrições e, portanto, deve estar em cada um dos respectivos semi-espaços. Logo, num PPL, o **conjunto de soluções viáveis** é a **interseção de um número finito de semi-espaços**.

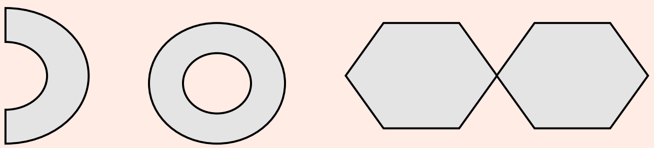
- Um subconjunto $K \subset R^n$ é um conjunto convexo se toda combinação convexa de quaisquer dois pontos de K também está em K. Em outras palavras, se K é um conjunto convexo, o segmento de reta que une qualquer par de pontos de K está inteiramente em K.

Exemplos:

Conjuntos convexos:



Conjuntos não-convexos:

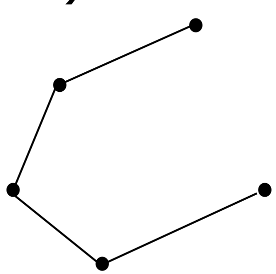


- A interseção de um número finito de semi-espaços é conhecido como poliedro convexo.

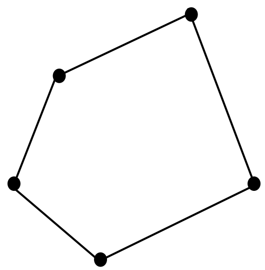
> Da observação anterior, segue que o **conjunto de soluções viáveis** de um PPL é um **poliedro convexo**.

- Um poliedro convexo limitado é conhecido como politopo convexo.

  Exemplo (em R^2):



poliedro convexo

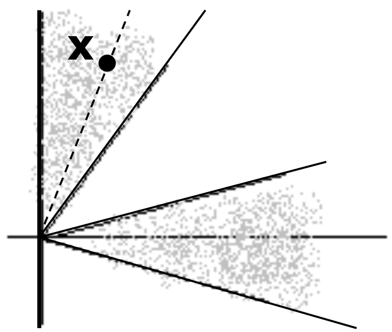


politopo convexo

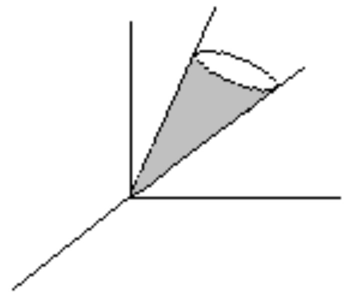
- $S \subset R^n$ é um cone $\Leftrightarrow (\forall x \in S \Rightarrow \alpha x \in S, \alpha \geq 0)$

  (ou seja, S é um cone se o raio gerado por qualquer ponto de S está inteiramente em S)

  Exemplo:



um cone
(não-convexo)



- Um cone, que também é um conjunto convexo, é denominado cone convexo.

  Notar que:

  se S é um cone convexo e $x, y \in S$, então:

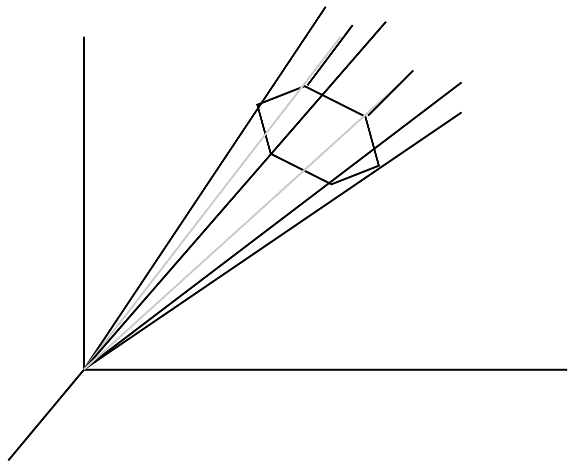
  - toda combinação convexa de x e y deve pertencer a S (pois S é um conjunto convexo)
  - todo múltiplo não-negativo dessas combinações convexas deve estar em S (pois S é um cone)

  ou seja:

  S é um cone convexo $\Leftrightarrow (\forall\ x, y \in S \Rightarrow \alpha x + \beta y \in S, \forall\ \alpha, \beta \geq 0)$

- Um cone poliédrico convexo é um cone convexo formado pela interseção de um número finito de semi-espaços.

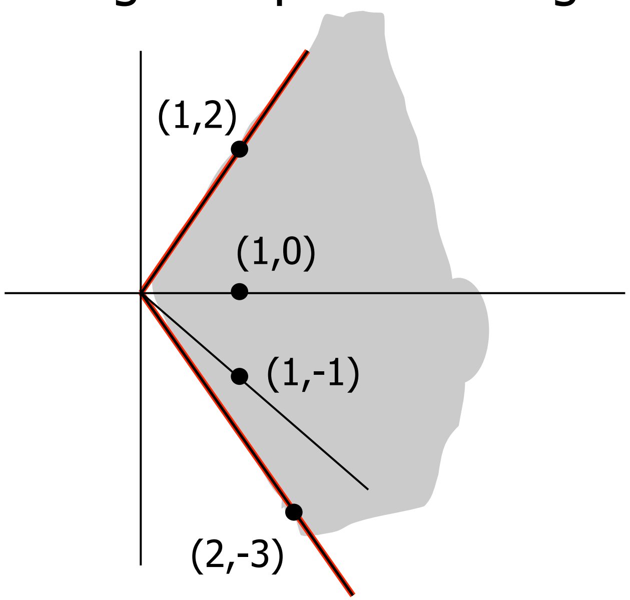
  Logo: o conjunto de soluções viáveis de um conjunto de restrições da forma $A\,x \geq 0$ é um cone poliédrico convexo.



- Seja $X = \{x^1, ..., x^k\}$ um conjunto de pontos em R^n. O conjunto $\{ x \mid x = \alpha_1 x^1 + ... + \alpha_k x^k, \alpha_1, ..., \alpha_k \geq 0 \}$ é conhecido como cone de X e será representado como: cone($\{x^1, ...,x^k\}$) ou cone(X).

  Exemplo (em R^2): $X = \left\{ x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, x^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

  Para determinar cone(X) devemos:
  - plotar cada um dos pontos X e traçar o raio de cada um desses pontos;
  - cone(X) é o menor ângulo a partir da origem que contém todos os raios.



- Um conjunto de vetores $\{x^1, ..., x^k\}$ é linearmente dependente $\Leftrightarrow$ $\exists\ \alpha_1, ..., \alpha_k \in R$, com $(\alpha_1, ..., \alpha_k) \neq 0$, tal que $\alpha_1 x^1 + ... + \alpha_k x^k = 0$. Caso contrário, o conjunto de vetores é linearmente independente.

Algoritmo para Testar a Independência Linear

- Seja $X = \{x^1, ..., x^k\}$ um conjunto de vetores em R^m, onde $x^j = (a_{1j}, ..., a_{mj})^T$ $(j = 1, ..., k)$. Qualquer vetor de X pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores do próprio conjunto X, ou seja:

$$
\begin{aligned}
x^1 &= 1x^1 + 0x^2 + ... + 0x^k \\
&... \\
x^j &= 0x^1 + ... + 1x^j + ... + 0x^k \\
&... \\
x^k &= 0x^1 + ... + 1x^k
\end{aligned}
$$

Isto pode ser representado, convenientemente, pela seguinte tabela:

x^1	...	x^j	...	x^k							
1	...	0	...	0	a_{11}	a_{21}	...	a_{j1}	...	a_{m1}	(vetor x^1)
...					...						
0	...	1	...	0	a_{1j}	a_{2j}	...	a_{jj}	...	a_{mj}	(vetor x^j)
...					...						
0	...	0	...	1	a_{1k}	a_{2k}	...	a_{jk}	...	a_{mk}	(vetor x^k)

matriz identidade de ordem k

- O algoritmo para verificar se os vetores do conjunto $\{x^1, ..., x^k\}$ são linearmente independentes considera, a cada passo, uma linha da tabela. Essa linha será denominada linha do pivô.
- Se, para a linha do pivô, todos os elementos do lado direito da tabela forem iguais a zero, os elementos do lado esquerdo são os coeficientes da expressão que representa o vetor zero como uma combinação linear de $x^1, ..., x^k$.
- Caso contrário, escolher um elemento diferente de zero da linha do pivô. A coluna deste elemento será denominada coluna do pivô. Efetuar operações de pivotamento de modo a transformar a coluna do pivô em uma coluna da matriz identidade I^k.

Exemplo – Verificar se os vetores a seguir são linearmente independentes:

$x^1 = (0,1,2,0,1)$
$x^2 = (1,0,1,1,0)$
$x^3 = (1,1,1,1,1)$
$x^4 = (2,2,4,2,2)$

x^1	x^2	x^3	x^4					
1	0	0	0	0	1	2	0	1
0	1	0	0	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	2	2	4	2	2

1º passo (1ª linha):

x^1	x^2	x^3	x^4					
1	0	0	0	0	1	2	0	1
0	1	0	0	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	2	2	4	2	2

2º passo (2ª linha):

x^1	x^2	x^3	x^4					
1	0	0	0	0	1	2	0	1
0	1	0	0	1	0	1	1	0
-1	0	1	0	1	0	-1	1	0
-2	0	0	1	2	0	0	2	0

3º passo (3ª linha):

x^1	x^2	x^3	x^4					
1	0	0	0	0	1	2	0	1
0	1	0	0	1	0	1	1	0
-1	-1	1	0	0	0	-2	0	0
-2	-2	0	1	0	0	-2	0	0

4º passo (4ª linha):

x^1	x^2	x^3	x^4						
0	-1	1	0	0	1	0	0	1	
-1/2	1/2	1/2	0	1	0	0	1	0	
1/2	1/2	-1/2	0	0	0	1	0	0	vetor zero
-1	-1	-1	1	0	0	0	0	0	

Logo: o vetor **zero** pode ser expresso como: $-1x^1 - 1x^2 - 1x^3 + 1x^4$, ou seja, $-x^1 - x^2 - x^3 + x^4 = 0$. Portanto, os vetores x^1, x^2, x^3 e x^4 são **linearmente dependentes**. Notar que se um conjunto de vetores é LD, então qualquer vetor pode ser escrito como uma **combinação linear** dos demais. Exemplo: $x^4 = x^1 + x^2 + x^3$

- Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $m \times n$. Vamos usar a seguinte notação:
  - $A_{i\cdot} \equiv$ i-ésima linha de $A \equiv (a_{i1}, \ldots, a_{1n})$
  - $A_{\cdot j} \equiv$ j-ésima coluna de $A \equiv (a_{1j}, \ldots, a_{mj})^T$
- Seja R um subconjunto de linhas de A. R é denominado subconjunto linearmente independente máximo de linhas de A se R satisfaz as seguintes propriedades:
  - R é um conjunto de vetores linearmente independentes
  - R contém todas as linhas de A, ou

    a inclusão em R de qualquer outra linha de A não presente em R, torna R um conjunto de vetores linearmente dependentes.

- Portanto, se R é um subconjunto LI máximo de linhas de A, então toda linha de A pode ser expressa como uma combinação linear de linhas de R. Neste caso, o número de linhas de R é conhecido como posto (ou rank) da matriz A.
- O mesmo procedimento visto anteriormente para verificar a dependência linear de vetores pode ser usado para determinar o rank de uma matriz. Para isto, basta considerar que os vetores são as linhas da matriz.

Exemplo – Determinar para a matriz A abaixo:

a) o rank de A
b) R, um subconjunto LI máximo de linhas de A
c) uma expressão para as demais linhas como uma combinação linear de linhas de R

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$A_{1}.$	$A_{2}.$	$A_{3}.$	$A_{4}.$	$A_{5}.$						
1	0	0	0	0	1	2	-1	1	0	-2
0	1	0	0	0	2	4	-2	2	0	-4
0	0	1	0	0	0	0	3	1	2	2
0	0	0	1	0	2	4	1	3	2	-2
0	0	0	0	1	1	-1	-1	1	-2	1

$A_{1}.$	$A_{2}.$	$A_{3}.$	$A_{4}.$	$A_{5}.$						
1	0	0	0	0	1	2	-1	1	0	-2
-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	3	1	2	2
-2	0	0	1	0	0	0	3	1	2	2
-1	0	0	0	1	0	-3	0	0	-2	3

$A_{1}.$	$A_{2}.$	$A_{3}.$	$A_{4}.$	$A_{5}.$						
1	0	-1	0	0	1	2	-4	0	-2	-4
-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	3	1	2	2
-2	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0
-1	0	0	0	1	0	-3	0	0	-2	3

$A_1.$	$A_2.$	$A_3.$	$A_4.$	$A_5.$						
1/3	0	-1	0	2/3	1	0	-4	0	-10/3	-2
-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	3	1	2	2
-2	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0
1/3	0	0	0	-1/3	0	1	0	0	2/3	-1

- Logo: a) rank = 3

  b) $R = \{ A_1., A_3., A_5. \}$

  c) $-2A_1. + A_2. = 0 \Rightarrow A_2. = 2A_1.$

  $-2A_1. - A_3. + A_4. = 0 \Rightarrow A_4. = 2A_1. + A_3.$

Observação: Na discussão anterior fez-se referência apenas às linhas de A e, desse modo, o número de linhas de R poderia ser denominado de **rank-linha** de A. O **rank-coluna** de A pode ser definido analogamente, substituindo-se a palavra "linha" pela palavra "coluna" (que é equivalente ao rank-linha de A^T). O rank-linha e o rank-coluna de qualquer matriz **são iguais** e são denominados apenas de **rank**. Se A é de ordem $m \times n$, seu rank r é tal que $r \leq m$ (rank-linha) e $r \leq n$ (rank-coluna).

Generalizando: Seja $F = \{A^1, ..., A^k\}$ um conjunto não-vazio de vetores em R^n. Um subconjunto $E \subset F$ é um **subconjunto LI máximo** de F se:

a) E é LI

b) $(E = F)$ ou $(\forall A^j \in F \backslash E, E \cup \{ A^j \}$ é LD)

Sistemas de Equações Lineares

- Seja um sistema de m equações com n incógnitas da forma A x = b, onde A é uma matriz m × n, b é um vetor-coluna m × 1 e x é um vetor-coluna n × 1 de incógnitas.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{vmatrix}$$

- Este sistema pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

ou seja: $\sum_{j=1}^{n} A_{\cdot j} x_j = b$

Exemplo: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 6 & 5 & -7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 \\ 4 \end{vmatrix}$

ou seja: $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 8 \\ 6x_1 + 5x_2 - 7x_3 &= 4 \end{aligned}$

Logo: $\begin{vmatrix} 2 \\ 6 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} -3 \\ 5 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} 4 \\ -7 \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} 8 \\ 4 \end{vmatrix}$

Portanto, o sistema tem uma solução se o **vetor b** puder ser escrito como uma **combinação linear** das **colunas de A**.

Note que, se o sistema tem solução, o rank da **matriz aumentada** (A b) é igual ao rank de A, pois a coluna b pode ser escrita como uma **combinação linear** das demais.

- O sistema é consistente se tiver uma solução. Do contrário, o sistema é inconsistente.
- Seja r = rank(A) (ou seja, r = rank(A b)). Se r = m, todas as linhas do sistema são LI (ou seja, não existem equações redundantes).

  Se $r < m$, então o sistema tem $(m - r)$ equações redundantes (que podem ser eliminadas e o sistema passará a ter apenas r equações). Como $A_{m \times n}$, $r \leq m$ e $r \leq n$. Logo, todo sistema consistente é equivalente a um sistema onde o número de equações (r) é menor ou igual ao número de incógnitas.

> O conjunto de restrições estruturais de um PPL na **forma padrão** constitui um sistema de equações lineares. Logo, podemos admitir que o número de restrições é **menor ou igual** ao número de variáveis.

- O mesmo algoritmo visto anteriormente pode ser usado para resolver um sistema de equações lineares, partindo-se da seguinte tabela:

x_1	...	x_j	...	x_n	b
a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	b_1
...					...
a_{i1}	...	a_{ij}	...	a_{in}	b_i
...					...
a_{m1}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	b_m

- Cada iteração do algoritmo considera uma linha da tabela (linha do pivô). Se, para a linha do pivô, todos os coeficientes em ambos os lados da tabela são iguais a zero, esta linha corresponde a uma equação redundante e pode ser eliminada.
- Se, para a linha do pivô, todos os coeficientes do lado esquerdo são iguais a zero, mas o coeficiente do lado direito é diferente de zero, esta linha corresponde a uma equação inconsistente e o sistema não terá solução.
- Caso contrário, escolher, na linha do pivô, um dos coeficientes diferentes de zero do lado esquerdo da tabela. A coluna correspondente a este elemento é denominada coluna do pivô. A variável correspondente à coluna do pivô é conhecida como variável dependente (ou variável básica).
- Ao final, os vetores-coluna correspondentes às variáveis dependentes (tomados em uma ordem conveniente) formam uma matriz identidade de ordem r. Uma solução para o sistema pode ser obtida atribuindo-se valores arbitrários para as variáveis independentes (por exemplo, todas iguais a zero) e obtendo, a partir da tabela final, os valores das variáveis dependentes.

- Exemplo:

$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 8$$
$$6x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 4$$

x_1	x_2	x_3	b
2	-3	4	8
6	5	-7	4

x_1	x_2	x_3	b
1	-3/2	2	4
0	14	-19	-20

x_1	x_2	x_3	b
1	0	-43/7	13/7
0	1	-19/14	-10/7

- Logo: x_1 e x_2 são as variáveis dependentes. Portanto, uma solução possível para o sistema é: $x_3 = 0$, $x_1 = 13/7$ e $x_2 = -10/7$.

- Portanto, o vetor b pode ser escrito como:

$$\begin{vmatrix} 8 \\ 4 \end{vmatrix} = 13/7 \begin{vmatrix} 2 \\ 6 \end{vmatrix} - 10/7 \begin{vmatrix} -3 \\ 5 \end{vmatrix}$$

Observação: Este algoritmo não garante que a solução do sistema seja **não-negativa**. Portanto, este algoritmo não pode ser aplicado diretamente para determinar uma **solução viável** para um PPL na forma padrão.