Resolución cuerda

Rodrigo Tesone

April 2021

Resolución de ecuación de una cuerda

2)

La idea es resolver:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1}$$

Con las condiciones de contorno:

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 & (2) \\ u(L,t) = 0 & (3) \end{cases}$$

Y las condiciones iniciales:

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} \frac{2c}{L}x & \text{for } 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \\ \frac{2c}{L}(L-x) & \text{for } \frac{L}{2} < x \leq L \end{cases} \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \tag{5}$$

Planteo:

$$u(x,t) = A(x)B(t)$$

Calculo las derivadas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A^{''}(x)B(t)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A(x)B^{''}(t)$$

Reemplazo en (1) y trabajo algebraicamente:

$$A^{''}(x)B(t) = \frac{1}{c^2}A(x)B^{''}(t)$$
$$\frac{A^{''}(x)}{A(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{B^{''}(t)}{B(t)}$$

Dado que se esta igualando entre 2 funciones de variables diferentes la única solución posible es que la razón sobre esas funciones sea una constante llamada $-\lambda$.
Considerando eso planteamos las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} A^{''}(x) + \lambda A(x) & = 0 \quad (6) \\ B^{''}(t) + \lambda c^2 B(t) & = 0 \quad (7) \end{cases}$$

De aqui vemos que se reduce a 2 ecuaciones diferenciales de una sola variable.
La solución de (6) es:

$$A(x) = C_1 \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)$$

Le aplico la condición (2):

$$\begin{aligned} u(0,t) = A(0)B(t) &= 0 \\ A(0) &= 0 \\ C_2 \cos(0) &= 0 \\ C_2 &= 0 \end{aligned}$$

Ahora aplico (3):

$$\begin{aligned} u(L,t) = A(L)B(t) &= 0 \\ A(L) &= 0 \\ C_1 \sin\left(\sqrt{\lambda}L\right) &= 0 \\ \text{Dado que } C_1 \text{ no puede ser } 0 \\ \sqrt{\lambda}L &= n\pi \\ \sqrt{\lambda} &= \frac{n\pi}{L} \end{aligned}$$

Con esta relación para λ resolvemos (7) proponiendo:

$$B(t) = D_1 \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) + D_2 \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)$$

Le aplico la condición (5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(A(x)B(t))}{\partial t} = A(x)\frac{\partial B(t)}{\partial t} &= A(x)\left[D_1\sqrt{\lambda}\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) - D_2\sqrt{\lambda}\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)\right] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= A(x)\left[D_1\sqrt{\lambda}\cos\left(\sqrt{\lambda}0\right) - D_2\sqrt{\lambda}\sin\left(\sqrt{\lambda}0\right)\right] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= A(x)D_1\sqrt{\lambda} \\ 0 &= A(x)D_1\sqrt{\lambda} \\ D_1 &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}ct\right)$$

Para plantear la condición inicial (4) primero reescribimos a $f(x)$ como $\widetilde{f}(x)$ siendo $\widetilde{f}(x)$ una función impar:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} -\frac{2c}{L}(L+x) & \text{for } -L < x \leq -\frac{L}{2} \\ \frac{2c}{L}x & \text{for } -\frac{l}{2} \leq x \leq 0 \\ \frac{2c}{L}x & \text{for } 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{2c}{L}(L-x) & \text{for } \frac{L}{2} < x \leq L \end{cases}$$

Ahora calculamos

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Solo falta obtener c_n que es el termino que resulta de calcular una serie de Fourier de senos:

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$c_n = \frac{2}{L}\left[\underbrace{\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2c}{L}x\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}_{f_1} + \underbrace{\int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{2c}{L}(L-x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx}_{f_2}\right]$$

Luego de resolverlas en el jupyternotbook vemos:

$$c_n = \frac{2}{L}\left[\frac{2C\left(-\frac{L^2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n\pi} + \frac{L^2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2\pi^2}\right)}{L} - \frac{2CL\sin(n\pi)}{n^2\pi^2} - \frac{2C\left(-\frac{L^2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n\pi} - \frac{L^2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2\pi^2}\right)}{L}\right]$$

Reacomodando terminos se ve:

$$c_n = \frac{8c}{n^2\pi^2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

Los pares se anulan asique pruebo con $n = 2n-1$:

$$c_{2n-1} = \frac{8c}{(2n-1)^2\pi^2}(-1)^{n+1}$$

$\therefore$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8c}{(2n-1)^2\pi^2}(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{L}ct\right)$$