Programação Linear - IME/UERJ

Lista de Exercícios 6 - Extra - Dualidade e Análise de Sensibilidade e Pós-Otimização

1. Uma empresa necessita produzir os produtos A e B que vende com margem de lucro unitário médio de R$ 3,00 e R$ 2,00 respectivamente.

   São utilizadas duas matérias primas (Horas Máquina e Horas de Trabalho) cujas disponibilidades e consumos unitários são os seguintes:

	A	B	Disponível
Máquinas (h)	2	1	100
Trabalho (h)	1	1	80

   A empresa quer que a produção total seja no máximo 40 unidades do produto A. Deseja-se maximizar o lucro.

   (a) Formule o primal e o dual do problema.

   (b) Resolva o problema, encontrando a solução ótima para os problemas primal e dual.

   A partir da solução encontrada, responda:

   (c) Quais recursos são escassos? Justifique.

   (d) Se alguém quisesse adquirir uma unidade do recurso R_1, você estaria disposto a vender? Se sim, qual o preço que compensa a venda? Justifique.

   (e) Se alguém insistir em comprar uma unidade do recurso R_2, que preço de venda compensaria o fato dele ser escasso? Justifique.

   (f) O que significa a variável dual w_1?

   (g) Quanto você pagaria por uma unidade adicional do recurso R_3? Por quê?

   (h) Qual a faixa de variação do coeficiente do lucro do produto A na função objetivo tal que a solução ótima não mude?

   (i) Suponha que a disponibilidade do segundo recurso (b_2) aumentou de 80 para 90 unidades. A solução ótima muda? Se sim, qual a nova solução?

   (j) Qual a faixa de variação do primeiro recurso (b_1) para que a base ótima não mude?

   ITENS NOVOS PARA A LISTA (MODIFICAÇÃO NA MATRIZ DE RESTRIÇÕES):

   (k) Se o número de horas máquina na produção do produto A for modificado para 3, a solução ótima muda? Em caso afirmativo, diga qual a nova solução ótima.

   (l) Qual a faixa de variação para o número de horas máquina na produção do produto B de modo que a solução permaneça ótima?

(m) Qual a faixa de variação para o número de horas de trabalho na produção do produto A de modo que a solução permaneça ótima?

(n) Se o número de horas de trabalho na produção do produto B for modificado para 2, a solução ótima muda? Em caso afirmativo, diga qual a nova solução ótima.

2. Formule o dual dos problemas a seguir (não é necessário resolvê-los):

(a)

$$
\begin{array}{llcl}
\max & z & = & 4x_1 + 6x_2 \\
\text{s.a.} & & & x_1 \qquad \le 5 \\
 & & & \qquad x_2 \le 7 \\
 & & & 3x_1 + 4x_2 = 20 \\
 & & & x_1 \ge 0, \ x_2 \ \text{livre.}
\end{array}
$$

(b)

$$
\begin{array}{llcl}
\max & z & = & 8x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\
\text{s.a.} & & & x_1 - 6x_2 + x_3 \ge 2 \\
 & & & 5x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -4 \\
 & & & x_1 \le 0 \ , \ x_2 \ge 0 \ , \ x_3 \ \text{livre.}
\end{array}
$$

<table>
<tr><th colspan="4">Primal (max) $\Rightarrow$ Dual (min)</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Variável</td><td>≥ 0</td><td>$\ge$</td><td rowspan="3">Restrição</td></tr>
<tr><td>≤ 0</td><td>$\le$</td></tr>
<tr><td>livre</td><td>$=$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Restrição</td><td>$\le$</td><td>≥ 0</td><td rowspan="3">Variável</td></tr>
<tr><td>$\ge$</td><td>≤ 0</td></tr>
<tr><td>$=$</td><td>livre</td></tr>
<tr><td colspan="2">Vetor do lado direito
das restrições</td><td colspan="2">Coeficientes das variáveis
na função objetivo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Coeficientes das variáveis
na função objetivo</td><td colspan="2">Vetor do lado direito
das restrições</td></tr>
<tr><th colspan="4">Dual (max) $\Leftarrow$ Primal (min)</th></tr>
</table>

Tabela 1: Tabela de conversão entre os problemas Primal e Dual

Fórmulas básicas

$z = cx = c_N x_N + c_B x_B = \bar{z} - (z_N - c_N)x_N,$

$z_N - c_N = c_B B^{-1} N - c_N$ (vetor dos elementos da linha de z no tableau);

$\bar{x}_B = B^{-1} b$ (valor de x_B no tableau);

$Ax = Nx_N + Bx_B = b$, onde:

- A: matriz dos coeficientes das restrições do PPL original;
- N: bloco de A associado às variáveis não básicas do tableau;
- B: bloco de A associado às variáveis básicas do tableau;
- c : vetor-linha dos coeficientes das variáveis na função objetivo z;
- x : vetor-coluna de todas as variáveis do PPL;
- b: vetor independente do lado direito das restrições do PPL original;
- c_N : bloco de c dos coeficientes das variáveis não básicas em z;
- c_B : bloco de c dos coeficientes das variáveis básicas em z;
- x_N : bloco de x das variáveis não básicas;
- x_B : bloco de x das variáveis básicas;
- $\bar{z} = c_B \bar{x}_B$ (valor de z no tableau atual);