Simulação Física

INF1608 – Análise Numérica

Waldemar Celes
celes@inf.puc-rio.br

Departamento de Informática, PUC-Rio

Simulação Física

Equação de movimento

- Segunda Lei de Newton

$$f = ma$$

Simulação Física

Equação de movimento

- Segunda Lei de Newton

$$f = ma$$

- EDO de segunda ordem

$$x'' = \frac{f}{m}$$

Simulação Física

Equação de movimento

- Segunda Lei de Newton

$$f = ma$$

- EDO de segunda ordem

$$x'' = \frac{f}{m}$$

- Transformando em duas EDOs de primeira ordem acopladas

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = \frac{f}{m} \end{cases}$$

Simulação Física

Movimento de partícula no espaço 2D

- Estado da partícula

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}$$

Simulação Física

Movimento de partícula no espaço 2D

- Estado da partícula

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}$$

- Estado e sua derivada

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{f}/m \end{bmatrix}$$

Simulação Física

Movimento de partícula no espaço 2D

- Estado da partícula

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}$$

- Estado e sua derivada

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{f}/m \end{bmatrix}$$

- Espaço bidimensional

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ f_x/m \\ f_y/m \end{bmatrix}$$

Simulação Física

Movimento de partícula no espaço 2D

- Determinar $\mathbf{s}(t)$
  - Dadas as forças atuantes no sistema: $\mathbf{f}(t, \mathbf{s})$
  - Dadas as condições iniciais: $\mathbf{s}(0)$

Simulação Física

Movimento de partícula no espaço 2D

- Determinar $\mathbf{s}(t)$
  - Dadas as forças atuantes no sistema: $\mathbf{f}(t, \mathbf{s})$
  - Dadas as condições iniciais: $\mathbf{s}(0)$
- Método de Euler

$$\mathbf{s}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ v_{x_0} \\ v_{y_0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ v_{x_{i+1}} \\ v_{y_{i+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ v_{x_i} \\ v_{y_i} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} v_{x_i} \\ v_{y_i} \\ f_x(t_i, \mathbf{s}_i)/m \\ f_y(t_i, \mathbf{s}_i)/m \end{bmatrix}$$

Simulação Física

Exemplos de forças: $\mathbf{f} = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$

Simulação Física

Exemplos de forças: $\mathbf{f} = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$

- Força de gravidade (constante):

$$\mathbf{f} = m\mathbf{g}$$

Simulação Física

Exemplos de forças: $\mathbf{f} = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$

- Força de gravidade (constante):

$$\mathbf{f} = m\mathbf{g}$$

- Força de vento:

$$\mathbf{f}_w = c\mathbf{v}_w(t, \mathbf{x})$$

Simulação Física

Exemplos de forças: $\mathbf{f} = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$

- Força de gravidade (constante):

$$\mathbf{f} = m\mathbf{g}$$

- Força de vento:

$$\mathbf{f}_w = c\mathbf{v}_w(t, \mathbf{x})$$

- Forças dissipativas:

$$\mathbf{f}_d = -k_d \|\mathbf{v}\|^n \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

  - Força de viscosidade:

$$\mathbf{f}_d = -c\mathbf{v}$$

onde c representa o coeficiente de viscosidade

Simulação Física

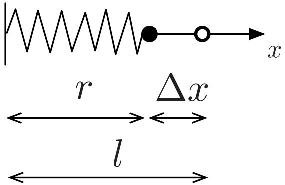
Exemplos de forças: $\mathbf{f} = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$

- Força de mola

Lei de Hooke
(peq. deslocamentos)

$$f_s = -K_s \Delta x, \quad \Delta x = l - r$$

- K_s é o coeficiente de rigidez



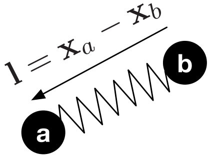
Simulação Física

Exemplos de forças: $\mathbf{f} = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$

- Força de mola entre partículas

$$\mathbf{f}_a = -K_s \Delta\mathbf{x} = -K_s \left(\|\mathbf{l}\| - r \right) \frac{\mathbf{l}}{\|\mathbf{l}\|}$$

$$\mathbf{f}_b = -\mathbf{f}_a$$



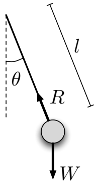
- Mola com amortecimento

$$\mathbf{f}_a = -\left[K_s \left(\|\mathbf{l}\| - r \right) + K_d \mathbf{l}' \frac{\mathbf{l}}{\|\mathbf{l}\|} \right] \frac{\mathbf{l}}{\|\mathbf{l}\|}$$

$$\mathbf{l}' = \mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b$$

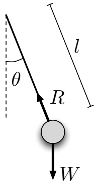
Simulação Física

Movimento de um pêndulo



Simulação Física

Movimento de um pêndulo

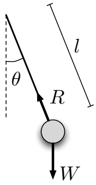


- Equação diferencial

$$\theta'' + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Simulação Física

Movimento de um pêndulo



- Equação diferencial

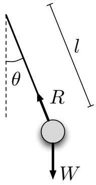
$$\theta'' + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Para valores de θ pequenos: $\sin\theta \approx \theta$

$$\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Simulação Física

Movimento de um pêndulo



- Equação diferencial

$$\theta'' + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Para valores de θ pequenos: $\sin\theta \approx \theta$

$$\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0$$

- Solução analítica

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)$$

- Período

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Simulação Física

Movimento de um pêndulo

- Solução para θ qualquer
  - Apenas via método numérico

Simulação Física

Movimento de um pêndulo

- Solução para θ qualquer
  - Apenas via método numérico
- Equação diferencial de segunda ordem

$$\theta'' = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

Simulação Física

Movimento de um pêndulo

- Solução para θ qualquer
  - Apenas via método numérico
- Equação diferencial de segunda ordem

$$\theta'' = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

- EDO's acopladas
  - Estado: posição e velocidade angulares
  - Derivada: velocidade e aceleração angulares

$$\begin{bmatrix} \theta \\ w \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} w \\ -\frac{g}{l}\sin\theta \end{bmatrix}$$

Simulação Física

Movimento de um pêndulo

- Método de Euler

$$\begin{bmatrix} \theta_{i+1} \\ w_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_i \\ w_i \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} w_i \\ -\frac{g}{l} \sin \theta_i \end{bmatrix}$$

Simulação Física

Movimento de um pêndulo

- Método de Euler

$$\begin{bmatrix} \theta_{i+1} \\ w_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_i \\ w_i \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} w_i \\ -\frac{g}{l} \sin \theta_i \end{bmatrix}$$

- Como determinar período numericamente?

Simulação Física

Movimento de um pêndulo

- Método de Euler

$$\begin{bmatrix} \theta_{i+1} \\ w_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_i \\ w_i \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} w_i \\ -\frac{g}{l}\sin\theta_i \end{bmatrix}$$

- Como determinar período numericamente?
  - Monitorar mudança de sinal de w
    - Exemplo: $w_1 = w(t_1)$ e $w_2 = w(t_2)$, com $w_1\, w_2 <= 0$

$$T = 2\left[t_1 + \frac{|w_1|}{|w_1| + |w_2|}(t_2 - t_1)\right]$$

Integração de Verlet

Da série de Taylor:

$$x(t+h) = x(t) + \dot{x}\,h + \frac{1}{2}\ddot{x}\,h^2 + \frac{1}{6}x^{(3)}(h)\,h^3 + O(h^4)$$
$$x(t-h) = x(t) - \dot{x}\,h + \frac{1}{2}\ddot{x}\,h^2 - \frac{1}{6}x^{(3)}(h)\,h^3 + O(h^4)$$

Somando as duas expressões:

$$x(t+h) = 2x(t) - x(t-h) + \ddot{x}(h)\,h^2 + O(h^4)$$

Integração de Verlet

Da série de Taylor:

$$x(t+h) = x(t) + \dot{x}\,h + \frac{1}{2}\ddot{x}\,h^2 + \frac{1}{6}x^{(3)}(h)\,h^3 + O(h^4)$$

$$x(t-h) = x(t) - \dot{x}\,h + \frac{1}{2}\ddot{x}\,h^2 - \frac{1}{6}x^{(3)}(h)\,h^3 + O(h^4)$$

Somando as duas expressões:

$$x(t+h) = 2x(t) - x(t-h) + \ddot{x}(h)\,h^2 + O(h^4)$$

Para a física de partícula:

$$\boxed{\mathbf{x}_{i+1} = 2\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{i-1} + \frac{h^2}{m}\mathbf{f}}$$

Integração de Verlet

Da série de Taylor:

$$x(t+h) = x(t) + \dot{x}\,h + \frac{1}{2}\ddot{x}\,h^2 + \frac{1}{6}x^{(3)}(h)\,h^3 + O(h^4)$$
$$x(t-h) = x(t) - \dot{x}\,h + \frac{1}{2}\ddot{x}\,h^2 - \frac{1}{6}x^{(3)}(h)\,h^3 + O(h^4)$$

Somando as duas expressões:

$$x(t+h) = 2x(t) - x(t-h) + \ddot{x}(h)\,h^2 + O(h^4)$$

Para a física de partícula:

$$\boxed{\mathbf{x}_{i+1} = 2\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{i-1} + \frac{h^2}{m}\mathbf{f}}$$

- Não armazena explicitamente (e não avalia) a velocidade
- Reversível para sistemas conservativos: $\mathbf{f} = -\Delta\mathbf{V}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{f}(t,\mathbf{x})$

Utilização da integração de Verlet

Sistemas conservativos: $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$

$$\text{Condições iniciais: } \begin{cases} \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}_0 \end{cases}$$

Para determinação de $\mathbf{x}_1$, pode-se usar Euler:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + h\,\dot{\mathbf{x}}_0$$

$$\mathbf{x}_{i+1} = 2\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1} + \frac{h^2}{m}\mathbf{f}(t_i, \mathbf{x}_i)$$

Utilização da integração de Verlet

Sistemas não conservativos: $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$

Estimando a velocidade:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}_1 &= \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}}{h}, \quad O(h) \\
\dot{\mathbf{x}}_1 &= \frac{\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_{i-1}}{2h}, \quad O(h^2)
\end{aligned}
$$

Utilização da integração de Verlet

Sistemas não conservativos: $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$

Estimando a velocidade:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}}{h}, \quad O(h) \\ \dot{\mathbf{x}}_1 &= \frac{\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_{i-1}}{2h}, \quad O(h^2) \end{aligned}$$

Evolução do sistema:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_0 + h\,\dot{\mathbf{x}}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}_i &= \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}}{h} \\ \mathbf{x}_{i+1} &= 2\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1} + \frac{h^2}{m}\mathbf{f}(t_i, \mathbf{x}_i, \dot{\mathbf{x}}_i) \end{aligned}$$

Estratégia de predição & correção

Objetiva melhorar a estimativa de $\dot{\mathbf{x}}$

Predição:

$$
\begin{aligned}
\overline{\dot{\mathbf{x}}_i} &= \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}}{h} \\
\overline{\mathbf{x}_{i+1}} &= 2\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1} + \frac{h^2}{m}\mathbf{f}(t_i, \mathbf{x}_i, \overline{\dot{\mathbf{x}}_i})
\end{aligned}
$$

Correção:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}_i &= \frac{\overline{\mathbf{x}_{i+1}} - \mathbf{x}_{i-1}}{2h} \\
\mathbf{x}_{i+1} &= 2\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1} + \frac{h^2}{m}\mathbf{f}(t_i, \mathbf{x}_i, \dot{\mathbf{x}}_i)
\end{aligned}
$$

Emulando viscosidade

$$\mathbf{f}_d = -k\,\mathbf{v}$$

Reescrevendo a equação de integração:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}) + \frac{h^2}{m}\mathbf{f}$$

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + (1-\delta)(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}) + \frac{h^2}{m}\mathbf{f}$$

- onde δ representa o "coeficiente" de viscosidade (e.g. 10^{-2})

Método "*leap frog*"

Série de Taylor para velocidade:

$$\dot{\mathbf{x}}(t+h) = \dot{\mathbf{x}}(t) + h\,\ddot{\mathbf{x}}(t) + \frac{h^2}{2}\,\mathbf{x}^{(3)}(t) + \dots$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t-h) = \dot{\mathbf{x}}(t) - h\,\ddot{\mathbf{x}}(t) + \frac{h^2}{2}\,\mathbf{x}^{(3)}(t) - \dots$$

Subtraindo e usando passo intercalado:

$$\dot{\mathbf{x}}(t+h/2) = \dot{\mathbf{x}}(t-h/2) + h\,\ddot{\mathbf{x}}(t) + O(h^3)$$

Método "*leap frog*"

Série de Taylor para velocidade:

$$\dot{\mathbf{x}}(t+h) = \dot{\mathbf{x}}(t) + h\,\ddot{\mathbf{x}}(t) + \frac{h^2}{2}\,\mathbf{x}^{(3)}(t) + \dots$$

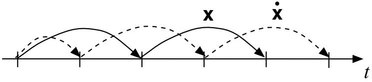
$$\dot{\mathbf{x}}(t-h) = \dot{\mathbf{x}}(t) - h\,\ddot{\mathbf{x}}(t) + \frac{h^2}{2}\,\mathbf{x}^{(3)}(t) - \dots$$

Subtraindo e usando passo intercalado:

$$\dot{\mathbf{x}}(t+h/2) = \dot{\mathbf{x}}(t-h/2) + h\,\ddot{\mathbf{x}}(t) + O(h^3)$$

Método "*Leap frog*"

Sistemas conservativos



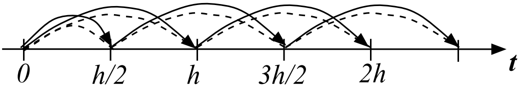
Usa Euler para obter $\dot{\mathbf{x}}(h/2)$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t+h/2) &= \dot{\mathbf{x}}(t-h/2) + h\,\ddot{\mathbf{x}}(t) \\
\mathbf{x}(t+h) &= \mathbf{x}(t) + h\,\dot{\mathbf{x}}(t)
\end{aligned}$$

Método intercalado para sistemas não conservativos

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_0 + \frac{h}{2}\,\dot{\mathbf{x}}_0 \\
\dot{\mathbf{x}}_1 &= \dot{\mathbf{x}}_0 + \frac{h}{2m}\,\mathbf{f}(0, \mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)
\end{aligned}
$$

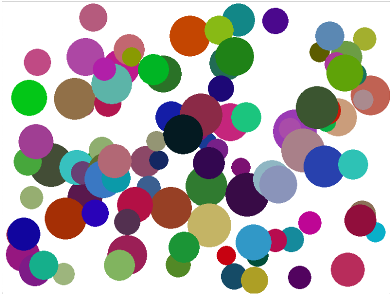
$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_{i+2} &= \mathbf{x}_i + h\,\dot{\mathbf{x}}_{i+1} \\
\dot{\mathbf{x}}_{i+2} &= \dot{\mathbf{x}}_i + \frac{h}{m}\mathbf{f}(t_{i+1}, \mathbf{x}_{i+1}, \dot{\mathbf{x}}_{i+1})
\end{aligned}
$$



Detecção e resposta à colisão

Método da relaxação

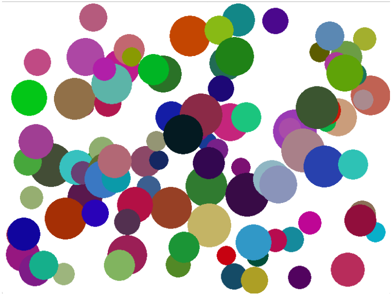
- Tratamento de colisão com amortecimento total

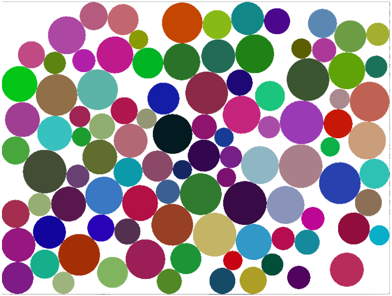


Detecção e resposta à colisão

Método da relaxação

- Tratamento de colisão com amortecimento total

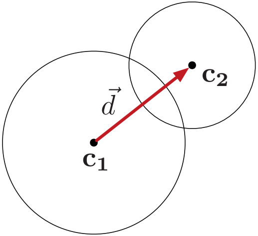




Evitando sobreposição de círculos

Método da relaxação

- Para cada círculo:
  - Verifica intersecão com todos os demais
  - Computa soma vetorial da interseção (50% de cada interseção)
  - Desloca círculo no sentido contrário



$$\vec{d} = \mathbf{c_2} - \mathbf{c_1}$$

$$\hat{u} = \frac{\vec{d}}{\|\vec{d}\|}$$

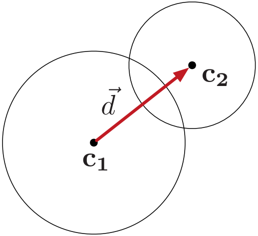
$$\delta = \|\vec{d}\| - r_1 - r_2$$

$$\mathbf{c_1} = \mathbf{c_1} - 0.5\delta\hat{u}$$

Evitando sobreposição de círculos

Método da relaxação

- Para cada círculo:
  - Verifica intersecão com todos os demais
  - Computa soma vetorial da interseção (50% de cada interseção)
  - Desloca círculo no sentido contrário



$$\vec{d} = \mathbf{c_2} - \mathbf{c_1}$$

$$\hat{u} = \frac{\vec{d}}{\|\vec{d}\|}$$

$$\delta = \|\vec{d}\| - r_1 - r_2$$

$$\mathbf{c_1} = \mathbf{c_1} - 0.5\delta\hat{u}$$

- Para cada círculo:
  - Limite sua posição aos limites da janela: se o círculo estiver total ou parcialmente fora do limite, corrija sua posição

Exercícios propostos

1. Explique por que o método de Euler para solução de Equações Diferenciais Ordinárias não é capaz de gerar resultados precisos para um corpo lançado com velocidade inicial num meio onde apenas a força da gravidade terrestre se aplica: $\ddot{x} = mg$, sendo dados $x(0) = x_0$ e $v(0) = v_0$.
2. Para uso do Método de Verlet, escreva uma estratégia para avaliação da velocidade em sistemas não conservativos, isto é, sistemas em que a avaliação da força depende da velocidade?

Exercícios propostos

3. Considere a simulação de uma partícula sendo lançada para cima com uma velocidade inicial de $5\,m/s$, a partir da posição $x_0 = 0$, como ilustrado na figura. Considere a aceleração da gravidade igual a $10\,m/s^2$, sendo a gravidade a única força atuante. Considerando a Lei de Newton que rege o movimento desta partícula ($\ddot{x} = f/m$), indique a posição e a velocidade da partícula no tempo $t = 0.3\,s$ considerando o emprego do método de Euler com passo igual a $h = 0.1\,s$ para resolução de equações diferenciais ordinárias.