

Sistema Fuzzy Takagi- Sugeno para Aproximação de Funções Não Lineares

MATHEUS COELHO E RODRIGO SILVA

Introdução

- ▶ Diferentemente de sistemas baseados em regras tradicionais, os modelos Takagi-Sugeno utilizam funções matemáticas como consequentes, permitindo uma representação mais precisa de comportamentos complexos. Este trabalho foca na aplicação de um sistema fuzzy TS para aproximar a função não linear:

$$f(x) = e^{-x/5} \cdot \sin(3x) + 0.5 \cdot \sin(x)$$

- ▶
- ▶ que apresenta comportamento oscilatório e decrescente no intervalo $x \in [0, 10]$.
- ▶ O objetivo principal é minimizar o erro de aproximação por meio da otimização dos parâmetros do sistema fuzzy, incluindo as funções de pertinência e os consequentes. O desempenho do sistema é avaliado utilizando a métrica de Erro Quadrático Médio (RMSE).
- ▶ O **Erro Quadrático Médio (RMSE – Root Mean Square Error)** é uma métrica amplamente utilizada para avaliar a qualidade de modelos de regressão e de séries temporais. Ele mede a diferença média entre os valores observados ' y_i ' e os valores previstos ' \hat{y}_i ', penalizando com força os grandes desvios.

Metodologia

▶ **A. Geração do Conjunto de Dados**

- ▶ Foi gerado um conjunto de dados com 1000 pontos uniformemente distribuídos no intervalo $x \in [0, 10]$. Os valores correspondentes de $f(x)$ foram calculados para servir como referência para treinamento e avaliação.

▶ **B. Projeto do Sistema Fuzzy**

- ▶ O sistema fuzzy foi projetado com funções de pertinência gaussianas definidas como:

$$\mu(x) = e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}}, \quad (1)$$

- ▶ onde c é o centro e σ é a largura da gaussiana. O sistema inicial utilizou 5 funções de pertinência distribuídas uniformemente no intervalo de entrada.

► C. Otimização dos Consequentes

- Para o modelo Takagi-Sugeno de primeira ordem, os consequentes foram definidos como funções lineares:

$$y_i = a_i x + b_i, \quad (2)$$

- onde a_i e b_i são os parâmetros da i -ésima regra. Esses parâmetros foram otimizados utilizando o método de Mínimos Quadrados Recursivos (RLS).
- O **Método de Mínimos Quadrados Recursivos** (RLS, do inglês *Recursive Least Squares*) é uma técnica de estimação de parâmetros de modelos lineares que atualiza iterativamente os coeficientes à medida que chegam novas observações, sem precisar refazer todo o cálculo matricial do zero.

► D. Otimização das Funções de Pertinência

- Os parâmetros das funções de pertinência (c e σ) foram otimizados utilizando o algoritmo L-BFGS-B. A otimização teve como objetivo minimizar o RMSE entre a saída do sistema e os valores reais.
- L-BFGS: Significa "Limited-memory Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno". É um algoritmo de otimização muito popular e eficiente, usado para encontrar o valor mínimo de uma função (neste caso, a função de erro RMSE).
- B: O "B" significa Bounds (Limites). Isso indica que o algoritmo pode lidar com restrições de caixa, ou seja, cada variável a ser otimizada pode ter um limite inferior e superior.
- O algoritmo busca o menor erro (RMSE) enquanto garante que os valores encontrados para os centros e para o sigma respeitem os limites (bounds) definidos no nosso código.

Resultados e discussão

- ▶ Nesta seção, apresentamos os resultados obtidos com o sistema para a aproximação da função não linear $f(x) = e^{-\frac{x}{5}} * \sin(3x) + 0.5 * \sin(x)$. Os resultados incluem a análise da função original, a comparação de aproximações com diferentes números de regras, a análise detalhada do melhor modelo com 25 regras, a distribuição do erro absoluto e os pontos com maior erro.
- ▶ **A. Análise da Função Original**
- ▶ A Fig. 1 apresenta o gráfico da função $f(x)$ no intervalo $x \in [0, 10]$. Observa-se que a função possui comportamento oscilatório com amplitude decrescente, o que representa um desafio para a modelagem e aproximação.

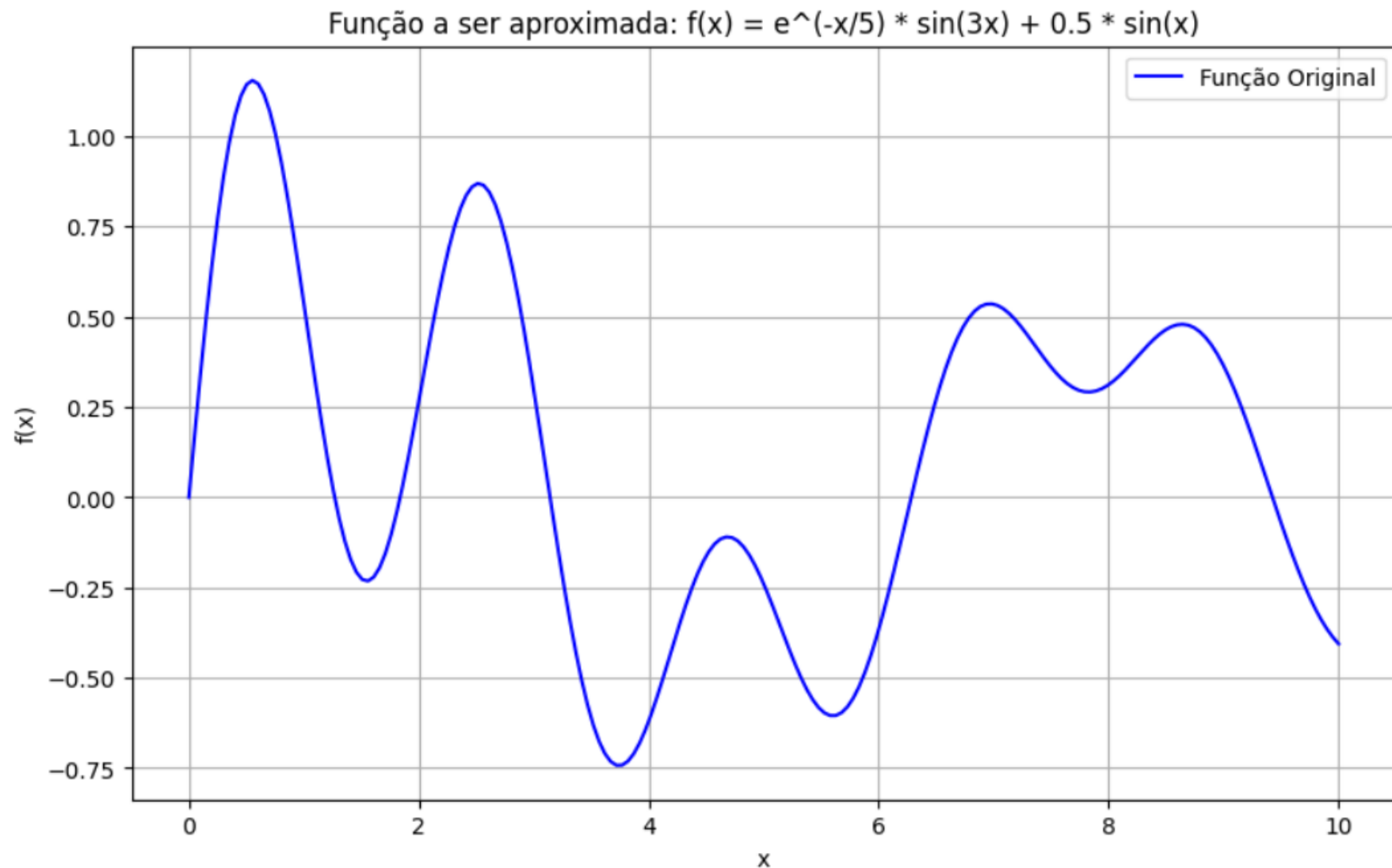


Fig. 1. Gráfico da função original $f(x) = e^{-x/5} \cdot \sin(3x) + 0.5 \cdot \sin(x)$.

- ▶ **B. Comparação de Aproximações com Diferentes Números de Regras**
- ▶ A Fig. 2 apresenta as aproximações obtidas com 3, 5, 7 e 9 regras. Observa-se que, à medida que o número de regras aumenta, a aproximação se torna mais precisa, especialmente nas regiões de maior variação da função.

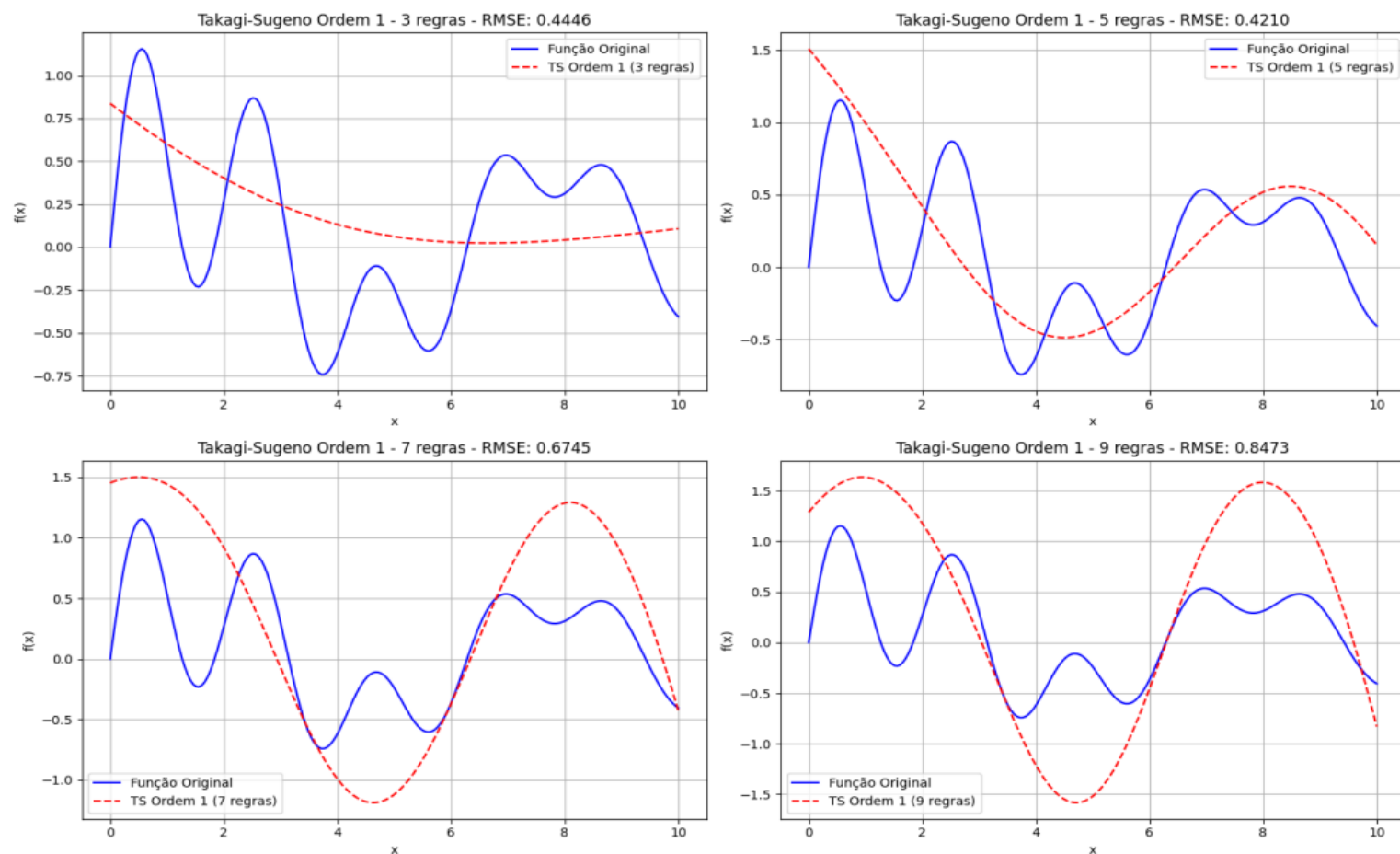


Fig. 2. Aproximações da função original com 3, 5, 7 e 9 regras.

- ▶ **C. Análise do Melhor Modelo com 25 Regras**
- ▶ O modelo com **25 regras** apresentou o melhor desempenho, com um **RMSE de 0,0267**. A Fig. 3 mostra as funções de pertinência otimizadas para este modelo.

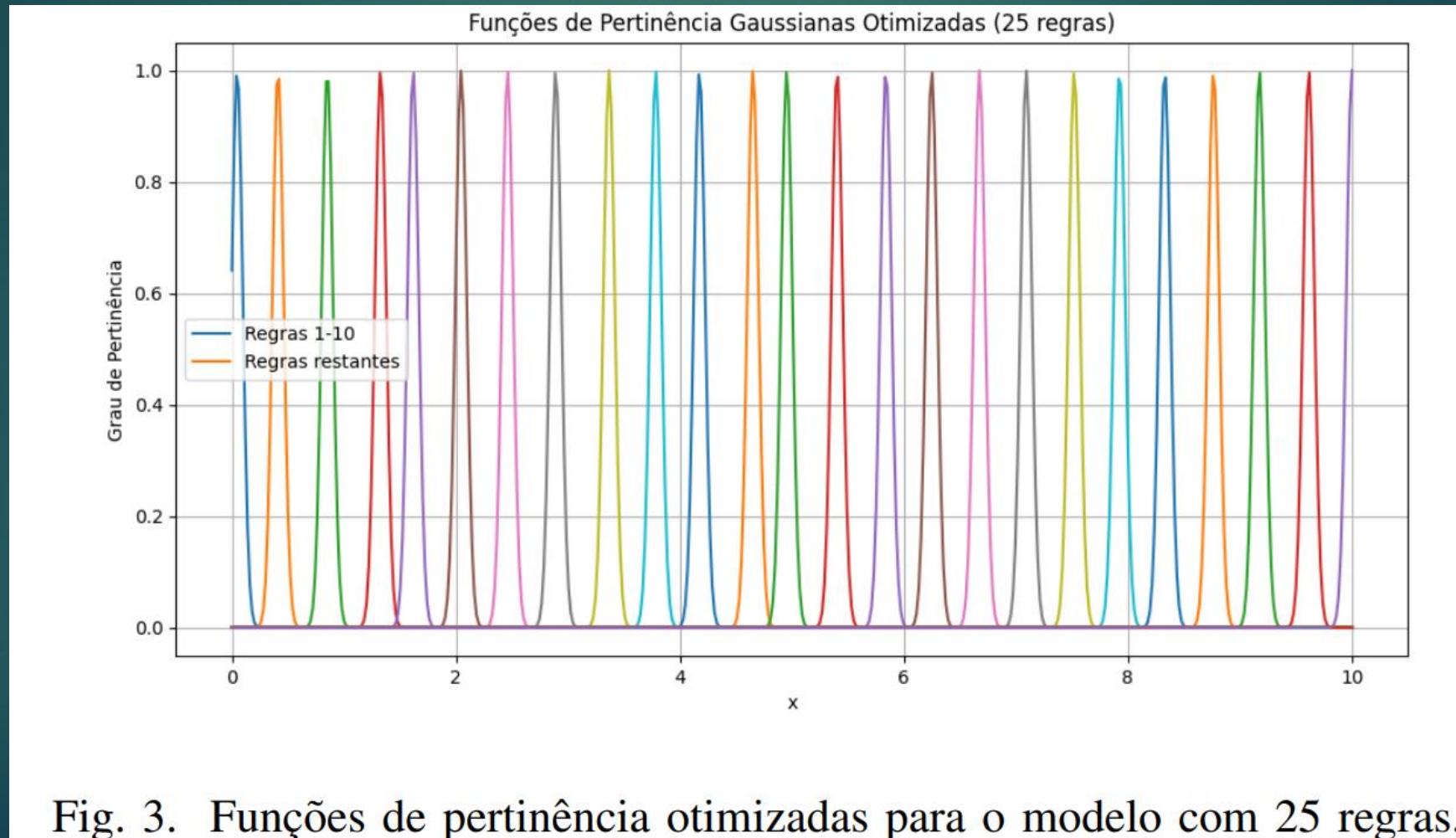


Fig. 3. Funções de pertinência otimizadas para o modelo com 25 regras.

- ▶ As funções de pertinência foram distribuídas de forma **não uniforme**, com maior densidade em regiões de alta variação da função. Isso permitiu ao sistema capturar melhor os detalhes locais da função.
- ▶ A Fig. 4 apresenta a comparação entre a função original e a aproximação obtida com **25 regras**. Observa-se que o modelo consegue reproduzir com **alta precisão** tanto as oscilações quanto o decaimento exponencial da função.

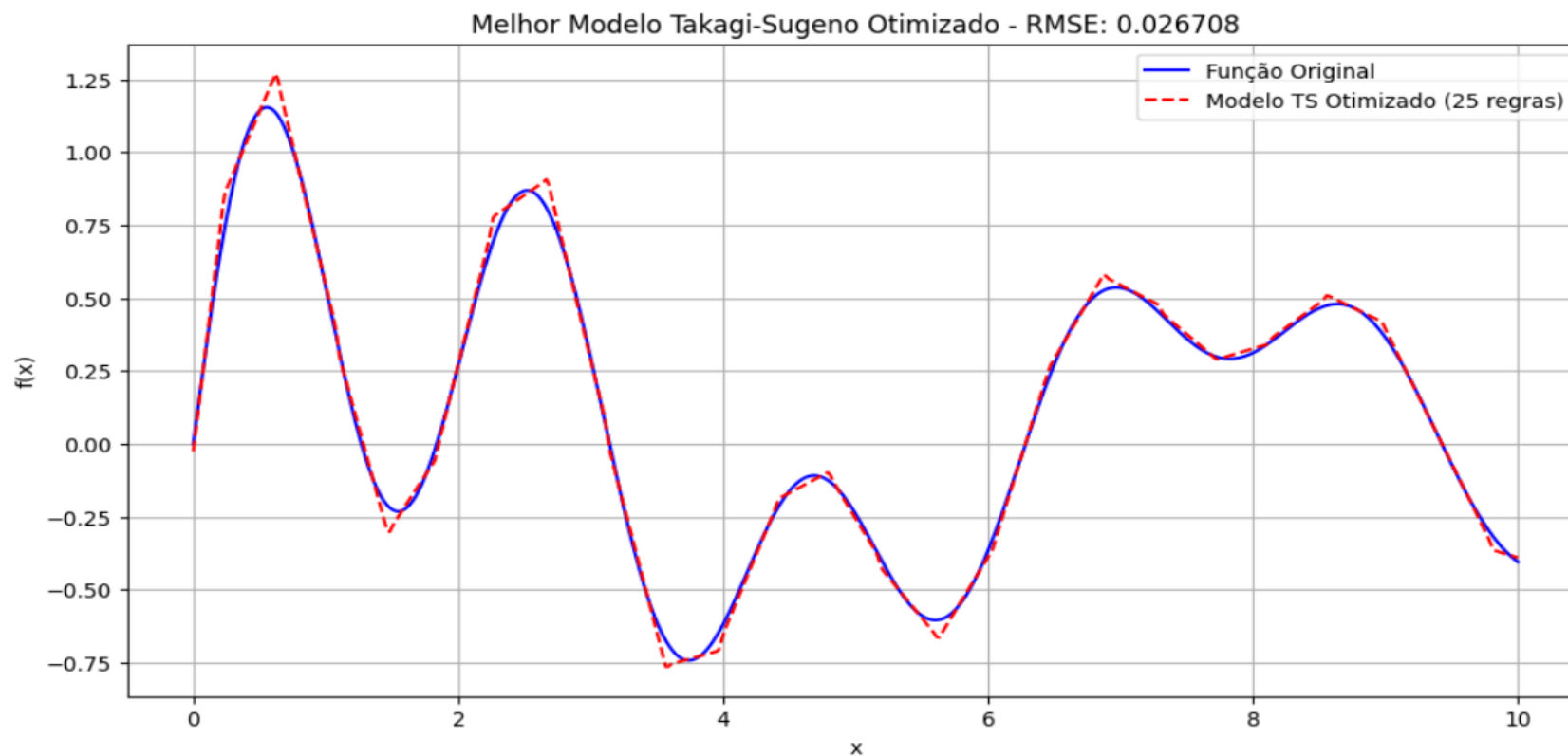


Fig. 4. Comparação entre a função original e a aproximação com 25 regras.

- ▶ A análise detalhada mostra que o modelo é capaz de capturar as características globais e locais da função, com **erros mínimos** em regiões de transição rápida. A densidade de regras em regiões críticas foi essencial para alcançar este nível de precisão.
- ▶ **D. Distribuição do Erro Absoluto**
- ▶ A Fig. 5 apresenta o gráfico do erro absoluto para o modelo com 25 regras. Observa-se que a maioria dos erros está concentrada em **valores baixos**, com poucos pontos apresentando erros mais elevados.

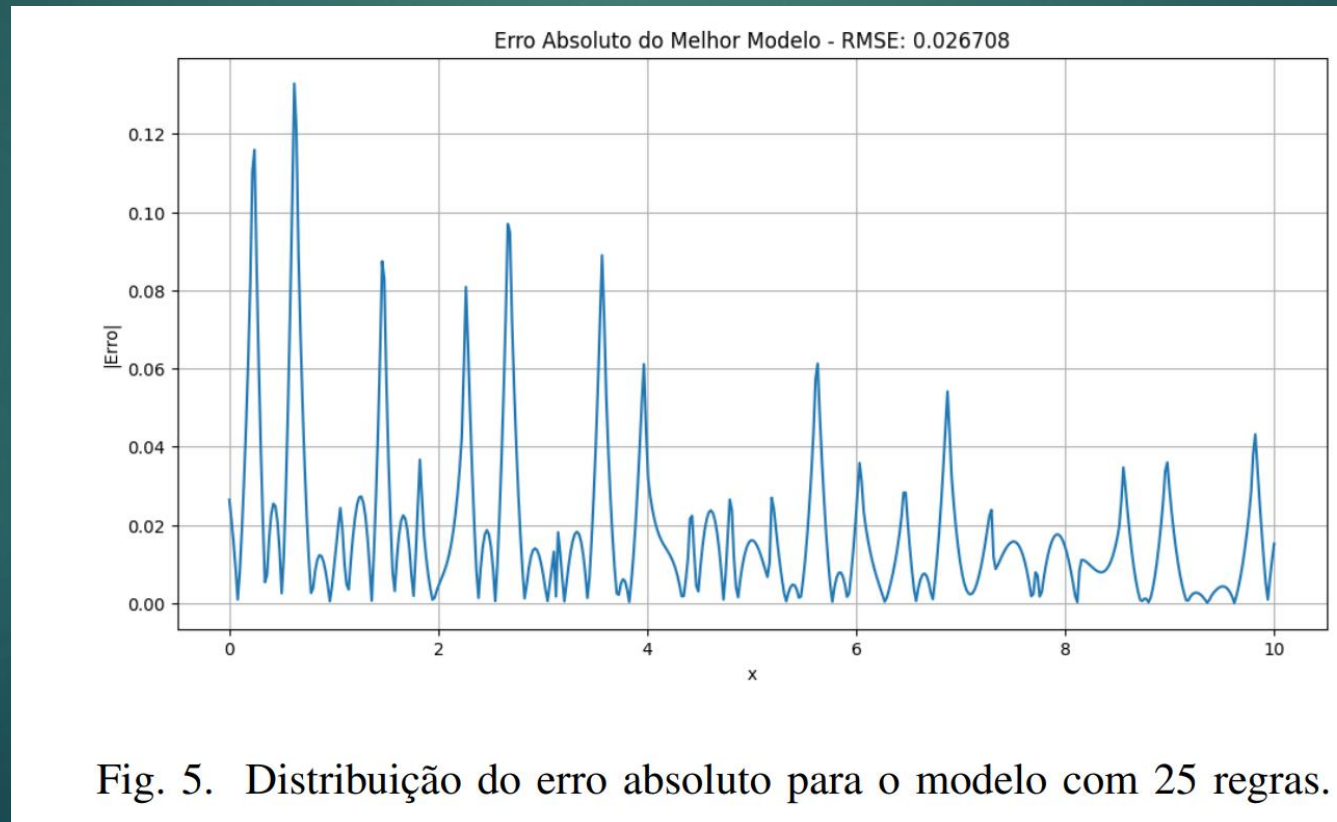


Fig. 5. Distribuição do erro absoluto para o modelo com 25 regras.

- ▶ A análise estatística do erro absoluto revelou os seguintes resultados:
- ▶ **Erro médio absoluto:** 0,0179
- ▶ **Erro máximo:** 0,1328
- ▶ **Erro mínimo:** 0,00003
- ▶ **Desvio padrão do erro:** 0,0199
- ▶ A baixa média e o desvio padrão indicam que o modelo é consistente em sua aproximação, com poucos desvios significativos.
- ▶ **E. Pontos com Maior Erro**
- ▶ A Fig. 6 destaca os pontos com maior erro absoluto. Esses pontos estão localizados principalmente em **regiões de transição rápida** da função, onde as oscilações são mais pronunciadas.

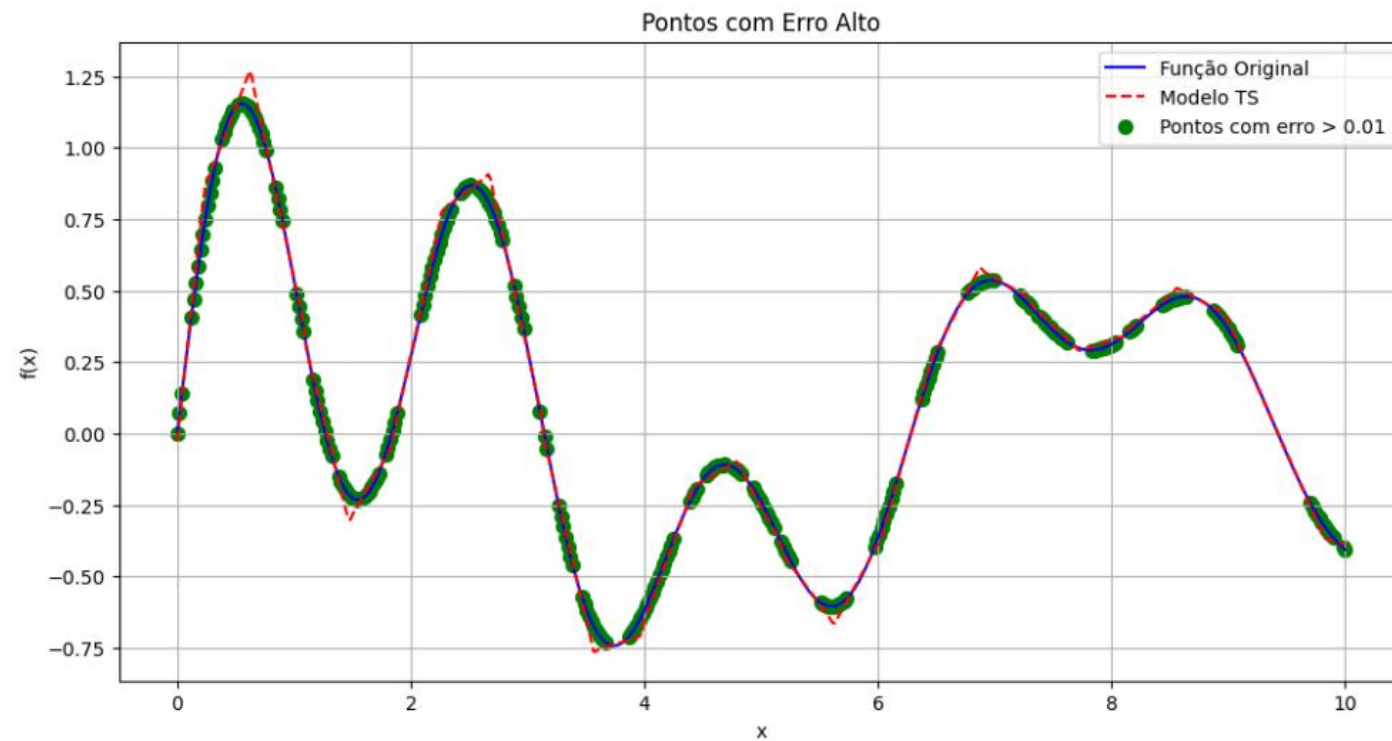


Fig. 6. Pontos com maior erro absoluto no modelo com 25 regras.

Esses erros podem ser atribuídos à limitação do número de regras e à largura das funções de pertinência em regiões específicas. Uma possível solução seria aumentar ainda mais o número de regras ou ajustar dinamicamente os parâmetros das funções de pertinência nessas regiões.

► F. Regras Geradas

- *Interpretação das Regras Geradas:* As regras apresentadas a seguir foram extraídas do sistema desenvolvido para a aproximação da função alvo. Cada regra é composta por duas partes: o antecedente, que define uma condição fuzzy sobre o valor de entrada x (por exemplo, “ x é próximo de 0.06”), e o consequente, que estabelece uma relação linear entre x e a saída y (por exemplo, “ $y=2.42x+0.10$ ”).
- No modelo TS de primeira ordem, os consequentes das regras são funções lineares dos parâmetros de entrada. O grau de ativação de cada regra é determinado pela função de pertinência associada ao antecedente. A saída final do sistema é obtida por uma média ponderada das saídas de todas as regras, onde os pesos correspondem ao grau de ativação de cada regra para o valor de entrada considerado.
- Dessa forma, o sistema é capaz de combinar diferentes regiões lineares para aproximar funções altamente não lineares, como a utilizada neste trabalho. As regras a seguir ilustram como o modelo particiona o espaço de entrada e associa diferentes comportamentos lineares a cada região, permitindo uma aproximação precisa da função original.

► **Exemplo de algumas regras geradas:**

► **Regra 1:** Se x é próximo de 0.06, então $y=2.42x+0.10$

► **Regra 2:** Se x é próximo de 0.95, então $y=-1.40x+2.01$

► **Regra 3:** Se x é próximo de 1.18, então $y=-1.37x+1.79$

► **Regra 4:** Se x é próximo de 1.97, então $y=1.40x+2.52$

► **Regra 5:** Se x é próximo de 3.11, então $y=-1.53x+4.89$

► **Regra 6:** Se x é próximo de 3.18, então $y=-1.45x+4.49$

► Os resultados demonstram que o sistema é altamente eficaz para a aproximação de funções não lineares complexas. O processo de otimização das funções de pertinência e dos consequentes foi essencial para alcançar alta precisão. O modelo com 25 regras apresentou um equilíbrio ideal entre complexidade e desempenho, capturando tanto as características globais quanto os detalhes locais da função.

► Apesar do excelente desempenho, ainda existem desafios em regiões de transição rápida, onde os erros são mais pronunciados. Trabalhos futuros podem explorar métodos adaptativos para geração de regras e otimização local das funções de pertinência.

Conclusão

- ▶ Este estudo demonstra a eficácia do sistema fuzzy Takagi-Sugeno na aproximação de funções não lineares. O processo de otimização em duas etapas melhorou significativamente a precisão do sistema, alcançando um RMSE de 0,0267. Trabalhos futuros poderão explorar métodos adaptativos para geração de regras e aplicações em tempo real do sistema.

Referências:

- ▶ [1] T. Takagi and M. Sugeno, “Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. SMC-15, no. 1, pp. 116–132, 1985.
- ▶ [2] L. A. Zadeh, “Fuzzy sets,” *Information and Control*, vol. 8, no. 3, pp. 338–353, 1965.
- ▶ [3] J. Yen and R. Langari, *Fuzzy Logic: Intelligence, Control, and Information*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1999.
- ▶ [4] K. Tanaka and H. O. Wang, *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*. New York: Wiley, 2001.