Universidade Estadual de Londrina

**Lista I de Exercícios - Atividade Remota**
**Curso: Estatística Matemática I — PGMAC – 07/05/2020**

ALUNO(a): ______________________________ Turma: 1000

1) Sejam A, B e C conjuntos não-vazios. Mostre que

   (a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

   (b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

   (c) $\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right)^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k^c$

   (d) $\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right)^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^c$

2) Para $\Omega = [0,1] \cap \mathbb{R}$ e $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ duas sigma-álgebras em $\Omega$. Prove que $\mathcal{F} = \{A : A \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2\}$ é uma sigma-álgebra.

3) Se $P_1$ e $P_2$ são medidas de probabilidade em $(\Omega, \mathcal{F})$ e $0 \leq \alpha \leq 1$, mostre que $\alpha P_1 + (1-\alpha)P_2$ é uma medida de probabilidade em $(\Omega, \mathcal{F})$.

4) Mostre que:

   (a) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ para quaisquer A, B $\in \mathcal{F}$.

   (b) $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.

5) Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e sejam A, B $\in \mathcal{F}$. A probabilidade condicional de A dado B é definida por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},\ P(B) > 0.$$

Mostre que para todo $B \in \mathcal{F}$, não-vazio, o trio $(\Omega, \mathcal{F}, P(\cdot|B))$ define um espaço de probabilidade.

6) **Teorema da Probabilidade Total**: Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade, e seja $A_1, A_2, \ldots$ uma partição de $\Omega$ tal que cada elemento da partição é um evento aleatório com probabilidade estritamente positiva. Mostre que para qualquer evento $B \in \mathcal{F}$,

$$P(B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B|A_n)\, P(A_n).$$

7) **Teorema de Bayes**: Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade, e seja $A_1, A_2, \ldots$ uma partição de $\Omega$ tal que cada elemento da partição é um evento aleatório com probabilidade estritamente positiva. Mostre que para qualquer evento $B$ tal que $P(B) > 0$, e para qualquer $m \geq 1$, fixo,

$$P(A_m|B) = \frac{P(B|A_m)\, P(A_m)}{\sum_{n=1}^{\infty} P(B|A_n)\, P(A_n)}.$$