Principais Distribuições de Probabilidade

Rodrigo R. Pescim

Universidade Estadual de Londrina

15 de junho de 2020

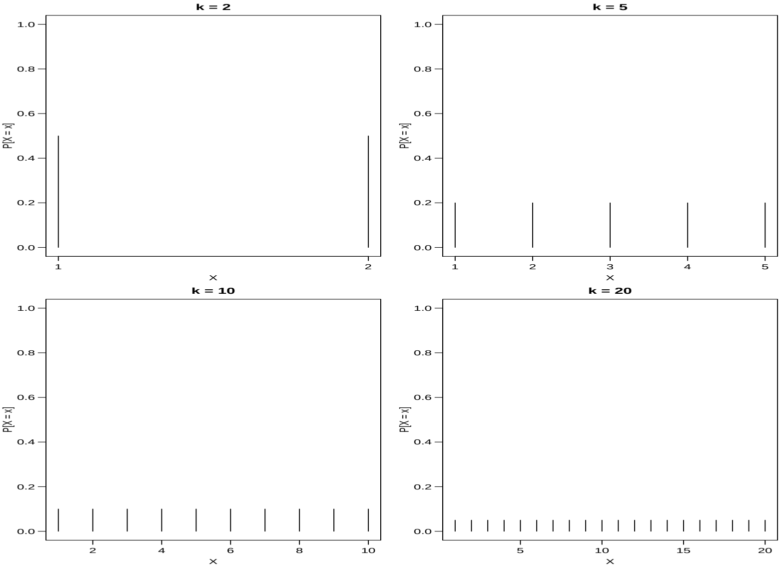
Distribuição Uniforme Discreto

Definição. Seja X uma v.a assumindo valores $1, 2, \dots, k$. Dizemos que X segue o modelo **Uniforme Discreto** se atribui a mesma probabilidade $1/k$ a cada um desses k valores.

Então, sua função de probabilidade é dada por

$$P[X = j] = \frac{1}{k}, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Notação: $X \sim \mathrm{U}_D[1, k]$


k = 2
k = 5
k = 10
k = 20
P[X=x]
x
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0

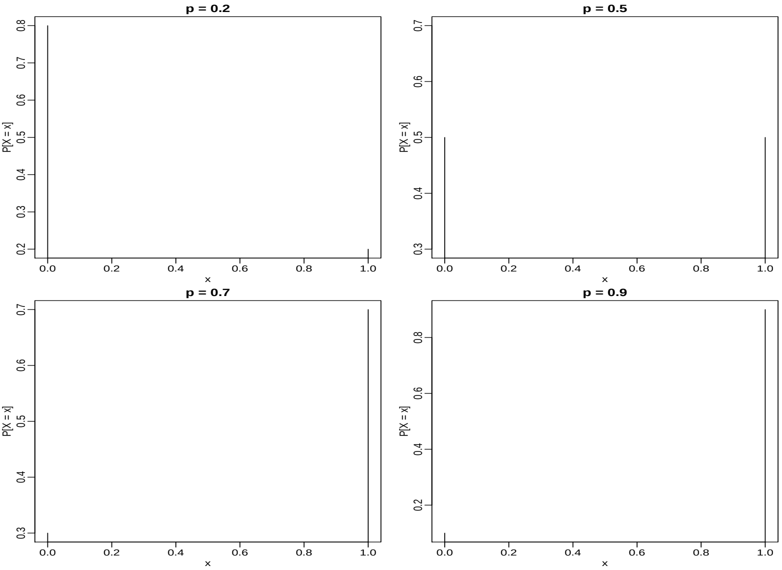
Distribuição de Bernoulli

Definição. Uma variável aleatória X segue a distribuição de Bernoulli se assume apenas os valores 0 ("fracasso") ou 1 ("sucesso"). Sua função de probabilidade é dada por

$$P[X = x] = p^x (1 - p)^{1-x}, \qquad x = 0, 1$$

O parâmetro $0 \leq p \leq 1$ é a probabilidade de sucesso.

Notação: $X \sim \text{Bernoulli}(p)$


p = 0.2
p = 0.5
p = 0.7
p = 0.9
P[X = x]
x

Distribuição Binomial

Definição: Seja um experimento realizado dentro das seguintes condições:

i) São realizados n "ensaios" de Bernoulli independentes.

ii) Cada ensaio só pode ter dois resultados possíveis: "sucesso" ou "fracasso".

iii) A probabilidade p de sucesso em cada ensaio é a mesma.

Vamos definir a V.A. X como o **número total de sucessos nos n ensaios** de Bernoulli. Portanto, X poderá assumir os valores $0, 1, \ldots, n$.

Distribuição Binomial

Vamos determinar a distribuição de probabilidade de X, por meio da probabilidade de um **número genérico** x **de sucessos**.

Suponha que ocorram sucessos (1) apenas nos x primeiros ensaios, e fracassos (0) nos $n - x$ ensaios restantes

$$\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1,}_{x}\underbrace{0, 0, 0, \ldots, 0}_{n-x}$$

Como os ensaios são **independentes**, a probabilidade de ocorrência de x sucessos em n tentativas é **uma extensão do modelo de Bernoulli para** n **ensaios**, ou seja,

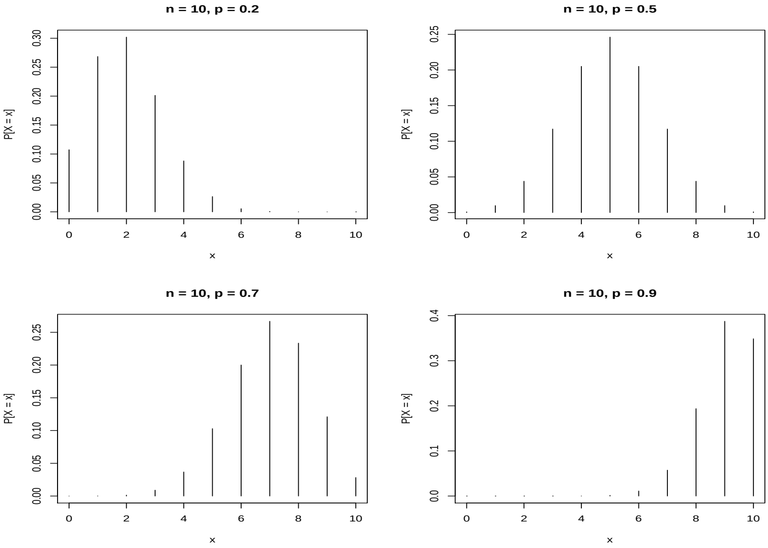
$$\underbrace{p \cdot p \cdot p \cdots p \cdot}_{x}\underbrace{(1-p) \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdots (1-p)}_{n-x} = p^x(1-p)^{n-x}$$

Porém, o evento: "x sucessos em n ensaios" pode ocorrer de diferentes maneiras (ordens) distintas, todas com a mesma probabilidade.

Como o número de ordens é o **número de combinações de n elementos tomados x a x**, então **a probabilidade de ocorrerem x sucessos em n ensaios de Bernoulli** é representada por dada por

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \qquad x = 0, 1, \ldots, n,$$

Notação: $X \sim \text{binomial}(n, p)$



n = 10, p = 0.2
n = 10, p = 0.5
n = 10, p = 0.7
n = 10, p = 0.9
P[X = x]
x

Distribuição Poisson

Definição: Seja um experimento realizado nas seguintes condições:

i) As ocorrências são independentes

ii) As ocorrências são aleatórias

iii) A variável aleatória X é o número de ocorrências de um evento **ao longo de algum intervalo** (de tempo ou espaço)

Vamos definir a V.A. X como o **o número de ocorrências em um intervalo**. Portanto, X poderá assumir os valores $0, 1, \ldots$ (sem limite superior).

Distribuição de Poisson

Considere então agora que o fenômeno de interesse é observado em um intervalo **contínuo** (tempo, espaço,...), de tamanho t.

O número de eventos que ocorrem no intervalo fixo $[0, t)$ é uma variável aleatória X ("número de sucessos").

Podemos então inicialmente tentar aproximar esses eventos à um ensaio de Bernoulli, criando n subintervalos muito pequenos, de forma que este processo satisfaça as seguintes condições:

Distribuição Poisson

i) Em um período de tempo muito curto, somente 1 ou 0 eventos podem ocorrer (dois ou mais eventos são impossíveis)

ii) **O valor esperado de sucessos**, np, é **constante** para qualquer tamanho de intervalo. Chamaremos essa constante de $\lambda = np$.

iii) Dessa forma, a probabilidade de sucesso de um evento será $p = \frac{\lambda}{n}$

iv) Cada subintervalo é um ensaio de Bernoulli independente

Um experimento que satisfaça estas condições é chamado de **processo de Poisson**.

Distribuição de Poisson

Note que se estas condições forem satisfeitas, se continuarmos **aumentando o número de subintervalos (n)**, então **a probabilidade p deverá diminuir** para que $\lambda = np$ permaneça **constante**

Dessa forma, estamos interessados em determinar a distribuição da V.A. X, isto é, $X \sim \text{binomial}(n, p = \lambda/n)$ no limite $n \to \infty$ e $p \to 0$

$$
\begin{aligned}
P[X = x] &= \lim_{n\to\infty} \binom{n}{x} p^x \, (1-p)^{n-x} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{x!(n-x)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} \\
&= \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^x}{x!}
\end{aligned}
$$

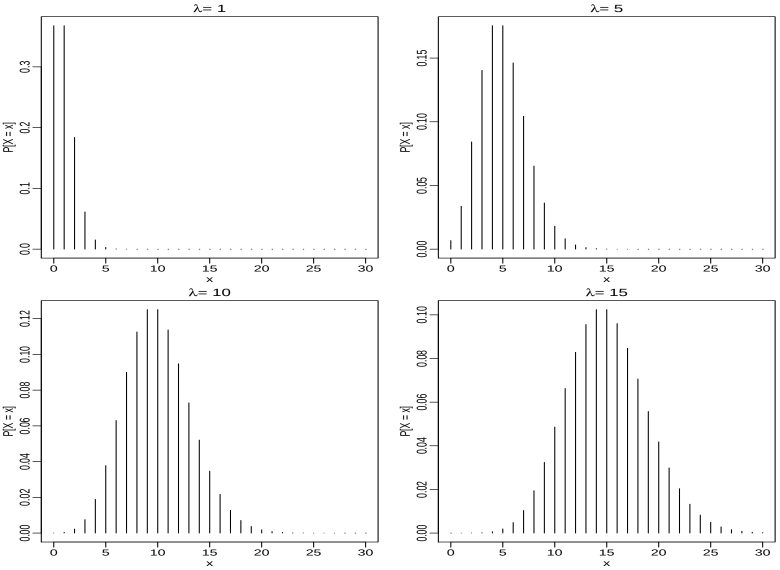
Distribuição de Poisson

Uma V.A. X segue **distribuição de Poisson**, a partir de um processo de Poisson, se sua **função de probabilidade** for representada por

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{x}}{x!}, \qquad x = 0, 1, \ldots$$

em que, o parâmetro $\lambda \geq 0$ representa a **taxa média de ocorrência** por unidade de medida (tempo, por exemplo).

Notação: $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$


λ= 1
λ= 5
λ= 10
λ= 15
P[X = x]
x

Distribuição Geométrica

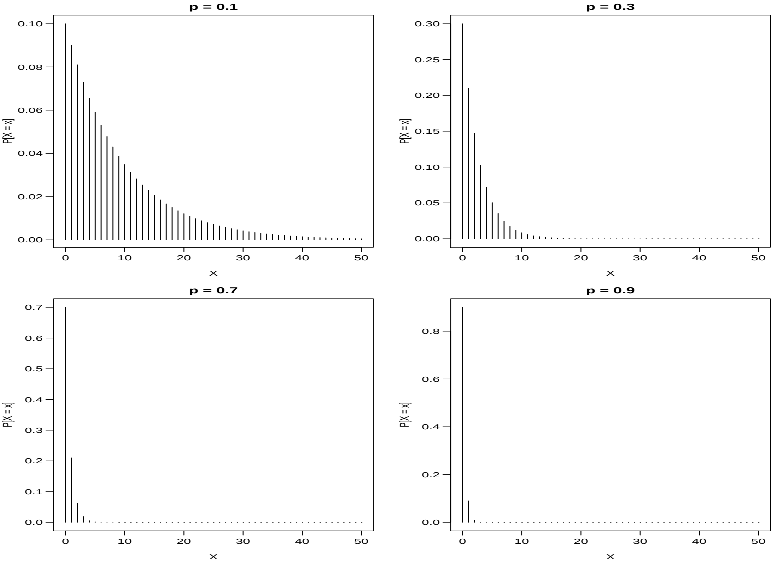
Considere o número (k) de ensaios Bernoulli **até a ocorrência do primeiro sucesso**.

Nesse caso, diz-se que que a v.a X tem distribuição Geométrica de parâmetro p, e sua função de probabilidade é representada por

$$P(X = k) = p\,(1 - p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Observa-se que $0 \leq p \leq 1$ é o parâmetro que representa a probabilidade de sucesso.

Notação: $X \sim \text{Geo}(p)$

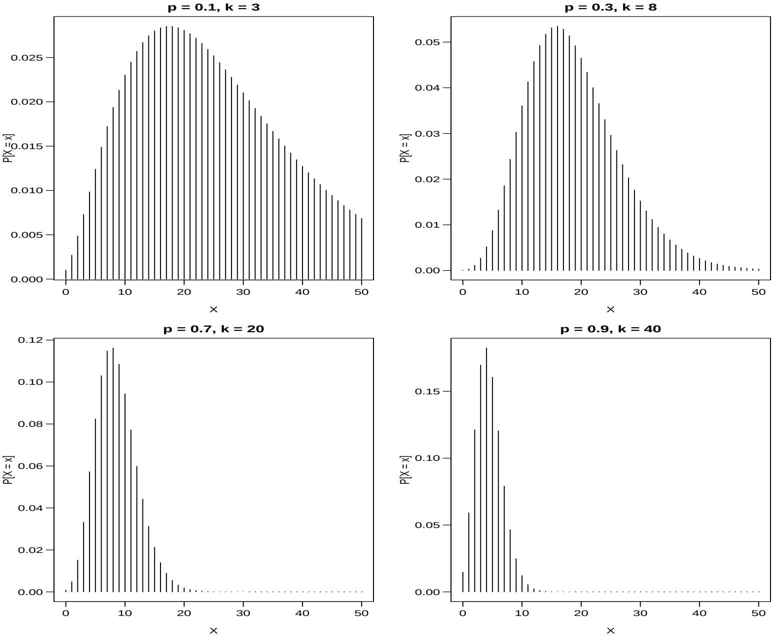

p = 0.1
p = 0.3
p = 0.7
p = 0.9
P[X = x]
x

Seja X uma variável aleatória que **considera o número de tentativas necessárias para se obter k sucessos, em n ensaios de Bernoulli** com probabilidade p em cada ensaio.

Definição. Seja X uma variável aleatória que fornece **o número de ensaios até o k-ésimo sucesso**. Assim X tem uma distribuição binomial negativa com parâmetro $p \in (0,1)$, se sua função de probabilidade é dada por:

$$\mathbb{P}\left(X = x\right) = \begin{cases} \begin{pmatrix} x-1 \\ k-1 \end{pmatrix} p^k (1-p)^{x-k}, & \text{se } x = k, k+1, \ldots \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Notação: $X \sim \mathrm{BN}(p,k)$


p = 0.1, k = 3
p = 0.3, k = 8
p = 0.7, k = 20
p = 0.9, k = 40
P[X = x]
x

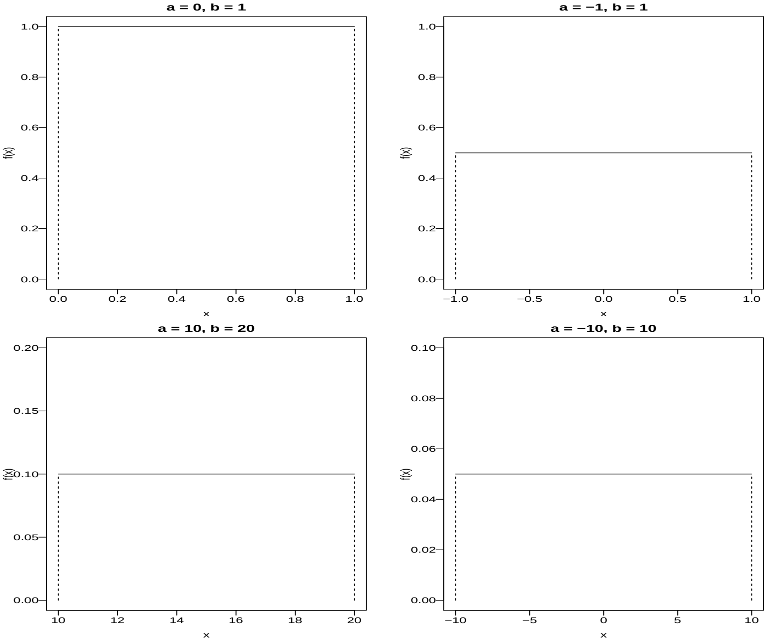
Distribuição Uniforme

Definição. Uma variável aleatória X tem distribuição uniforme (contínua) no intervalo $[a, b]$, $a < b$, se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathrm{I}_{[a,b]}(x)$$

Notação: $X \sim \mathrm{U}[a, b]$

Esperança e variância: $\mathrm{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$ e $\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.


a = 0, b = 1
f(x)
x
a = −1, b = 1
f(x)
x
a = 10, b = 20
f(x)
x
a = −10, b = 10
f(x)
x

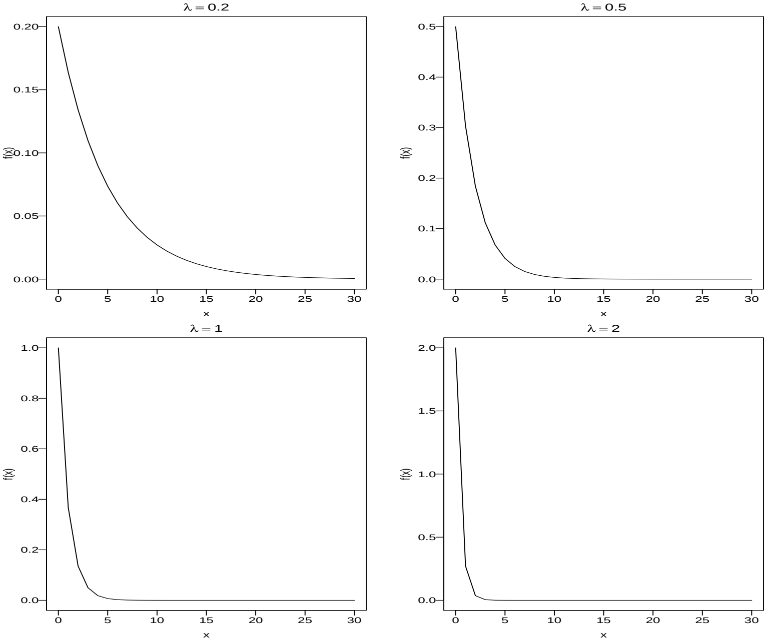
Distribuição Exponencial

Definição. Uma variável aleatória contínua X $(x > 0)$, segue a distribuição exponencial com parâmetro $\lambda > 0$ se sua função densidade é representada por

$$f_X(x) = \lambda \, \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{x}} \, \mathsf{I}_{(0,\infty)}(\mathrm{x})$$

Notação: $X \sim \exp(\lambda)$

Esperança e variância: $\mathrm{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ e $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.


λ = 0.2
λ = 0.5
λ = 1
λ = 2
f(x)
x
0.00 0.05 0.10 0.15 0.20
0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5
0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0
0.0 0.5 1.0 1.5 2.0
0 5 10 15 20 25 30

Distribuição Normal

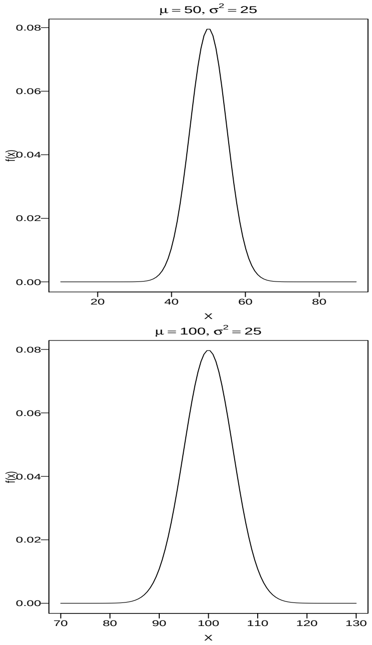
Definição. Diz-se que uma variável aleatória X segue a distribuição normal (Gaussiana) se sua função densidade é dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad -\infty < x < \infty$$

em que $\mu \in \mathbb{R}$ é o parâmetro de locação e $\sigma > 0$ é o parâmetro de escala.

Notação: $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

Esperança e variância: $\mathrm{E}(X) = \mu$ e $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$


μ = 50, σ² = 25
μ = 50, σ² = 100
μ = 100, σ² = 25
μ = 200, σ² = 25
f(x)
x
0.00
0.01
0.02
0.03
0.04
0.06
0.08
20
40
60
80
70
90
100
110
120
130
170
180
190
200
210
220
230

Propriedades curva normal

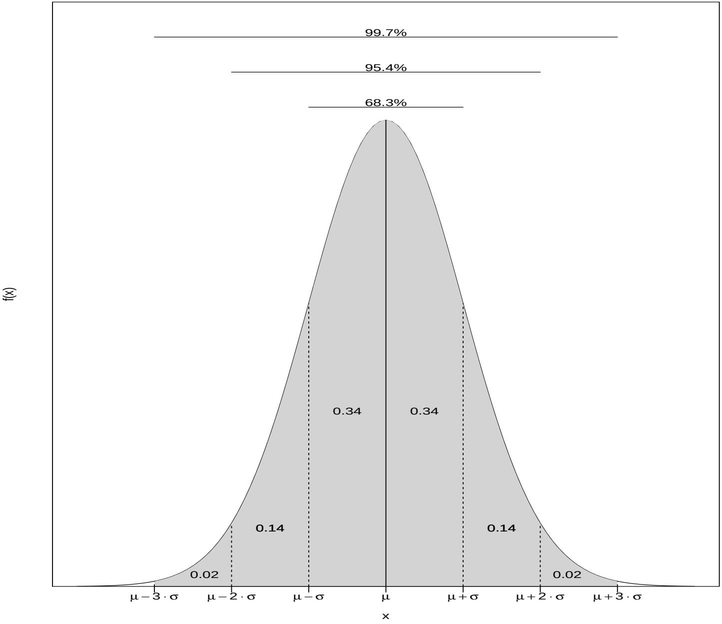
- É simétrica em relação à μ
- O ponto de máximo (moda) de $f_X(x)$ é o ponto $x = \mu$
- Os pontos de inflexão da função são $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$
- A curva é assintótica em relação ao eixo x

Para qualquer uma variável aleatória que segue distribuição normal X, valem as seguintes relações:

$$
\begin{aligned}
&P[X > \mu] = P[X < \mu] \\
&P[\mu - \sigma < X < \mu + \sigma] \approxeq 0,683 \\
&P[\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma] \approxeq 0,954 \\
&P[\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma] \approxeq 0,997
\end{aligned}
$$

Portanto, 6σ é frequentemente referida como a **largura** de uma distribuição normal.

Métodos mais avançados de integração podem ser utilizados para mostrar que a área sob a função densidade da normal de $-\infty < x < \infty$ é igual a 1.


99.7%
95.4%
68.3%
f(x)
0.34
0.34
0.14
0.14
0.02
0.02
μ − 3 · σ
μ − 2 · σ
μ − σ
μ
μ + σ
μ + 2 · σ
μ + 3 · σ
x

Distribuição Gama

Definição. Uma variável aleatória X tem distribuição Gama com parâmetros $\alpha > 0$ (também denominado parâmetro de forma) e $\beta > 0$ (parâmetro de escala), denotando-se $X \sim$ Gama(α, β), se sua função densidade é definida por

$$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \; I_{(0,\infty)},$$

em que $\Gamma(\cdot)$ é a função gama, isto é

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} \, dx.$$

Notação: $X \sim \text{Ga}(\alpha, \beta)$

Esperança e variância: $\text{E}(X) = \dfrac{\alpha}{\beta}$ e $\text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$

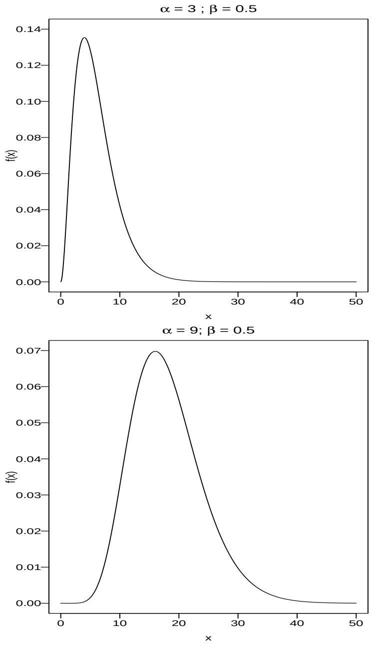
Propriedades da Função Gama

Definição. Seja Γ uma função definida no conjunto dos reais positivos que assume qualquer valor real, isto é,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}\, e^{-x}\, dx.$$

Principais Propriedades:

- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$
- $\Gamma(x) = x\,\Gamma(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$


α = 3 ; β = 0.5
α = 0.5 ; β = 0.5
α = 9; β = 0.5
α = 15 ; β = 1
f(x)
x

Definição. A variável aleatória X segue distribuição beta , com dois parâmetros $a > 0$ e $b > 0$ cuja função de densidade para valores $0 < x < 1$ é dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{B(a, b)} \, x^{a-1} \, (1 - x)^{b-1} \quad x \in (0, 1),$$

em que $B(a, b)$ é a função beta, isto é

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} \, (1 - x)^{b-1} \, dx$$

Notação: $X \sim \text{beta}(a, b)$

Esperança e variância: $\mathrm{E}(X) = \dfrac{a}{a + b}$ e $\mathrm{Var}(X) = \frac{a\,b}{(a+b+1)(a+b)^2}$

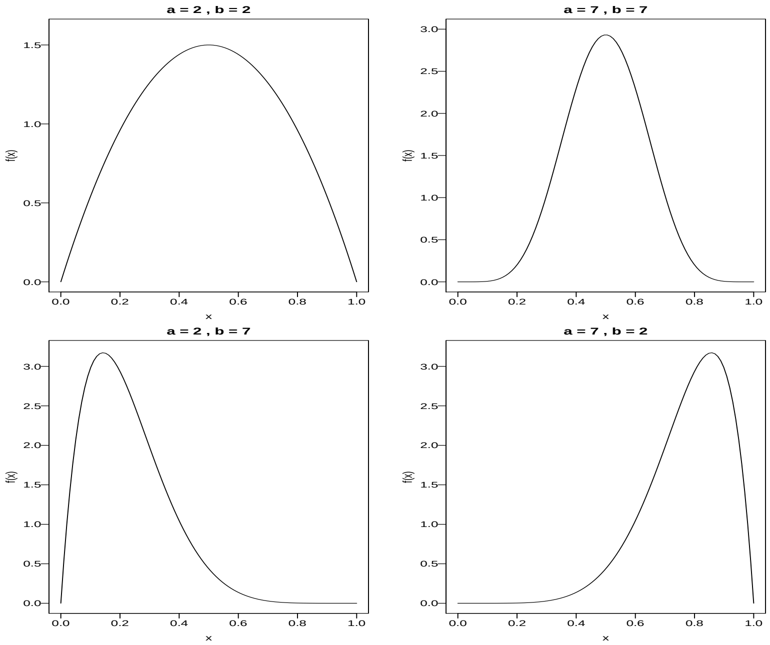
Propriedades da Função Beta

Definição. A função beta, também chamada de integral de Euler, é definida por

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}\,(1-x)^{b-1}\,dx, \;\; a > 0, \;\; b > 0$$

Principais Propriedades:

- $B(a,b) = B(b,a)$
- $B(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$
- $B(a,b) = \dfrac{(a-1)!\,(b-1)!}{(a+b-1)!}$


a = 2 , b = 2
a = 7 , b = 7
a = 2 , b = 7
a = 7 , b = 2
f(x)
x
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.5
1.5
2.0
2.5
3.0

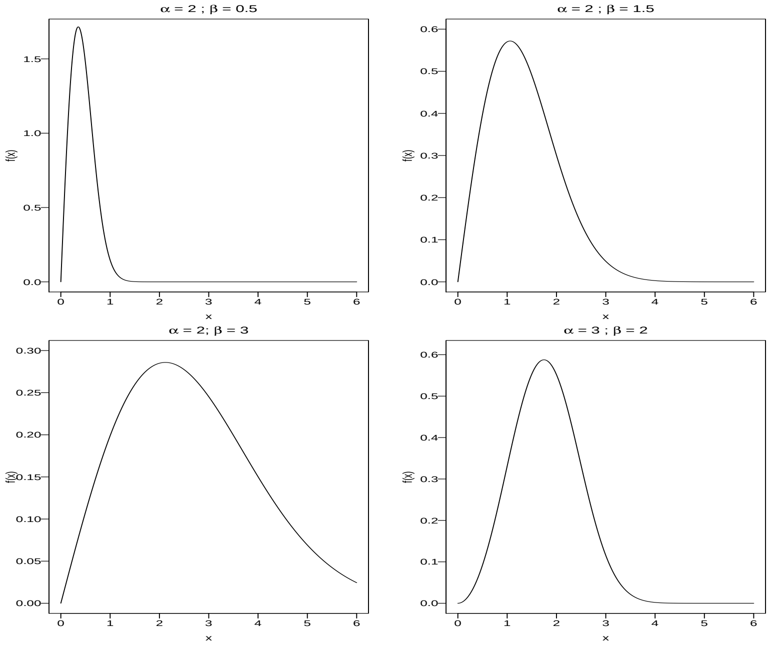
Definição. Uma variável aleatória X segue distribuição Weibull com parâmetros $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, se sua função densidade é representada por

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta^\alpha}\, x^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right].$$

Notação: $X \sim \text{Weibull}(\alpha, \beta)$

Esperança e variância:

$$E(X) = \beta\,\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \quad \text{e} \quad Var(X) = \beta^2\left[\Gamma\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right) - \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right]$$


α = 2 ; β = 0.5
α = 2 ; β = 1.5
α = 2; β = 3
α = 3 ; β = 2
f(x)
x