Programação Linear - IME/UERJ

Gabarito - Lista de Exercícios 6 - Extra - Dualidade e Análise de Sensibilidade e Pós-Otimização

1. (a) **Interpretação econômica**

Problema primal: A empresa dispõe de 100 horas máquina, 80 horas de trabalho e máximo de produção de 40 unidades do produto A. Os lucros médios de cada unidade dos produtos A e B são respectivamente R\$ 3,00 e R\$ 2,00. Como os recursos R_1 (horas máquina), R_2 (horas de trabalho) e R_3 (limite de produção do produto A) já foram comprados, pretende-se estabelecer o plano de produção que maximiza o lucro.

Aqui, definimos:

x_1: unidades do produto A;

x_2: unidades do produto B;

e o problema primal é dado por:

$$
\begin{array}{lrcrl}
\max z = & 3x_1 + 2x_2 & & & \\
\text{s.a.} & 2x_1 + & x_2 & \leq 100 & (R_1 : \text{horas máquina}) \\
 & x_1 + & x_2 & \leq 80 & (R_2 : \text{horas de trabalho}) \\
 & x_1 & & \leq 40 & (R_3 : \text{limite de produção do produto } A) \\
 & x_1 \ , & x_2 & \geq 0 &
\end{array}
$$

Problema dual: Um comprador está interessado nos recursos da empresa e quer pagar por seus recursos. Quanto ele deve pagar por cada unidade dos recursos?

Aqui, definimos:

w_i: preço pago por cada unidade do recurso R_i, para $i = 1, 2, 3$;

O comprador, obviamente, deseja minimizar o valor da compra dos recursos.

Assim, o problema dual é dado por:

$$
\begin{array}{lrrrrl}
\min v = & 100w_1 + 80w_2 + 40w_3 & & & & \\
\text{s.a.} & 2w_1 + & w_2 + & w_3 & \geq 3 & (D_1) \\
 & w_1 + & w_2 & & \geq 2 & (D_2) \\
 & w_1 \ , & w_2 \ , & w_3 & \geq 0 &
\end{array}
$$

A interpretação das restrições do dual é a seguinte:

- Restrição D_1: pela quantidade $2w_1 + w_2 + w_3$, o comprador deverá oferecer pelo menos R$ 3,00 (caso contrário, a empresa produziria uma unidade do produto A e a venderia por esse preço).
- Restrição D_2: pela quantidade $w_1 + w_2$, o comprador deverá oferecer pelo menos R$ 2,00 (caso contrário, a empresa produziria uma unidade do produto B e a venderia por esse preço).

(b) O problema primal na forma padrão é dado por:

$$\begin{array}{lllllll}
\max z = & 3x_1 + 2x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 & & \\
\text{s.a.} & 2x_1 + \ x_2 + \ s_1 & = 100 & (R_1 : \text{horas máquina}) \\
& x_1 + \ x_2 \qquad + \ s_2 & = 80 & (R_2 : \text{horas de trabalho}) \\
& x_1 \qquad + \qquad\quad + \ s_3 & = 40 & (R_3 : \text{limite de produção de } A) \\
& x_1 \ , \ x_2 \ , \ s_1 \ , \ s_2 \ , \ s_3 & \geq 0 &
\end{array}$$

Aplicando o algoritmo Simplex, o tableau ótimo é dado por:

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
z	1	0	0	1	1	0	$\bar{z} = 180$
x_2	0	0	1	-1	2	0	60
s_3	0	0	0	-1	1	1	20
x_1	0	1	0	1	-1	0	20

Pelo Teorema das Folgas Complementares, a solução ótima é:

Problema primal:

$x_B = [x_2 \quad s_3 \quad x_1]^T = [60 \quad 20 \quad 20]^T$;

$x_N = [s_1 \quad s_2]^T = [0 \quad 0]^T$.

Problema dual:

$w_B = [w_1 \quad w_2]^T = [1 \quad 1]^T$.

$w_N = [t_2 \quad w_3 \quad t_1]^T = [0 \quad 0 \quad 0]^T$.

(c) Como $s_1 = s_2 = 0$, então os recursos escassos são R_1 (horas máquina) e R_2 (horas de trabalho).

(d) Sim, se o pagamento mínimo fosse R$ 1,00 por unidade vendida. A justificativa do preço mínimo (R$ 1,00) é a de que uma redução em uma unidade do recurso R_1 reduz o valor da função objetivo em $R\$$ 1,00 ($w_1 = 1$).

(e) Análogo ao item anterior, se o pagamento mínimo fosse R\$ 1,00 por unidade vendida. A justificativa do preço mínimo (R\$ 1,00) é a de que uma redução em uma unidade do recurso R_2 reduz o valor da função objetivo em $R\$$ 1,00 ($w_2 = 1$).

(f) É o preço mínimo pelo qual deverá ser vendida uma unidade do recurso R_1.

(g) Pagaria no máximo R\$ 0,00 ($w_3 = 0$), pois já há sobra deste recurso ($s_3 = 20$).

(h) Variação de c_1 (coeficiente de x_1 na função objetivo do primal):

Como x_1 é variável básica no tableau ótimo, então o vetor dos coeficientes das variáveis básicas C_B será modificado para C'_B.

Logo, $Z_N - C_N = C_B B^{-1} N - C_N$ será modificado para $Z'_N - C_N = C'_B B^{-1} N - C_N$.

Sabemos que:

$$C'_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & c'_1 \end{bmatrix}; \; B^{-1}N = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \; C_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, substituindo os valores, obtemos:

$$Z'_N - C_N = \begin{bmatrix} -2 + c'_1 & 4 - c'_1 \end{bmatrix}.$$

Para que a solução permaneça ótima após a modificação de $c_1 = 3$ para c'_1, devemos ter $Z'_N - C_N \geq 0$, pois o problema primal é de maximização.

Portanto,

$$\begin{cases} -2 + c'_1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad c'_1 \geq 2 \quad \text{(I)} \\ 4 - c'_1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad c'_1 \leq 4 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Da interseção das desigualdades (I) e (II), obtemos $2 \leq c'_1 \leq 4$.

(i) O elemento $b_2 = 80$ do vetor independente b será alterado para $b'_2 = 90$.

Como o vetor $b = [100 \quad 80 \quad 40]^T$ foi alterado para $b' = [100 \quad 90 \quad 40]^T$, então o vetor de variáveis básicas $\bar{x}_B = B^{-1}b$ da solução ótima será alterado para $\bar{x}'_B = B^{-1}b'$.

Como $B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, obtemos:

$$\bar{x}'_B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 90 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Como $x'_B \geq 0$, esta solução é viável.

(j) Para que a solução permaneça ótima após a modificação de $b_1 = 100$ para b'_1:

$$\bar{x}'_B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b'_1 \\ 80 \\ 40 \end{bmatrix} \geq 0.$$

Efetuando os cálculos, encontramos: $80 \leq b'_1 \leq 120$.