

Sistema Fuzzy Takagi-Sugeno para Aproximação de Funções Não Lineares

1º Matheus Coelho

Departamento de Ciência da Computação
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Belo Horizonte, Brasil
matheuscoelho060@gmail.com

2º Rodrigo Silva

Departamento de Ciência da Computação
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Belo Horizonte, Brasil
rodrigopiece27@gmail.com

Abstract—Este artigo apresenta a implementação e otimização de um sistema fuzzy Takagi-Sugeno para a aproximação de uma função não linear. A função estudada é definida como $f(x) = e^{-x/5} \cdot \sin(3x) + 0.5 \cdot \sin(x)$, avaliada no intervalo $x \in [0, 10]$. O sistema foi desenvolvido utilizando funções de pertinência gaussianas e otimizado por meio de um processo em duas etapas, envolvendo Mínimos Quadrados Recursivos (RLS) e métodos baseados em gradiente. Os resultados demonstram a eficácia da abordagem Takagi-Sugeno em alcançar alta precisão, com um Erro Quadrático Médio (RMSE) final de 0,0267.

Index Terms—Takagi-Sugeno, sistemas fuzzy, aproximação de funções não lineares, otimização, RMSE.

I. INTRODUÇÃO

O sistema fuzzy Takagi-Sugeno é uma ferramenta poderosa para modelagem e aproximação de sistemas não lineares. Diferentemente de sistemas baseados em regras tradicionais, os modelos Takagi-Sugeno utilizam funções matemáticas como consequentes, permitindo uma representação mais precisa de comportamentos complexos. Este artigo foca na aplicação de um sistema fuzzy Takagi-Sugeno para aproximar a função não linear $f(x) = e^{-x/5} \cdot \sin(3x) + 0.5 \cdot \sin(x)$, que apresenta comportamento oscilatório e decrescente no intervalo $x \in [0, 10]$.

O objetivo principal é minimizar o erro de aproximação por meio da otimização dos parâmetros do sistema fuzzy, incluindo as funções de pertinência e os consequentes. O desempenho do sistema é avaliado utilizando a métrica de Erro Quadrático Médio (RMSE).

II. METODOLOGIA

A implementação do sistema fuzzy Takagi-Sugeno seguiu as etapas descritas a seguir:

A. Geração do Conjunto de Dados

Foi gerado um conjunto de dados com 1000 pontos uniformemente distribuídos no intervalo $x \in [0, 10]$. Os valores correspondentes de $f(x)$ foram calculados para servir como referência para treinamento e avaliação.

B. Projeto do Sistema Fuzzy

O sistema fuzzy foi projetado com funções de pertinência gaussianas definidas como:

$$\mu(x) = e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}}, \quad (1)$$

onde c é o centro e σ é a largura da gaussiana. O sistema inicial utilizou 5 funções de pertinência distribuídas uniformemente no intervalo de entrada.

C. Otimização dos Consequentes

Para o modelo Takagi-Sugeno de primeira ordem, os consequentes foram definidos como funções lineares:

$$y_i = a_i x + b_i, \quad (2)$$

onde a_i e b_i são os parâmetros da i -ésima regra. Esses parâmetros foram otimizados utilizando o método de Mínimos Quadrados Recursivos (RLS).

D. Otimização das Funções de Pertinência

Os parâmetros das funções de pertinência (c e σ) foram otimizados utilizando o algoritmo L-BFGS-B. A otimização teve como objetivo minimizar o RMSE entre a saída do sistema e os valores reais.

III. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção, apresentamos os resultados obtidos com o sistema fuzzy Takagi-Sugeno para a aproximação da função não linear $f(x) = e^{-x/5} \cdot \sin(3x) + 0.5 \cdot \sin(x)$. Os resultados incluem a análise da função original, a comparação de aproximações com diferentes números de regras, a análise detalhada do melhor modelo com 25 regras, a distribuição do erro absoluto e os pontos com maior erro.

A. Análise da Função Original

A Fig. 1 apresenta o gráfico da função $f(x)$ no intervalo $x \in [0, 10]$. Observa-se que a função possui comportamento oscilatório com amplitude decrescente, o que representa um desafio para a modelagem e aproximação.

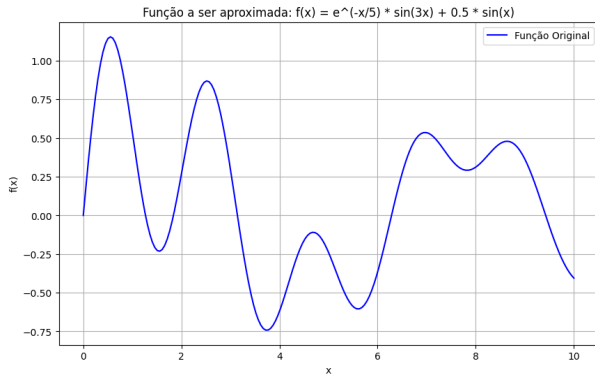


Fig. 1. Gráfico da função original $f(x) = e^{-x/5} \cdot \sin(3x) + 0.5 \cdot \sin(x)$.

A complexidade da função, com múltiplas frequências e decaimento exponencial, exige um sistema fuzzy bem projetado para capturar suas características.

B. Comparação de Aproximações com Diferentes Números de Regras

A Fig. 2 apresenta as aproximações obtidas com 3, 5, 7 e 9 regras. Observa-se que, à medida que o número de regras aumenta, a aproximação se torna mais precisa, especialmente nas regiões de maior variação da função.

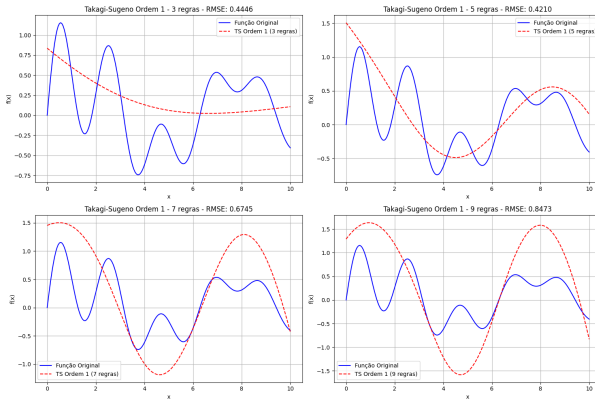


Fig. 2. Aproximações da função original com 3, 5, 7 e 9 regras.

Com 3 regras, a aproximação é grosseira, capturando apenas as tendências gerais da função. Com 5 e 7 regras, há uma melhora significativa, mas ainda existem discrepâncias em regiões de alta frequência. Com 9 regras, a aproximação já é parcialmente próxima da função original, mas ainda apresenta desvios em regiões de transição rápida.

C. Análise do Melhor Modelo com 25 Regras

O modelo com 25 regras apresentou o melhor desempenho, com um RMSE de 0,0267. A Fig. 3 mostra as funções de pertinência otimizadas para este modelo.

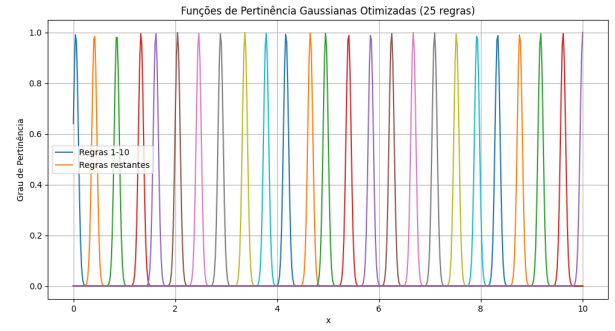


Fig. 3. Funções de pertinência otimizadas para o modelo com 25 regras.

As funções de pertinência foram distribuídas de forma não uniforme, com maior densidade em regiões de alta variação da função. Isso permitiu ao sistema capturar melhor os detalhes locais da função.

A Fig. 4 apresenta a comparação entre a função original e a aproximação obtida com 25 regras. Observa-se que o modelo consegue reproduzir com alta precisão tanto as oscilações quanto o decaimento exponencial da função.

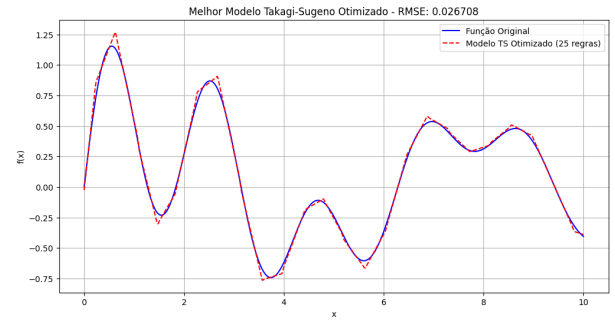


Fig. 4. Comparação entre a função original e a aproximação com 25 regras.

A análise detalhada mostra que o modelo é capaz de capturar as características globais e locais da função, com erros mínimos em regiões de transição rápida. A densidade de regras em regiões críticas foi essencial para alcançar este nível de precisão.

D. Distribuição do Erro Absoluto

A Fig. 5 apresenta o gráfico do erro absoluto para o modelo com 25 regras. Observa-se que a maioria dos erros está concentrada em valores baixos, com poucos pontos apresentando erros mais elevados.

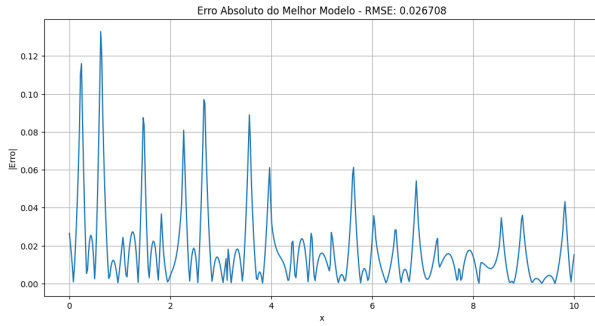


Fig. 5. Distribuição do erro absoluto para o modelo com 25 regras.

A análise estatística do erro absoluto revelou os seguintes resultados:

- Erro médio absoluto: 0,0179
- Erro máximo: 0,1328
- Erro mínimo: 0,00003
- Desvio padrão do erro: 0,0199

A baixa média e o desvio padrão indicam que o modelo é consistente em sua aproximação, com poucos desvios significativos.

E. Pontos com Maior Erro

A Fig. 6 destaca os pontos com maior erro absoluto. Esses pontos estão localizados principalmente em regiões de transição rápida da função, onde as oscilações são mais pronunciadas.

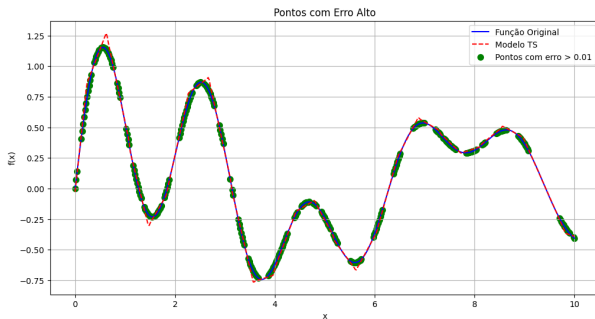


Fig. 6. Pontos com maior erro absoluto no modelo com 25 regras.

Esses erros podem ser atribuídos à limitação do número de regras e à largura das funções de pertinência em regiões específicas. Uma possível solução seria aumentar ainda mais o número de regras ou ajustar dinamicamente os parâmetros das funções de pertinência nessas regiões.

F. Regras Geradas

Interpretação das Regras Geradas: As regras apresentadas a seguir foram extraídas do sistema fuzzy Takagi-Sugeno desenvolvido para a aproximação da função alvo. Cada regra é composta por duas partes: o antecedente, que define uma condição fuzzy sobre o valor de entrada x (por exemplo, “ x é próximo de 0.06”), e o consequente, que estabelece

uma relação linear entre x e a saída y (por exemplo, “ $y = 2.42x + 0.10$ ”).

No modelo Takagi-Sugeno de primeira ordem, os consequentes das regras são funções lineares dos parâmetros de entrada. O grau de ativação de cada regra é determinado pela função de pertinência associada ao antecedente. A saída final do sistema fuzzy é obtida por uma média ponderada das saídas de todas as regras, onde os pesos correspondem ao grau de ativação de cada regra para o valor de entrada considerado.

Dessa forma, o sistema é capaz de combinar diferentes regiões lineares para aproximar funções altamente não lineares, como a utilizada neste trabalho. As regras a seguir ilustram como o modelo particiona o espaço de entrada e associa diferentes comportamentos lineares a cada região, permitindo uma aproximação precisa da função original.

Exemplo de algumas regras geradas:

Regra 1: Se x é próximo de 0.06, então $y = 2.42x + 0.10$

Regra 2: Se x é próximo de 0.95, então $y = -1.40x + 2.01$

Regra 3: Se x é próximo de 1.18, então $y = -1.37x + 1.79$

Regra 4: Se x é próximo de 1.97, então $y = 1.40x + -2.52$

Regra 5: Se x é próximo de 3.11, então $y = -1.53x + 4.89$

Regra 6: Se x é próximo de 3.18, então $y = -1.45x + 4.49$

IV. DISCUSSÃO GERAL

Os resultados demonstram que o sistema fuzzy Takagi-Sugeno é altamente eficaz para a aproximação de funções não lineares complexas. O processo de otimização das funções de pertinência e dos consequentes foi essencial para alcançar alta precisão. O modelo com 25 regras apresentou um equilíbrio ideal entre complexidade e desempenho, capturando tanto as características globais quanto os detalhes locais da função.

Apesar do excelente desempenho, ainda existem desafios em regiões de transição rápida, onde os erros são mais pronunciados. Trabalhos futuros podem explorar métodos adaptativos para geração de regras e otimização local das funções de pertinência.

V. CONCLUSÃO

Este estudo demonstra a eficácia do sistema fuzzy Takagi-Sugeno na aproximação de funções não lineares. O processo de otimização em duas etapas melhorou significativamente a precisão do sistema, alcançando um RMSE de 0,0267. Trabalhos futuros explorarão métodos adaptativos para geração de regras e aplicações em tempo real do sistema.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao Professor Doutor Alisson Marques pelo inestimável suporte a esta pesquisa.

REFERENCES

- [1] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control," IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, vol. SMC-15, no. 1, pp. 116–132, 1985.
- [2] L. A. Zadeh, "Fuzzy sets," Information and Control, vol. 8, no. 3, pp. 338–353, 1965.
- [3] J. Yen and R. Langari, Fuzzy Logic: Intelligence, Control, and Information. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1999.
- [4] K. Tanaka and H. O. Wang, Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach. New York: Wiley, 2001.