Esperança Matemática

Rodrigo R. Pescim

Universidade Estadual de Londrina

03 de junho de 2020

Vamos estudar o conceito de **valor esperado ou média** de uma variável aleatória. Observa-se que em contextos mais formais, o valor esperado é denotado como **esperança matemática**.

Valor Esperado

- Historicamente o conceito de valor esperado teve origem para avaliar ganhos em jogos com apostas em meados do século XVII.

Introdução

Vamos estudar o conceito de **valor esperado ou média** de uma variável aleatória. Observa-se que em contextos mais formais, o valor esperado é denotado como **esperança matemática**.

Valor Esperado

- Historicamente o conceito de valor esperado teve origem para avaliar ganhos em jogos com apostas em meados do século XVII.

- Com o auxílio do formalismo matemático, em meados do século XIX, essas ideias foram estabelecidas em definições rigorosas, incluindo os casos discreto e contínuo.

Vamos estudar o conceito de **valor esperado ou média** de uma variável aleatória. Observa-se que em contextos mais formais, o valor esperado é denotado como **esperança matemática**.

Valor Esperado

- Historicamente o conceito de valor esperado teve origem para avaliar ganhos em jogos com apostas em meados do século XVII.
- Com o auxílio do formalismo matemático, em meados do século XIX, essas ideias foram estabelecidas em definições rigorosas, incluindo os casos discreto e contínuo.
- Vamos assumir que as variáveis aleatórias estão todas em um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Definição 1. Seja X uma **variável aleatória discreta** com função de probabilidade $p(x_i) = p[X = x_i]$ para i, num certo conjunto de índices $i \in \mathcal{I}$. Então, a **esperança matemática** ou o **valor esperado** ou a **média** de X é definida por

$$E(X) = \sum_{i \in \mathcal{I}} x_i \, P[X = x_i],$$

desde que a soma seja determinada, isto é, $\sum_{i \in \mathcal{I}} |x_i| \, P[X = x_i] < \infty$.

A utilização do termo média para o valor esperado da variável tem origem histórica, porém pode ser entendido como referência a um resultado importante conhecido como **Lei dos Grandes Números**.

Se coletarmos, de maneira independente, um certo número de valores da variável X, pode-se ter repetições de valores dentre aqueles que são possíveis para X. Assim, **espera-se que a proporção, com que cada valor observado aparece, é próxima da sua respectiva probabilidade**. Dessa forma, **tem-se a expectativa de que a média dos valores observados não ficasse distante do valor esperado da variável**.

Exemplos

1. Seja X uma variável aleatória discreta com função de probabilidade dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x, & x = \{1, 2, 3, \ldots\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual é o valor esperado da variável X ?

Exemplos

1. Seja X uma variável aleatória discreta com função de probabilidade dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x, & x = \{1, 2, 3, \ldots\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual é o valor esperado da variável X ?

Solução:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x \left(\frac{1}{2}\right)^x =$$

Exemplos

1. Seja X uma variável aleatória discreta com função de probabilidade dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x, & x = \{1, 2, 3, \ldots\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual é o valor esperado da variável X ?

Solução:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x \left(\frac{1}{2}\right)^x = \sum_{x=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{y=1}^{x} 1}_{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x =$$

Exemplos

1. Seja X uma variável aleatória discreta com função de probabilidade dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x, & x = \{1, 2, 3, \ldots\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual é o valor esperado da variável X ?

Solução:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x \left(\frac{1}{2}\right)^x = \sum_{x=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{y=1}^{x} 1}_{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \sum_{y=1}^{\infty} \sum_{x=y}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Exemplos

1. Seja X uma variável aleatória discreta com função de probabilidade dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x, & x = \{1, 2, 3, \ldots\} \\ \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual é o valor esperado da variável X ?

Solução:

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x \left(\frac{1}{2}\right)^x = \sum_{x=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{y=1}^{x} 1}_{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \sum_{y=1}^{\infty} \sum_{x=y}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Resultado:

$$\sum_{k=i}^{\infty} q^k = \frac{q^i}{1-q} \quad \text{se} \quad |q| < 1.$$

Então,

$$\sum_{y=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{x=y}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x}}_{\text{série geométrica}} = \sum_{y=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{y}}{1-\frac{1}{2}} = 2 \underbrace{\sum_{y=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{y}}_{\text{série geométrica}} = 2.$$

Portanto, $E(X) = 2$.

2. Seja X uma variável aleatória discreta com função dada por

$$P[X = x] = \begin{cases} \frac{1}{2|x|(|x|+1)}, & x = \{-1, -2, \ldots\} \\ \\ \frac{1}{2x(x+1)}, & x = \{1, 2, \ldots\} \end{cases}$$

a) Mostre que P é uma função de probabilidade.

b) É possível determinar o valor esperado de X ? Justifique.

Definição 2. Seja X uma **variável aleatória contínua** com função densidade f_X. Define-se **esperança matemática** ou o **valor esperado** ou a **média** de X por

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx,$$

desde que a integral seja absolutamente convergente, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f_X(x)\, dx < \infty.$$

Observação: No caso em que a integral não é convergente, diz-se que a variável aleatória X não possui valor esperado ou esperança.

1. Seja $X \sim \exp(\lambda)$, $\lambda > 0$, variável aleatória que segue distribuição exponencial. Sua função densidade é dada por

$$f_X(x) = \lambda \, \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{x}} \; \mathrm{I}_{(0,\infty)}(\mathrm{x}).$$

Determine o valor esperado de X ?

Exemplos

1. Seja $X \sim \exp(\lambda)$, $\lambda > 0$, variável aleatória que segue distribuição exponencial. Sua função densidade é dada por

$$f_X(x) = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{x}}\; \mathrm{I}_{(0,\infty)}(\mathrm{x}).$$

Determine o valor esperado de X ?

Solução:

$$\mathsf{E}(X) = \int_0^\infty x\, \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{x}}\, \mathrm{dx} = \lim_{\mathrm{t}\to\infty} \lambda \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{x}\, \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{x}}\, \mathrm{dx}$$

1. Seja $X \sim \exp(\lambda)$, $\lambda > 0$, variável aleatória que segue distribuição exponencial. Sua função densidade é dada por

$$f_X(x) = \lambda \, \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{x}} \; \mathrm{I}_{(0,\infty)}(\mathrm{x}).$$

Determine o valor esperado de X ?

Solução:

$$\mathsf{E}(X) = \int_0^{\infty} x \, \lambda \, \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{x}} \, \mathrm{dx} = \lim_{\mathrm{t} \to \infty} \lambda \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{x} \, \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{x}} \, \mathrm{dx}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \left[-x \, \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{x}} + \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{x}} \, \mathrm{dx} \right]$$

Exemplos

1. Seja $X \sim \exp(\lambda)$, $\lambda > 0$, variável aleatória que segue distribuição exponencial. Sua função densidade é dada por

$$f_X(x) = \lambda \, \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{x}} \; \mathrm{I}_{(0,\infty)}(\mathrm{x}).$$

Determine o valor esperado de X ?

Solução:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_0^\infty x \, \lambda \, \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{x}} \, \mathrm{dx} = \lim_{\mathrm{t} \to \infty} \lambda \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{x} \, \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{x}} \, \mathrm{dx} \\
&= \lim_{t \to \infty} \left[-x \, \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{x}} + \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{x}} \, \mathrm{dx} \right] \\
&= \lim_{t \to \infty} \left[- \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{x}} \left(\mathrm{x} + \frac{1}{\lambda} \right) \right]_0^t
\end{aligned}$$

Exemplos

1. Seja $X \sim \exp(\lambda)$, $\lambda > 0$, variável aleatória que segue distribuição exponencial. Sua função densidade é dada por

$$f_X(x) = \lambda \, \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{x}} \; \mathrm{I}_{(0,\infty)}(\mathrm{x}).$$

Determine o valor esperado de X ?

Solução:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(X) &= \int_0^\infty x \, \lambda \, \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{x}} \, \mathrm{dx} = \lim_{\mathrm{t}\to\infty} \lambda \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{x} \, \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{x}} \, \mathrm{dx} \\
&= \lim_{t\to\infty} \left[-x \, \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{x}} + \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{x}} \, \mathrm{dx} \right] \\
&= \lim_{t\to\infty} \left[- \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{x}} \left(\mathrm{x} + \frac{1}{\lambda} \right) \right]_0^t \\
&= \frac{1}{\lambda} + \underbrace{\lim_{t\to\infty} \left[- \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{t}} \left(\mathrm{t} + \frac{1}{\lambda} \right) \right]}_{0} = \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

2. Seja X uma variável aleatória que segue o modelo Weibull, com função densidade dada por $f_X(x) = \alpha\,\lambda\,x^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{x}^{\alpha}}\ \mathrm{I}_{(0,\infty)}(\mathrm{x}),\ \alpha, \lambda > 0$. Obtenha a média de X.
3. Seja X uma variável aleatória que segue distribuição Cauchy padrão, isto é, sua função densidade é dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)},\ \ -\infty < x < \infty.$$

4. Seja X uma variável aleatória simétrica ao redor de uma constante a, isto é, $P(X \geq a + x) = P(X \leq a - x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Admita, ainda, que X é contínua e que $E(|X|) < \infty$. Mostre que $E(X) = a$.
5. Calcule o valor esperado de X com função de distribuição dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < -1 \\ -(x^2 - 1)/4, & \text{se} \quad -1 \leq x < 0 \\ (x^2 + 1)/4, & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1/2, & \text{se} \quad 1 \leq x < 2 \\ 1, & \text{se} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Propriedades de Valor Esperado

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias com esperança finita e seja $c \in \mathbb{R}$ uma constante qualquer. Então,

1. $\mathrm{E}(c) = c, \forall\, c \in \mathbb{R}$
2. $\mathrm{E}(c\, X) = c\, \mathrm{E}(X)$
3. Se $X \geq 0$ então $\mathrm{E}(X) \geq 0$
4. Se $\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$
5. Se $X \geq Y$ em Ω, então $\mathrm{E}(X) \geq \mathrm{E}(Y)$
6. Se X e Y são independentes então $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y)$

Teorema 1. Seja X uma variável aleatória cujo o valor esperado existe. Considere $Y = g(X)$, uma função (inversível e sobrejetora) de X que também é variável aleatória no mesmo espaço de probabilidade. Então,

- Caso Contínuo:

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx.$$

- Caso Discreto:

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}\left[g(X)\right] = \sum_{x} g(x)\, P[X = x].$$

Muitas características importantes das variáveis aleatórias podem ser quantificadas por meio do valor esperado de potências da variável em estudo.

Definição 3. Seja X uma variável aleatória qualquer. O **n-ésimo momento ordinário (ou o momento de ordem n)** de X é definido por

$$\mu'_n = \mathrm{E}(X^n),$$

desde que essa quantidade exista.

Se $\mathrm{E}(X) = \mu < \infty$ **não for convergente**, então pode-se definir o **momento central de ordem** n representado por $\mathrm{E}[(X-\mu)^n]$, sempre que essa quantidade exista.

Exemplo

1. Seja X uma variável aleatória contínua que possui função densidade dada por

$$f_X(x) = 2x \ \mathrm{I}_{[0,1]}(\mathrm{x}).$$

Determine o valor esperado de X ?

Exemplo

1. Seja X uma variável aleatória contínua que possui função densidade dada por

$$f_X(x) = 2x \, \mathrm{I}_{[0,1]}(\mathrm{x}).$$

Determine o valor esperado de X ?

Solução:

$$\mu'_n = \mathrm{E}(X^n) = \int_0^1 x^n \cdot 2x \, dx = 2\int_0^1 x^{n+1} \, dx = \frac{2}{n+2}.$$

Exemplo

1. Seja X uma variável aleatória contínua que possui função densidade dada por

$$f_X(x) = 2x \, \mathrm{I}_{[0,1]}(\mathrm{x}).$$

Determine o valor esperado de X ?

Solução:

$$\mu_n' = \mathrm{E}(X^n) = \int_0^1 x^n \cdot 2x \, dx = 2 \int_0^1 x^{n+1} \, dx = \frac{2}{n+2}.$$

2. Seja $X \sim \exp(\lambda)$, $\lambda > 0$, variável aleatória que segue distribuição exponencial. Sua função densidade é dada por

$$f_X(x) = \lambda \, \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{x}} \, \mathrm{I}_{(0,\infty)}(\mathrm{x}).$$

Determine o n-ésimo momento de X ?

Observação

Observa-se que

- Para $n = 1$ temos : 1^o momento ordinário de $X \rightarrow \mu = \mathrm{E}(X)$
- Para $n = 2$ temos : 2^o momento ordinário de $X \rightarrow \mathrm{E}(X^2)$
- Para $n = 3$ temos : 3^o momento ordinário de $X \rightarrow \mathrm{E}(X^3)$
- Para $n = 4$ temos : 4^o momento ordinário de $X \rightarrow \mathrm{E}(X^4)$

Observação

Observa-se que

- Para $n = 1$ temos : 1^o momento ordinário de $X \rightarrow \mu = \mathrm{E}(X)$
- Para $n = 2$ temos : 2^o momento ordinário de $X \rightarrow \mathrm{E}(X^2)$
- Para $n = 3$ temos : 3^o momento ordinário de $X \rightarrow \mathrm{E}(X^3)$
- Para $n = 4$ temos : 4^o momento ordinário de $X \rightarrow \mathrm{E}(X^4)$

Note que o **1^o momento de X** representa a **média da variável aleatória**.

Observação

Observa-se que

- Para $n = 1$ temos : 1^o momento ordinário de $X \rightarrow \mu = \mathrm{E}(X)$
- Para $n = 2$ temos : 2^o momento ordinário de $X \rightarrow \mathrm{E}(X^2)$
- Para $n = 3$ temos : 3^o momento ordinário de $X \rightarrow \mathrm{E}(X^3)$
- Para $n = 4$ temos : 4^o momento ordinário de $X \rightarrow \mathrm{E}(X^4)$

Note que o **1^o momento de X** representa a **média da variável aleatória**.

Pergunta:

Será que podemos afirmar que o 2^o, 3^o e 4^o momentos de X podem **representar as medidas de tendência** como, por exemplo, a variância e os coeficientes de assimetria e curtose de X, respectivamente ?

Definição 4. Seja X uma **variável aleatória** tal que $\mathrm{E}(X) = \mu < \infty$. Define-se como variância de X, $\mathrm{Var}(X)$, o **momento central de ordem 2**, isto é,

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[(X - \mu)^2].$$

Nota-se que a raiz quadrada de $\mathrm{Var}(X)$ é denominada de **desvio-padrão de X.**

Definição 4. Seja X uma **variável aleatória** tal que $\mathrm{E}(X) = \mu < \infty$. Define-se como variância de X, $\mathrm{Var}(X)$, o **momento central de ordem 2**, isto é,

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[(X - \mu)^2].$$

Nota-se que a raiz quadrada de $\mathrm{Var}(X)$ é denominada de **desvio-padrão de X.**

Observações:

- Existem muitas outras **medidas de variabilidade**, porém, a variância é a mais importante delas.
- Um exemplo disso, é que a variância de X é um dos parâmetros de alguns modelos probabilísticos, como a distribuição normal.
- Em Inferência, no processo de estimação de parâmetros, a informação sobre a variância da variável de interesse auxilia na determinação do método adequado.

Definição 5. Seja X uma **variável aleatória** qualquer tal que $\mathrm{E}(X) = \mu < \infty$ e desvio-padrão $\sigma > 0$. O **coeficiente de assimetria** de X, denotado por α_3, que indica o grau de assimetria da sua distribuição de probabilidade é definido por

$$\alpha_3 = \frac{\mathrm{E}[(X-\mu)^3]}{\sigma^3}.$$

Definição 5. Seja X uma **variável aleatória** qualquer tal que $\mathrm{E}(X) = \mu < \infty$ e desvio-padrão $\sigma > 0$. O **coeficiente de assimetria** de X, denotado por α_3, que indica o grau de assimetria da sua distribuição de probabilidade é definido por

$$\alpha_3 = \frac{\mathrm{E}[(X-\mu)^3]}{\sigma^3}.$$

Definição 6. Seja X uma **variável aleatória** qualquer tal que $\mathrm{E}(X) = \mu < \infty$ e desvio-padrão $\sigma > 0$. O **coeficiente de curtose** de X, denotado por α_4, que mede a intensidade dos picos da sua distribuição de probabilidade é definido por

$$\alpha_4 = \frac{\mathrm{E}[(X-\mu)^4]}{\sigma^4}.$$

Observação: Note que as definições de α_3 e α_4 dependem da existência dos momentos centrais de ordem 3 e 4.

Propriedades da Variância de X

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias com esperança finita e seja $c \in \mathbb{R}$ uma constante qualquer. Então,

1. $\mathrm{Var}(X) \geq 0$
2. $\mathrm{Var}(c) = 0, \ \forall\, c \in \mathbb{R}$
3. $\mathrm{Var}(c\,X) = c^2\,\mathrm{E}(X)$
4. $\mathrm{Var}(X + c) = \mathrm{Var}(X)$
5. $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mu^2$
6. Se X e Y são independentes então

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$

7. Se X e Y são V.A.'s quaisquer então $\text{Var}(X+Y) \neq \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$

7. Se X e Y são V.A.'s quaisquer então $\mathrm{Var}(X+Y) \neq \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$

dem: Sejam X e Y são variáveis aleatórias quaisquer num mesmo espaço de probabilidade. Então, pela propriedade 5, temos que

7. Se X e Y são V.A.'s quaisquer então $\text{Var}(X+Y) \neq \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$

dem: Sejam X e Y são variáveis aleatórias quaisquer num mesmo espaço de probabilidade. Então, pela propriedade 5, temos que

$$\text{Var}(X+Y) = \text{E}[(X+Y)]^2 - \text{E}^2(X+Y)$$

7. Se X e Y são V.A.'s quaisquer então $\text{Var}(X+Y) \neq \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$

dem: Sejam X e Y são variáveis aleatórias quaisquer num mesmo espaço de probabilidade. Então, pela propriedade 5, temos que

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X+Y) &= \text{E}[(X+Y)]^2 - \text{E}^2(X+Y) \\
&= \text{E}(X^2 + 2XY + Y^2) - [\underbrace{\text{E}(X)}_{\mu_X} + \underbrace{\text{E}(Y)}_{\mu_Y}]^2
\end{aligned}$$

7. Se X e Y são V.A.'s quaisquer então $\mathrm{Var}(X+Y) \neq \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$

dem: Sejam X e Y são variáveis aleatórias quaisquer num mesmo espaço de probabilidade. Então, pela propriedade 5, temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X+Y) &= \mathrm{E}[(X+Y)]^2 - \mathrm{E}^2(X+Y) \\
&= \mathrm{E}(X^2 + 2XY + Y^2) - [\underbrace{\mathrm{E}(X)}_{\mu_X} + \underbrace{\mathrm{E}(Y)}_{\mu_Y}]^2 \\
&= \mathrm{E}(X^2) + 2\,\mathrm{E}(XY) + \mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{E}^2(X) - 2\,\mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}^2(Y)
\end{aligned}$$

7. Se X e Y são V.A.'s quaisquer então $\mathrm{Var}(X+Y) \neq \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$

dem: Sejam X e Y são variáveis aleatórias quaisquer num mesmo espaço de probabilidade. Então, pela propriedade 5, temos que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X+Y) &= \mathrm{E}[(X+Y)]^2 - \mathrm{E}^2(X+Y) \\
&= \mathrm{E}(X^2 + 2XY + Y^2) - [\underbrace{\mathrm{E}(X)}_{\mu_X} + \underbrace{\mathrm{E}(Y)}_{\mu_Y}]^2 \\
&= \mathrm{E}(X^2) + 2\,\mathrm{E}(XY) + \mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{E}^2(X) - 2\,\mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}^2(Y) \\
&= \underbrace{\mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X)}_{\mathrm{Var}(X)} + \underbrace{\mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{E}^2(Y)}_{\mathrm{Var}(Y)} + 2\,\underbrace{[\mathrm{E}(XY) - 2\mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(Y)]}_{\mathrm{Cov}(X,Y)}
\end{aligned}
$$

7. Se X e Y são V.A.'s quaisquer então $\mathrm{Var}(X+Y) \neq \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$

dem: Sejam X e Y são variáveis aleatórias quaisquer num mesmo espaço de probabilidade. Então, pela propriedade 5, temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X+Y) &= \mathrm{E}[(X+Y)]^2 - \mathrm{E}^2(X+Y) \\
&= \mathrm{E}(X^2 + 2XY + Y^2) - [\underbrace{\mathrm{E}(X)}_{\mu_X} + \underbrace{\mathrm{E}(Y)}_{\mu_Y}]^2 \\
&= \mathrm{E}(X^2) + 2\,\mathrm{E}(XY) + \mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{E}^2(X) - 2\,\mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}^2(Y) \\
&= \underbrace{\mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X)}_{\mathrm{Var}(X)} + \underbrace{\mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{E}^2(Y)}_{\mathrm{Var}(Y)} + 2\,[\underbrace{\mathrm{E}(XY) - 2\mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(Y)}_{\mathrm{Cov}(X,Y)}] \\
&= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)
\end{aligned}$$

7. Se X e Y são V.A.'s quaisquer então $\mathrm{Var}(X+Y) \neq \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$

dem: Sejam X e Y são variáveis aleatórias quaisquer num mesmo espaço de probabilidade. Então, pela propriedade 5, temos que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X+Y) &= \mathrm{E}[(X+Y)]^2 - \mathrm{E}^2(X+Y) \\
&= \mathrm{E}(X^2 + 2XY + Y^2) - [\underbrace{\mathrm{E}(X)}_{\mu_X} + \underbrace{\mathrm{E}(Y)}_{\mu_Y}]^2 \\
&= \mathrm{E}(X^2) + 2\,\mathrm{E}(XY) + \mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{E}^2(X) - 2\,\mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}^2(Y) \\
&= \underbrace{\mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X)}_{\mathrm{Var}(X)} + \underbrace{\mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{E}^2(Y)}_{\mathrm{Var}(Y)} + 2\,[\underbrace{\mathrm{E}(XY) - 2\mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(Y)}_{\mathrm{Cov}(X,Y)}] \\
&= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)
\end{aligned}
$$

Portanto, $\mathrm{Var}(X+Y) \neq \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.

Covariância

Definição 7. Seja X e Y variáveis aleatórias no mesmo espaço de probabilidade. A **covariância** entre X e Y é definida por

$$\text{Cov}(X, Y) = \sigma_{X,Y} = \text{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \text{E}(XY) - \text{E}(X) \cdot \text{E}(Y),$$

desde que as esperanças sejam finitas.

- A covariância é uma medida de dependência linear entre as variáveis aleatórias.
- Se as variáveis são independentes, torna-se evidente que a coraviância será zero, isto é,

$$\text{Se } X \text{ e } Y \text{ são independentes} \implies \text{Cov}(X, Y) = 0.$$

- Se a covariância for zero não existe dependência linear entre as variáveis, porém pode ter outro tipo de relação entre elas e, portanto, não se pode afirmar que elas são independentes.

$$\text{Se } \text{Cov}(X, Y) = 0 \not\Rightarrow X \text{ e } Y \text{ são independentes}$$