

Exercícios e problemas de Cálculo Numérico

Rodrigo Câmara

5 de Julho de 2017

Conteúdo

| | | |
|------------|--|-----------|
| I | Primeira unidade | 6 |
| 1 | Noções básicas sobre erros | 7 |
| 1.1 | Aritmética do ponto flutuante | 7 |
| 1.2 | Problemas | 8 |
| 2 | Métodos para encontrar solução de sistema linear | 12 |
| 2.1 | Métodos diretos | 12 |
| 2.2 | Métodos iterativos | 13 |
| 2.3 | Problemas | 14 |
| 3 | Métodos para encontrar raiz de função | 17 |
| 3.1 | Método da bissecção | 17 |
| 3.2 | Métodos do Ponto Fixo | 17 |
| 3.3 | Método de Newton-Raphson | 18 |
| 3.4 | Método da secante | 18 |
| 3.5 | Problemas | 18 |
| II | Segunda unidade | 21 |
| 4 | Aproximação de funções | 22 |
| 4.1 | Interpolação de funções | 22 |
| 4.2 | Ajuste de curvas pelo critério dos mínimos quadrados | 23 |
| III | Terceira unidade | 27 |
| 5 | Integração numérica | 28 |
| 5.1 | Regra do trapézio | 28 |
| 5.2 | Regra de 1/3 de Simpson | 29 |
| 6 | Resolução numérica de equações diferenciais ordinárias | 30 |
| 6.1 | Métodos de Euler | 30 |
| 6.2 | Métodos de Runge-Kutta | 31 |
| A | Soluções | 32 |

Introdução

Este livro traz uma coleção de exercícios e problemas sobre Cálculo Numérico, desenvolvidos para alunos de graduação. As questões foram ou elaboradas por mim ou adaptadas de livros didáticos¹. Alguns exercícios (não todos) possuem a solução nas páginas finais. Observe que é *apenas* a solução. Cabe ao aluno escrever o encadeamento de argumentos que levam à ela.

Este material foi escrito em L^AT_EX e é *grátis e livre*. Você pode utilizar e modificar este trabalho à vontade, desde que dê os devidos créditos. Eu também gostaria de receber críticas, sugestões e relatos de sua experiência utilizando este livro, seja você aluno ou professor. Entre em contato comigo pelo email rodrigo.camara@ufersa.edu.br.

Preciso avisar que este livro está em versão *beta*, ou seja, ainda está *in-completo* e possivelmente com erros. Por favor, caso encontre algum, avise-me. Verifique sempre a data que consta na primeira página.

Este livro foi feito por dois motivos: o primeiro, e mais importante, é oferecer uma forma fácil para que os alunos de graduação do curso *Cálculo Numérico* tenham acesso aos exercícios. Não canso de enfatizar a importância de exercitar o que foi aprendido em aula. Como um professor uma vez me ensinou, “aprender Matemática é como aprender a nadar: não basta apenas ver”.

O segundo motivo é puramente por organização própria. Percebi que se não encontrasse uma forma de reunir as questões que elaborei, elas possivelmente se perderiam no meio de códigos e arquivos duplicados no meu computador.

Como usar este livro

As questões são divididas em dois tipos: *exercícios* e *problemas*. As do tipo *Exercícios* trazem questões simples e têm a finalidade de treinar o aluno para a teoria nova. As do tipo *Problemas* são as mais interessantes. Cada problema vai exigir criatividade para relacionar o que ele aprendeu nos exercícios com o que está sendo pedido.

A resolução de problemas matemáticos é de preponderante importância para a educação, pois oferece suporte à curiosidade dos estudantes, ao mesmo tempo em que traz situações reais para a sala de aula, propicia a possibilidade da

¹ARENALES, Selma; DAREZZO, Artur. *Cálculo numérico: aprendizagem com apoio de software*. Cengage Learning, 2008.

RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. Makron Books do Brasil, 1997.

BURIAN, Reinaldo; DE LIMA, Antonio Carlos; JÚNIOR, Annibal Hetem. *Cálculo numérico*. Livros Técnicos e Científicos, 2007.

descoberta do novo e incentiva o gosto pelo desafio mental. Segundo George Polya, matemático húngaro considerado precursor desta didática,

“Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter²”.

Recomendo a leitura da obra de Polya, mas, resumidamente, ele propõe a seguinte estratégia para resolver problemas:

1. Entenda o problema

Primeiro, você tem de entender o problema:

- Qual é a incógnita? Quais são os dados? Quais são as condições? Mais importante: descubra o que está sendo pedido!
- É possível responder o que está sendo pedido? As condições são suficientes para determinar a incógnita? Ou são insuficientes? Ou redundantes? Ou contraditórias?
- Faça uma figura. Outra se necessário. Introduza notação adequada.
- Separe as condições em partes

2. Construa uma estratégia de resolução

Ache conexões entre os dados e a incógnita. Talvez seja conveniente considerar problemas auxiliares ou particulares, se uma conexão não for achada em tempo razoável. Use isso para “bolar” um plano ou estratégia de resolução do problema.

- Você já encontrou este problema ou algum parecido?
- Você conhece um problema semelhante? Conhece teoremas ou fórmulas que possam ajudar?
- Olhe para a incógnita! Tente achar um problema familiar e que tenha uma incógnita semelhante
- Digamos que você encontrou um problema, já resolvido, relacionado com o seu. É possível aproveitá-lo? Reutilizar o método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar de modo a viabilizar esses objetivos?
- Você consegue enunciar o problema de uma outra maneira?

²POLYA, G. A arte de resolver problemas. 2a reimpressão, 2a . ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

- Se não consegue resolver o problema dado, tente resolver um problema parecido. Você consegue imaginar um caso particular mais acessível? Um caso mais geral e mais acessível? Consegue resolver alguma parte do problema? Mantenha apenas parte das condições do problema e observe o que ocorre com a incógnita, como ela varia agora? Você consegue obter alguma coisa desde os dados? Consegue imaginar outros dados capazes de produzir a incógnita? Consegue alterar a incógnita ou os dados, ou ambos, de modo que a nova incógnita e os novos dados fiquem mais próximos?
- Você está levando em conta todos os dados? E todas as condições?

3. Execute a estratégia

Frequentemente, esta é a etapa mais fácil do processo de resolução de um problema. Contudo, a maioria dos principiantes tendem a pular para essa etapa prematuramente, e acabam dando-se mal. Outros elaboram estratégias inadequadas e acabam se enredando terrivelmente na execução.

- Execute a estratégia.
- Ao executar a estratégia, verifique cada passo. Você consegue mostrar claramente que cada um deles está correto?

4. Revise

Examine a solução obtida.

- Verifique o resultado e o argumento
- Você pode obter a solução de um outro modo?
- Qual a essência do problema e do método de resolução empregado? Em particular, Você consegue usar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Espero que este material que você tem em mãos o auxilie neste curso. Qualquer dúvida, não hesite em conversar comigo. Estou na sala 11 do bloco 1 e respondendo os *emails* enviados para rodrigo.camara@ufersa.edu.br o mais rápido possível.

– Rodrigo Câmara.

Histórico de mudanças

26/06/17 • Primeira versão publicada. O capítulo 1 sobre erros está completamente utilizável.

05/07/17 Os capítulos 2 e 3 estão completos. Com isso, toda Parte I está utilizável.

- Mudei algumas funções da questão 3.1.1. Algumas delas não tinham raízes.
- Novo problema: Q 3.5.3. Esse problema foi usado pela primeira vez em 2016.1. Esta versão foi simplificada.
- Novo problema: Q 3.5.4, sobre matemática financeira.
- Novo problema: Q 3.5.5, um elegante (e desafiador) problema escrito por RUGGIERO.
- Novo problema: Q 2.3.4, sobre balanço de reações químicas.
- Novo problema: Q 2.3.3, um problema baseado na monografia do aluno Pedro Henrique, da UFERSA Angicos.
- Troquei a ordem dos capítulos sobre sistemas lineares e sobre raízes de funções, para seguir a ordem apresentada em ARENALES.
- Mais soluções para exercícios sobre resolução de sistemas lineares por métodos diretos.
- Correção do gabarito da questão 1.1.3.

Parte I

Primeira unidade

Capítulo 1

Noções básicas sobre erros

1.1 Aritmética do ponto flutuante

Q 1.1.1. Represente os seguintes números na base binária. Algum destes números não pode ser exatamente representável em uma máquina?

- | | |
|--------------------|-------------------|
| a) $(25)_{10}$ | e) $(25.75)_{10}$ |
| b) $(11)_{10}$ | f) $(0.6)_{10}$ |
| c) $(15)_{10}$ | g) $\frac{3}{4}$ |
| d) $(0.1875)_{10}$ | |

Q 1.1.2. Represente os seguintes números binários na forma decimal.

- | | |
|---------------|------------------|
| a) $(1101)_2$ | d) $(0.011)_2$ |
| b) $(111)_2$ | |
| c) $(10)_2$ | e) $(111.011)_2$ |

Q 1.1.3. Represente os seguintes números na forma normalizada:

- a) $(100)_{10}$
- b) $(0.0158)_{10}$
- c) $(101)_2$

Q 1.1.4. Sobre o sistema de ponto flutuante normalizado $SPF(10, 5, -15, 20)$, que utiliza o arredondamento, faça o que é pedido:

- a) Como é representado o número 12.31419?
- b) Como é representado o número 250 001 000 000?
- c) Qual é o erro absoluto cometido por este sistema ao representar o número do item a)?
- d) Qual é o erro absoluto cometido por este sistema ao representar o número do item b)?

- e) Compare os dois erros absolutos. Que conclusões você pode tirar?
- f) Como é representado o número $\frac{1234567}{100000000}$?
- g) Como é representado o número $\frac{1234567}{10}$?
- h) Qual é o erro absoluto cometido por este sistema ao representar o número do item f)? Idem para g).
- i) Compare os dois erros absolutos. Que conclusões você pode tirar?

Q 1.1.5. Considere o sistema de ponto flutuante normalizado SPF (10,4,-1,2). Para este sistema,

- a) Qual é o menor positivo exatamente representável?
- b) Qual é o maior positivo exatamente representável?
- c) Determine as regiões de *overflow* e de *underflow*.

Q 1.1.6. Considere uma máquina SPF(10,4,-16,16) que utiliza arredondamento. Calcule, de acordo com o modo de operação desta máquina, o resultado da expressão

$$(((4 + 4) + 4) + 4) + 56070.$$

Em seguida, considerando a mesma máquina, calcule

$$(((56070 + 4) + 4) + 4) + 4.$$

Que conclusões você tira?

1.2 Problemas

Q 1.2.1. Quantos números podem ser exatamente representados em uma máquina $F(10, 4, -1, 2)$ que opera no sistema do ponto flutuante?

Q 1.2.2. “[...] Poucos dos números usados superam 10^{100} , ou seja, o número 1 seguido de cem zeros, que foi batizado *googol* por um garoto de 9 anos, sobrinho do matemático americano Edward Kasner. Para se ter uma ideia, desde o *Big Bang*, se passaram “apenas” 17×10^{39} ioctossegundos, a menor unidade de tempo observável.

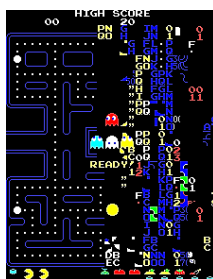
Apesar de ser um número absurdamente grande, contar até o *googol* ou até 10 é parte do mesmo processo. Mas contar a totalidade dos números naturais é outro problema, pois é preciso compreender que muito grande e infinito são conceitos inteiramente diferentes. Pense um número muito, muito, muito, mas muito grande: esteja certo, ele não estará mais perto do infinito do que o 1. Mas essa é outra história...”

Adaptado da revista *Superinteressante*, “A magia dos grandes números”, disponível em <http://super.abril.com.br/ciencia/a-magia-dos-grandes-numeros/>, acesso em 20 de maio de 2017.

Q 1.2.3. *Pac-Man* é um jogo de *videogame* lançado no Japão em 1980 para fliperamas. Foi um dos maiores sucessos da época e ainda hoje versões são lançadas em diversas plataformas modernas. O objetivo era controlar o personagem-título por um labirinto e devorar todas as pastilhas. No momento em que *Pac-Man* consegue coletar todas elas, o jogador alcança a fase seguinte.



As fases são gradativamente mais rápidas e difíceis. No entanto, por melhor que seja o desafiante, ninguém consegue terminar o jogo: em uma dada fase, sempre acontece o “*killscreen bug*” (o “defeito da tela da morte”). O labirinto se deforma, letras invadem a tela e *Pac-man* fica impedido de capturar todas as pastilhas da fase, tornando impossível a vitória (figura 1.2).



Como o defeito acontece? O número da fase na qual o jogador se encontra é registrado na memória em formato binário em um espaço de oito dígitos. O processador registra na memória a fase 1 como 00000001; a fase 2 é registrada como 00000010; a fase 3 é registrada como 00000011; a fase 4 é 00000100; a fase 5 é 00000101 e assim em diante.

9

Fonte: adaptado de http://errors.wikia.com/wiki/Pac_Man_-_Infamous_Kill_Screen_Bug

Com base no texto acima, determine em qual fase acontece o defeito da tela da morte.

Q 1.2.4. Dentre os algoritmos de resolução de sistema linear temos o “método de eliminação de Gauss”. Este algoritmo executa uma série de operações fundamentais com o intuito de simplificar um sistema de equações.

Digamos que, em um dado momento, o computador deva escolher entre exatamente uma dessas duas abordagens a se realizar:

- Multiplicar os números d , e e f por $\frac{1234567}{100000000}$ e somá-los com os números a , b e c .
- Realizar uma mudança de ordem nas linhas do sistema linear e, em seguida, multiplicar os números d , e e f por $\frac{1234567}{10}$ e somá-los com os números g , h e i .

Supondo que ambas as abordagens *teoricamente* produzem o mesmo resultado final e supondo que o computador opere em sistema de ponto flutuante com uma mantissa de cinco dígitos, existe alguma vantagem em uma abordagem em relação à outra? Explique.

Q 1.2.5. A tabela 1.1 lista as características de algumas calculadoras.

Tabela 1.1: Configurações de algumas máquinas calculadoras.

| Fabricante | Modelo | Base, β | Mantissa, t | Expoente mín, m | Expoente máx, M |
|------------|---------|---------------|---------------|-------------------|-------------------|
| CASIO | FX-82EX | 10 | 10 | -99 | +99 |
| HP | 12c | 10 | 12 | -99 | +99 |
| Microsoft | Excel | 10 | 15 | -307 | 307 |
| TexasInc | JJF85 | 2 | 32 | -64 | 64 |

Qual destas calculadoras consegue representar o maior número? E qual consegue representar o menor número positivo? Alguma dessas máquinas consegue representar exatamente o número *googol*? Alguma dessas máquinas consegue representar exatamente o número π ?

Q 1.2.6. Em 4 de junho de 1996, menos de um minuto após o lançamento, o foguete francês *Ariane 501* se autodestruíu. Era o primeiro lançamento da série Ariane 5 e, logo em seguida, foi indicada pelo CNES (Centro Nacional de Estudos Espaciais) e pela ESA (Agência Espacial Europeia) uma comissão presidida pelo matemático francês Jacques-Louis Lions, do Colégio da França, para investigar o desastre.

Digamos que você faz parte dessa comissão e recebeu a tabela 1.2 que indica os valores da função “alinhamento interno horizontal” (*horizontal bias*, em inglês), $H(t)$, ao longo do tempo. Esta função indica para o foguete quanto combustível os propulsores horizontais devem queimar para alinhar o veículo. Os valores são calculados na central de comando, em uma máquina $F(10, 12, -64, 64)$, e enviados instantaneamente por rádio para o computador de controle do foguete, uma máquina $F(10, 8, -16, 16)$, ambas operando em sistemas de ponto flutuante.

A partir da tabela 1.2 você é capaz de determinar em qual momento (em segundos) aconteceu uma falha no *software*? Qual falha aconteceu?

Tabela 1.2: Alinhamento interno horizontal do foguete, ao longo do tempo após o lançamento. Fonte <http://www.sbmec.org.br/bol/bol-2/artigos/ariane5.html>, acesso em 20 de maio de 2017.

| Tempo t , em segundos | Alinhamento interno horizontal, $H(t)$ |
|-------------------------|--|
| 0 | 0 |
| 5 | 0.212542000000E4 |
| 10 | 0.511252351123E10 |
| 15 | 0.238114322137E11 |
| 20 | 0.812001231123E11 |
| 25 | 0.322016666667E12 |
| 30 | 0.544406681249E15 |
| 35 | 0.167731031031E20 |
| 40 | 0.389310310310E34 |

Capítulo 2

Métodos para encontrar solução de sistema linear

2.1 Métodos diretos

Q 2.1.1. Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 3z + 8w = -12 \\ 5y + z + w = 17 \\ 4z - 2w = 10 \\ 10w = 30 \end{cases}.$$

A matriz do coeficientes pode ser escrita como matriz triangular? Caso possa, encontre a solução. Caso contrário, aplique o método de Gauss para triangularizar este sistema.

Q 2.1.2. Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 6 \\ 10 & 2 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 32 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- a) Resolva este sistema linear pelo método de eliminação de Gauss.
- b) Resolva este sistema pelo método da decomposição LU.
- c) Resolva este sistema linear pelo método de eliminação de Gauss por meio do *software Visual Cálculo Numérico*¹. Configure o **Formato dos Números** (disponível no menu **Utilitários**) para a Notação Científica (Padrão em latino), com **Precisão do número em casas decimais** ajustado para “4”.

Q 2.1.3. Aplique, se for possível, a fatoração LU na matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

¹Disponível gratuitamente no SIGAA.

Utilize esta fatoração para resolver estes dois sistemas lineares:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ 4x + 5y = 26 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 5y = 9 \end{cases}.$$

Q 2.1.4. Considere que, ao final da primeira iteração do método de eliminação de Gauss, tenhamos o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Se estivermos utilizando a estratégia do pivoteamento parcial, qual elemento escolheremos como pivô da segunda iteração?

Q 2.1.5. Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 1 \times 10^{-20} & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. Calcule a solução deste sistema em uma folha de papel. Simplifique as frações somente no final, quando for estipular a solução.
2. Calcule a solução desse sistema novamente, mas dessa vez utilizando o *software Visual Cálculo Numérico*. Configure o **Formato dos Números** para a Notação Científica (Padrão em latino), com **Precisão do número em casas decimais** configurado para “4”. O resultado foi o mesmo encontrado no item 1?

Q 2.1.6. Resolva novamente o sistema mostrado na questão 2.1.5, com o *Visual Cálculo Numérico* utilizando o pivoteamento parcial. Comente o resultado.

Q 2.1.7. Resolva os sistemas lineares abaixo pelo *Visual Cálculo Numérico*, com 2 dígitos de precisão, com pivoteamento parcial e depois sem pivoteamento parcial. Compare as soluções.

1.
$$\begin{cases} 0.21x + 0.33y = 0.54 \\ 0.70x + 0.24y = 0.94 \end{cases}.$$

2.
$$\begin{cases} 0.11x - 0.13y + 0.20z = -0.02 \\ 0.10x + 0.36y + 0.45z = 0.25 \\ 0.50x - 0.01y + 0.30z = -0.70 \end{cases}.$$

2.2 Métodos iterativos

Q 2.2.1. Faça os testes do critério das linhas nos seguintes sistemas lineares. Se a convergência for satisfeita, faça as duas primeiras iterações do método de Gauss-Jacobi. Ao final de cada iteração, calcule $d^{(k)}$, $d_r^{(k)}$ e $|Ax^{(k)} - b|$.

$$1. \begin{cases} 2x + 3y + z = 11 \\ x + y + z = 6 \\ 5x + 2y + 3z = 18 \end{cases}.$$

$$2. \begin{cases} 5x + y + z = 7 \\ 2x + 6y - 2z = 6 \\ y + 2z = 3 \end{cases}.$$

$$3. \begin{cases} 4x - y + 7z = 9 \\ 5x + 3y - z = 0 \\ -7x - 11y + 17z = 19 \end{cases}.$$

$$4. \begin{cases} x + 6y + z = 8 \\ 2x - 6z = -4 \\ 3x + y = 4 \end{cases}.$$

Q 2.2.2. Refaça a questão 2.2.1, mas desta vez testando a convergência com o critério de Sassenfeld. Caso a convergência seja satisfeita, calcule as duas primeiras iterações do método de Gauss-Seidel.

Q 2.2.3. Com o auxílio do *Visual Cálculo Numérico*, calcule as soluções dos sistemas da questão 2.2.1 por meio do método de Gauss-Jacobi e por meio do método de Gauss-Seidel, *caso a respectiva convergência seja garantida*. Em todos os casos, utilize a precisão $\epsilon = 0.1$ com o critério de parada de sua preferência.

2.3 Problemas

Q 2.3.1. Uma função *polinomial de segundo grau* é uma função no formato

$$p_2(x) = ax^2 + bx + c, \quad (2.1)$$

com $a \neq 0$.

Encontre a função polinomial de segundo grau cujo gráfico passa pelos pontos $(1; 5)$, $(3; 11)$ e $(5; 25)$. Em seguida, trace o gráfico desta função no *GeoGebra* e confirme se de fato este passa pelos pontos dados.

Dica: Observe que, pela equação 2.1, um ponto, digamos $(x_0; y_0)$, pode ser representado pela equação linear

$$p_2(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c,$$

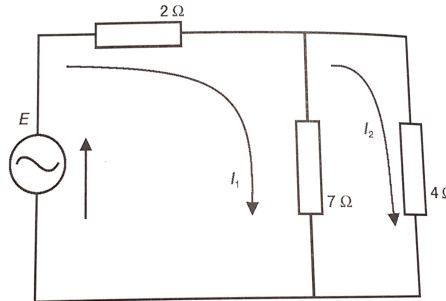
onde $p_2(x_0) = y_0$.

Q 2.3.2. Considere o circuito elétrico representado na figura 2.1. Pela Lei das Malhas, este circuito pode ser modelado pelo sistema linear

$$\begin{cases} 2i_1 + 7i_1 - 7i_2 = 12 \\ 7i_2 + 4i_2 - 7i_1 = 0 \end{cases}.$$

Determine, em amperes, as intensidades das correntes neste circuito.

Figura 2.1: Circuito elétrico formado por três resistores e uma bateria de 12 volts.



Q 2.3.3. Um grande forno industrial é suportado por uma longa coluna de tijolos refratários. Durante a operação, as condições são tais que três superfícies da coluna são mantidas a temperaturas altas.

É de interesse dos responsáveis da indústria que a temperatura dos tijolos seja calculada, a fim de auxiliar na escolha dos materiais e traçar estratégias sobre a segurança dos funcionários da indústria, sobre a manutenção do equipamento e sobre a eficiência energética.

O problema do cálculo das temperaturas pode ser simplificado da seguinte forma: primeiro, divida a área da coluna em retângulos, conforme a figura 2.2. Em seguida, analise a temperatura somente nos *pontos nodais*, ou seja, nos vértices dos retângulos.

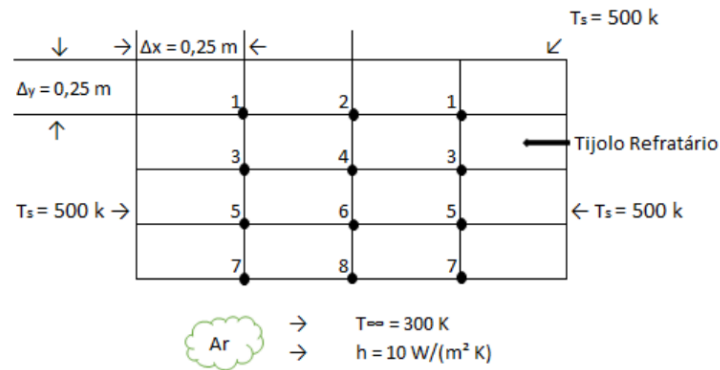


Figura 2.2: Esquema que indica os 12 pontos nodais que devem-se calcular a temperatura.

Pela simetria do forno, basta calcular a temperatura apenas dos pontos nodais 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8. As temperaturas destes pontos são, respectivamente, $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7$ e T_8 .

De acordo com a termodinâmica, as temperaturas T_1, T_3 e T_5 dos pontos

“interiores” 1, 3 e 5 podem ser descritas pelas equações

$$\begin{aligned}4T_1 &= T_2 + T_3 + 1000 \\4T_3 &= T_1 + T_4 + T_5 + 500 \\4T_5 &= T_3 + T_6 + T_7 + 500.\end{aligned}$$

Já para os nós 2, 4 e 6, que são do tipo “ponto nodal em uma superfície adiabática plana com convecção”, as temperaturas são descritas, respectivamente, pelas equações

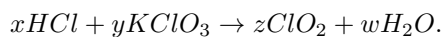
$$\begin{aligned}4T_2 &= 2T_1 + T_4 + 500 \\4T_4 &= T_2 + 2T_3 + T_6 \\4T_6 &= T_4 + 2T_5 + T_8.\end{aligned}$$

Por último, as temperaturas dos nós 7 e 8, do tipo “ponto nodal em uma superfície não-adiabática, plana, com convecção” localizados na parte inferior da coluna, podem ser descritas pelas equações

$$\begin{aligned}9T_7 &= 2T_5 + T_8 + 2000 \\9T_8 &= 2T_6 + 2T_7 + 1500.\end{aligned}$$

Determine as temperaturas $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7$ e T_8 dos nós.

Q 2.3.4. Considere a reação estequiométrica entre x mols de ácido clorídrico (HCl) e y mols de ácido perclórico ($HClO_3$), que tem como produtos z mols de dióxido de monocloro (ClO_2) e w mols de água (H_2O):



Supondo que essa reação produziu 3 mols de água, modele um sistema linear que descreve as quantidades de mols das demais substâncias e as determine. Dica: as quantidades de H , de Cl e de O antes da seta devem ser iguais às quantidades de depois da seta (“Nada se cria, nada se perde, tudo se transforma”, Lavoisier).

Capítulo 3

Métodos para encontrar raiz de função

3.1 Método da bissecção

Q 3.1.1. Utilizando o *GeoGebra*, estime, em cada função, um intervalo que possua uma raiz. Em seguida, com auxílio de uma calculadora, faça as duas primeiras iterações do método da bissecção. Ao final de cada iteração, calcule

- a diferença absoluta entre duas candidatas a solução,
- a diferença relativa entre duas candidatas a solução,
- o comprimento do intervalo e
- a diferença absoluta entre $f(\bar{x})$ e 0.

1. $f(x) = x + e^x$,
2. $f(x) = \sin(x) - x^2 + 1$,
3. $f(x) = x^3 - \sin(x)$,
4. $f(x) = 3x - \cos(x) + 1$,
5. $f(x) = \ln(x) - \sin(x)$.

Q 3.1.2. Estime quantas iterações são necessárias para achar a raiz de cada uma das funções da questão 3.1.1 pelo método da bissecção, considerando a precisão ϵ , $\epsilon = 0.001$.

Q 3.1.3. Encontre as raízes das funções da questão 3.1.1 com precisão ϵ , com $\epsilon = 0.001$, utilizando o critério de parada que você julgar mais apropriado.

3.2 Métodos do Ponto Fixo

Q 3.2.1. Considere a função dada f dada por

$$f(x) = x^6 + 4x^2 - 20.$$

1. Trace o gráfico desta função no *GeoGebra* e estime a menor raiz positiva.
2. Utilizando a forma geral

$$\varphi(x) = x + A(x)f(x),$$

com $A(\xi) \neq 0$, construa três funções iterativas φ .

3. Verifique se alguma destas funções iterativas converge para a menor raiz positiva de f .

3.3 Método de Newton-Raphson

Q 3.3.1. Seja f a função da questão 3.2.1.

1. Determine a função φ conforme proposta pelo método de Newton-Raphson.
2. Calcule as duas primeiras iterações deste método.

Q 3.3.2. Considere a função f dada por

$$g(x) = x^8 + 6x^2 - 4x + 0.6655.$$

1. Trace o gráfico desta função no *GeoGebra* e estime a menor raiz positiva.
2. Determine, utilizando o método de Newton-Raphson e precisão $\epsilon = 0.01$, a raiz \bar{x} desta função com o seguinte critério de parada:
 - (a) Diferença absoluta entre duas candidatas a solução.
 - (b) Diferença absoluta entre $f(\bar{x})$ e 0.

Comente cada um dos resultados.

3.4 Método da secante

Q 3.4.1. Calcule as duas primeiras iterações do método da secante das funções dadas abaixo. Esboce os gráficos das funções no *GeoGebra* para estimar as duas aproximações iniciais da menor raiz positiva.

1. $f(x) = x^2 - 10$.
2. $g(x) = x \sin(x)$.
3. $h(x) = (x - 2)^2 - \ln(x)$.

3.5 Problemas

Q 3.5.1. Os métodos de busca de raízes de função podem ser utilizados para encontrar *soluções de equações*. Sugira uma forma para *resolver* equações. Utilizando esta forma, encontre um número x tal que

$$e^x = x^2.$$

Q 3.5.2. Descreva uma forma de encontrar (e encontre) a raiz quadrada de 7 com treze algarismos significativos. Depois, encontre a raiz cúbica de 10 com treze algarismos significativos. Dica: a raiz quadrada de a é encontrada ao se calcular a raiz da função $f(x) = x^2 - a$.

Q 3.5.3. Uma das tarefas mais importantes de um engenheiro civil é calcular a carga máxima que uma estrutura pode suportar. Uma previsão errada pode fazer a construção se romper, trazendo prejuízos financeiros, risco à integridade física de trabalhadores e atraso no cumprimento de prazos.

Para uma coluna presa pela base, carregada excentricamente com tensão σ , utiliza-se o seguinte modelo matemático para calcular a carga axial máxima suportada:

$$f(x) = \frac{x}{A} - \frac{\sigma}{1 + \frac{ec}{r^2} \sec\left(\frac{L}{2r} \sqrt{\frac{x}{EA}}\right)}, \quad (3.1)$$

onde L é o comprimento da coluna em metros, c e r são constantes positivas referentes às propriedades geométricas das colunas, e é uma constante que determina a excentricidade da carga e E é o módulo de Young, uma constante que depende da elasticidade do material utilizado. A função \sec é a função trigonométrica “secante”.

A carga axial máxima suportada, P_{max} , dada em *newtons*, é a *menor raiz positiva* da função dada pela equação 3.1.

Considere uma estrutura construída com os parâmetros dados na tabela 3.1.

Tabela 3.1: Valores das constantes usadas na equação 3.1.

| Constante | Valor (em unidades do Sistema Internacional) |
|-----------|--|
| A | 1 |
| c | 1 |
| r | 1 |
| σ | $4 * 10^4$ |
| E | $3 * 10^7$ |
| e | 0.3 |
| L | 50 |

Determine a carga axial máxima suportada por esta construção.

Q 3.5.4. A equação que relaciona a taxa de juros i com o valor à vista PV , o valor fixo PMT de cada parcela e a quantidade n de parcelas é

$$PMT = PV \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}.$$

Supondo que uma geladeira é vendida à vista por R\$1500,00 e que a loja permite o pagamento em doze parcelas iguais de R\$150,00, calcule a taxa de juros deste financiamento.

Q 3.5.5. (*Problema das vigas*) Duas vigas de madeira de 20 e 30 metros se apóiam nas paredes de um galpão como mostra a figura 3.1. Se o ponto em que se cruzam está a 8 metros do solo, qual é a largura deste galpão?

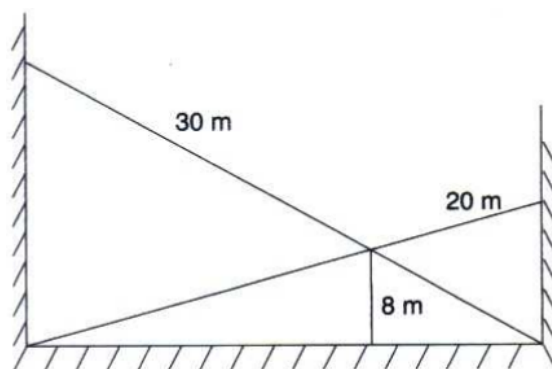


Figura 3.1: Vigas de 30 e 20 metros, apoiadas nas paredes de um galpão.

Parte II

Segunda unidade

Capítulo 4

Aproximação de funções

4.1 Interpolação de funções

Estas questões podem ser resolvidas pelo método de Lagrange (apresentada na aula 09) e pelo método de Newton (aula 10).

Q 4.1.1. Obtenha o polinômio de grau 2 para a aproximação de f tendo os seguintes pontos calculados:

Tabela 4.1: Alguns pontos da função f .

| | | | | | | |
|--------|-------|------|---|-----|-----|-----|
| x | -0.6 | -0.5 | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.7 |
| $f(x)$ | -0.15 | -0.1 | 0 | 0.4 | 1 | 1.9 |

Q 4.1.2. Considere a tabela 4.2 de alguns pontos da função f .

Tabela 4.2: Alguns pontos da função f .

| | | | | | | |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x | 2.4 | 2.6 | 2.8 | 3.0 | 3.2 | 3.4 |
| $f(x)$ | 11.02 | 13.46 | 16.44 | 20.08 | 24.53 | 29.96 |

1. Calcule $f(3.1)$ usando um polinômio de interpolação sobre três pontos.
2. Dê um limitante para o erro cometido.

Q 4.1.3. Na questão 2.1 foi pedido para se determinar, por meio de resolução de um sistema linear, qual função polinomial de segundo grau passa pelos pontos $(1; 5)$, $(3; 11)$ e $(5; 25)$.

Utilize a técnica de Lagrange para determinar novamente esta função polinomial de segundo grau. Compare a dificuldade entre estas duas abordagens.

Q 4.1.4. Aproxime cada uma destas funções por um polinômio interpolador de grau 2 que passe pelos pontos $(0.5, f(0.5))$, $(1.0, f(1.0))$ e $(1.5, f(1.5))$. Em seguida, trace no *GeoGebra* os gráficos da função e do polinômio que a aproxima. Por último, estime o erro no cálculo de $f(1.34)$.

1. $f(x) = \sin(x)$
2. $f(x) = \sqrt{2+x}$
3. $f(x) = \ln(4+x)$

Q 4.1.5. Um grupo de técnicos fez uma série de experimentos em um laboratório no qual verificaram que as partículas de um determinado líquido perdem mobilidade (em cm/s) em função da temperatura (em graus Celsius). Os dados estão descritos na tabela 4.3.

Tabela 4.3: Experimentos sobre a mobilidade de um certo líquido.

| | | | | | | | |
|-------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Temperatura | 100.0 | 99.4 | 98.8 | 98.2 | 97.6 | 97.0 | 96.4 |
| Mobilidade | 222.39 | 222.30 | 222.21 | 222.13 | 222.04 | 221.96 | 221.88 |

Faça uma estimativa da mobilidade das partículas desse líquido quando aquecido a 98 graus Celsius. Faça uma estimativa da temperatura, por meio de um polinômio de grau 3, na qual se espera que a mobilidade seja de 222.35 cm/s .

4.2 Ajuste de curvas pelo critério dos mínimos quadrados

Q 4.2.1. Dada a tabela 4.4 de pontos experimentais, obtenha a reta que melhor ajusta os pontos através do método dos mínimos quadrados. Em seguida, calcule o resíduo quadrado.

Tabela 4.4: Valores obtidos em uma dada experiência.

| | | | | | |
|--------|-----|-----|-----|-----|-----|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $f(x)$ | 2.2 | 3.3 | 4.2 | 5.1 | 6.3 |

Q 4.2.2. Considere a tabela 4.5 de observações do consumo de água em uma cidade de 20 000 habitantes.

Tabela 4.5: Consumo de água em uma cidade ao longo do tempo

| | | | | | |
|---------|------|------|------|------|------|
| Dia | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Consumo | 11.0 | 10.5 | 10.3 | 10.2 | 10.2 |

Considere duas estratégias para prever o consumo de água:

1. Interpole a função nos dois últimos períodos, 3 e 4 (obtenha, portanto, uma reta) e use este polinômio interpolador para prever o consumo no dia 5.
2. Ajuste uma reta, pelo método dos mínimos quadrados, aos três últimos períodos (dias 2, 3 e 4) e use esta reta para prever o consumo no dia 5.

Observe as previsões para o dia 5 que você obteve nos itens 1 e 2 e compare com o valor “real” do consumo do dia 5, mostrado na tabela. Qual das duas estratégias apresentou uma previsão melhor?

Q 4.2.3. Construa uma tabela com os valores de e^x para $x_k = \frac{k}{5}$, com $k \in \{1, \dots, 5\}$ e determine o valor aproximado de $e^{0.23}$ usando

1. Polinômio interpolador,
2. Ajuste de curvas, utilizando uma parábola.

Problemas

Q 4.2.4. Um grupo de alunos de biologia estudou a bioquímica de uma certa espécie de alga, a *Chlorophyta Caulerpa cupressoides*. Eles observaram que a salinidade (em *PSU*) da água influencia nas atividades biológicas da alga, em especial na síntese de uma substância chamada *polissacarimídia* (em milimol por hora). Os resultados das experiências estão descritos na tabela 4.6.

Tabela 4.6: Experiências que relacionam a capacidade da alga *Chlorophyta Caulerpa cupressoides* sintetizar polissacarimídia em função da salinidade.

| Salinidade | Síntese de polissacarimídia |
|------------|-----------------------------|
| 3.2 | 0.9 |
| 0.6 | 3.9 |
| 1.3 | 2.8 |
| 2.3 | 2.1 |
| 3.1 | 1.6 |

Ao ajustar estes dados por uma curva hiperbólica, obtém-se $\varphi(x) = 1/(0.3x + 0.1)$. Ao se ajustar por uma reta, encontra-se $\varphi(x) = -x + 4.3$. Segundo o critério dos mínimos dos desvios quadrados, qual dessas duas curvas se ajusta melhor a este fenômeno biológico?

Q 4.2.5. Dada a tabela 4.7 de pontos experimentais, obtenha a reta que melhor ajusta os pontos através do método dos mínimos quadrados. Em seguida, calcule o resíduo quadrado.

Tabela 4.7: Valores obtidos em uma dada experiência.

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $f(x)$ | 2.2 | 3.3 | 4.2 | 5.1 | 6.3 |

Q 4.2.6. A tabela 4.8 traz alguns valores da função trigonométrica *seno*:

Tabela 4.8: Cálculo de alguns valores da função *seno*.

| x em radianos | 0 | 0.05 | 0.1 | 0.15 | 0.2 |
|-----------------|---|--------|--------|--------|--------|
| $\sin(x)$ | 0 | 0.0500 | 0.0998 | 0.1494 | 0.1987 |

Ajuste estes pontos a uma reta e a uma parábola utilizando o método dos mínimos quadrados. Qual se ajustou melhor?

Q 4.2.7. Construa uma tabela com os valores de e^x para $x_k = \frac{k}{5}$, com $k \in \{1, \dots, 5\}$ e determine o valor aproximado de $e^{0.23}$ usando

1. Polinômio interpolador,
2. Ajuste de curvas, utilizando uma parábola.

Q 4.2.8. A tabela 4.9 relaciona a condutividade elétrica específica de um certo material em função da temperatura. Sabendo que a equação

$$\lambda = b^t a$$

relaciona essas duas grandezas, determine as constantes b e a deste material.

Tabela 4.9: Condutividade elétrica λ em função da temperatura (em graus Celsius).

| t | 14.5 | 30.0 | 64.5 | 74.5 | 86.7 | 94.5 | 98.9 |
|-----------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| λ | 0 | 0.004 | 0.018 | 0.029 | 0.051 | 0.073 | 0.090 |

Q 4.2.9. Ao ser dada a largada de uma corrida de Fórmula 1, os sensores instalados no carro de uma determinada equipe emitiram os dados descritos na tabela 4.10:

Tabela 4.10: A relação consumo/velocidade do primeiro segundo de uma corrida de Fórmula 1.

| Tempo (s) | Consumo (l/s) | Velocidade (km/h) |
|-----------|---------------|-------------------|
| 0.1 | 0.015 | 5.000 |
| 0.2 | 0.019 | 5.727 |
| 0.3 | 0.024 | 6.681 |
| 0.4 | 0.031 | 7.979 |
| 0.5 | 0.041 | 9.831 |
| 0.6 | 0.057 | 12.643 |
| 0.7 | 0.083 | 17.292 |
| 0.8 | 0.133 | 25.988 |
| 0.9 | 0.247 | 45.633 |
| 1.0 | 0.599 | 106.200 |

Faça hipóteses para a modelagem do consumo em função do tempo e para a modelagem da velocidade em função do tempo por meio do método dos mínimos quadrados.

Q 4.2.10. Em 1965, Gordon Moore, um dos fundadores da *Intel*, propôs uma previsão para a crescente miniaturização dos *chips* que ficou conhecida como a “Lei de Moore”. Em sua “profecia”, Moore afirmava que o número de transistores dos *chips* teriam o número duplicado a cada 18 meses. A tabela 4.11 relaciona alguns *chips* com o ano de lançamento.

Tabela 4.11: Relação entre ano de lançamento de *chips* e o número de transistores.

| <i>Chip</i> | Ano | Número de transistores |
|--------------------|------|------------------------|
| 4004 | 1971 | 2 250 |
| 8008 | 1972 | 3 300 |
| 8080 | 1974 | 6 000 |
| 8086 | 1978 | 29 000 |
| 80286 | 1982 | 134 000 |
| 80386 | 1986 | 275 000 |
| 80486 | 1989 | 1 200 000 |
| <i>Pentium</i> | 1993 | 3 100 000 |
| <i>Pentium II</i> | 1997 | 7 500 000 |
| <i>Pentium III</i> | 1999 | 9 500 000 |
| <i>Pentium 4</i> | 2000 | 42 000 000 |

Fonte: BURIAN, Reinaldo; DE LIMA, Antonio Carlos; JÚNIOR, Annibal Hetem. *Cálculo numérico*. Livros Técnicos e Científicos, 2007.

De posse destes dados, proponha uma função que estabeleça uma previsão da capacidade dos *chips* de 2020. (Dica: procure uma função $N = f(a)$, onde N é o número de transistores e a é o ano. Antes de tudo, transforme o eixo de transistores para $\log_{10}(N)$).

Q 4.2.11. Liste as diferenças entre aproximar uma função por *interpolação polinomial* e aproximar função por *ajuste pelo critério dos mínimos quadrados*.

Q 4.2.12. Indique se a afirmação é verdadeira ou falsa.

1. _____ Ao se fazer a interpolação polinomial sobre n pontos, o polinômio encontrado passa por todos estes n pontos.
2. _____ Ao se tabelar n pontos de uma função podemos gerar polinômio de grau até n .
3. _____ Existem pelo menos três polinômios diferentes que passam pelos pontos tabelados: o polinômio obtido por resolução de sistema linear, o polinômio de Lagrange e o polinômio de Newton.
4. _____ Interpolação polinomial é uma aproximação de uma função.
5. _____ Quanto mais pontos são utilizados na interpolação melhor a aproximação será.
6. _____ Quanto mais pontos são utilizados no ajuste por curva melhor a aproximação será.

Parte III

Terceira unidade

Capítulo 5

Integração numérica

5.1 Regra do trapézio

Q 5.1.1. Calcule uma aproximação do número I , dado por

$$I = \int_0^4 x^2 dx,$$

utilizando a regra dos trapézios. Em seguida, estime o erro. Por fim, calcule I utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo para confirmar se a previsão do erro está razoável.

Q 5.1.2. Utilizando a regra dos trapézios repetidos, calcule o valor aproximado do número $\int_0^6 (\cos(x) + x)dx$, usando 6 pontos. Em seguida, estime o erro desta aproximação.

Q 5.1.3. Considere a função f calculada em alguns pontos, descritos pela tabela 5.1.

| Tabela 5.1: Alguns pontos da função f . | | | | | | | |
|---|------|------|------|------|------|------|------|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $f(x)$ | 0.21 | 0.32 | 0.42 | 0.51 | 0.82 | 0.91 | 1.12 |

Calcule $\int_0^6 f(x)dx$.

Q 5.1.4. Estime $\int_0^1 3e^{-x}dx$ utilizando a regra dos trapézios repetidos, com $h = 1/5$.

Q 5.1.5. Em quantos subintervalos, no mínimo, precisamos dividir o domínio de integração $[0, 2]$ para que o erro da integração de $\int_0^2 e^x$ seja menor que 0.01?

Q 5.1.6. Refaça a questão 3 da lista extra da segunda unidade utilizando a técnica dos trapézios repetidos. Quantos pontos devemos tabular para que o erro seja menor que $0.01m/s^2$ na análise destes quatro segundos de voo?

5.2 Regra de 1/3 de Simpson

Q 5.2.1. Calcule uma aproximação do número I , dado por

$$I = \int_0^4 x^2 dx,$$

utilizando a regra de 1/3 de Simpson. Em seguida, estime o erro. Por fim, calcule I utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo para confirmar se a previsão do erro está razoável. Compare os resultados com os obtidos com a integração pela regra do trapézio (questão 1 da lista 13).

Q 5.2.2. Utilizando a regra de 1/3 de Simpson repetida, calcule o valor aproximado do número $\int_0^6 (\cos(x) + x)dx$, usando 6 pontos. Em seguida, estime o erro desta aproximação. Compare com os resultados obtidos com a integração pela regra dos trapézios repetidos (questão 2 da lista 13).

Q 5.2.3. Considere a função f calculada em alguns pontos, descritos pela tabela 5.2.

| Tabela 5.2: Alguns pontos da função f . | | | | | | | |
|---|------|------|------|------|------|------|------|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $f(x)$ | 0.21 | 0.32 | 0.42 | 0.51 | 0.82 | 0.91 | 1.12 |

Calcule $\int_0^6 f(x)dx$ pela regra de 1/3 de Simpson repetida.

Q 5.2.4. É possível estimar $\int_0^1 3e^{-x}dx$ utilizando a regra de 1/3 de Simpson repetida com $h = 1/5$? Se for, calcule. Caso contrário, sugira outro valor de h .

Q 5.2.5. Em quantos subintervalos, no mínimo, precisamos dividir o domínio de integração $[0, 2]$ para que o erro da integração pela regra de 1/3 de Simpson repetida de $\int_0^2 e^x$ seja menor que 0.01?

Q 5.2.6. Considere a função f dada pela tabela 5.3.

| Tabela 5.3: Alguns pontos da função f . | | | | |
|---|------|------|------|------|
| x | 0.1 | 0.2 | 0.33 | 0.5 |
| $f(x)$ | -2.3 | -1.6 | -1.1 | -0.4 |

Calcule $\int_{0.1}^{0.5} f(x)dx$ (atenção: observe que os pontos do domínio na tabela não estão igualmente espaçados).

Capítulo 6

Resolução numérica de equações diferenciais ordinárias

6.1 Métodos de Euler

Q 6.1.1. Classifique as seguintes equações diferenciais em “equações diferenciais ordinárias” ou “equações diferenciais parciais”. Em seguida, determine a ordem de cada uma.

1. $y' = 2x$
2. $y'' + x^2(y')^3 - 4y = 0$
3. $y''' + x^2 + y^4 = x \tan(x)$
4. $(1 + xe^{xy}) \frac{dy}{dx} + 1 + ye^{xy} = 0$
5. $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f^3(x, y)$
6. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = u(t)$

Q 6.1.2. Verifique que, para todo $c \in \mathbb{R}$, a função y dada por $y(x) = ce^x + x - 1$ é solução da equação diferencial

$$y' = y - x + 2.$$

Desenhe no *Geogebra* alguns gráficos da função y para alguns valores de c (por exemplo, faça $c = 1$, $c = 2$, *etc.* Se você souber usar o “controle deslizante” no *Geogebra*, defina a variável c desta forma).

Q 6.1.3. Determine uma solução particular para a equação diferencial mostrada na questão 6.1.2, tendo como condição inicial a equação $y(0) = 2$. Faça o gráfico desta solução particular.

Q 6.1.4. Usando o método de Euler de ordem 1 e de ordem 2, determine a solução aproximada do PVI dado por

$$\begin{cases} y' = f(x, y) = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} - y^2 \\ y(x_0) = y(1) = -1. \end{cases},$$

onde o domínio de y é $[1, 2]$.

1. Considerando $h_1 = \frac{1}{5}$ e $h_2 = \frac{1}{10}$.
2. Sabendo-se que a solução analítica é dada por $y(x) = -\frac{1}{x}$ (verifique!), construa uma tabela que relaciona os valores exatos e os valores calculados pelos métodos de Euler de ordem 1 e 2.

Q 6.1.5. Seja y uma função cujo domínio é $[0, 2]$. Considere o seguinte PVI

$$\begin{cases} y' = f(x, y) = y - x \\ y(x_0) = y(0) = 2 \end{cases}.$$

1. Utilize os métodos de Euler de ordem 1 e de ordem 2 para achar uma aproximação da função y . Divida o domínio de y em 2 partes e, em seguida, em 4 partes.
2. Construa uma tabela similar à construída no item 2 da questão 6.1.4.

Q 6.1.6. Verifique se $y(x) = \frac{x^2+3}{3}$ é solução para o PVI

$$\begin{cases} y' = xy^{1/3} \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

6.2 Métodos de Runge-Kutta

Q 6.2.1. Usando o método de Euler aperfeiçoado e o método de Euler modificado, calcule a solução dos seguintes PVI, utilizando quatro divisões.

1. $\begin{cases} y' = f(x, y) = y \cos(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ no domínio $[0, 1]$.
2. $\begin{cases} y' = f(x, y) = -xy^2 \\ y(x_0) = \end{cases}$ no domínio $[1, 2]$.

Apêndice A

Soluções

1.1.1 a) $(11001)_2$

b) $(1011)_2$

c) $(1111)_2$

d) $(0.0011)_2$

e) $(11001.11)_2$

f) $(0.10011001100110011\dots)_2$. A única forma de representar este número exatamente é utilizando *infinitos* algarismos. Em um computador com um número *finito* de algarismos, esse número não pode ser exatamente representado.

1.1.2 a) $(13)_{10}$

b) $(7)_{10}$

c) $(2)_{10}$

d) $(0.375)_{10}$

e) $(7.375)_{10}$

1.1.3 a) 0.1×10^3 .

b) 0.158×10^{-1} .

c) 0.101×2^3 .

1.1.4 a) $0.12314 * 10^2$ ou $0.12314E + 2$.

b) $0.25000 * 10^{12}$ ou $0.25000E + 12$.

c) Na notação usual, 0.00019. Na notação de ponto flutuante normalizado, $0.19 * 10^3$.

d) 1000000, ou $0.1 * 10^7$.

1.1.5 a) $0.1 * 10^{-1}$.

b) $0.9999 * 10^2$.

c) Região de *overflow*: Todos os números maiores que $0.999 * 10^2$ e todos os números menores que $-0.999 * 10^2$. Região de *underflow*: todos os números maiores que $-0.1 * 10^{-1}$ e menores que $0.1 * 10^{-1}$ (exceto o número zero).

1.1.6

$$\begin{aligned} & (((4 + 4) + 4) + 4) + 56070 \\ &= (((0.4 * 10^1 + 0.4 * 10^1) + 4) + 4) + 56070 \\ &= ((0.8 * 10^1 + 0.4 * 10^1) + 4) + 56070 \\ &= (0.12 * 10^2 + 0.4 * 10^1) + 56070 \\ &= (0.12 * 10^2 + 0.04 * 10^2) + 56070 \\ &= 0.16 * 10^2 + 0.5607 * 10^5 \\ &= 0.00016 * 10^5 + 0.5607 * 10^5 \\ &= 0.56086 * 10^5 \\ &= 0.5609 * 10^5. \end{aligned}$$

Agora, para os cálculos de $((56070 + 4) + 4) + 4$, observe que $56070 + 4$ é calculado como

$$\begin{aligned} & 0.5607 * 10^5 + 0.4 * 10^1 \\ &= 0.5607 * 10^5 + 0.00004 * 10^5 \\ &= 0.56074 * 10^5 \\ &= 0.5607 * 10^5. \end{aligned}$$

Chegue à conclusão que a primeira expressão apresentada possui resultado diferente da segunda.

2.1.1 Pode sim ser escrita como sistema triangular. No caso,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

A solução é $X = [-46 \quad 2 \quad 4 \quad 3]^t$.

2.1.2 a) Primeiro reescrevo o sistema linear na forma da matriz aumentada,

$$\begin{bmatrix} \textcolor{red}{3} & 2 & 3 & 9 \\ -1 & 4 & 6 & 32 \\ 10 & 2 & 12 & -2 \end{bmatrix}.$$

O pivô é o elemento a_{11} , pintado de vermelho. Vou usar este pivô para “zerar” todos os elementos abaixo dele, por meio das *operações fundamentais*.

O primeiro passo é realizar as operações fundamentais

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{-1}{\textcolor{red}{3}} L_1$$

e

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{10}{\textcolor{red}{3}} L_1.$$

A matriz fica

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & \textcolor{red}{14/3} & 7 & 35 \\ 0 & -14/3 & 2 & -32 \end{bmatrix}.$$

O segundo passo é usar o pivô $14/3$ para zerar todos os elementos abaixo dele. A operação fundamental é

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{-14/3}{\textcolor{red}{14/3}} L_2.$$

A matriz fica

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 14/3 & 7 & 35 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \end{bmatrix},$$

que é uma matriz triangular, fácil de resolver.

b) A matriz A , dada por

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 6 \\ 10 & 2 & 12 \end{bmatrix},$$

pode ser decomposta de maneira única como produto de uma matriz inferior L e uma matriz superior U desta forma:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 6 \\ 10 & 2 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} \\ -1/3 & \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{0} \\ \textcolor{blue}{10/3} & -1 & \textcolor{red}{1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 14/3 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Para construir a matriz L , eu tomei os multiplicadores que foram utilizados no algoritmo de eliminação de Gauss. A matriz U é simplesmente o resultado do algoritmo de Gauss.

O problema original pode ser reescrito como

$$\begin{bmatrix} \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} \\ -1/3 & \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{0} \\ \textcolor{blue}{10/3} & -1 & \textcolor{red}{1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 14/3 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 32 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Agora precisamos apenas resolver os dois sistemas lineares *triangulares*: o sistema $Ly = b$,

$$\begin{bmatrix} \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} \\ -1/3 & \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{0} \\ \textcolor{blue}{10/3} & -1 & \textcolor{red}{1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 32 \\ -2 \end{bmatrix},$$

cujas soluções são $a = 9, b = 35, c = 3$, e este outro, $Ux = y$,

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 14/3 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 35 \\ 3 \end{bmatrix}$$

cujas soluções (que é a solução que procuramos) é $x_1 = -2, x_2 = 7, x_3 = 1/3$.

2.1.3 A matriz A dos coeficientes, dada por $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, pode ser decomposta como

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

A solução do primeiro sistema é $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^t$. A solução do segundo sistema é $X = \begin{bmatrix} -1 & 6 \end{bmatrix}^t$.

2.1.4 -4.

2.2.1 1. A análise pelo critério das linhas é inconclusiva.

2. De acordo com o critério das linhas, o método de Gauss-Jacobi gera uma sequência convergente.

Partindo da solução inicial $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$, as candidatas a solução são $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.4 & 1 & 1.5 \end{bmatrix}^t$ e $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.9 & 1.033 & 1 \end{bmatrix}^t$.

$$d^{(1)} = 1.5, d^{(2)} = 0.5, d_r^{(1)} = 1, d_r^{(2)} = 0.484.$$

$$\|Ax^{(1)} - b\|_\infty = 2.5, \|Ax^{(2)} - b\|_\infty = 0.467.$$

2.2.2 1. A análise pelo critério de Sassenfeld é inconclusiva.

2. De acordo com o critério de Sassenfeld, o método de Gauss-Seidel gera uma sequência convergente.

Partindo da aproximação inicial $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$, temos $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.4 & 0.5333 & 1.2333 \end{bmatrix}^t$ e $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.0467 & 1.0622 & 0.9689 \end{bmatrix}^t$.

3.1.1 1. A escolha do intervalo que possui raiz é livre. Para esta solução, irei supor que o intervalo escolhido foi $[-2, 0]$. Pelo algoritmo da bissecção, as duas primeiras iterações geram os intervalos $[-1, 0]$ e $[-1, -0.5]$. Com o intervalo escolhido, a candidata inicial x_0 é -1 . As duas primeiras candidatas a solução calculadas são $x_1 = -0.5$ e $x_2 = -0.75$. A diferença absoluta entre essas candidatas são $d_1 = 0.5$ e $d_2 = 0.25$.