Ensaios Fatoriais

Rodrigo R. Pescim

Universidade Estadual de Londrina

16 de junho de 2020

Muitos experimentos envolvem o estudo dos **efeitos de dois ou mais fatores**. Em geral, experimentos fatoriais são mais eficientes para este tipo de experimento, pois estudam, ao mesmo tempo, os efeitos de dois ou mais tipos de tratamentos ou fatores.

Cada subdivisão de um fator é denominada **nível do fator** e os tratamentos consistem de todas as combinações possíveis entre os diversos fatores nos seus diferentes níveis.

O tipo mais simples de ensaio fatorial é o 2×2 . Nesses experimentos são analisados dois fatores, em dois níveis.

Exemplo 1: Em um experimento, tem-se o interesse em estudar o efeito do tempo de secagem $(S_1 \ e \ S_2)$ em minutos e do tipo de tinta $(T_1 \ e \ T_2)$ no acabamento de uma superfície (cm^2) de peças metálicas. Neste caso tem-se um fatorial 2×2 , com os fatores Tempo de Secagem (S) e Tipo de Tinta (T), que ocorrem em 2 níveis, e os $2 \times 2 = 4$ tratamentos são:

$$S_1 T_1$$
 $S_1 T_2$ $S_2 T_1$ $S_2 T_2$.

Exemplo 2: Em um experimento químico, pretende-se variar simultaneamente o tempo de reação $(T_1, T_2 \in T_3)$ e a pressão $(P_1 \in P_2)$ e estudar o efeito de cada um no rendimento (%). Nesse sentido, tem-se um ensaio fatorial 3×2 com $3 \times 2 = 6$ tratamentos, que resultam de todas as combinações possíveis dos níveis dos fatores, ou seja,

$$T_1P_1$$
 T_1P_2
 T_2P_1 T_2P_2
 T_3P_1 T_3P_2

Suponha que as médias dos $3\times 2=6$ tratamentos deste último exemplo são as apresentadas na Tabela.

Tabela 1: Ensaio fatorial 3×2 .

		Pressão			
Tempo de Reação		P_1	P_2		
	T_1	85	80		
	T_2	90	95		
	T_3	88	91		

Efeito Principal e da Interação

- Efeito Principal: O efeito de cada fator no experimento
- **Efeito da Interação:** O comportamento de cada fator na presença ou ausência dos níveis dos demais fatores
 - Quando a interação é significativa em um ensaio fatorial, deve-se estudar o efeito de um fator na presença de cada um dos níveis do outro fator
 - Se a interação não for significativa, os efeitos principais devem ser estudados isoladamente

Consideremos um ensaio fatorial 2×2 (Exemplo 1), com os fatores, Tempo de Secagem (S) e Tipo de Tinta (T) nos níveis:

- s_1 (tempo de secagem 1) e s_2 (tempo de secagem 2);
- t_1 (tipo de tinta 1) e t_2 (tipo de tinta 2).

As áreas de superfície de acabamento para os $2 \times 2 = 4$ tratamentos são:

Fator S	Fator T – T	Totais	
Tempo de Secagem	t_1	t_2	Totals
s_1	14	23	37
<i>s</i> ₂	32	53	85
Totais	46	76	122

Efeito Simples de um Fator: é a medida da variação que ocorre com a característica em estudo (área de superfície, neste exemplo) correspondente às variações nos níveis desse fator, em cada um dos níveis do outro fator.

Efeito simples do tempo de secagem no nível 1 do tipo de tinta:

$$S_{(\text{dentro de }t_1)} = s_2 t_1 - s_1 t_1 = 32 - 14 = 18$$

Efeito simples do tempo de secagem no nível 2 do tipo de tinta:

$$S_{(\text{dentro de }t_2)} = s_2 t_2 - s_1 t_2 = 53 - 23 = 30$$

Efeito simples do tipo de tinta no nível 1 do tempo de secagem:

$$T_{\text{(dentro de }s_1)} = s_1 t_2 - s_1 t_1 = 23 - 14 = 9$$

Efeito simples tipo de tinta no nível 2 do tempo de secagem:

$$T_{(\text{dentro de } s_2)} = s_2 t_2 - s_2 t_1 = 53 - 32 = 21$$

Efeito Principal de um Fator: é uma medida da variação que ocorre com a característica em estudo, correspondente às variações nos níveis desse fator, em média, de todos os níveis do outro fator.

Efeito Principal de S =
$$\frac{S_{\text{(dentro de }t_1)} + S_{\text{(dentro de }t_2)}}{2} = \frac{18 + 30}{2} = 24$$

Efeito Principal de T =
$$\frac{T_{(dentro\ de\ s_1)}+T_{(dentro\ de\ s_2)}}{2}=\frac{9+21}{2}=15$$

Em alguns experimentos, pode-se encontrar que a diferença na resposta entre os níveis de um fator não é a mesma para os níveis de outros fatores. Quando isto ocorre, há uma interação entre os fatores.

Obs.: Os experimentos fatoriais não constituem um delineamento experimental, e sim um esquema orientado de desdobramento de graus de liberdade de tratamentos e podem ser instalados em qualquer dos delineamentos experimentais.

As principais **vantagens** dos experimentos fatoriais em relação aos experimentos simples são:

- Pode-se estudar dois ou mais fatores num único experimento.
- Pode-se, por meio dos efeitos das interações, verificar se um fator é independente ou dependente do(s) outro(s).

As principais desvantagens dos experimentos fatoriais são:

- O número de tratamentos ou combinações de níveis de fatores cresce, rapidamente, com o aumento do número de níveis, em cada fator, ou mesmo com o aumento do número de fatores.
- A interpretação dos resultados se torna mais difícil à medida que aumentamos o número de níveis e de fatores no experimento.

Ensaio fatorial com 2 fatores

Considere os dados da próxima Tabela 2, referentes a um experimento no delineamento inteiramente casualizado, no esquema fatorial 3×2 , para testar os efeitos de três 3 recipientes para produção de mudas e 2 espécies de eucaliptos, quanto ao desenvolvimento das mudas.

Tabela 2: Alturas médias das mudas, em centímetros, aos 80 dias de idade.

Recipientes		Espécies						
recipientes	E	- 1	Ε	2				
D	26,2	26,0	24,8	24,6				
R_1	25,0	25,4	26,7	25,2				
R_2	25,7	26,3	19,6	21,1				
N_2	25,1	26,4	19,0	18,6				
R_3	22,8	19,4	19,8	21,4				
	18,8	19,2	22,8	21,3				

em que:

R ₁ - saco plástico pequeno;	E_1 - Eucalyptus citriodora;
R ₂ - saco plástico grande;	E_2 - Eucalyptus grandis;
R_3 - laminado;	_2

Seja y_{ijk} a resposta observada para o i-ésimo nível $(i=1,2,\ldots,a)$ do fator A e j-ésimo nível $(j=1,2,\ldots,b)$ do fator B, para a k-ésima repetição $(k=1,2,\ldots,r)$. Em geral, os dados serão apresentados na forma da Tabela 3.

Tabela 3: Arranjo geral para um DIC num esquema fatorial.

		Fator B								
		1	2		Ь					
	1	<i>y</i> ₁₁₁ , <i>y</i> ₁₁₂ , , <i>y</i> ₁₁ <i>r</i>	<i>y</i> ₁₂₁ , <i>y</i> ₁₂₂ , , <i>y</i> ₁₂		$y_{1b1}, y_{1b2}, \ldots, y_{1br}$					
Fator A	2	$y_{211}, y_{212}, \dots, y_{21r}$	<i>y</i> 221, <i>y</i> 222, , <i>y</i> 22 <i>r</i>		$y_{2b1}, y_{2b2}, \ldots, y_{2br}$					
	:	:	:	:	i i					
	a	$y_{a11}, y_{a12}, \ldots, y_{a1r}$	<i>y</i> _{a21} , <i>y</i> _{a22} , , <i>y</i> _{a2} r		$y_{ab1}, y_{ab2}, \dots, y_{abr}$					

As observações podem ser descritas pelo modelo estatístico

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau \beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \qquad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, a \\ j = 1, 2, \dots, b \\ k = 1, 2, \dots, r \end{cases}$$

- Y_{ijk} variável resposta correspondente ao i-ésimo nível do fator A, j-ésimo nível do fator B e a k-ésima repetição
- ullet μ média constante
- τ_i efeito do *i*-ésimo nível do fator A, i=1,...,a
- β_j efeito do j-ésimo nível do fator B, j=1,...,b
- $(\tau\beta)_{ij}$ efeito da iteração entre o *i*-ésimo nível do fator A e do *j*-ésimo nível do fator B
- ε_{ijk} erro associado ao *i*-ésimo nível do fator A, *j*-ésimo nível do fator B e a *k*-ésima repetição, k = 1, 2, ..., r

No experimento fatorial com 2 fatores, deseja-se testar a significância de ambos os fatores. Há interesse em testar hipóteses sobre a igualdade dos efeitos de tratamentos nas linhas, isto é:

$$H_0$$
: $\tau_1 = \tau_2 = \dots \tau_a = 0$

 H_1 : Pelo menos um $\tau_i \neq 0$

e a igualdade nos efeitos de tratamentos nas colunas, ou seja:

$$H_0$$
 : $\beta_1 = \beta_2 = \dots \beta_b = 0$

 H_1 : Pelo menos um $eta_j
eq 0$

e, ainda, se há interação entre linhas e colunas:

$$H_0$$
: $(\tau \beta)_{ij} = 0$ para todo i, j

$$H_1$$
: Pelo menos um $(\tau\beta)_{ij} \neq 0$

Assim, tem-se:

$$SQTotal = \underbrace{SQA + SQB + SQA \times B}_{} + SQRes,$$

de forma que a soma de quadrados total, usualmente calculada, é dada por:

$$SQTotal = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{r} y_{ijk}^{2} - \frac{y_{...}^{2}}{abr}$$

As somas de quadrados para os efeitos principais são:

$$SQA = \sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i..}^2}{br} - \frac{y_{...}^2}{abr}$$

$$SQB = \sum_{i=1}^{b} \frac{y_{.j.}^2}{ar} - \frac{y_{...}^2}{abr}$$

Para o cálculo da soma de quadrados da interação ($SQA \times B$), deve-se calcular

$$SQA \times B = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \frac{y_{ij}^{2}}{r} - \frac{y_{...}^{2}}{abr} - SQA - SQB$$

A soma de quadrados de resíduos, neste caso, é obtida pela diferença:

$$SQRes = SQTotal - SQA - SQB - SQA \times B$$

sendo:

$$y_{...} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{r} y_{ijk} \qquad \bar{y}_{...} = \frac{y_{...}}{abr}$$

$$y_{i..} = \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{r} y_{ijk} \qquad \bar{y}_{i..} = \frac{y_{i..}}{br} \qquad i = 1, 2, ..., a$$

$$y_{.j.} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{k=1}^{r} y_{ijk} \qquad \bar{y}_{.j.} = \frac{y_{.j.}}{ar} \qquad j = 1, 2, ..., b$$

$$y_{ij.} = \sum_{j=1}^{r} y_{ijk} \qquad \bar{y}_{ij.} = \frac{y_{ij.}}{r} \qquad \begin{cases} i = 1, 2, ..., a \\ j = 1, 2, ..., b \end{cases}$$

Tabela 4: Análise de variância para um DIC num ensaio fatorial com 2 fatores.

C.V.	S.Q.	g.l.	Q.M.	F_{cal}
А	SQA	a — 1	$QMA = \frac{SQA}{a-1}$	$F_{cal} = rac{QMA}{QMRes}$
В	SQB	b-1	$QMB = \frac{SQA}{b-1}$	$F_{cal} = rac{QMB}{QMRes}$
$A \times B$	$SQA \times B$	(a-1)(b-1)	$QMA \times B = \frac{SQA \times B}{(a-1)(b-1)}$	$F_{cal} = rac{QMA imes B}{QMRes}$
Tratamentos	SQTrat	(ab-1)	$QMTrat = \frac{SQTrat}{ab-1}$	$F_{cal} = rac{QMTrat}{QMRes}$
Resíduo	SQRes	ab(r-1)	$QMRes = \frac{SQRes}{ab(r-1)}$	
Total	SQTotal	abr-1		

A Tabela 5 apresenta os dados do desenvolvimento das mudas de 2 espécies de eucaliptos (E_1 e E_2) plantados em 3 tipos de recipientes (R_1 , R_2 e R_3).

Tabela 5: Alturas médias das mudas, em centímetros, aos 80 dias de

idade.		Espécies							
Recipientes	E	1	y_{ij} . E_2		y _{ij} .	y i			
R_1	26,2	26,0	102,6	24,8	24,6	101,3	203, 9		
1	25,0	25,4	,-	26,7	25,2				
R_2	25,7	26,3	103.5	19,6	21,1	78,3	181,8		
N ₂	25,1	26,4	105,5	19,0	18,6	70,5	101,0		
R_3	22,8	19,4	80,2	19,8	21,4	85,3	165,5		
713	18,8	19,2	00,2	22,8	21,3	03,3	103,3		
У.ј.			286,3			264,9	$y_{} = 551, 2$		

As somas de quadrados são calculadas a seguir:

$$SQTotal = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{r} y_{ijk}^{2} - \frac{y_{...}^{2}}{abr}$$

$$= (26,2)^{2} + (26,0)^{2} + \dots + (21,3)^{2} - \frac{(551,2)^{2}}{3 \times 2 \times 4} = 198,7933$$

$$SQRec = \sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i..}^{2}}{br} - \frac{y_{...}^{2}}{abr}$$

$$= \frac{(203,9^{2} + 181,8^{2} + 165,5^{2})}{2 \times 4} - \frac{(551,2)^{2}}{3 \times 2 \times 4} = 92,86083333$$

$$SQEsp = \sum_{j=1}^{b} \frac{y_{.j.}^{2}}{ar} - \frac{y_{...}^{2}}{abr}.$$

$$= \frac{(286,3^{2} + 264,9^{2})}{3 \times 4} - \frac{(551,2)^{2}}{3 \times 2 \times 4} = 19,08166667$$

$$SQRec \times Esp = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \frac{y_{ij.}^{2}}{r} - \frac{y_{...}^{2}}{abr} - SQRec - SQEsp$$

$$= \frac{\left(102, 6^{2} + \dots + 85, 3^{2}\right)}{4} - \frac{(551, 2)^{2}}{3 \times 2 \times 4} - 92, 86 - 19, 08$$

$$= 175, 7 - 92, 86 - 19, 08$$

$$= 63,760833333$$

$$SQRes = SQTotal - SQRec - SQEsp - SQRec \times Esp$$

= $198, 79 - 92, 86 - 19, 08 - 63, 76 = 23,09$

Substituindo-se os resultados obtidos na Tabela 4, tem-se o quadro da análise de variância.

Tabela 6: Análise de variância de acordo com o esquema fatorial 3×2 .

Causa de Variação	S.Q.	g.l.	Q.M.	F_{calc}	F_{tab}	Pr(>F)
Recipientes (Rec)	92,86083	2	46,430417	36, 20	3,554557	4,924e-07 ***
Espécies (Esp)	19,08167	1	19,081667	14, 88	4,413873	0,001155 **
$Rec{ imes}Esp$	63,76083	2	31,880417	24, 85	3,554557	6,635e-06 ***
Resíduo	23,09000	18	1,28278			
Total	198,79333	23				

Como o valor tabelado é $F_{0,05;\ 2;\ 18}=3,5546$, conclui-se que há uma interação significativa entre Recipientes e Espécies de eucaliptos.

Note que a soma de quadrados devido ao modelo é definida por:

$$SQModelo = SQRec + SQEsp + SQRec \times Esp$$

= $92,86083 + 19,08167 + 63,76083 =$ **175,7033**

e que

$$R^2 = \frac{SQModelo}{SQTotal} = \frac{175,7033}{198,7933} =$$
0,8838.

ou seja, cerca de **88% da variabilidade** no desenvolvimento das mudas é explicada pelos recipientes, espécies e a interação recipientes-espécies.

Desdobramento da interação $R \times E$ para estudar o comportamento das espécies dentro de cada recipiente

Tem-se que:

SQEsp d.
$$R_1 = \frac{1}{4} (102, 6^2 + 101, 3^2) - \frac{(203, 9)^2}{8} = 0, 21$$

SQEsp d. $R_2 = \frac{1}{4} (103, 5^2 + 78, 3^2) - \frac{(181, 8)^2}{8} = 79, 38$
SQEsp d. $R_3 = \frac{1}{4} (80, 2^2 + 85, 3^2) - \frac{(165, 5)^2}{8} = 3, 25$

O quadro de análise da variância do desdobramento é apresentado na próxima Tabela.

Tabela 7: Estudo das Espécies dentro de cada Recipiente

Causa de Variação	S.Q.	g.l.	Q.M.	F _{calc}	F_{tab}	Pr(> F)
Recipientes	92,86	2	46,43	36,20	3,554557	4,924e-07 ***
Recip:Espec	(82,84)	(3)	27,61	21,53	3,1599	< 0,0001 * **
Espécies d. R ₁	0,21	1	0,21	0, 16	3,554557	0, 6897 ^{ns}
Espécies d. R ₂	79,38	1	79,38	61,88	4,413873	< 0,0001 * *
Espécies d. R ₃	3,25	1	3,25	2, 53	4,413873	0, 1288 ^{ns}
Resíduo	23,09000000	18	1,2827778			
Total	198,79333333	23				

Considerando-se que há apenas duas espécies sendo analisadas, a interpretação dos resultados apresentados na Tabela é direta, sem a necessidade de algum teste de comparação múltipla.

Portanto, tem-se as seguintes conclusões:

- **Q** Quando se utiliza o recipiente: **saco plástico pequeno** (R_1) , não há diferença significativa (p = 0, 6897) para o desenvolvimento das mudas das 2 espécies;
- Quando se utiliza o recipiente: saco plástico grande (R_2) , há diferença significativa (p < 0,0001) para o desenvolvimento das mudas das 2 espécies, sendo que a espécie *Eucalyptus citriodra* (E_1) é a melhor;
- Quando se utiliza o recipiente: **laminado** (R_3) , não há diferença significativa (p = 0, 1288) para o desenvolvimento das mudas das 2 espécies;

Desdobramento da interação $R \times E$ para estudar o comportamento dos recipientes dentro de cada espécie

Tem-se que:

SQRec d.
$$E_1 = \frac{1}{4} (102, 6^2 + 103, 5^2 + 80, 2^2) - \frac{(286, 3)^2}{12} = 87, 12$$

SQRec d.
$$E_2 = \frac{1}{4} (101, 3^2 + 78, 3^2 + 85, 3^2) - \frac{(264, 9)^2}{12} = 69,50$$

O quadro de análise da variância do desdobramento é apresentado na próxima Tabela.

Tabela 8: Estudo dos Recipientes dentro de cada Espécie.

Causa de Variação	S.Q.	g.l.	Q.M.	F _{calc}	F_{tab}	Pr(>F)
Espécies	19,08	1	19,08	14,88	4,413873	0,0012 ***
Espec : Recip	(156,62)	(4)	39,16	30,52	2,927744	< 0,0001 * **
Recip d. <i>E</i> ₁	87,12	2	43,56	33,96	3,554557	7,776e — 07 * **
Recip d. E ₂	69,50	2	34,75	27,09	3,554557	3,730e - 06 * **
Resíduo	23,09000000	18	1,2827778			
Total	198,79333333	23				

Portanto, tem-se as seguintes conclusões:

- ① Os recipientes têm efeitos diferentes (p < 0,0001) sobre o desenvolvimento das mudas de *Eucalyptus citriodora* (E_1);
- Os recipientes têm efeitos diferentes (p < 0,0001) sobre o desenvolvimento das mudas de *Eucalyptus grandis* (E_2).

Basta, agora, **aplicar o teste de Tukey** para se verificar quais as médias do fator Recipiente diferem, dentro de cada nível de Espécie.

Recipientes dentro de E_1

Assume-se que a melhor estimativa da variância residual é o *QMRes* da tabela da análise de variância, utilizando a suposição de que a variância residual experimental é a mesma para todos os tratamentos. As três médias para recipientes, em ordem decrescente, são:

$$ar{y}_{21.} = rac{103,5}{4} = 25,875 \, cm \quad (R_2 ext{ - saco plástico grande})$$
 $ar{y}_{11.} = rac{102,6}{4} = 25,650 \, cm \quad (R_1 ext{ - saco plástico pequeno})$
 $ar{y}_{31.} = rac{80,2}{4} = 20,050 \, cm \quad (R_3 ext{ - laminado})$

A diferença mínima significativa pelo teste de Tukey é:

$$\Delta = q \sqrt{\frac{QMRes}{n}} = 3,6093 \times \sqrt{\frac{1,2827778}{4}} =$$
2,04 cm

e as comparações das médias dos recipientes geram:

$$R_2$$
 vs R_1 = 25,875 - 25,650 = 0,225 cm < 2,04 cm
 R_2 vs R_3 = 25,875 - 20,050 = 5,825 cm > 2,04 cm
 R_1 vs R_3 = 25,650 - 20,050 = 5,6 cm > 2,04 cm

Conclusão: Para o *Eucalyptus citriodora* (E_1) , os melhores recipientes foram os sacos plásticos $(R_1 \ e \ R_2)$, que determinaram desenvolvimento de mudas significativamente maiores que o laminado (R_3) , sem diferirem entre si.

Recipientes dentro de E_2

Neste caso, as três médias para recipientes, em ordem decrescente, são:

$$ar{y}_{12.}=rac{101,3}{4}=25,325cm \quad (R_1$$
 - saco plástico pequeno) $ar{y}_{32.}=rac{85,3}{4}=21,325cm \quad (R_3$ - laminado) $ar{y}_{22.}=rac{78.3}{4}=19,575cm \quad (R_2$ - saco plástico grande)

A diferença mínima significativa, pelo teste de Tukey, e as comparações das médias dos recipientes geram:

$$R_1$$
 vs R_3 = 25,325 - 21,325 = 4,00 cm > 2,04 cm R_1 vs R_2 = 25,325 - 19,575 = 5,75 cm > 2,04 cm R_3 vs R_2 = 21,325 - 19,575 = 1,75 cm < 2,04 cm

Conclusão: Para o *Eucalyptus grandis* (E_2) , o melhor recipiente foi o saco plástico pequeno (R_1) , que determinou desenvolvimento de mudas significativamente maior que o saco plástico grande (R_2) e que o laminado.

Exemplo 2: Ensaio Fatorial em DIC

Um engenheiro suspeita de que o acabamento de uma superfície de peças metálicas seja influenciado pelo tipo de tinta usada e pelo tempo de secagem. Ele selecionou três tempos de secagem 20, 25 e 30 minutos e utilizou dois tipos de tinta (T_1 e T_2). Três peças são testadas com cada combinação de tipo de tinta e tempo de secagem. Os dados são apresentados a seguir.

Tabela 9: Acabamento Superficial de Peças Metálicas

	Temp	agem		
Tinta	20	25	30	
	280	300	290	
T_1	290	310	285	
	285	295	290	
	230	260	220	
T_2	235	240	225	
	240	235	230	

Exemplo 3: Ensaio Fatorial para DBC

- Com o objetivo de avaliar as propriedades antimicrobianas do cimento de óxido de zinco, substituindo o eugenol pelo óleo de orégano na mistura utilizada clinicamente, um experimento foi conduzido em um delineamento em blocos casualizado no esquema fatorial.
- Para a formulação do cimento utilizou-se óxido de zinco misturado com eugenol (OZE) ou óleo essencial de orégano (OZO). Ambos foram diluídos com óleo de amêndoas nas concentrações 10, 25, 50 e 75%.

• Fator 1: OZE ou OZO

• Fator 2: 10, 20, 50 ou 75%

• Blocos: Dias

Deste modo, a concentração inibitória mínima (CIM) de cada óleo foi determinada para o microrganismo *Entereococcus faecalis*. Para a determinação da atividade antimicrobiana dos cimentos, utilizou-se o método de difusão em ágar e as respostas são:

Tabela 10: Concentração inibitória mínima, em mm, para o microrganismo *Entereococcus faecalis*

Dias	OZE			OZO				Totais	
Dias	10	25	50	75	10	25	50	75	Totals
1									16,673
2									17,583
3	1,748	2,073	2,117	2,132	1,972	2,479	2,594	2,876	17,991
Total	5,167	6,122	6,221	6,123	5,541	7,173	7,509	8,391	52,247