Intervalos de Confiança

Rodrigo R. Pescim

Universidade Estadual de Londrina

Departamento de Estatística - CCE/UEL

Vamos estudar o **problema da estimação** de parâmetros utilizando **intervalos de confiança**.

Estimação Intervalar

Vamos estudar o **problema da estimação** de parâmetros utilizando **intervalos de confiança**.

Inicialmente, vamos discutir **propriedades da média e variância amostrais** a partir de amostras aleatórias obtidas de uma **população normal**.

Vamos estudar o **problema da estimação** de parâmetros utilizando **intervalos de confiança**.

Inicialmente, vamos discutir **propriedades da média e variância amostrais** a partir de amostras aleatórias obtidas de uma **população normal**.

A seguir, introduz-se os **métodos de construção de intervalos de confiança** a partir de variáveis aleatórias especiais denominadas **quantidades pivotais**.

Vamos utilizar os seguintes resultados na construção de intervalos de confiança e testes de hipóteses a partir de uma população normal.

Vamos utilizar os seguintes resultados na construção de intervalos de confiança e testes de hipóteses a partir de uma população normal.

Teorema 1: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ a.a. tal que $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Então

Vamos utilizar os seguintes resultados na construção de intervalos de confiança e testes de hipóteses a partir de uma população normal.

Teorema 1: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ a.a. tal que $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Então

(i) $\overline{X}$ e S^2 são independentes;

Distribuições Amostrais

Vamos utilizar os seguintes resultados na construção de intervalos de confiança e testes de hipóteses a partir de uma população normal.

Teorema 1: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ a.a. tal que $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Então

(i) $\overline{X}$ e S^2 são independentes;

(ii)

$$\frac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma^2} \ \sim \ \chi^2_{n-1},$$

Vamos utilizar os seguintes resultados na construção de intervalos de confiança e testes de hipóteses a partir de uma população normal.

Teorema 1: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ a.a. tal que $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Então

(i) $\overline{X}$ e S^2 são independentes;

(ii)

$$\frac{(n-1) \cdot S^2}{\sigma^2} \ \sim \ \chi^2_{n-1},$$

(iii)

$$\frac{\sqrt{n} \cdot (\overline{X} - \mu)}{S} \ \sim \ \mathrm{t}_{n-1},$$

em que χ^2_ν e t_ν seguem distribuições qui-quadrado e t-student com ν graus de liberdade.

Dem: (ii)

Dem: (ii)

Vamos considerar alguns resultados já demonstrados:

Dem: (ii)

Vamos considerar alguns resultados já demonstrados:

$$\text{Se} \quad X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \quad \text{então} \quad Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0, 1).$$

Dem: (ii)

Vamos considerar alguns resultados já demonstrados:

$$\text{Se} \quad X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \quad \text{então} \quad Z_i \;=\; \frac{X_i - \mu}{\sigma} \;\sim\; \mathrm{N}(0,1).$$

$$\text{Se} \quad Z_i \sim \mathrm{N}(0,1) \quad \text{então} \quad Z_i^2 \;=\; \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \;\sim\; \chi_1^2.$$

Dem: (ii)

Vamos considerar alguns resultados já demonstrados:

$$\text{Se} \quad X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \quad \text{então} \quad Z_i \; = \; \frac{X_i - \mu}{\sigma} \; \sim \; \mathrm{N}(0, 1).$$

$$\text{Se} \quad Z_i \sim \mathrm{N}(0, 1) \quad \text{então} \quad Z_i^2 \; = \; \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \; \sim \; \chi_1^2.$$

$$\text{Logo,} \quad Q \; = \; \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \; = \; \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \; \sim \; \chi_n^2.$$

Dem: (ii)

Vamos considerar alguns resultados já demonstrados:

$$\text{Se} \quad X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \quad \text{então} \quad Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1).$$

$$\text{Se} \quad Z_i \sim \mathrm{N}(0,1) \quad \text{então} \quad Z_i^2 = \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_1.$$

$$\text{Logo,} \quad Q = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_n.$$

Queremos mostrar que $\dfrac{(n-1) \cdot S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$.

Observa-se que

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \implies (n-1)\cdot S^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

Observa-se que

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \implies (n-1)\cdot S^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

$$\frac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma}\right)^2$$

Observa-se que

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \implies (n-1)\cdot S^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

$$\frac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma}\right)^2$$

Considere

$$Q = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \mu - \overline{X} + \overline{X}}{\sigma}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(X_i - \overline{X}) + (\overline{X} - \mu)}{\sigma}\right]^2 \implies$$

$$Q = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma^2}\right)\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}).$$

Assim,

$$Q \;=\; \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma} \right)^2 + \frac{n\left(\overline{X} - \mu\right)^2}{\sigma^2}.$$

Assim,

$$Q \;=\; \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2+\frac{n\left(\overline{X}-\mu\right)^2}{\sigma^2}.$$

Observa-se que

$$\overline{X} \;\sim\; \mathrm{N}\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \text{e} \quad Z \;=\; \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \;=\; \frac{\sqrt{n}\cdot(\overline{X}-\mu)}{\sigma} \;\sim\; \mathrm{N}(0,1)$$

Assim,

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma} \right)^2 + \frac{n \left(\overline{X} - \mu \right)^2}{\sigma^2}.$$

Observa-se que

$$\overline{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \text{e} \quad Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n} \cdot (\overline{X} - \mu)}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

Logo,

$$Z^2 = \frac{n \cdot (\overline{X} - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_1^2$$

Isto implica que

Isto implica que

$$\underbrace{Q}_{\sim\ \chi^2_n} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma}\right)^2}_{\sim\ \chi^2_{n-1}} + \underbrace{\frac{n\left(\overline{X} - \mu\right)^2}{\sigma^2}}_{\sim\ \chi^2_1}.$$

Isto implica que

$$\underbrace{Q}_{\sim\ \chi^2_n} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma}\right)^2}_{\sim\ \chi^2_{n-1}} + \underbrace{\frac{n\left(\overline{X} - \mu\right)^2}{\sigma^2}}_{\sim\ \chi^2_1}.$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma}\right)^2 = \frac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

Dem: (iii)

Dem: (iii)

Queremos mostrar que $\dfrac{\sqrt{n}\cdot(\overline{X}-\mu)}{S} \sim \mathrm{t}_{n-1}$.

Dem: (iii)

Queremos mostrar que $\dfrac{\sqrt{n}\cdot(\overline{X}-\mu)}{S} \sim t_{n-1}$.

Observa-se $Z = \sim N(0,1)$ e $W \sim \chi^2_n$ então $T' = \dfrac{Z}{\sqrt{\frac{W}{n}}} \sim t_n$

Dem: (iii)

Queremos mostrar que $\dfrac{\sqrt{n}\cdot(\overline{X}-\mu)}{S} \sim \mathrm{t}_{n-1}$.

Observa-se $\quad Z = \sim \mathrm{N}(0,1) \quad$ e $\quad \mathrm{W} \sim \chi^2_n \quad$ então $\quad \mathrm{T}' = \dfrac{Z}{\sqrt{\frac{\mathrm{W}}{n}}} \sim \mathrm{t}_n$

$$\text{Seja} \quad \mathrm{T} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\mathrm{W}'}{n-1}}} \sim \mathrm{t}_{n-1}, \quad \text{em que} \quad \mathrm{W}' \sim \chi^2_{n-1}.$$

Dem: (iii)

Queremos mostrar que $\dfrac{\sqrt{n}\cdot(\overline{X}-\mu)}{S} \sim \mathrm{t}_{n-1}$.

Observa-se $Z = \sim \mathrm{N}(0,1)$ e $\mathrm{W} \sim \chi^2_n$ então $\mathrm{T}' = \dfrac{Z}{\sqrt{\frac{\mathrm{W}}{n}}} \sim \mathrm{t}_n$

Seja $\mathrm{T} = \dfrac{Z}{\sqrt{\frac{\mathrm{W}'}{n-1}}} \sim \mathrm{t}_{n-1}$, em que $\mathrm{W}' \sim \chi^2_{n-1}$.

Como $\mathrm{W}' \sim \chi^2_{n-1}$ então $\mathrm{W}' = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$.

Então,

$$\mathrm{T} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\mathrm{W}'}{n-1}}} = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2(n-1)}}} = \frac{\sqrt{n}\cdot(\overline{X}-\mu)}{S} \sim \mathrm{t}_{n-1}.$$

Então,

$$\mathrm{T} \;=\; \frac{Z}{\sqrt{\frac{\mathrm{W}'}{n-1}}} \;=\; \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2(n-1)}}} \;=\; \frac{\sqrt{n}\cdot(\overline{X}-\mu)}{S} \;\sim\; \mathrm{t}_{n-1}.$$

Portanto,

$$\mathrm{T} \;=\; \frac{\sqrt{n}\cdot(\overline{X}-\mu)}{S} \;\sim\; \mathrm{t}_{n-1},$$

tem distribuição t-student com $(n-1)$ graus de liberdade.

Definição 1. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ a.a. tal que $f(x_i|\theta)$ é uma função densidade (ou de prob). Considere T_1 e T_2 duas estatísticas tais que $\mathsf{T}_1 \leq \mathsf{T}_2$ na qual

$$P[\mathsf{T}_1 < g(\theta) < \mathsf{T}_2] = \gamma,$$

em que γ é o nível de confiança e não depende de θ.

Definição 1. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ a.a. tal que $f(x_i|\theta)$ é uma função densidade (ou de prob). Considere T_1 e T_2 duas estatísticas tais que $\mathrm{T}_1 \leq \mathrm{T}_2$ na qual

$$P[\mathrm{T}_1 < g(\theta) < \mathrm{T}_2] = \gamma,$$

em que γ é o nível de confiança e não depende de θ.

Então, o intervalo $(\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2)$ é um **intervalo** (aleatório) **que contém** uma função de θ com coeficiente de confiança γ.

Definição 1. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ a.a. tal que $f(x_i|\theta)$ é uma função densidade (ou de prob). Considere T_1 e T_2 duas estatísticas tais que $\mathrm{T}_1 \leq \mathrm{T}_2$ na qual

$$P[\mathrm{T}_1 < g(\theta) < \mathrm{T}_2] = \gamma,$$

em que γ é o nível de confiança e não depende de θ.

Então, o intervalo $(\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2)$ é um **intervalo** (aleatório) **que contém** uma função de θ com coeficiente de confiança γ.

Em geral, nem sempre é fácil encontrar T_1 e T_2 para obter um intervalo para $g(\theta)$.

Definição 1. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ a.a. tal que $f(x_i|\theta)$ é uma função densidade (ou de prob). Considere T_1 e T_2 duas estatísticas tais que $\mathrm{T}_1 \leq \mathrm{T}_2$ na qual

$$P[\mathrm{T}_1 < g(\theta) < \mathrm{T}_2] = \gamma,$$

em que γ é o nível de confiança e não depende de θ.

Então, o intervalo $(\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2)$ é um **intervalo** (aleatório) **que contém** uma função de θ com coeficiente de confiança γ.

Em geral, nem sempre é fácil encontrar T_1 e T_2 para obter um intervalo para $g(\theta)$.

Assim, nosso objetivo é encontrar **estimadores intervalares** para $g(\theta)$.

Quantidade Pivotal

Definição 2. Seja $Q(\mathbf{X};\theta) = Q(X_1,\ldots,X_n;\theta)$ uma função da amostra aleatória e do parâmetro θ. $Q(\mathbf{X};\theta)$ é dita ser uma **quantidade pivotal** para o parâmetro θ se sua **distribuição for independente** de θ.

Quantidade Pivotal

Definição 2. Seja $Q(\mathbf{X};\theta) = Q(X_1, \ldots, X_n;\theta)$ uma função da amostra aleatória e do parâmetro θ. $Q(\mathbf{X};\theta)$ é dita ser uma **quantidade pivotal** para o parâmetro θ se sua **distribuição for independente** de θ.

Exemplo: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ a.a. tal que $X_i \sim \mathrm{N}(\theta, 9)$. Considere $Q(\mathbf{X};\theta) = \overline{X} - \theta$ uma quantidade qualquer. Mostre que Q é uma quantidade pivotal.

Definição 2. Seja $Q(\mathbf{X};\theta) = Q(X_1,\ldots,X_n;\theta)$ uma função da amostra aleatória e do parâmetro θ. $Q(\mathbf{X};\theta)$ é dita ser uma **quantidade pivotal** para o parâmetro θ se sua **distribuição for independente** de θ.

Exemplo: Sejam $X_1,\ldots,X_n$ a.a. tal que $X_i \sim \mathrm{N}(\theta, 9)$. Considere $Q(\mathbf{X};\theta) = \overline{X} - \theta$ uma quantidade qualquer. Mostre que Q é uma quantidade pivotal.

Dem:

Quantidade Pivotal

Definição 2. Seja $Q(\mathbf{X};\theta) = Q(X_1,\ldots,X_n;\theta)$ uma função da amostra aleatória e do parâmetro θ. $Q(\mathbf{X};\theta)$ é dita ser uma **quantidade pivotal** para o parâmetro θ se sua **distribuição for independente** de θ.

Exemplo: Sejam $X_1,\ldots,X_n$ a.a. tal que $X_i \sim \mathrm{N}(\theta, 9)$. Considere $Q(\mathbf{X};\theta) = \overline{X} - \theta$ uma quantidade qualquer. Mostre que Q é uma quantidade pivotal.

Dem:

Como cada $X_i \sim \mathrm{N}(\theta, 9)$ então $\overline{X} \sim \mathrm{N}(\theta, 9/n)$.

Quantidade Pivotal

Definição 2. Seja $Q(\mathbf{X};\theta) = Q(X_1,\ldots,X_n;\theta)$ uma função da amostra aleatória e do parâmetro θ. $Q(\mathbf{X};\theta)$ é dita ser uma **quantidade pivotal** para o parâmetro θ se sua **distribuição for independente** de θ.

Exemplo: Sejam $X_1,\ldots,X_n$ a.a. tal que $X_i \sim \mathrm{N}(\theta, 9)$. Considere $Q(\mathbf{X};\theta) = \overline{X} - \theta$ uma quantidade qualquer. Mostre que Q é uma quantidade pivotal.

Dem:

Como cada $X_i \sim \mathrm{N}(\theta, 9)$ então $\overline{X} \sim \mathrm{N}(\theta, 9/n)$.

Logo, $\mathrm{E}(\overline{X}) = \theta$ e $\mathrm{Var}(\overline{X}) = \dfrac{9}{n}$. Calculando-se a média e variância da quantidade Q, tem-se

Definição 2. Seja $Q(\mathbf{X};\theta) = Q(X_1,\ldots,X_n;\theta)$ uma função da amostra aleatória e do parâmetro θ. $Q(\mathbf{X};\theta)$ é dita ser uma **quantidade pivotal** para o parâmetro θ se sua **distribuição for independente** de θ.

Exemplo: Sejam $X_1,\ldots,X_n$ a.a. tal que $X_i \sim \mathrm{N}(\theta, 9)$. Considere $Q(\mathbf{X};\theta) = \overline{X} - \theta$ uma quantidade qualquer. Mostre que Q é uma quantidade pivotal.

Dem:

Como cada $X_i \sim \mathrm{N}(\theta, 9)$ então $\overline{X} \sim \mathrm{N}(\theta, 9/n)$.

Logo, $\mathrm{E}(\overline{X}) = \theta$ e $\mathrm{Var}(\overline{X}) = \dfrac{9}{n}$. Calculando-se a média e variância da quantidade Q, tem-se

$$\mathrm{E}(Q) = \mathrm{E}(\overline{X} - \theta) = 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(Q) = \mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{9}{n}.$$

Definição 2. Seja $Q(\mathbf{X};\theta) = Q(X_1,\ldots,X_n;\theta)$ uma função da amostra aleatória e do parâmetro θ. $Q(\mathbf{X};\theta)$ é dita ser uma **quantidade pivotal** para o parâmetro θ se sua **distribuição for independente** de θ.

Exemplo: Sejam $X_1,\ldots,X_n$ a.a. tal que $X_i \sim \mathrm{N}(\theta, 9)$. Considere $Q(\mathbf{X};\theta) = \overline{X} - \theta$ uma quantidade qualquer. Mostre que Q é uma quantidade pivotal.

Dem:

Como cada $X_i \sim \mathrm{N}(\theta, 9)$ então $\overline{X} \sim \mathrm{N}(\theta, 9/n)$.

Logo, $\mathrm{E}(\overline{X}) = \theta$ e $\mathrm{Var}(\overline{X}) = \dfrac{9}{n}$. Calculando-se a média e variância da quantidade Q, tem-se

$$\mathrm{E}(Q) = \mathrm{E}(\overline{X} - \theta) = 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(Q) = \mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{9}{n}.$$

Logo, $Q \sim \mathrm{N}(0, 9/n)$.

Definição 2. Seja $Q(\mathbf{X};\theta) = Q(X_1,\ldots,X_n;\theta)$ uma função da amostra aleatória e do parâmetro θ. $Q(\mathbf{X};\theta)$ é dita ser uma **quantidade pivotal** para o parâmetro θ se sua **distribuição for independente** de θ.

Exemplo: Sejam $X_1,\ldots,X_n$ a.a. tal que $X_i \sim \mathrm{N}(\theta, 9)$. Considere $Q(\mathbf{X};\theta) = \overline{X} - \theta$ uma quantidade qualquer. Mostre que Q é uma quantidade pivotal.

Dem:

Como cada $X_i \sim \mathrm{N}(\theta, 9)$ então $\overline{X} \sim \mathrm{N}(\theta, 9/n)$.

Logo, $\mathrm{E}(\overline{X}) = \theta$ e $\mathrm{Var}(\overline{X}) = \dfrac{9}{n}$. Calculando-se a média e variância da quantidade Q, tem-se

$$\mathrm{E}(Q) = \mathrm{E}(\overline{X} - \theta) = 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(Q) = \mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{9}{n}.$$

Logo, $Q \sim \mathrm{N}(0, 9/n)$.

Portanto, Q é uma quantidade pivotal.

Método da Quantidade Pivotal

Seja $Q(\mathbf{X};\theta)$ uma quantidade pivotal com função densidade (ou de probabilidade) $f(q)$. Então para qualquer $0 < \gamma < 1$, existem q_1 e q_2 que dependem de γ tal que

Método da Quantidade Pivotal

Seja $Q(\mathbf{X};\theta)$ uma quantidade pivotal com função densidade (ou de probabilidade) $f(q)$. Então para qualquer $0 < \gamma < 1$, existem q_1 e q_2 que dependem de γ tal que

$$P(q_1 < Q < q_2) = \gamma.$$

Método da Quantidade Pivotal

Seja $Q(\mathbf{X}; \theta)$ uma quantidade pivotal com função densidade (ou de probabilidade) $f(q)$. Então para qualquer $0 < \gamma < 1$, existem q_1 e q_2 que dependem de γ tal que

$$P(q_1 < Q < q_2) = \gamma.$$

Assim, se para cada vetor de valores observados $(x_1, \ldots, x_n)$, existirem $t_1(x_1, \ldots, x_n)$ e $t_2(x_1, \ldots, x_n)$ (não dependem de θ) tais que

Método da Quantidade Pivotal

Seja $Q(\mathbf{X};\theta)$ uma quantidade pivotal com função densidade (ou de probabilidade) $f(q)$. Então para qualquer $0 < \gamma < 1$, existem q_1 e q_2 que dependem de γ tal que

$$P(q_1 < Q < q_2) = \gamma.$$

Assim, se para cada vetor de valores observados $(x_1, \ldots, x_n)$, existirem $t_1(x_1, \ldots, x_n)$ e $t_2(x_1, \ldots, x_n)$ (não dependem de θ) tais que

$$\{q_1 < Q < q_2\} \iff \{t_1 < g(\theta) < t_2\},$$

Método da Quantidade Pivotal

Seja $Q(\mathbf{X};\theta)$ uma quantidade pivotal com função densidade (ou de probabilidade) $f(q)$. Então para qualquer $0 < \gamma < 1$, existem q_1 e q_2 que dependem de γ tal que

$$P(q_1 < Q < q_2) = \gamma.$$

Assim, se para cada vetor de valores observados $(x_1, \ldots, x_n)$, existirem $t_1(x_1, \ldots, x_n)$ e $t_2(x_1, \ldots, x_n)$ (não dependem de θ) tais que

$$\{q_1 < Q < q_2\} \iff \{t_1 < g(\theta) < t_2\},$$

então $(T_1; T_2)$ é um **intervalo de confiança** (IC) de $100\gamma\%$ de $g(\theta)$.

Observações:

i. q_1 e q_2 são **independentes** de θ desde que a distribuição de Q também sejam.

Observações:

i. q_1 e q_2 são **independentes** de θ desde que a distribuição de Q também sejam.

ii. Para qualquer valor fixo γ, existem **muitos possíveis pares** $(q_1; q_2)$ que podem ser selecionados para $P(q_1 < Q < q_2) = \gamma$.

Observações:

i. q_1 e q_2 são **independentes** de θ desde que a distribuição de Q também sejam.

ii. Para qualquer valor fixo γ, existem **muitos possíveis pares** $(q_1; q_2)$ que podem ser selecionados para $P(q_1 < Q < q_2) = \gamma$.

iii. Para diferentes pares q_1 e q_2 produzem diferentes t_1 e t_2. Observa-se que $\{t_2(x_1, \ldots, x_n) - t_1(x_1, \ldots, x_n)\}$ é o **comprimento do IC**, então deve-se selecionar o menor par $(q_1; q_2)$ na qual o **comprimento do intervalo seja mínimo**.

Intervalos de Confiança para μ para σ^2 Conhecida

Considere $X_1, \ldots, X_n$ amostra aleatória tal que $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

Intervalos de Confiança para μ para σ^2 Conhecida

Considere $X_1, \ldots, X_n$ amostra aleatória tal que $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

i. σ^2 conhecida

Intervalos de Confiança para μ para σ^2 Conhecida

Considere $X_1, \ldots, X_n$ amostra aleatória tal que $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

i. σ^2 conhecida

Como cada $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ então $\overline{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

Considere $X_1, \ldots, X_n$ amostra aleatória tal que $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

i. σ^2 conhecida

Como cada $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ então $\overline{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

Logo,

$$Q = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

é uma quantidade pivotal.

Assim, temos que

Assim, temos que

$$
\begin{aligned}
P(q_1 < Q < q_2) &= P\left(q_1 < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < q_2\right) \\
&= P\left(q_1 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{X} - \mu < q_2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\
&= P\left(\overline{X} - q_2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + q_1 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\
&= P\left(\underbrace{\overline{X} - q_2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{\mathrm{t}_1} < \mu < \underbrace{\overline{X} + q_1 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{\mathrm{t}_2}\right) = \gamma
\end{aligned}
$$

Observa-se que $\ell = \mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_1$ é o comprimento do intervalo.

A partir disso, vamos minimizar ℓ, isto é,

Intervalos de Confiança para μ para σ^2 Conhecida

A partir disso, vamos minimizar ℓ, isto é,

$$\ell \;=\; \mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_1 \;=\; \overline{X} - q_1 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \overline{X} + q_2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;=\; (q_2 - q_1) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

A partir disso, vamos minimizar ℓ, isto é,

$$\ell \;=\; \mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_1 \;=\; \overline{X} - q_1 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \overline{X} + q_2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;=\; (q_2 - q_1) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Logo, minimizar ℓ é o mesmo que minimizar a quantidade $(q_2 - q_1)$.

Intervalos de Confiança para μ para σ^2 Conhecida

A partir disso, vamos minimizar ℓ, isto é,

$$\ell \ = \ \mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_1 \ = \ \overline{X} - q_1 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \overline{X} + q_2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ = \ (q_2 - q_1) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Logo, minimizar ℓ é o mesmo que minimizar a quantidade $(q_2 - q_1)$.

Vamos supor $q_2 = f(q_1)$. Então, temos que

Intervalos de Confiança para μ para σ^2 Conhecida

A partir disso, vamos minimizar ℓ, isto é,

$$\ell \;=\; \mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_1 \;=\; \overline{X} - q_1 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \overline{X} + q_2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;=\; (q_2 - q_1) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Logo, minimizar ℓ é o mesmo que minimizar a quantidade $(q_2 - q_1)$.

Vamos supor $q_2 = f(q_1)$. Então, temos que

$$\frac{d\ell}{dq_1} = 0 \implies f'(q_1) = 1.$$

Intervalos de Confiança para μ para σ^2 Conhecida

Observa-se que

Intervalos de Confiança para μ para σ^2 Conhecida

Observa-se que

$$P(q_1 < Q < q_2) \;=\; \int_{q_1}^{q_2} f(q)\,dq \;=\; \gamma$$

Intervalos de Confiança para μ para σ^2 Conhecida

Observa-se que

$$P(q_1 < Q < q_2) = \int_{q_1}^{q_2} f(q)\, dq = \gamma$$

Derivando-se em relação à q_1, tem-se que

Intervalos de Confiança para μ para σ^2 Conhecida

Observa-se que

$$P(q_1 < Q < q_2) \ = \ \int_{q_1}^{q_2} f(q)\,dq \ = \ \gamma$$

Derivando-se em relação à q_1, tem-se que

$$\frac{d}{dq_1}\left(\int_{q_1}^{q_2} f(q)\,dq\right) \ = \ \frac{d}{dq_1}(\gamma) \Longrightarrow f(q_2)\cdot q_2' - f(q_1)\cdot q_1' \ = \ 0,$$

Observa-se que

$$P(q_1 < Q < q_2) \ = \ \int_{q_1}^{q_2} f(q)\, dq \ = \ \gamma$$

Derivando-se em relação à q_1, tem-se que

$$\frac{d}{dq_1}\left(\int_{q_1}^{q_2} f(q)\, dq\right) \ = \ \frac{d}{dq_1}(\gamma) \implies f(q_2) \cdot q_2' - f(q_1) \cdot q_1' \ = \ 0,$$

o que implica que $f(q_2) \ = \ f(q_1)$.

Intervalos de Confiança para μ para σ^2 Conhecida

Observa-se que

$$P(q_1 < Q < q_2) \;=\; \int_{q_1}^{q_2} f(q)\, dq \;=\; \gamma$$

Derivando-se em relação à q_1, tem-se que

$$\frac{d}{dq_1}\left(\int_{q_1}^{q_2} f(q)\, dq\right) \;=\; \frac{d}{dq_1}(\gamma) \implies f(q_2)\cdot q_2' - f(q_1)\cdot q_1' \;=\; 0,$$

o que implica que $f(q_2) \;=\; f(q_1)$.

Como a distribuição de Q é simétrica e $f(q_2) \;=\; f(q_1)$, então

Observa-se que

$$P(q_1 < Q < q_2) = \int_{q_1}^{q_2} f(q)\,dq = \gamma$$

Derivando-se em relação à q_1, tem-se que

$$\frac{d}{dq_1}\left(\int_{q_1}^{q_2} f(q)\,dq\right) = \frac{d}{dq_1}(\gamma) \implies f(q_2)\cdot q_2' - f(q_1)\cdot q_1' = 0,$$

o que implica que $f(q_2) = f(q_1)$.

Como a distribuição de Q é simétrica e $f(q_2) = f(q_1)$, então

$$q_2 = q_1 \quad \text{ou} \quad q_2 = -q_1.$$

Logo, concluí-se que $q_2 = -q_1$.

Logo, concluí-se que $q_2 = -q_1$.

Como $Q \sim$ N(0,1) então $q_1 = -z_{\gamma/2}$ e $q_2 = z_{\gamma/2}$.

Intervalos de Confiança para μ para σ^2 Conhecida

Logo, concluí-se que $q_2 = -q_1$.

Como $Q \sim$ N(0,1) então $q_1 = -z_{\gamma/2}$ e $q_2 = z_{\gamma/2}$.

Portanto, o **intervalo de confiança** para μ com uma confiança de $100\gamma\%$ para σ^2 **conhecido** é dado por

Logo, concluí-se que $q_2 = -q_1$.

Como $Q \sim$ N(0,1) então $q_1 = -z_{\gamma/2}$ e $q_2 = z_{\gamma/2}$.

Portanto, o **intervalo de confiança** para μ com uma confiança de $100\gamma\%$ para σ^2 **conhecido** é dado por

$$\text{IC}[\mu, 100\gamma\%] = \left[\overline{X} - z_{\gamma/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; ; \; \overline{X} + z_{\gamma/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Intervalos de Confiança para μ para σ^2 Desconhecida

Considere $X_1, \ldots, X_n$ amostra aleatória tal que $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

Intervalos de Confiança para μ para σ^2 Desconhecida

Considere $X_1, \ldots, X_n$ amostra aleatória tal que $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

ii. σ^2 desconhecida

Intervalos de Confiança para μ para σ^2 Desconhecida

Considere $X_1, \ldots, X_n$ amostra aleatória tal que $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

ii. σ^2 desconhecida

Para o caso em que σ^2 é desconhecida, o problema em $Q = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ é a presença de σ. Assim, deve-se buscar outra quantidade pivotal.

Intervalos de Confiança para μ para σ^2 Desconhecida

Considere $X_1, \ldots, X_n$ amostra aleatória tal que $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

ii. σ^2 desconhecida

Para o caso em que σ^2 é desconhecida, o problema em $Q = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ é a presença de σ. Assim, deve-se buscar outra quantidade pivotal.

Uma alternativa é trabalhar com um estimador razoável para σ, isto é

Intervalos de Confiança para μ para σ^2 Desconhecida

Considere $X_1, \ldots, X_n$ amostra aleatória tal que $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

ii. σ^2 desconhecida

Para o caso em que σ^2 é desconhecida, o problema em $Q = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ é a presença de σ. Assim, deve-se buscar outra quantidade pivotal.

Uma alternativa é trabalhar com um estimador razoável para σ, isto é

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2}.$$

Pelo teorema 1, temos que

$$Q^{\star} = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \ \sim \ \mathrm{t}_{n-1}$$

é uma quantidade pivotal.

Intervalos de Confiança para μ para σ^2 Desconhecida

Pelo teorema 1, temos que

$$Q^\star = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \ \sim \ \mathrm{t}_{n-1}$$

é uma quantidade pivotal.

Assim,

$$\begin{aligned}
P(q_1^\star < Q^\star < q_2^\star) &= P\left(q_1^\star < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < q_2^\star\right) \\
&= P\left(q_1^\star \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < \overline{X} - \mu < q_2^\star \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right) \\
&= P\left(\overline{X} - q_2^\star \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + q_1^\star \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \gamma
\end{aligned}$$

Observa-se que $\ell^\star = (q_2^\star - q_1^\star)\dfrac{S}{\sqrt{n}}$.

Observa-se que $\ell^\star = (q_2^\star - q_1^\star)\dfrac{S}{\sqrt{n}}$.

Realizando-se procedimentos algébricos anteriores, tem-se que

$$f(q_2^\star) - f(q_1^\star) \implies q_2^\star \;=\; q_1^\star \quad \text{ou} \quad q_2^\star \;=\; -q_1^\star$$

Observa-se que $\ell^\star = (q_2^\star - q_1^\star)\dfrac{S}{\sqrt{n}}$.

Realizando-se procedimentos algébricos anteriores, tem-se que

$$f(q_2^\star) - f(q_1^\star) \implies q_2^\star \;=\; q_1^\star \quad \text{ou} \quad q_2^\star \;=\; -q_1^\star$$

Como $Q^\star \;\sim\; \mathrm{t}_{n-1}$ então $q_1^\star = -\mathrm{t}_{(1-\gamma)/2}$ e $q_2^\star = \mathrm{t}_{(1-\gamma)/2}$

Observa-se que $\ell^\star = (q_2^\star - q_1^\star)\dfrac{S}{\sqrt{n}}$.

Realizando-se procedimentos algébricos anteriores, tem-se que

$$f(q_2^\star) - f(q_1^\star) \implies q_2^\star = q_1^\star \quad \text{ou} \quad q_2^\star = -q_1^\star$$

Como $Q^\star \sim \mathrm{t}_{n-1}$ então $q_1^\star = -\mathrm{t}_{(1-\gamma)/2}$ e $q_2^\star = \mathrm{t}_{(1-\gamma)/2}$

Portanto, o **intervalo de confiança** para μ com uma **confiança** de $100\gamma\%$ para σ^2 **desconhecida** é dado por

Observa-se que $\ell^\star = (q_2^\star - q_1^\star)\dfrac{S}{\sqrt{n}}$.

Realizando-se procedimentos algébricos anteriores, tem-se que

$$f(q_2^\star) - f(q_1^\star) \implies q_2^\star = q_1^\star \quad \text{ou} \quad q_2^\star = -q_1^\star$$

Como $Q^\star \sim \mathrm{t}_{n-1}$ então $q_1^\star = -\mathrm{t}_{(1-\gamma)/2}$ e $q_2^\star = \mathrm{t}_{(1-\gamma)/2}$

Portanto, o **intervalo de confiança** para μ com uma **confiança** de $100\gamma\%$ para σ^2 **desconhecida** é dado por

$$\mathrm{IC}[\mu, 100\gamma\%] = \left[\overline{X} - \mathrm{t}_{(1-\gamma)/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \; ; \; \overline{X} + \mathrm{t}_{(1-\gamma)/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right].$$

Intervalos de Confiança para σ^2

Vamos considerar o caso mais geral: μ desconhecida.

Intervalos de Confiança para σ^2

Vamos considerar o caso mais geral: μ desconhecida.

Pelo teorema 1, temos que

Intervalos de Confiança para σ^2

Vamos considerar o caso mais geral: μ desconhecida.

Pelo teorema 1, temos que

$$Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \ \sim \ \chi^2_{n-1}$$

é uma quantidade pivotal. Logo,

$$\begin{aligned} P(q_1 < Q < q_2) &= P\left[q_1 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < q_2\right] \\ &= P\left[\frac{1}{q_2} < \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} < \frac{1}{q_1}\right] \\ &= P\left[\frac{(n-1)S^2}{q_2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{q_1}\right] = \gamma \end{aligned}$$

Vamos selecionar q_1 e q_2 de tal forma que o comprimento ℓ é mínimo.

Vamos selecionar q_1 e q_2 de tal forma que o comprimento ℓ é mínimo.

Assim,

Vamos selecionar q_1 e q_2 de tal forma que o comprimento ℓ é mínimo.

Assim,

$$\ell = \frac{(n-1)S^2}{q_1} - \frac{(n-1)S^2}{q_2} = \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}\right) \cdot (n-1)S^2$$

Vamos selecionar q_1 e q_2 de tal forma que o comprimento ℓ é mínimo.

Assim,

$$\ell = \frac{(n-1)S^2}{q_1} - \frac{(n-1)S^2}{q_2} = \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}\right) \cdot (n-1)S^2$$

Vamos supor $q_2 = f(q_1)$. Então, temos que

Vamos selecionar q_1 e q_2 de tal forma que o comprimento ℓ é mínimo.

Assim,

$$\ell = \frac{(n-1)S^2}{q_1} - \frac{(n-1)S^2}{q_2} = \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}\right) \cdot (n-1)S^2$$

Vamos supor $q_2 = f(q_1)$. Então, temos que

$$\frac{d\ell}{dq_1} = 0 \Longrightarrow f'(q_1) = \frac{q_2^2}{q_1^2}.$$

Observa-se que

Observa-se que

$$P(q_1 < Q < q_2) = \int_{q_1}^{q_2} f(q)\, dq = \gamma$$

Observa-se que

$$P(q_1 < Q < q_2) \; = \; \int_{q_1}^{q_2} f(q)\, dq \; = \; \gamma$$

Derivando-se em relação à q_1, tem-se que

Intervalos de Confiança para σ^2

Observa-se que

$$P(q_1 < Q < q_2) = \int_{q_1}^{q_2} f(q)\, dq = \gamma$$

Derivando-se em relação à q_1, tem-se que

$$\frac{d}{dq_1}\left(\int_{q_1}^{q_2} f(q)\, dq\right) = \frac{d}{dq_1}(\gamma) \Longrightarrow f(q_2)\cdot q_2' - f(q_1)\cdot q_1' = 0,$$

Observa-se que

$$P(q_1 < Q < q_2) \;=\; \int_{q_1}^{q_2} f(q)\, dq \;=\; \gamma$$

Derivando-se em relação à q_1, tem-se que

$$\frac{d}{dq_1}\left(\int_{q_1}^{q_2} f(q)\, dq\right) \;=\; \frac{d}{dq_1}(\gamma) \Longrightarrow f(q_2)\cdot q_2' - f(q_1)\cdot q_1' \;=\; 0,$$

Logo,

$$q_2^2 \cdot f(q_2) \;=\; q_1^2 \cdot f(q_1)$$

.

Observação:

Observação:

A **solução** para q_1 e q_2 pode ser obtida por meio da **integração numérica**, e consequentemente, garante-se que ℓ é mínimo.

Observação:

A **solução** para q_1 e q_2 pode ser obtida por meio da **integração numérica**, e consequentemente, garante-se que ℓ é mínimo.

Além disso,

$$P[Q < q_1] \; = \; P[Q > q_2] \; = \; \frac{\alpha}{2} \quad \text{em que} \quad \alpha = 1 - \gamma.$$

Observação:

A **solução** para q_1 e q_2 pode ser obtida por meio da **integração numérica**, e consequentemente, garante-se que ℓ é mínimo.

Além disso,

$$P[Q < q_1] \;=\; P[Q > q_2] \;=\; \frac{\alpha}{2} \quad \text{em que} \quad \alpha = 1 - \gamma.$$

Assim, $q_1 = \chi^2_{1-\alpha/2}$ e $q_2 = \chi^2_{\alpha/2}$

Observação:

A **solução** para q_1 e q_2 pode ser obtida por meio da **integração numérica**, e consequentemente, garante-se que ℓ é mínimo.

Além disso,

$$P[Q < q_1] \;=\; P[Q > q_2] \;=\; \frac{\alpha}{2} \quad \text{em que} \quad \alpha = 1 - \gamma.$$

Assim, $q_1 = \chi^2_{1-\alpha/2}$ e $q_2 = \chi^2_{\alpha/2}$

Portanto,

Observação:

A **solução** para q_1 e q_2 pode ser obtida por meio da **integração numérica**, e consequentemente, garante-se que ℓ é mínimo.

Além disso,

$$P[Q < q_1] \ = \ P[Q > q_2] \ = \ \frac{\alpha}{2} \quad \text{em que} \quad \alpha = 1 - \gamma.$$

Assim, $q_1 = \chi^2_{1-\alpha/2}$ e $q_2 = \chi^2_{\alpha/2}$

Portanto,

$$\text{IC}[\sigma^2, 100\gamma\%] = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}} \ ; \ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \right].$$

Interpretação dos Intervalos de Confiança

Observa-se que **não** é apropriado dizer que o **intervalo contém o parâmetro** populacional, apesar de ser aceita esse tipo de interpretação.

Interpretação dos Intervalos de Confiança

Observa-se que **não** é apropriado dizer que o **intervalo contém o parâmetro** populacional, apesar de ser aceita esse tipo de interpretação.

Porém, fazendo-se uso da **interpretação frequentista**, de cada 100 intervalos construídos a partir do intervalo aleatório, $\gamma\%$ deles devem **conter o parâmetro populacional** estudado.

Intervalos de Confiança Aproximados

Vamos considerar **IC aproximados** para um parâmetro θ (ou $g(\theta)$) baseados na **distribuição assintótica do EMV** de θ (ou $g(\theta)$).

Intervalos de Confiança Aproximados

Vamos considerar **IC aproximados** para um parâmetro θ (ou $g(\theta)$) baseados na **distribuição assintótica do EMV** de θ (ou $g(\theta)$).

Como a distribuição assintótica do EMV $\widehat{\theta}$ é dado por

Intervalos de Confiança Aproximados

Vamos considerar **IC aproximados** para um parâmetro θ (ou $g(\theta)$) baseados na **distribuição assintótica do EMV** de θ (ou $g(\theta)$).

Como a distribuição assintótica do EMV $\widehat{\theta}$ é dado por

$$\sqrt{n}\,(\widehat{\theta} - \theta) \;\sim\; \mathrm{N}\left(0\,,\, \frac{1}{\mathrm{I_F}(\theta)}\right), \quad n \to \infty.$$

Intervalos de Confiança Aproximados

Vamos considerar **IC aproximados** para um parâmetro θ (ou $g(\theta)$) baseados na **distribuição assintótica do EMV** de θ (ou $g(\theta)$).

Como a distribuição assintótica do EMV $\widehat{\theta}$ é dado por

$$\sqrt{n}\,(\widehat{\theta} - \theta) \;\sim\; \mathrm{N}\left(0\,,\,\frac{1}{\mathrm{I_F}(\theta)}\right), \quad n \to \infty.$$

Então,

Intervalos de Confiança Aproximados

Vamos considerar **IC aproximados** para um parâmetro θ (ou $g(\theta)$) baseados na **distribuição assintótica do EMV** de θ (ou $g(\theta)$).

Como a distribuição assintótica do EMV $\widehat{\theta}$ é dado por

$$\sqrt{n}\,(\widehat{\theta} - \theta) \;\sim\; \mathrm{N}\left(0\,,\, \frac{1}{\mathrm{I_F}(\theta)}\right), \quad n \to \infty.$$

Então,

$$\frac{\widehat{\theta} - \theta}{\sqrt{\left(n \cdot \mathrm{I_F}(\theta)\right)^{-1}}} \;\sim\; \mathrm{N}\,(0, 1)\,, \quad n \to \infty.$$

Intervalos de Confiança Aproximados

Vamos considerar **IC aproximados** para um parâmetro θ (ou $g(\theta)$) baseados na **distribuição assintótica do EMV** de θ (ou $g(\theta)$).

Como a distribuição assintótica do EMV $\widehat{\theta}$ é dado por

$$\sqrt{n}\,(\widehat{\theta} - \theta) \;\sim\; \mathrm{N}\left(0\,,\,\frac{1}{\mathrm{I_F}(\theta)}\right), \quad n \to \infty.$$

Então,

$$\frac{\widehat{\theta} - \theta}{\sqrt{\left(n \cdot \mathrm{I_F}(\theta)\right)^{-1}}} \;\sim\; \mathrm{N}\,(0, 1)\,, \quad n \to \infty.$$

Como $\mathrm{I_F}(\theta)$ pode depender de θ, toma-se $\mathrm{I_F}(\widehat{\theta})$, sendo $\widehat{\theta}$ o EMV de θ.

Intervalos de Confiança Aproximados

Observa-se que

Intervalos de Confiança Aproximados

Observa-se que

$$Q(\mathbf{X};\theta) \;=\; \frac{\widehat{\theta}-\theta}{\sqrt{\left(n\cdot \mathrm{I_F}(\widehat{\theta})\right)^{-1}}} \;\sim\; \mathrm{N}\,(0,1)\,, \quad n \to \infty,$$

Intervalos de Confiança Aproximados

Observa-se que

$$Q(\mathbf{X};\theta) \;=\; \frac{\widehat{\theta}-\theta}{\sqrt{\left(n\cdot \mathrm{I_F}(\widehat{\theta})\right)^{-1}}} \;\sim\; \mathrm{N}\left(0,1\right), \quad n\to\infty,$$

é **quantidade pivotal** com distribuição assintótica igual a **distribuição normal padrão**.

Observa-se que

$$Q(\mathbf{X};\theta) \;=\; \frac{\widehat{\theta}-\theta}{\sqrt{\left(n\cdot \mathrm{I_F}(\widehat{\theta})\right)^{-1}}} \;\sim\; \mathrm{N}\,(0,1)\,, \quad n\to\infty,$$

é **quantidade pivotal** com distribuição assintótica igual a **distribuição normal padrão**.

Para uma função de θ, isto é $g(\theta)$, a quantidade pivotal é dada por

Observa-se que

$$Q(\mathbf{X};\theta) \;=\; \frac{\widehat{\theta}-\theta}{\sqrt{\left(n\cdot \mathrm{I_F}(\widehat{\theta})\right)^{-1}}} \;\sim\; \mathrm{N}\,(0,1)\,, \quad n\to\infty,$$

é **quantidade pivotal** com distribuição assintótica igual a **distribuição normal padrão**.

Para uma função de θ, isto é $g(\theta)$, a quantidade pivotal é dada por

$$Q(\mathbf{X};g(\theta)) \;=\; \frac{\widehat{g(\theta)}-g(\theta)}{\sqrt{\frac{(g'(\theta))^2}{\mathrm{I_F}(\widehat{\theta})}}} \;\sim\; \mathrm{N}\,(0,1)\,, \quad n\to\infty.$$

Exercícios

1. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ a.a. tal que $X_i \sim \mathrm{N}(\theta, \theta)$. Sugira uma quantidade pivotal para construir um intervalo de confiança para θ com $\gamma = 1 - \alpha$.

Exercícios

1. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ a.a. tal que $X_i \sim \text{N}(\theta, \theta)$. Sugira uma quantidade pivotal para construir um intervalo de confiança para θ com $\gamma = 1 - \alpha$.

2. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ a.a .tal que $X_i \sim \text{Bernoulli}(\theta)$. Determine os intervalos de confiança assintóticos (aproximados) para θ e $g(\theta) = \theta \cdot (1 - \theta)$ com γ%.

Exercícios

1. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ a.a. tal que $X_i \sim \mathrm{N}(\theta, \theta)$. Sugira uma quantidade pivotal para construir um intervalo de confiança para θ com $\gamma = 1 - \alpha$.

2. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ a.a .tal que $X_i \sim \mathrm{Bernoulli}(\theta)$. Determine os intervalos de confiança assintóticos (aproximados) para θ e $g(\theta) = \theta \cdot (1 - \theta)$ com $\gamma\%$.

3. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ a.a. tal que $X_i \sim \exp(\theta)$.
   a. Determine o EMV de θ e a informação de Fisher $\mathrm{I_F}(\theta)$.
   b. Construa uma quantidade pivotal para θ em grandes amostras.
   c. Construa um IC aproximado para θ com $\gamma\%$ de confiança.