Modelos probabilísticos
para variáveis aleatórias discretas

Uma variável aleatória X é discreta se assume valores (x) que podem ser contados, ou seja, se houver um número finito ou contável de resultados possíveis que possam ser enumerados.

Os tipos de distribuição de probabilidade mais comuns para o caso em que X é uma variável aleatória discreta são:

a) Uniforme discreta
b) Bernoulli
c) Geométrica
d) Pascal ou Binomial negativa
e) Hipergeométrica
f) Polinomial ou multinomial
g) Binomial
h) Poisson

Neste material abordaremos as distribuições Binomial e Poisson.

Distribuição Binomial

Considere um experimento aleatório consistindo em n tentativas independentes e a probabilidade de ocorrer sucesso em cada uma das n tentativas é sempre igual a p e de fracasso é q, onde p + q = 1. A probabilidade de sucesso e fracasso são as mesmas para cada tentativa.

Definição: Seja X o número de sucesso em n tentativas, então X pode assumir os valores 0, 1, 2,..., n. Nesta condição a v.a. X tem distribuição Binomial com parâmetro n e p, isto é, $X \sim B(n; p)$.

Considere que se $X \sim B(n; p)$, então a média e a variância de X são definidos por:

a) Média de X: E(X) = np.
b) Variância de X: $\sigma^2 = npq$, onde q = 1 - p.

A função de probabilidade da variável aleatória $X \sim B(n; p)$ é dada por

$$P(X = x) = \binom{n}{x} . p^x . (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Onde $\binom{n}{k}$ representa o coeficiente binomial calculado por $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$

Exemplo 1

Suponha que 5% de todas as peças que saiam de uma linha de produção sejam defeituosas. Se 10 dessas peças forem escolhidas e inspecionadas, pede-se:

Observe que temos:

- ✓ Um experimento com somente duas opções de resposta (peças defeituosas ou não defeituosas);
- ✓ Um número fixo e independente de vezes que o experimento será repetido (10 amostras);
- ✓ A probabilidade de peças defeituosas é constante p=0,05 e, consequentemente, a probabilidade de peças não defeituosas q=1-p=0,95.

Dessa forma, podemos dizer que o modelo binomial se adapta bem à situação proposta no exemplo, ou seja, X ~ B(10; 0,05),

a) Identifique a variável aleatória estudada. Quais valores ela pode assumir?
   X: número de peças defeituosas produzidas
   x= 0, 1, 2,..., 10.
b) Calcule o número médio de peças defeituosas e, também, o desvio padrão.
   Média: E(X) = np = 10.0,05 = 0,5
   Variância: σ^2 = npq = 10.0,05.0,95 = 0,475
   Desvio padrão: σ = $\sqrt{\sigma^2}$ = 0,6892

c) Qual será a probabilidade de que:
   i. Exatamente 7 sejam defeituosas.
   $$P(X=7)=\binom{10}{7}.0{,}05^7.(1-0{,}05)^{10-7}=8{,}03789\times10^{-8}$$

   ii. No máximo 2 sejam defeituosas.
   $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$ = 0,9884

   $$P(X=0)=\binom{10}{0}.0{,}05^0.(1-0{,}05)^{10-0}=0{,}5987$$
   $$P(X=1)=\binom{10}{1}.0{,}05^1.(1-0{,}05)^{10-1}=0{,}3151$$
   $$P(X=2)=\binom{10}{2}.0{,}05^2.(1-0{,}05)^{10-2}=0{,}0746$$

   Observe que a probabilidade diminui à medida que nos afastamos da média.

iii. No máximo 8 sejam defeituosas.
$P(X \leq 8) = 1 - P(X > 8) = 1 - [P(X = 9) + P(X = 10)] = 1$

$$P(X = 9) = \binom{10}{9}.0,05^{9}.(1-0,05)^{10-9} = 1,8555 \times 10^{-11}$$
$$P(X = 10) = \binom{10}{10}.0,05^{10}.(1-0,05)^{10-10} = 9,7656 \times 10^{-14}$$

iv. Mais de 7 sejam <u>não defeituosas</u>.
Observe a correspondência entre peças defeituosas e não defeituosas na amostra, a partir do que é pedido nesse item:

Nº de peças não defeituosas	>7	Então seriam: 8, 9, 10 peças não defeituosas.
Nº de peças defeituosas	<3	Então seriam: 2, 1, 0 peças defeituosas.

Dessa forma, para obter a probabilidade de mais de 7 peças não defeituosas deveríamos calcular a probabilidade de menos de três peças defeituosas na amostra:

$P(X < 3) = P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,9884$

Exercício 1

Cada amostra de ar tem 10% de chance de conter uma certa molécula rara. Considere que as amostras sejam independentes com relação à presença da molécula rara. Encontre a probabilidade de que nas próximas 18 amostras:

a) Exatamente 2 contenham a molécula rara.
b) No mínimo 4 amostras contenham a molécula rara.
c) De 3 a 7 amostras contenham a molécula rara.
d) O número médio e a variância de moléculas raras.

Respostas: a) 0,2835 b) 0,0982 c) 0,2660 d) 1,8 e 1,62.

Exercício 2

Se 20% dos parafusos produzidos por uma maquina são defeituosos, determine qual a probabilidade de, entre 4 parafusos selecionados ao acaso, no máximo 2 deles serem defeituosos.

Resposta:0,9728

Exercício 3

Um fabricante de certas peças de automóveis garante que uma caixa de suas peças conterá no máximo 2 itens defeituosos. Se a caixa contem 20 peças e a experiência tem demonstrado que esse processo de fabricação produz 2 por cento de itens defeituosos, qual a probabilidade de que uma caixa de suas peças não vá satisfazer a garantia?

Resposta: 0,0071

Distribuição Poisson

Consideremos as seguintes variáveis aleatórias:

X_1 = Número de chamadas recebidas por uma central telefônica durante um período de 30 minutos;
X_2 = Número de bactérias em um litro de água não-purificada;
X_3 = Número de partículas radiativas que, em um experimento de laboratório, entram em um contador durante um milissegundo;
X_4 = Número de acidentes com automóveis particulares em determinado trecho de estrada, no período de 12 horas.

Note-se que em todos esses exemplos a variável aleatória (X) consiste na contagem de eventos discretos que ocorrem em um meio contínuo (tempo, volume, área, etc.). Essas variáveis tomam os valores x= 0, 1, 2, ..., e seu comportamento pode ser descrito pela chamada distribuição de Poisson cuja função de probabilidade é:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}, \; x = 0, 1, 2, \ldots$$

Onde $\lambda > 0$ é o parâmetro da distribuição, sendo referido como a *taxa de ocorrência*, ou seja, o número médio de eventos ocorrendo no intervalo considerado. Utiliza-se a notação: $X \sim Po(\lambda)$.

Se X tiver distribuição de Poisson com parâmetro λ, então o valor esperado e a variância são:

$$E(X) = \lambda$$
$$Var(X) = \lambda$$

Teorema: Seja X uma variável aleatória distribuída binomialmente com parâmetro *p* (baseado em *n* repetições de um experimento). Isto é

$$P(X = x) = \binom{n}{x} . p^x . (1-p)^{n-x}$$

Admita-se que quando $n \to \infty$, $p \to 0$, de modo que $n.p \to \lambda$. Nessas condições teremos:

$$\lim_{n \to \infty} P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} . \lambda^x}{x!}$$

que é a distribuição de Poisson com parâmetro λ.

O Teorema acima diz, essencialmente, que poderemos obter uma aproximação das probabilidades binomiais com as probabilidades da distribuição Poisson, toda vez que *n* seja grande e *p* seja pequeno. Por esse motivo a distribuição Poisson também é chamada *"distribuição dos eventos raros"*.

Exemplo 2

Uma central telefônica recebe, em média, cinco chamadas por minuto.

a) Defina a variável aleatória.
   X: Número de chamadas recebidas por minuto.
   x: 0, 1, 2, ...
   X ~ Po(5)

b) Calcule a probabilidade de que durante um intervalo de um minuto:
   i. A central telefônica não receba chamada.

   $$P(X = 0) = \frac{e^{-5} . 5^0}{0!} = 0{,}0067$$

   ii. Receba, no máximo, uma chamada.

   $$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}0067 + 0{,}0337 = 0{,}0404$$

   $$P(X = 1) = \frac{e^{-5} . 5^1}{1!} = 0{,}0337$$

   iii. Receba mais de duas chamadas.

   $$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$$

   $$P(X > 2) = 1 - 0{,}1246 = 0{,}8754$$

   $$P(X = 2) = \frac{e^{-5} . 5^2}{2!} = 0{,}0842$$

c) Durante um intervalo de quatro minutos, qual a probabilidade de que ocorram 15 chamadas?
   Nesse caso, como o intervalo de tempo foi alterado, o parâmetro da distribuição também irá sofrer alteração proporcional, ou seja, λ= 5 chamadas por minuto passará a ser λ= **20 chamadas por quatro minutos**. Assim:

   $$P(X = 15) = \frac{e^{-20} . 20^{15}}{15!} = 0{,}0516$$

Exercício 4

Falhas ocorrem, ao acaso, ao longo do comprimento de um fio delgado de cobre. Suponha que o número de falhas siga a distribuição de Poisson, com uma média de 2,3 falhas por milímetro.

a) Determine a probabilidade de existir exatamente 2 falhas em 1 milímetro de fio.
b) Determine a probabilidade de existir entre 2 e 4 falhas em 1 milímetro de fio.
c) Determine a probabilidade de 10 falhas em 5 milímetros de fio.
d) Determine a probabilidade de existir, no mínimo, uma falha em 2 milímetros de fio.

Respostas: a) 0,2652 b)0,2033 c) 0,1129 d) 0,99

Exercício 5

O número de falhas em parafusos de máquinas da indústria textil segue distribuição de Poisson, com uma média de 0,1 falha por metro quadrado.
a) Qual é a probabilidade de que haja duas falhas em 1 metro quadrado de tecido?
b) Qual é a probabilidade de que haja uma falha em 10 metros quadrados de tecido?
c) Qual é a probabilidade de que não haja falhas em 20 metros quadrados de tecido?
d) Qual é a probabilidade de que haja no mínimo duas falhas em 10 metros quadrados de tecido?

Respostas: a) 0,0045 b)0,3679 c) 0,1353 d) 0,2642

Exercício 6

Um engenheiro de tráfego monitora o fluxo de carros em um cruzamento que tem uma média de 6 carros por minuto. Para estabelecer o tempo de um sinal, as seguintes probabilidade são utilizadas:
a) Qual é a probabilidade de nenhum carro passar pelo cruzamento em 30 segundos?
b) Qual é a probabilidade de três ou mais carros passarem pelo cruzamento em 30 segundos?

Respostas: a) 0,0498 b)0,5768