Lista 2 de Exercícios

Curso: Estatística Matemática I — PGMAC – 03/06/2020

ALUNO(a): ______________________________ Turma: 1000

1) Sejam X e Y duas variáveis aleatórias com esperança finita e seja $c \in \mathbb{R}$ uma constante qualquer. Mostre (para o caso contínuo ou discreto) que,

   (a) $\mathrm{E}(c) = c, \forall\, c \in \mathbb{R}$

   (b) $\mathrm{E}(c\,X) = c\,\mathrm{E}(X)$

   (c) Se $X \geq 0$ então $\mathrm{E}(X) \geq 0$

   (d) Se $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$

   (e) Se $X \geq Y$ em Ω, então $\mathrm{E}(X) \geq \mathrm{E}(Y)$

   (f) Se X e Y são independentes então $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y)$

2) Sejam X e Y duas variáveis aleatórias com esperança finita e seja $c \in \mathbb{R}$ uma constante qualquer. Mostre que,

   1. $\mathrm{Var}(X) \geq 0$

   2. $\mathrm{Var}(c) = 0,\ \forall\, c \in \mathbb{R}$

   3. $\mathrm{Var}(c\,X) = c^2\,\mathrm{E}(X)$

   4. $\mathrm{Var}(X + c) = \mathrm{Var}(X)$

   5. $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mu^2$

   6. Se X e Y são independentes então

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$

3) Se Y_1 e Y_2 duas variáveis aleatórias tais que:

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} K y_1 y_2, & 0 \leq y_1 \leq 1\,;\, 0 \leq y_2 \leq 1 \\ \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

   (a) Determine o valor de K para que $f(y_1, y_2)$ seja função densidade conjunta.

   (b) Determine $P[Y_1 \leq 3/4, Y_2 \geq 1/2]$.

   (c) Determine $\mathrm{E}(Y_1 Y_2)$, $\mathrm{Var}(Y_1 + Y_2)$, $\mathrm{E}(Y_1)$, $\mathrm{E}(Y_2)$, $\mathrm{Var}(Y_1)$, $\mathrm{Var}(Y_2)$, $f_{Y_1|Y_2}(y_1|y_2)$.

ALUNO(a): ______________________________ Turma: 1000

4) Suponhamos que X e Y tenham distribuição conjunta dada pela tabela:

Y / X	1	2	3
1	0	1/5	0
2	1/5	1/5	1/5
3	0	1/5	0

(a) Determine as distribuições marginais de X e Y.

(b) As variáveis aleatórias X e Y são independentes? Justifique.

5) Suponha que X e Y tenha função de probabilidade conjunta dada por:

$$P[X = x, Y = y] = f(x, y) = \begin{cases} c\,|x + y| & \text{para} \quad x = -2, -1, 0, 1, 2 \quad \text{e} \quad y = -2, -1, 0, 1, 2 \\ \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine

(a) o valor da constante c.

(b) $P[X = 0, Y = -2]$

(c) $P[X = 1]$

(d) $P[|X + Y| \geq 1]$

6) Suponha que a vida útil de certo tipo de lâmpada tenha distribuição exponencial com parâmetro $\lambda > 0$. Seja T a vida de uma lâmpada desse tipo. Mostre que

$$P(T > t + s | T > t) = P(T > s), \ \forall\, s, t > 0.$$

Esse resultado é conhecido como a propriedade de "falta de memória"da distribuição exponencial.

7) Uma variável aleatória X tem função de distribuição

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ \\ x^3 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \\ 1 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

ALUNO(a): ______________________________ Turma: 1000

Qual é a função densidade de X?

8) Demonstre que a função

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-\mathrm{x}-\mathrm{y}} & \text{se} \quad \mathrm{x} \geq 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{y} \geq 0 \\ \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

não é função de distribuição de um vetor aleatório.

9) Mostre que a seguinte função é fda conjunta de algum vetor aletório (X, Y):

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} (1-\mathrm{e}^{-\mathrm{x}})\,(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{y}}) & \text{se} \quad x \geq 0 \quad \text{e} \quad y \geq 0 \\ \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

10) Seja a função de densidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{16}\,(4-2x-y) & \text{se} \quad x > 0, \quad y > 0 \quad \text{e} \quad 2x+y < 4 \\ \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Determine a função densidade condicional de Y dado qualquer valor de X.

(b) Calcule $P[Y \geq 2|X = 0,5]$.

11) Vamos supor qua a função densidade conjunta de duas variáveis aleatórias X e Y é dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = c\ \mathrm{sen}(x)\ I_{[0,\frac{\pi}{2}]\mathrm{x}[0,3]}(x,y).$$

(a) Determine a função densidade condicional de Y dado qualquer valor de X.

(b) Calcule $P[1 < Y < 2|X = 0,73]$.