ALUNO(a): ______________________________ Turma: 1000

1) Mostre que:

(a) Se $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ então $M_X(t) = p\mathrm{e}^{\mathrm{t}} + 1 - \mathrm{p}$, $0 \leq p \leq 1$.

(b) Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então $M_X(t) = \mathrm{e}^{\mu\,\mathrm{t} + \frac{\sigma^2 \mathrm{t}^2}{2}}$.

(c) Se $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ então $M_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{\mathrm{t}}-1)}$, $\lambda > 0$.

(d) Se $X \sim \text{Geo}(p)$ então $M_X(t) = \frac{p\mathrm{e}^{\mathrm{t}}}{1-(1-p)\mathrm{e}^{\mathrm{t}}}$, $0 \leq p \leq 1$.

(e) Se $X \sim U(a, b)$ então $M_X(t) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{tb}} - \mathrm{e}^{\mathrm{ta}}}{t(b-a)}$, $a < b$.

(f) Se $X \sim \exp(\lambda)$ então $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$, $\lambda > 0$.

(g) Se $X \sim \text{gama}(\alpha, \lambda)$ então $M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\alpha}$, $\alpha > 0$, $\lambda > 0$.

2) Determine o valor esperado e a variância para cada variável aleatória X do exercício anterior.

3) Suponha que a expectativa de vida, em anos, é uma variável aleatória $T \sim \exp(1/60)$.

(a) Determine, para um indivíduo selecionado ao acaso, a probabilidade de viver pelo menos até os 70 anos.

(b) Determine, para um indivíduo selecionado ao acaso, a probabilidade de morrer antes dos 70 anos, sabendo-se que o indivíduo acabou de completar 50 anos.

(c) Calcule o valor de m tal que $P(T > m) = 1/2$.

4) Contaminação é um problema na fabricação de discos ópticos de armazenagem. Neste sentido, um estudo tem por interesse investigar o número de partículas de contaminação que ocorrem em um disco óptico por cm^2 de superfície. Sabe-se que o número médio de partículas por cm^2 de superfície média é 0,1. A área do disco sob estudo é 100 cm^2. Determine a probabilidade de que no mínimo três partículas ocorram na área do disco sob estudo.

5) Uma empresa faz transporte de material por meio de caminhões e o volume de encomendas que ela recebe oscila ao longo do tempo. Admita que, escolhendo ao acaso um dia de trabalho:

- O número de entregas a serem feitas segue uma distribuição de Poisson com média de 5 entregas/dia;
- A empresa pode contratar, por empreitada, trabalhadores autônomos que constam de uma lista de 6 nomes. Todos eles tem a mesma chance p de virem a ser contratados para servir à empresa naquele dia, e há independência entre as decisões de se contratar ou não relativas aos diversos trabalhadores da lista;

(a) Qual é a probabilidade de que nesse dia sejam feitas no máximo 4 entregas, dado que ocorrerão pelo menos 3 entregas?

(b) Quais são os valores possíveis de p, se a probabilidade de serem recrutados exatamente 3 empregados da lista de 6 é igual a $0,27648$?

ALUNO(a): ______________________________ Turma: 1000

6) Mostre que, para α e β positivos, mostre que a função f

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\,(x-a)^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-\beta(\mathrm{x}-\mathrm{a})}\,\mathrm{I}_{(\mathrm{a},\infty)}(\mathrm{x})$$

é função densidade probabilidade.

7) Suponha que o volume, em litros, de uma garrafa de refrigerante segue distribuição normal com parâmetros $\mu = 1$ e $\sigma^2 = 0,0001$. Se três garrafas forem sorteadas ao acaso, pergunta-se a probabilidade de:

(a) Todas as três terem pelo menos 980 ml?

(b) Não mais de uma ficar com volume inferior a 980ml?

8) Sejam X e Y tais que $X \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Calcule a função geradora de momentos de $Z = X + Y$. Qual é a distribuição de Z?