Função Geradora de Momentos

Rodrigo R. Pescim

Universidade Estadual de Londrina

22 de junho de 2020

Definição 1. Seja X uma **variável aleatória** com função densidade (ou de probabilidade) $f_X(x)$ (ou $P[X = x]$). A **função geradora de momentos** (f.g.m.) de X é definida por

$$\mathsf{M}_X(t) = \mathsf{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{tX}}),$$

desde que a esperança seja finita para t real em algum intervalo $-t_0 < t < t_0$, com $t_0 > 0$.

Definição 1. Seja X uma **variável aleatória** com função densidade (ou de probabilidade) $f_X(x)$ (ou $P[X = x]$). A **função geradora de momentos** (f.g.m.) de X é definida por

$$\mathsf{M}_X(t) = \mathsf{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{tX}}),$$

desde que a esperança seja finita para t real em algum intervalo $-t_0 < t < t_0$, com $t_0 > 0$.

A função geradora de momentos é o valor esperado de uma função positiva da variável aleatória. Para os **casos discretos e contínuos**, temos

Definição 1. Seja X uma **variável aleatória** com função densidade (ou de probabilidade) $f_X(x)$ (ou $P[X = x]$). A **função geradora de momentos** (f.g.m.) de X é definida por

$$\mathsf{M}_X(t) = \mathsf{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{tX}}),$$

desde que a esperança seja finita para t real em algum intervalo $-t_0 < t < t_0$, com $t_0 > 0$.

A função geradora de momentos é o valor esperado de uma função positiva da variável aleatória. Para os **casos discretos e contínuos**, temos

$$\mathsf{M}_X(t) = \sum_x \mathrm{e}^{\mathrm{tX}}\ \mathrm{P[X = x]} \quad \text{e} \quad \mathsf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{tX}}\ \mathrm{f_X(x)\,dx}.$$

Definição 1. Seja X uma **variável aleatória** com função densidade (ou de probabilidade) $f_X(x)$ (ou $P[X = x]$). A **função geradora de momentos** (f.g.m.) de X é definida por

$$\mathsf{M}_X(t) = \mathsf{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{tX}}),$$

desde que a esperança seja finita para t real em algum intervalo $-t_0 < t < t_0$, com $t_0 > 0$.

A função geradora de momentos é o valor esperado de uma função positiva da variável aleatória. Para os **casos discretos e contínuos**, temos

$$\mathsf{M}_X(t) = \sum_x \mathrm{e}^{\mathrm{tX}}\ \mathrm{P}[\mathrm{X} = \mathrm{x}] \quad \text{e} \quad \mathsf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{tX}}\ \mathrm{f}_{\mathrm{X}}(\mathrm{x})\, \mathrm{dx}.$$

Resultado: Unicidade da f.g.m.

Se duas variáveis aleatórias têm **funções geradoras de momentos** que existem, e são **iguais**, então elas têm a **mesma distribuição de probabilidade**.

Exemplos

1. Vamos obter a função geradora de momentos de $X \sim \text{binomial}(n, p)$.

Exemplos

1. Vamos obter a função geradora de momentos de $X \sim \text{binomial}(n, p)$.

Solução:

$$M_X(t) = \sum_x \mathrm{e}^{\mathrm{t\,x}}\, \mathrm{P[X = x]}$$

Exemplos

1. Vamos obter a função geradora de momentos de $X \sim \text{binomial}(n, p)$.

Solução:

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= \sum_{x} e^{t\,x}\, P[X = x] \\
&= \sum_{x=0}^{n} e^{t\,x} \binom{n}{x} p^{x}\, (1-p)^{n-x}
\end{aligned}
$$

1. Vamos obter a função geradora de momentos de $X \sim \text{binomial}(n, p)$.

Solução:

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= \sum_x e^{t\,x}\, P[X = x] \\
&= \sum_{x=0}^{n} e^{t\,x} \binom{n}{x} p^x\, (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (p\, e^t)^x\, (1-p)^{n-x}
\end{aligned}
$$

1. Vamos obter a função geradora de momentos de $X \sim \text{binomial}(n, p)$.

Solução:

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= \sum_x e^{t\,x}\, P[X = x] \\
&= \sum_{x=0}^{n} e^{t\,x} \binom{n}{x} p^x\, (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (p\,e^t)^x\, (1-p)^{n-x} \\
&= (p\,e^t + 1 - p)^n
\end{aligned}
$$

2. Seja X uma variável aleatória contínua tal que sua função densidade é representada por $f_X(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\, \mathrm{I}_{(0,\infty)}$. Calcule a f.g.m de X.

2. Seja X uma variável aleatória contínua tal que sua função densidade é representada por $f_X(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\,\mathrm{I}_{(0,\infty)}$. Calcule a f.g.m de X.

Solução:

$$M_X(t) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{t}\,\mathrm{x}}\,\mathrm{f_X(x)}\,\mathrm{dx} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(1-\mathrm{t})\,\mathrm{x}}\,\mathrm{dx}$$

2. Seja X uma variável aleatória contínua tal que sua função densidade é representada por $f_X(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\,\mathrm{I}_{(0,\infty)}$. Calcule a f.g.m de X.

Solução:

$$\mathrm{M}_X(t) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{t\,x}}\,\mathrm{f_X(x)\,dx} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(1-\mathrm{t})\,\mathrm{x}}\,\mathrm{dx}$$

Fazendo $u = (1-t)x$, temos que: $du = (1-t)\,dx$. Então,

2. Seja X uma variável aleatória contínua tal que sua função densidade é representada por $f_X(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\,\mathrm{I}_{(0,\infty)}$. Calcule a f.g.m de X.

Solução:

$$\mathsf{M}_X(t) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{t\,x}}\,\mathrm{f_X(x)\,dx} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(1-\mathrm{t})\,\mathrm{x}}\,\mathrm{dx}$$

Fazendo $u = (1-t)x$, temos que: $du = (1-t)\,dx$. Então,

$$\mathsf{M}_X(t) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(1-\mathrm{t})\,\mathrm{x}}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{1-\mathrm{t}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{u}}\,\mathrm{du}$$

2. Seja X uma variável aleatória contínua tal que sua função densidade é representada por $f_X(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\,\mathrm{I}_{(0,\infty)}$. Calcule a f.g.m de X.

Solução:

$$M_X(t) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{t\,x}}\,\mathrm{f_X(x)}\,\mathrm{dx} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(1-\mathrm{t})\,\mathrm{x}}\,\mathrm{dx}$$

Fazendo $u = (1-t)x$, temos que: $du = (1-t)\,dx$. Então,

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(1-\mathrm{t})\,\mathrm{x}}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{1-\mathrm{t}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{u}}\,\mathrm{du} \\ &= \frac{1}{1-t}\underbrace{\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{u}}\,\mathrm{du}}_{\Gamma(1)=1} \end{aligned}$$

2. Seja X uma variável aleatória contínua tal que sua função densidade é representada por $f_X(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\,\mathrm{I}_{(0,\infty)}$. Calcule a f.g.m de X.

Solução:

$$M_X(t) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{t\,x}}\,\mathrm{f_X(x)}\,\mathrm{dx} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(1-\mathrm{t})\,\mathrm{x}}\,\mathrm{dx}$$

Fazendo $u = (1-t)x$, temos que: $du = (1-t)\,dx$. Então,

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(1-\mathrm{t})\,\mathrm{x}}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{1-\mathrm{t}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{u}}\,\mathrm{du} \\ &= \frac{1}{1-t}\underbrace{\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{u}}\,\mathrm{du}}_{\Gamma(1)=1} \\ &= \frac{1}{1-t},\ \text{para } t < 1 \text{ e } t \neq 1. \end{aligned}$$

3. Seja Z uma variável aleatória tal que $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$. Qual é a f.g.m. de Z?

3. Seja Z uma variável aleatória tal que $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$. Qual é a f.g.m. de Z?

Solução:

$$\mathsf{M}_Z(t) \quad = \quad \mathsf{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{tZ}}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{tz}}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{z}^2/2}\,\mathrm{dz}$$

3. Seja Z uma variável aleatória tal que $Z \sim \mathsf{N}(0,1)$. Qual é a f.g.m. de Z?

Solução:

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= E(e^{tZ}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{tz}\ e^{-z^2/2}\, dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-(z^2-2tz)/2}\, dz \end{aligned}$$

3. Seja Z uma variável aleatória tal que $Z \sim \mathsf{N}(0,1)$. Qual é a f.g.m. de Z?

Solução:

$$
\begin{aligned}
M_Z(t) &= E(e^{tZ}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{tz}\, e^{-z^2/2}\, dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-(z^2-2tz)/2}\, dz \\
&= e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-(z-t)^2/2}\, dz
\end{aligned}
$$

3. Seja Z uma variável aleatória tal que $Z \sim \mathsf{N}(0,1)$. Qual é a f.g.m. de Z?

Solução:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{M}_Z(t) &= \mathsf{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{tZ}}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{tz}}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{z}^2/2}\,\mathrm{dz} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-(\mathrm{z}^2-2\mathrm{tz})/2}\,\mathrm{dz} \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{t}^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-(\mathrm{z}-\mathrm{t})^2/2}\,\mathrm{dz} \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{t}^2/2}\ \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-(\mathrm{z}-\mathrm{t})^2/2}\,\mathrm{dz}}_{1}
\end{aligned}
$$

3. Seja Z uma variável aleatória tal que $Z \sim \mathsf{N}(0,1)$. Qual é a f.g.m. de Z?

Solução:

$$
\begin{aligned}
M_Z(t) &= E(e^{tZ}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{tz}\, e^{-z^2/2}\, dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-(z^2-2tz)/2}\, dz \\
&= e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-(z-t)^2/2}\, dz \\
&= e^{t^2/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-(z-t)^2/2}\, dz}_{1} \\
&= e^{t^2/2}
\end{aligned}
$$

Observa-se que a última integral é igual a 1, pois o integrando corresponde a função densidade que segue uma $\mathsf{N}(t,1)$.

Suponha que $X \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$, vamos utilizar o resultado anterior e algumas propriedades de esperança matemática para calcular a f.g.m. de X.

Observa-se que $X = \sigma\, Z + \mu$, com $Z \sim \mathsf{N}(0, 1)$. Então,

$$\mathsf{M}_X(t) \;=\; \mathsf{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{tX}}) = \mathsf{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{t}(\sigma\,\mathrm{Z}+\mu)}] = \mathrm{e}^{\mathrm{t}\mu}\,\mathsf{E}[\mathrm{e}^{(\mathrm{t}\sigma)\,\mathrm{Z}}] = \mathrm{e}^{\mathrm{t}\mu}\,\mathsf{M}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{t}\sigma) = \mathrm{e}^{\mathrm{t}\mu + \frac{\sigma^2 \mathrm{t}^2}{2}}$$

Portanto,

$$\mathsf{M}_X(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{t}\mu + \frac{\sigma^2 \mathrm{t}^2}{2}}$$

Observa-se que poderíamos ter calculado a f.g.m de X diretamente pela integral, utilizando a definição. Porém, o caminho seria mais trabalhoso e com um certo grau de dificuldade.

Exercícios

1. Seja X uma variável aleatória tal que $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Mostre que a função geradora de X é dada por

$$\mathrm{M}_X(t) = \mathrm{e}^{-\lambda\,(1-\mathrm{e}^{\mathrm{t}})}$$

2. Seja X uma variável aleatória tal que $X \sim \text{Ga}(\alpha, \beta)$. Mostre que a função geradora de X é dada por

$$\mathrm{M}_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha}, \text{ para } t > \beta.$$

Propriedades da f.g.m.

Suponha que a função geradora de momentos de X exista para $|t| < t_0$, com $t_0 > 0$. Então,

P1.

$$\mathrm{M}_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathrm{E}(X^n)$$

Propriedades da f.g.m.

Suponha que a função geradora de momentos de X exista para $|t| < t_0$, com $t_0 > 0$. Então,

P1.

$$\mathrm{M}_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathrm{E}(X^n)$$

Dem:
Seja X uma variável aleatória qualquer tal que sua f.g.m é $\mathrm{M}_X(t)$.

Observa-se que a função e^{x} pode ser escrita em termos de uma série de potências utilizando a expansão de Taylor, temos

Suponha que a função geradora de momentos de X exista para $|t| < t_0$, com $t_0 > 0$. Então,

P1.

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} E(X^n)$$

Dem:
Seja X uma variável aleatória qualquer tal que sua f.g.m é $M_X(t)$.

Observa-se que a função e^{x} pode ser escrita em termos de uma série de potências utilizando a expansão de Taylor, temos

$$\mathrm{e}^{\mathrm{x}} = 1 + \mathrm{x} + \frac{\mathrm{x}^2}{2!} + \frac{\mathrm{x}^3}{3!} + \ldots = \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \frac{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}!}$$

Então,

$$M_X(t) = E(\mathrm{e}^{\mathrm{tX}}) =$$

Suponha que a função geradora de momentos de X exista para $|t| < t_0$, com $t_0 > 0$. Então,

P1.

$$\mathsf{M}_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathsf{E}(X^n)$$

Dem:
Seja X uma variável aleatória qualquer tal que sua f.g.m é $\mathsf{M}_X(t)$.

Observa-se que a função $\mathrm{e^x}$ pode ser escrita em termos de uma série de potências utilizando a expansão de Taylor, temos

$$\mathrm{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

Então,

$$\mathsf{M}_X(t) = \mathsf{E}(\mathrm{e^{tX}}) = \mathsf{E}\left[\sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty} \frac{\mathrm{(tX)^n}}{\mathrm{n!}}\right] =$$

Suponha que a função geradora de momentos de X exista para $|t| < t_0$, com $t_0 > 0$. Então,

P1.

$$\mathsf{M}_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathsf{E}(X^n)$$

Dem:
Seja X uma variável aleatória qualquer tal que sua f.g.m é $\mathsf{M}_X(t)$.

Observa-se que a função e^{x} pode ser escrita em termos de uma série de potências utilizando a expansão de Taylor, temos

$$\mathrm{e}^{\mathrm{x}} = 1 + \mathrm{x} + \frac{\mathrm{x}^2}{2!} + \frac{\mathrm{x}^3}{3!} + \ldots = \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \frac{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}!}$$

Então,

$$\mathsf{M}_X(t) = \mathsf{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{tX}}) = \mathsf{E}\left[\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{tX})^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}!}\right] = \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \mathsf{E}\left[\frac{(\mathrm{tX})^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}!}\right] =$$

Propriedades da f.g.m.

Suponha que a função geradora de momentos de X exista para $|t| < t_0$, com $t_0 > 0$. Então,

P1.

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} E(X^n)$$

Dem:
Seja X uma variável aleatória qualquer tal que sua f.g.m é $M_X(t)$.

Observa-se que a função e^x pode ser escrita em termos de uma série de potências utilizando a expansão de Taylor, temos

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Então,

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = E\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tX)^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\frac{(tX)^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} E(X^n)$$

P2.

$$\mathrm{M}_X^{(n)}(t)\Big|_{t=0} = \mathrm{E}(X^n)$$

P2.

$$\mathrm{M}_X^{(n)}(t)\Big|_{t=0} = \mathrm{E}(X^n)$$

Dem:

Observa-se que $\mathrm{M}_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\,\mathrm{E}(X^n)$ pela propriedade anterior. Então,

$$\mathrm{M}_X(t) = 1 + t\,\mathrm{E}(X) + \frac{t^2\,\mathrm{E}(X^2)}{2!} + \frac{t^3\,\mathrm{E}(X^3)}{3!} + \dots$$

Então,

$$\mathrm{M}_X'(t) = \frac{d}{dt}\,\mathrm{M}_X(t) = \mathrm{E}(X) + \frac{2t\,\mathrm{E}(X^2)}{2!} + \frac{3t^2\,\mathrm{E}(X^3)}{3!} + \dots$$

Assim, para obtermos os momentos, igualamos $t = 0$ nas sucessivas derivadas obtidas, isto é

$$\mathrm{M}_X'(0) = \mathrm{E}(X) + \underbrace{\frac{2\cdot 0\;\cdot \mathrm{E}(X^2)}{2!}}_{0} + \underbrace{\frac{3\cdot 0^2\;\cdot \mathrm{E}(X^3)}{3!}}_{0} + \dots = \mathrm{E}(X)$$

Da mesma forma, temos

$$\mathrm{M}_X''(t) = \frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{M}_X(t) = \mathrm{E}(X^2) + \frac{6t\,\mathrm{E}(X^3)}{3!} + \frac{12t^2\,\mathrm{E}(X^4)}{4!} + \dots$$

Igualando $t = 0$,

$$\mathrm{M}_X''(0) = \mathrm{E}(X^2) + \underbrace{\frac{6 \cdot 0\,\mathrm{E}(X^3)}{3!}}_{0} + \underbrace{\frac{12 \cdot 0^2\,\mathrm{E}(X^4)}{4!}}_{0} + \dots = \mathrm{E}(X^2)$$

Prosseguindo dessa mesma forma, a n-ésima derivada da f.g.m. é dada por

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_X^{(n)}(t) &= \mathrm{E}(X^n) + \frac{(n+1)\,n\,(n-1)\dots 2}{(n+1)!}\;t\;\mathrm{E}(X^{n+1}) \\ &+ \frac{(n+2)\,(n+3)\,n\dots 3}{(n+2)!}\;t^2\;\mathrm{E}(X^{n+2}) + \dots\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathrm{M}_X^{(n)}(t)\Big|_{t=0} = \mathrm{E}(X^n)$$

Definição 2. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias definidas num mesmo espaço de probabilidade e $t_1, \ldots, t_n$ números reais. A função geradora de momentos conjunta é definida por

$$\mathrm{M}_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_n) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{t_1\,X_1+\ldots+t_n\,X_n}}),$$

desde que a esperança seja finita para os t_j's tomados numa vizinhança de zero.

P3. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e funções geradora de momentos, respectivamente, iguais a $\mathrm{M}_{X_j}(t)$, $j = 1, \ldots, n$ para t em alguma vizinhança de zero. Considere $Y = X_1 + \ldots + X_n$, então a função geradora de momentos Y existe e é dada por

$$\mathrm{M}_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{M}_{X_j}(t).$$

Dem:

Pela definição de f.g.m., temos que

$$M_Y(t) \quad = \quad E(\mathrm{e}^{\mathrm{tY}}) = E[\mathrm{e}^{\mathrm{t(X_1+\ldots+X_n)}}]$$

Dem:

Pela definição de f.g.m., temos que

$$
\begin{aligned}
M_Y(t) &= E(e^{tY}) = E[e^{t(X_1+\ldots+X_n)}] \\
&= E(e^{tX_1} \ldots e^{tX_n}) \quad \text{(independência)}
\end{aligned}
$$

Dem:

Pela definição de f.g.m., temos que

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E(\mathrm{e}^{\mathrm{tY}}) = E[\mathrm{e}^{\mathrm{t(X_1+\ldots+X_n)}}] \\ &= E(\mathrm{e}^{\mathrm{tX_1}} \ldots \mathrm{e}^{\mathrm{tX_n}}) \quad \text{(independência)} \\ &= E(\mathrm{e}^{\mathrm{tX_1}}) \ldots E(\mathrm{e}^{\mathrm{tX_n}}) \end{aligned}$$

Dem:

Pela definição de f.g.m., temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_Y(t) &= \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{tY}}) = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{t(X_1+\ldots+X_n)}}] \\
&= \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{tX_1}} \ldots \mathrm{e}^{\mathrm{tX_n}}) \quad \text{(independência)} \\
&= \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{tX_1}}) \ldots \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{tX_n}}) \\
&= \underbrace{\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{tX_1}})}_{\mathrm{M}_{X_1}(t)} \ldots \underbrace{\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{tX_n}})}_{\mathrm{M}_{X_n}(t)}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathrm{M}_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{M}_{X_j}(t).$$

P4. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com função geradora de momentos conjunta $M_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_n)$. Então se as variáveis $X_1, \ldots, X_n$ são independentes se, e somente se, a função geradora de momentos conjunta pode ser fatorada como produto das funções geradoras das variáveis.

Dem:

Pela definição 2 de f.g.m. conjunta, temos que

$$M_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_n) = E[e^{t_1 X_1 + \ldots + t_n X_n}]$$

P4. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com função geradora de momentos conjunta $\mathrm{M}_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_n)$. Então se as variáveis $X_1, \ldots, X_n$ são independentes se, e somente se, a função geradora de momentos conjunta pode ser fatorada como produto das funções geradoras das variáveis.

Dem:

Pela definição 2 de f.g.m. conjunta, temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_n) &= \mathrm{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{t_1\, X_1 + \ldots + t_n\, X_n}}] \\ &= \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{t_1\, X_1}} \ldots \mathrm{e}^{\mathrm{t_n\, X_n}}) \quad \text{(independência)} \end{aligned}$$

P4. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com função geradora de momentos conjunta $M_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_n)$. Então se as variáveis $X_1, \ldots, X_n$ são independentes se, e somente se, a função geradora de momentos conjunta pode ser fatorada como produto das funções geradoras das variáveis.

Dem:

Pela definição 2 de f.g.m. conjunta, temos que

$$\begin{aligned} M_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_n) &= E[e^{t_1 X_1 + \ldots + t_n X_n}] \\ &= E(e^{t_1 X_1} \ldots e^{t_n X_n}) \quad \text{(independência)} \\ &= E(e^{t_1 X_1}) \ldots E(e^{t_n X_n}) \end{aligned}$$

P4. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com função geradora de momentos conjunta $\mathsf{M}_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_n)$. Então se as variáveis $X_1, \ldots, X_n$ são independentes se, e somente se, a função geradora de momentos conjunta pode ser fatorada como produto das funções geradoras das variáveis.

Dem:

Pela definição 2 de f.g.m. conjunta, temos que

$$
\begin{aligned}
\mathsf{M}_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_n) &= \mathsf{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{t_1\,X_1 + \ldots + t_n\,X_n}}] \\
&= \mathsf{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{t_1\,X_1}} \ldots \mathrm{e}^{\mathrm{t_n\,X_n}}) \quad \text{(independência)} \\
&= \mathsf{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{t_1\,X_1}}) \ldots \mathsf{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{t_n\,X_n}}) \\
&= \underbrace{\mathsf{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{t_1\,X_1}})}_{\mathsf{M}_{X_1}(t_1)} \ldots \underbrace{\mathsf{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{t_n\,X_n}})}_{\mathsf{M}_{X_n}(t_n)}
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\mathsf{M}_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathsf{M}_{X_j}(t_j), \text{ para } j = 1, \ldots, n.
$$

Exercícios

3. Seja X uma variável aleatória tal que $X \sim \exp(\lambda)$.
   (a) Encontre a f.g.m. de X
   (b) Determine o n-ésimo momento ordinário de X
   (c) Determine a média e a variância de X

4. Seja X uma variável aleatória tal que $X \sim \text{Geo}(p)$. Encontre a f.g.m. de X.

5. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes que seguem distribuição Poisson, isto é, $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$. Considere Y a soma de X_i's, ou seja, $Y = X_1 + \ldots + X_n$.
   (a) Determine a f.g.m. de Y.
   (b) Determine a distrbuição de Y.