INF1608 – Análise Numérica

Lab 7: Integração Numérica Adaptativa

Prof. Waldemar Celes
Departamento de Informática, PUC-Rio

A Regra de Simpson aproxima a integração de uma função pela integração de uma parábola:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_{[a,b]} = \frac{h}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - E_{[a,b]}, \quad h = b - a$$

onde o erro da aproximação é dado por:

$$E_{[a,b]} = \frac{1}{2880} h^5 f^{iv}(c)$$

Se adotarmos um passo igual a $\frac{h}{2}$, fazendo duas aproximações de Simpson, chegamos a:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_{[a,c]} + S_{[c,b]} - E'_{[a,b]}, \quad c = \frac{a+b}{2}$$

com erro dado por:

$$E'_{[a,b]} = E_{[a,c]} + E_{[c,b]} = \frac{E_{[a,b]}}{16}$$

Podemos então fazer:

$$\int_a^b f(x)dx = S_{[a,b]} + E_{[a,b]} = S_{[a,c]} + S_{[c,b]} + \frac{E_{[a,b]}}{16}$$

$$\left|S_{[a,b]} - S_{[a,c]} - S_{[c,b]}\right| = \frac{15}{16} E_{[a,b]}$$

Logo, a avaliação de $S_{[a,b]} - S_{[a,c]} - S_{[c,b]}$ nos fornece um valor 15 vezes maior que o erro de $S_{[a,c]} + S_{[c,b]}$. Com isso, podemos implementar um procedimento para realizar Integração de Simpson Adaptativa. Tentamos integrar o intervalo de a a b em um passo e em dois semi-passos, avaliando a diferença $\Delta = \left|S_{[a,b]} - S_{[a,c]} - S_{[c,b]}\right|$. Se esta diferença for menor que 15 vezes a tolerância adotada, podemos assumir o valor $S_{[a,c]} + S_{[c,b]} - \frac{\Delta}{15}$ como resultado da integral; senão, dividimos o intervalo em 2 e repetimos o processo, avaliando as integrais e suas respectivas diferenças nos sub-intervalos. Para cada sub-intervalo, a tolerância deve ser reduzida à metade, a fim de garantir que o erro total esteja dentro da tolerância original.

1. Implemente uma função para Integração por Simpson Adaptativa. Sua função deve receber o intervalo de integração, a função e a tolerância de erro desejada, e retornar o valor total da derivada no intervalo dentro da tolerância, seguindo o protótipo:

```
double adaptsimpson (double a, double b, double (*f) (double x), double tol);
```

2. A probabilidade dentro de um desvio padrão σ da média em uma distribuição normal é dada por:

$$p(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{\frac{-x^2}{2}} \, dx$$

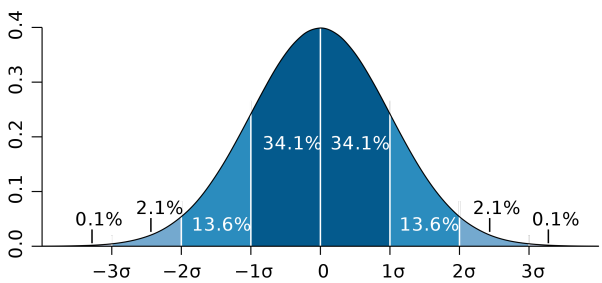
   Implemente uma função que receba como parâmetro o valor de σ e retorne a probabilidade, usando a função do item anterior, com precisão de 8 dígitos. A função deve ter o seguinte protótipo:

```
double probabilidade (double sigma);
```

Para testar, escreva um programa para avaliar as integrais abaixo com diferentes valores de tolerância. O método adaptativo respeitou a tolerância imposta? (Você pode obter os valores dessas integrais em `www.integral-calculator.com`.)

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \, dx \qquad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^3 e^{-x^2} \, dx \qquad \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x + \sin x) \, dx$$

Teste também o valor da probabilidade retornado pela sua função para diferentes valores de σ.



Agrupe os protótipos das funções pedidas em um módulo “simpson.h” e as implementações em um módulo “simpson.c”. Escreva o teste em outro módulo “main.c”.

Entrega: O código fonte deste trabalho (isto é, os arquivos “simpson.c”, “simpson.h” e “main.c” (*e eventuais códigos de laboratórios passados usados na solução*) devem ser enviados via página da disciplina no EAD. O prazo final para envio é **domingo, dia 8 de maio**.