PROGRAMAÇÃO LINEAR
UERJ/2024

02 - Método das Duas Fases

Rodrigo Madureira
rodrigo.madureira@ime.uerj.br
IME-UERJ

Sumário

Introdução

Exemplo: Considere o problema a seguir:

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\max & z = & -2x_1 & - & 4x_2 & \\
\text{s.a.} & & & & & \\
& & x_1 & + & 5x_2 & \leq 80 \\
& & 4x_1 & + & 2x_2 & \geq 20 \\
& & x_1 & + & x_2 & = 10 \\
& & x_1 & , & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

Passando para a forma padrão, temos:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & z = & -2x_1 & - & 4x_2 & + & 0s_1 & + & 0s_2 & \\
\text{s.a.} & & & & & & & & & \\
& & x_1 & + & 5x_2 & + & s_1 & & & = 80 \\
& & 4x_1 & + & 2x_2 & & & - & s_2 & = 20 \\
& & x_1 & + & x_2 & & & & & = 10 \\
& & x_1 & , & x_2 & , & s_1 & , & s_2 & \geq 0
\end{array}
$$

Introdução

Em outros termos:

$$\max \quad z = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{s.a.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$x, s \geq 0$$

Note que nos problemas de maximização, nem sempre podemos trabalhar com restrições somente do tipo $A_j x_j \leq b_j$. Neste exemplo, temos uma restrição do tipo $A_j x_j \geq b_j$ e outra do tipo $A_j x_j = b_j$.

Assim, na matriz do sistema de restrições, não é possível ter vetores colunas formando uma matriz identidade para a base inicial B do método Simplex.

Introdução

Para resolver esse problema de não conseguir formar uma matriz identidade para a base inicial B, a ideia do **Método das Duas Fases** é acrescentar para cada restrição do tipo $\geq$ ou $=$ uma variável artificial a_i.

Neste exemplo, o sistema de restrições se torna

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 + 5x_2 + s_1 & & = 80 \\
4x_1 + 2x_2 \quad - s_2 + a_2 & & = 20 \\
x_1 + x_2 \quad + a_3 & & = 10 \\
x_1 , x_2 , s_1 , s_2 , a_2 , a_3 \geq 0 & &
\end{array}
$$

Em outros termos:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 80 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}
$$

Assim, as colunas A_3, A_5 e A_6 formam uma base do sistema de restrições.

Introdução

A solução básica inicial fica:

$$x_B = \begin{bmatrix} s_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 80 & 20 & 10 \end{bmatrix}^T;$$
$$x_N = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & s_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

O método consiste em:

Fase I: Resolver o subproblema P^a, que tem por objetivo eliminar as variáveis artificiais, isto é, reduzi-las a zero.
Assim, a Fase I consiste em

$$\begin{aligned} \max \quad & z^a = \sum_k -a_k \\ \text{s.a.} \quad & A'x' = b \\ & x' \geq 0 \end{aligned}$$

Como $a_k \geq 0$, logo $z^a \leq 0$. Ou seja, $\max\ z^a = 0$. Portanto, as variáveis a_k devem sair da base neste subproblema P^a. Isso é o mesmo que tornar $a_k = 0$.

Fase I

No exemplo que estamos vendo, o subproblema P^a da Fase I fica assim:

$$\max \quad z^a = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

s.a.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2\ a_1,\ a_2 \geq 0$$

Fase I

No tableau inicial da Fase I, colocamos na linha L_1 os coeficientes com sinal trocado da função objetivo do subproblema P^a e na linha L_2, os coeficientes com sinal trocado da função objetivo do problema original.

(1)

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	a_2	a_3		
z^a	1	0	0	0	0	1	1	$0 = \bar{z}^a$	(L_1)
z	1	2	4	0	0	0	0	$0 = \bar{z}$	(L_2)
s_1	0	1	5	1	0	0	0	80	(L_3)
a_2	0	4	2	0	-1	1	0	20	(L_4)
a_3	0	1	1	0	0	0	1	10	(L_5)

Note que não faz nenhum sentido começarmos com $\bar{z}^a = 0$ na linha L_1 do tableau, já que o objetivo da Fase I é eliminar as variáveis artificiais e consequentemente tornar $\bar{z}^a = 0$ ao longo das iterações.

Também não faz sentido que a_2 e a_3, duas variáveis básicas, tenham coeficientes iguais a 1 na linha L_1, pois variáveis básicas têm coeficientes nulos na linha da função objetivo.

Fase I

Então, a primeira tarefa é eliminar os coeficientes iguais a 1 na linha L_1 através de operações elementares nas linhas.

No tableau, notamos que na coluna de a_2, há um elemento igual a 1 na linha L_4, enquanto na coluna de a_3, há um elemento igual a 1 na linha L_5.

Logo, para eliminar os coeficientes iguais a 1 em L_1, devemos subtrair de L_1 as linhas L_4 e L_5. Ou seja, realizamos a operação:

$L_1 \leftarrow L_1 - L_4 - L_5$.

Assim, o tableau resultante fica:
(2)

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	a_2	a_3		
z^a	1	-5	-3	0	1	0	0	$-30 = \bar{z}^a$	(L_1)
z	1	2	4	0	0	0	0	$0 = \bar{z}$	(L_2)
s_1	0	1	5	1	0	0	0	80	(L_3)
a_2	0	4	2	0	-1	1	0	20	(L_4)
a_3	0	1	1	0	0	0	1	10	(L_5)

Fase I

Agora, podemos aplicar o algoritmo Simplex no tableau resultante.
(2)

	z	$\Downarrow x_1$	x_2	s_1	s_2	a_2	a_3		
z^a	1	−5	−3	0	1	0	0	$-30 = \bar{z}^a$	(L_1)
z	1	2	4	0	0	0	0	$0 = \bar{z}$	(L_2)
s_1	0	1	5	1	0	0	0	80	(L_3)
$\Leftarrow a_2$	0	4	2	0	−1	1	0	20	(L_4)
a_3	0	1	1	0	0	0	1	10	(L_5)

Quem entra na base:
$z_1 - c_1 = -5 < 0$ e $z_2 - c_2 = -3 < 0$
Como $z_1 - c_1 < z_2 - c_2$, então x_1 entra na base .

Quem sai da base:
$a_{11} = 1 > 0$ (OK); $a_{21} = 4 > 0$ (OK); $a_{31} = 1 > 0$ (OK).

$$\min\left\{\frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{21}}, \frac{b_3}{a_{31}}\right\} = \min\left\{\frac{80}{1}, \frac{20}{4}, \frac{10}{1}\right\} = \frac{20}{4} = 5 \Rightarrow a_2 \text{ sai da base.}$$

Fase I

Pivô: $a_{21} = 2$;
Linha do pivô: L_4;
Operações nas linhas para eliminar os elementos da coluna do pivô, exceto o pivô:

$$L_1 \leftarrow L_1 - \left(\frac{-5}{4}\right)L_4 = L_1 + \frac{5}{4}L_4;$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{4}L_4 = L_2 - \frac{1}{2}L_4;$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{4}L_4;$$

$$L_5 \leftarrow L_5 - \frac{1}{4}L_4;$$

$$L_4 \leftarrow \frac{1}{4}L_4.$$

Fase I

E o novo tableau fica:
(3)

	z	x_1	$\Downarrow x_2$	s_1	s_2	a_2	a_3		
z^a	1	0	$-1/2$	0	$-1/4$	$5/4$	0	$-5 = \bar{z}^a$	(L_1)
z	1	0	3	0	$1/2$	$-1/2$	0	$-10 = \bar{z}$	(L_2)
s_1	0	0	$9/2$	1	$1/4$	$-1/4$	0	75	(L_3)
x_1	0	1	$1/2$	0	$-1/4$	$1/4$	0	5	(L_4)
$\Leftarrow a_3$	0	0	$1/2$	0	$1/4$	$-1/4$	1	5	(L_5)

Quem entra na base:
$z_2 - c_2 = -1/2 < 0 \Rightarrow x_2$ entra na base .
Quem sai da base:
$a_{12} = 9/2 > 0$ (OK); $a_{22} = 1/2 > 0$ (OK); $a_{32} = 1/2 > 0$ (OK).

$$\min\left\{\frac{\bar{x}_1}{a_{12}}, \frac{\bar{x}_2}{a_{22}}, \frac{\bar{x}_3}{a_{32}}\right\} = \min\left\{\frac{75}{9/2}, \frac{5}{1/2}, \frac{5}{1/2}\right\} = \frac{5}{1/2} = 10.$$

Houve empate para a escolha de x_1 e a_3. Como o objetivo na Fase I é eliminar as variáveis artificiais, logo a_3 sai da base.

Fase I

Pivô: $a_{32} = 1/2$;
Linha do pivô: L_5;
Operações nas linhas para eliminar os elementos da coluna do pivô, exceto o pivô:

$$L_1 \leftarrow L_1 - \left(\frac{-1/2}{1/2}\right) L_5 = L_1 + L_5;$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{1/2} L_5 = L_2 - 6L_5;$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{9/2}{1/2} L_5 = L_3 - 9L_5;$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1/2}{1/2} L_5 = L_4 - L_5;$$

$$L_5 \leftarrow 2L_5.$$

Fase I

E o novo tableau fica:

(4)

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	a_2	a_3		
z^a	1	0	0	0	0	1	1	$0 = \bar{z}^a$	(L_1)
z	1	0	0	0	-1	1	-6	$-40 = \bar{z}$	(L_2)
s_1	0	0	0	1	-2	2	-9	30	(L_3)
x_1	0	1	0	0	$-1/2$	$1/2$	-1	0	(L_4)
x_2	0	0	1	0	$1/2$	$-1/2$	2	10	(L_5)

Na linha L_1, $z_j - c_j \geq 0, \forall j \in I_N$, onde I_N é o conjunto dos índices das variáveis não básicas. Em particular, para a_2, temos $z_5 - c_5 = 1$, e para a_3, temos $z_6 - z_6 = 1$.

Logo, o **valor ótimo da função objetivo** z^a **na Fase I é:** $z^{a*} = 0$.

Note que a_2 e a_3 saíram da base e, consequentemente, $a_2 = a_3 = 0$. Assim, eliminamos as variáveis artificiais na Fase I.

Solução ótima do subproblema P^a **da Fase I:** $(a_1^*, a_2^*) = (0, 0)$, onde:

$x^{B^a} = \begin{bmatrix} s_1 & x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 10 \end{bmatrix}^T$; $x^{N^a} = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & s_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Fase II

Agora, começamos a **Fase II** do método: tomamos a solução básica ótima da **Fase I** como a solução básica inicial da **Fase II**, ou seja,
$x^B = \begin{bmatrix} s_1 & x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 10 \end{bmatrix}^T$.

Para o tableau inicial da Fase II, é necessário eliminar as colunas correspondentes às variáveis artificiais a_k e a linha da função objetivo z^a.

No exemplo que estamos vendo, o tableau inicial da Fase II fica assim:
(1)

	z	x_1	x_2	s_1	s_2		
z	1	0	0	0	-1	$-40 = \bar{z}$	(L_1)
s_1	0	0	0	1	-2	30	(L_2)
x_1	0	1	0	0	$-1/2$	0	(L_3)
x_2	0	0	1	0	$1/2$	10	(L_4)

Fase II

E assim, iniciamos o algoritmo Simplex na Fase II com o novo tableau:
(1)

	z	x_1	x_2	s_1	$\Downarrow s_2$		
z	1	0	0	0	-1	$-40 = \bar{z}$	(L_1)
s_1	0	0	0	1	-2	30	(L_2)
x_1	0	1	0	0	$-1/2$	0	(L_3)
$\Leftarrow x_2$	0	0	1	0	$1/2$	10	(L_4)

Quem entra na base:
$z_4 - c_4 = -1 < 0 \Rightarrow s_2$ entra na base.

Quem sai da base:
$a_{14} = -2 < 0\ (\times)$; $a_{24} = -1/2 < 0\ (\times)$; $a_{34} = 1/2 > 0$ (OK).
$\min\left\{\dfrac{b_3}{a_{34}}\right\} = \min\left\{\dfrac{10}{1/2}\right\} = \dfrac{10}{1/2} = 20 \Rightarrow x_2$ sai da base.

Fase II

Pivô: $a_{34} = 1/2$;
Linha do pivô: L_4;
Operações nas linhas para eliminar os elementos da coluna do pivô, exceto o pivô:

$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_4$; $L_2 \leftarrow L_2 + 4L_4$; $L_3 \leftarrow L_3 + L_4$; $L_4 \leftarrow 2L_4$.

E o novo tableau é dado por:
(2)

	z	x_1	x_2	s_1	s_2		
z	1	0	2	0	0	$-20 = \bar{z}$	(L_1)
s_1	0	0	4	1	0	70	(L_2)
x_1	0	1	1	0	0	10	(L_3)
s_2	0	0	2	0	1	20	(L_4)

Na linha L_1, $z_j - c_j \geq 0, \forall j \in I_N$. Logo, temos:

Solução ótima do PPL original: $(x_1^*, x_2^*) = (10, 0)$.

Valor ótimo da função objetivo: $z^* = -20$.

Variáveis artificiais e viabilidade do PPL original

Teorema (Viabilidade do PPL original)

Seja o P^a o problema de programação linear da Fase I que tem por objetivo eliminar as variáveis artificiais. Seja (x^*, a_i^*) a solução ótima de P^a. Então:

1. Se $\sum_i a_i^* > 0 \Rightarrow$ O PPL original é inviável;
2. Se $\sum_i a_i^* = 0 \Rightarrow$ O PPL original é viável e o P^a fornece a 1a. solução básica viável do PPL original.

Exemplo (Solução básica viável inexistente)

Considere o problema a seguir:

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = & 3x_1 - 4x_2 \\
\text{s.a.} & & \\
& & \begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & \geq & 18 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}
\end{array}
$$

Variáveis artificiais e viabilidade do PPL original

Na forma padrão e já modificado para o método das duas fases, temos para a Fase I o subproblema P^a:

$$
\begin{array}{lrl}
\max & z^a = & -a_1 \\
\text{s.a.} & & \\
& & \begin{array}{rcrcrcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & + & s_1 & & & & & = & 4 \\
2x_1 & + & 3x_2 & & & - & s_2 & + & a_1 & = & 18 \\
x_1 & , & x_2 & , & s_1 & , & s_2 & , & a_1 & \geq & 0
\end{array}
\end{array}
$$

O tableau inicial fica da seguinte forma:
(1)

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1		
z^a	1	0	0	0	0	1	$0 = \bar{z}^a$	(L_1)
z	1	-3	4	0	0	0	$0 = \bar{z}$	(L_2)
s_1	0	1	1	1	0	0	4	(L_3)
a_1	0	2	3	0	-1	1	18	(L_4)

Variáveis artificiais e viabilidade do PPL original

Como a_1 é variável básica e seu coeficiente na linha da função objetivo é igual a 1 (não nulo), devemos realizar a operação $L_1 \leftarrow L_1 - L_4$ para anular este coeficiente. Assim, obtemos:

(2)

	z	x_1	$\Downarrow x_2$	s_1	s_2	a_1		
z^a	1	-2	-3	0	1	0	$-18 = \bar{z}^a$	(L_1)
z	1	-3	4	0	0	0	$0 = \bar{z}$	(L_2)
$\Leftarrow s_1$	0	1	1	1	0	0	4	(L_3)
a_1	0	2	3	0	-1	1	18	(L_4)

Quem entra na base:

$z_2 - c_2 = -3 < 0$ e $z_1 - c_1 = -2 < 0$

Como $z_2 - c_2 < z_1 - c_1$, então x_2 entra na base .

Quem sai da base:

$a_{12} = 1 > 0$ (OK); $a_{22} = 3 > 0$ (OK).

$\min\left\{\dfrac{b_1}{a_{12}}, \dfrac{b_2}{a_{22}}\right\} = \min\left\{\dfrac{4}{1}, \dfrac{18}{3}\right\} = \dfrac{4}{1} = 4 \Rightarrow s_1$ sai da base.

Variáveis artificiais e viabilidade do PPL original

Pivô: $a_{12} = 1$; **Linha do pivô:** L_3;
Operações nas linhas: $L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3$; $\quad L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3$; $\quad L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3$.

E o novo tableau é dado por:
(3)

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1		
z^a	1	1	0	3	1	0	$-6 = \bar{z}^a$	(L_1)
z	1	-7	0	-4	0	0	$-16 = \bar{z}$	(L_2)
x_2	0	1	1	1	0	0	4	(L_3)
a_1	0	-1	0	-3	-1	1	6	(L_4)

Solução ótima do subproblema P^a da Fase I: $(a_1^*, a_2^*) = (6, 0)$, onde:

$$x^{B^a} = \begin{bmatrix} x_2 & a_1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 6 \end{bmatrix}^T; \; x^{N^a} = \begin{bmatrix} x_1 & s_1 & s_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Porém, $a_1 = 6 \neq 0$ e **valor ótimo da função objetivo z^a na Fase I é** $z^{a*} = -6$.

Portanto, não eliminamos a variável artificial a_1 na Fase I e **o PPL original é inviável**.

Novos casos de eliminação das variáveis artificiais na Fase I

Vamos ver dois casos de eliminação das variáveis artificiais na Fase I em que uma das variáveis artificiais continua na base com valor nulo.

Exemplo - Caso 1: Considere o PPL:

$$\begin{array}{llrcrl}
\max & z = & x_1 & + & x_2 & \\
\text{s.a.} & & & & & \\
& & x_1 & + & 4x_2 & \geq 4 \\
& & 3x_1 & + & x_2 & = 1 \\
& & x_1 & , & x_2 & \geq 0
\end{array}$$

Na forma padrão, temos para a Fase I o subproblema P^a:

$$\begin{array}{llrcrcrcrcrl}
\max & z^a = & -a_1 & - & a_2 & & & & & & & \\
\text{s.a.} & & & & & & & & & & & \\
& & x_1 & + & 4x_2 & - & s_1 & + & a_1 & & & = 4 \\
& & 3x_1 & + & x_2 & & & & & + & a_2 & = 1 \\
& & x_1 & , & x_2 & , & s_1 & , & a_1 & , & a_2 & \geq 0
\end{array}$$

Novos casos de eliminação das variáveis artificiais na Fase I

O tableau inicial fica da seguinte forma:

(1)

	z	x_1	x_2	s_1	a_1	a_2		
z^a	1	0	0	0	1	1	$0 = \bar{z}^a$	(L_1)
z	1	-1	-1	0	0	0	$0 = \bar{z}$	(L_2)
a_1	0	1	4	-1	1	0	4	(L_3)
a_2	0	3	1	0	0	1	1	(L_4)

Como a_1 e a_2 são variáveis básicas e seus coeficientes na linha L_1 valem 1, devemos realizar a operação $L_1 \leftarrow L_1 - L_3 - L_4$ para anular estes coeficientes. Assim, obtemos:

(2)

	z	x_1	x_2	s_1	a_1	a_2		
z^a	1	-4	-5	1	0	0	$-5 = \bar{z}^a$	(L_1)
z	1	-1	-1	0	0	0	$0 = \bar{z}$	(L_2)
a_1	0	1	4	-1	1	0	4	(L_3)
a_2	0	3	1	0	0	1	1	(L_4)

Novos casos de eliminação das variáveis artificiais na Fase I

Agora, podemos realizar a pivotagem.
(2)

	z	x_1	$\Downarrow x_2$	s_1	a_1	a_2		
z^a	1	-4	-5	1	0	0	$-5 = \bar{z}^a$	(L_1)
z	1	-1	-1	0	0	0	$0 = \bar{z}$	(L_2)
a_1	0	1	4	-1	1	0	4	(L_3)
$\Leftarrow a_2$	0	3	1	0	0	1	1	(L_4)

Quem entra na base:
$z_2 - c_2 = -5 < 0$ e $z_1 - c_1 = -4 < 0$
Como $z_2 - c_2 < z_1 - c_1$, então x_2 entra na base .

Quem sai da base:
$a_{12} = 4 > 0$ (OK); $a_{22} = 1 > 0$ (OK).
$\min\left\{\frac{b_1}{a_{12}}, \frac{b_2}{a_{22}}\right\} = \min\left\{\frac{4}{4}, \frac{1}{1}\right\} = 1.$
Houve empate, podemos escolher a_1 ou a_2 para sair da base.
Aqui, vamos fazer a_2 sair da base.

Novos casos de eliminação das variáveis artificiais na Fase I

Pivô: $a_{22} = 1$; **Linha do pivô:** L_4;
Operações nas linhas: $L_1 \leftarrow L_1 + 5L_4; \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_4; \quad L_3 \leftarrow L_3 - 4L_4.$

E o novo tableau é dado por:
(3)

	z	x_1	x_2	s_1	a_1	a_2		
z^a	1	11	0	1	0	5	$0 = \bar{z}^a$	(L_1)
z	1	2	0	0	0	1	$1 = \bar{z}$	(L_2)
a_1	0	-11	0	-1	1	-4	0	(L_3)
x_2	0	3	1	0	0	1	1	(L_4)

Todos os coeficientes de L_1 são não negativos. Atingimos, portanto, o fim da Fase I com $\bar{z}^a = 0$ e **solução ótima** $(a_1^*, a_2^*) = (0, 0)$, onde:

$$x^{B^a} = \begin{bmatrix} a_1 & x_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T; \, x^{N^a} = \begin{bmatrix} x_1 & a_2 & s_1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Note que neste caso, **a variável artificial** a_1 **continua na base** e, mesmo assim, **vale zero**.

Novos casos de eliminação das variáveis artificiais na Fase I

Como $a_1 + a_2 = 0$, o PPL original é viável e prosseguimos então para a Fase II, onde a solução básica viável inicial é dada por:
$x^B = \begin{bmatrix} a_1 & x_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Eliminamos do último tableau da Fase I a linha L_1 e **somente a coluna de** a_2, pois a_2 **não está na base** e a_1 **ainda está na base** ao fim da Fase I.

Isso resulta no seguinte tableau inicial para a Fase II:
(1)

	z	x_1	x_2	s_1	a_1		
z	1	2	0	0	0	$1 = \bar{z}$	(L_1)
a_1	0	-11	0	-1	1	0	(L_2)
x_2	0	3	1	0	0	1	(L_3)

Como a_1 **é variável básica, não podemos eliminá-la imediatamente**. Na linha referente a a_1, que é L_2, **temos elementos não nulos**. Assim, **podemos fazer uma mudança de base**.

Novos casos de eliminação das variáveis artificiais na Fase I

As variáveis que estão fora da base são x_1 e s_1. Podemos escolher qualquer uma delas para entrar na base. Vamos aqui escolher s_1.

(1)

	z	x_1	x_2	$\Downarrow s_1$	a_1		
z	1	2	0	0	0	$1 = \bar{z}$	(L_1)
a_1	0	-11	0	-1	1	0	(L_2)
x_2	0	3	1	0	0	1	(L_3)

Problemas detectados: $a_{13} = -1 < 0$ e $a_{23} = 0$.
Porém, como **o termo independente é** $b_1 = 0$ **em** L_2, podemos multiplicar L_2 por -1, ou seja, fazer a operação $L_1 \leftarrow -L_1$. Assim, obtemos:

(2)

	z	x_1	x_2	$\Downarrow s_1$	a_1		
z	1	2	0	0	0	$1 = \bar{z}$	(L_1)
$\Leftarrow a_1$	0	11	0	1	-1	0	(L_2)
x_2	0	3	1	0	0	1	(L_3)

Assim, a_1 pode sair da base, pois $a_{23} = 0$ $(\times)$.

Novos casos de eliminação das variáveis artificiais na Fase I

Como a_1 saiu da base, podemos finalmente eliminar a coluna de a_1 do tableau inicial da Fase II. Assim, temos:
(3)

	z	x_1	x_2	s_1		
z	1	2	0	0	$1 = \bar{z}$	(L_1)
s_1	0	11	0	1	0	(L_2)
x_2	0	3	1	0	1	(L_3)

Como todos os coeficientes de L_1 são não negativos, obtemos a solução ótima da Fase II:

Solução ótima: $(x_1^*, x_2^*) = (0, 1)$ (**Solução degenerada**, pois a variável básica x_1 tem valor nulo).

Valor ótimo da função objetivo: $z^* = 1$

Novos casos de eliminação das variáveis artificiais na Fase I

Exemplo - Caso 2: Considere o PPL:

$$
\begin{array}{llrcl}
\max & z = & x_1 + x_2 & & \\
\text{s.a.} & & & & \\
& & 2x_1 + 3x_2 & = & 5 \\
& & -6x_1 - 9x_2 & = & -15 \quad (\text{ ou } 6x_1 + 9x_2 = 15, \text{ pois } b_2 \geq 0) \\
& & x_1 - x_2 & \geq & 0 \quad (\text{ ou } -x_1 + x_2 \leq 0, \text{ pois } b_3 = 0) \\
& & x_1 , x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Na forma padrão, temos para a Fase I o subproblema P^a:

$$
\begin{array}{llrcl}
\max & z^a = & -a_1 - a_2 & & \\
\text{s.a.} & & & & \\
& & 2x_1 + 3x_2 + a_1 & = & 5 \\
& & 6x_1 + 9x_2 + a_2 & = & 15 \\
& & -x_1 + x_2 + s_3 & = & 0 \\
& & x_1 , x_2 , s_3 , a_1 , a_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Novos casos de eliminação das variáveis artificiais na Fase I

O tableau inicial fica da seguinte forma:

(1)

	z	x_1	x_2	s_3	a_1	a_2		
z^a	1	0	0	0	1	1	$0 = \bar{z}^a$	(L_1)
z	1	-1	-1	0	0	0	$0 = \bar{z}$	(L_2)
a_1	0	2	3	0	1	0	5	(L_3)
a_2	0	6	9	0	0	1	15	(L_4)
s_3	0	-1	1	1	0	0	0	(L_5)

Como a_1 e a_2 são variáveis básicas e seus coeficientes em L_1 valem 1, realizamos a operação $L_1 \leftarrow L_1 - L_3 - L_4$ para anular estes coeficientes. Assim, obtemos:

(2)

	z	x_1	x_2	s_3	a_1	a_2		
z^a	1	-8	-12	0	0	0	$-20 = \bar{z}^a$	(L_1)
z	1	-1	-1	0	0	0	$0 = \bar{z}$	(L_2)
a_1	0	2	3	0	1	0	5	(L_3)
a_2	0	6	9	0	0	1	15	(L_4)
s_3	0	-1	1	1	0	0	0	(L_5)

Novos casos de eliminação das variáveis artificiais na Fase I

Agora, podemos realizar a pivotagem.

(2)

	z	x_1	$\Downarrow x_2$	s_3	a_1	a_2		
z^a	1	-8	-12	0	0	0	$-20 = \bar{z}^a$	(L_1)
z	1	-1	-1	0	0	0	$0 = \bar{z}$	(L_2)
a_1	0	2	3	0	1	0	5	(L_3)
a_2	0	6	9	0	0	1	15	(L_4)
$\Leftarrow s_3$	0	-1	1	1	0	0	0	(L_5)

Quem entra na base:

$z_2 - c_2 = -12 < 0$ e $z_1 - c_1 = -8 < 0$

$z_2 - c_2 < z_1 - c_1 \Rightarrow x_2$ entra na base .

Quem sai da base:

$a_{12} = 3 > 0$ (OK); $a_{22} = 9 > 0$ (OK); $a_{32} = 1 > 0$ (OK).

$$\min\left\{\frac{b_1}{a_{12}}, \frac{b_2}{a_{22}}, \frac{b_3}{a_{32}}\right\} = \min\left\{\frac{5}{3}, \frac{15}{9}, \frac{0}{1}\right\} = 0 \Rightarrow s_3 \text{ sai da base}.$$

Novos casos de eliminação das variáveis artificiais na Fase I

Pivô: $a_{32} = 1$; **Linha do pivô:** L_5;
Operações nas linhas: $L_1 \leftarrow L_1 + 12L_5$; $L_2 \leftarrow L_2 + L_5$; $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_5$; $L_4 \leftarrow L_4 - 9L_5$.

E o novo tableau é dado por:
(3)

	z	x_1	x_2	s_3	a_1	a_2		
z^a	1	$\Downarrow -20$	0	12	0	0	$-20 = \bar{z}^a$	(L_1)
z	1	-2	0	1	0	0	$0 = \bar{z}$	(L_2)
$\Leftarrow a_1$	0	5	0	-3	1	0	5	(L_3)
a_2	0	15	0	-9	0	1	15	(L_4)
x_2	0	-1	1	1	0	0	0	(L_5)

Quem entra na base: $z_1 - c_1 = -20 < 0 \Rightarrow x_1$ entra na base .

Quem sai da base: $a_{11} = 5 > 0$ (OK); $a_{21} = 15 > 0$ (OK); $a_{31} = -1 > 0$ $(\times)$.

$$\min\left\{\frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{22}}\right\} = \min\left\{\frac{5}{5}, \frac{15}{15}\right\} = 1$$

Houve empate. Escolho a_1 para sair da base.

Novos casos de eliminação das variáveis artificiais na Fase I

Pivô: $a_{11} = 5$; **Linha do pivô:** L_3;
Operações nas linhas: $L_1 \leftarrow L_1 + 4L_3$; $L_2 \leftarrow L_2 + (2/5)L_3$; $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3$; $L_5 \leftarrow L_5 + (1/5)L_3$; $L_3 \leftarrow L_3/5$.

E o novo tableau é dado por:
(4)

	z	x_1	x_2	s_3	a_1	a_2		
z^a	1	0	0	0	4	0	$0 = \bar{z}^a$	(L_1)
z	1	0	0	$-1/5$	$2/5$	0	$2 = \bar{z}$	(L_2)
x_1	0	1	0	$-3/5$	$1/5$	0	1	(L_3)
a_2	0	0	0	0	-3	1	0	(L_4)
x_2	0	0	1	$2/5$	$1/5$	0	1	(L_5)

Todos os coeficientes de L_1 são não negativos. Atingimos, portanto, o fim da Fase I com $\bar{z}^a = 0$ e **solução ótima** $(a_1^*, a_2^*) = (0, 0)$, onde:

$$x^{B^a} = \begin{bmatrix} x_1 & a_2 & x_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T; x^{N^a} = \begin{bmatrix} a_1 & s_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Note que neste caso, **a variável artificial a_2 continua na base** e, mesmo assim, **vale zero**.

Novos casos de eliminação das variáveis artificiais na Fase I

Como $a_1 + a_2 = 0$, o PPL original é viável e prosseguimos então para a Fase II, onde a solução básica viável inicial é dada por:
$x^B = \begin{bmatrix} x_1 & a_2 & x_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Eliminamos do último tableau da Fase I a linha L_1 e **somente a coluna de** a_1, pois a_1 **não está na base** e a_2 **ainda está na base** ao fim da Fase I.

Isso resulta no seguinte tableau inicial para a Fase II:
(1)

	z	x_1	x_2	s_3	a_2		
z	1	0	0	$-1/5$	0	$2 = \bar{z}$	(L_1)
x_1	0	1	0	$-3/5$	0	1	(L_2)
a_2	0	0	0	0	1	0	(L_3)
x_2	0	0	1	$2/5$	0	1	(L_4)

Como a_2 é variável básica e a linha referente a ela, L_3, é composta de zeros, exceto o elemento 1 referente à própria a_2, existe uma equação redundante no sistema de restrições.

Como consequência, podemos eliminar a linha L_3 e a coluna de a_2.

Novos casos de eliminação das variáveis artificiais na Fase I

Isso resulta no seguinte tableau para a Fase II:
(2)

	z	x_1	x_2	$\Downarrow s_3$		
z	1	0	0	$-1/5$	$2 = \bar{z}$	(L_1)
x_1	0	1	0	$-3/5$	1	(L_2)
$\Leftarrow x_2$	0	0	1	$2/5$	1	(L_3)

Quem entra na base: $z_3 - c_3 = -1/5 < 0 \Rightarrow s_3$ entra na base .

Quem sai da base: $a_{13} = -3/5 < 0$ $(\times)$; $a_{23} = 2/5 > 0$ (OK).
$\Rightarrow x_2$ sai da base.

Pivô: $a_{23} = 2/5$; **Linha do pivô:** L_3;

Operações nas linhas: $L_1 \leftarrow L_1 + (1/2)L_3$; $\quad L_2 \leftarrow L_2 + (3/2)L_3$;
$L_3 \leftarrow (5/2)L_3$.

Novos casos de eliminação das variáveis artificiais na Fase I

Isso resulta no seguinte tableau para a Fase II:

(3)

	z	x_1	x_2	s_3		
z	1	0	$1/2$	0	$5/2 = \bar{z}$	(L_1)
x_1	0	1	$3/2$	0	$5/2$	(L_2)
s_3	0	0	$5/2$	1	$5/2$	(L_3)

Como todos os coeficientes de L_1 são não negativos, obtemos a solução ótima da Fase II:

Solução ótima: $(x_1^*, x_2^*) = (5/2, 0)$.

Valor ótimo da função objetivo: $z^* = 5/2$.

O gráfico do próximo slide mostra as duas fases, onde:

1a. fase: $O \to A$;
2a. fase: $A \to B$,

onde $O = (0, 0)$, $A = (1, 1)$, $B = (5/2, 0)$.

Novos casos de eliminação das variáveis artificiais na Fase I

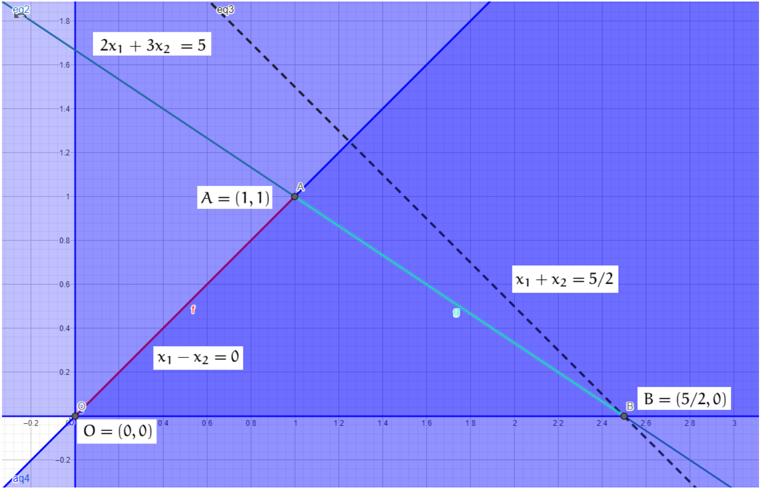

Figura: Método das duas fases - Funções do exemplo - Caso 2