66.75 - 86-09: Procesos Estocásticos

Guía 1: Ejercicio 8

Universidad de Buenos Aires

Abril de 2020

1. Enunciado

$\star\star\star$ Sea $\mathbf{X}$ un vector aleatorio discreto de media $\boldsymbol{\mu_X}$ y cuya matriz de covarianza es $\boldsymbol{C_X}$. Demuestre que $\boldsymbol{C_X}$ es una matriz singular si y sólo si, existe un vector determinístico $\mathbf{z}$ tal que $\mathbb{P}\left(\mathbf{z}^T(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu_X})=0\right)=1$.

2. Resolución

Los datos que se tienen son

- $\mathbf{X}$ vector aleatorio discreto.
- $\mathbb{E}[\mathbf{X}]=\boldsymbol{\mu_X}$
- $\mathbb{E}[(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu_X})(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu_X})^T]=\boldsymbol{C_X}$

y se quiere demostrar que

$$\boldsymbol{C_X} \text{ es singular} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbb{P}(\mathbf{z}^T(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu_X})=0)=1$$

Primero se probará la implicancia de izquierda a derecha, es decir, se sabe que $\boldsymbol{C_X}$ es singular.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C_X} \text{ es singular} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbb{P}(\mathbf{z}^T(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu_X})=0)=1\boldsymbol{C_X} \text{ es singular} \quad &\Rightarrow \quad \det(\boldsymbol{C_X})=0\\
&\Rightarrow \quad \exists \text{ al menos un autovalor igual a cero, } \lambda_1=0\\
&\Rightarrow \quad \boldsymbol{C_X}\mathbf{v}_1=0\,,\ \mathbf{v}_1\neq\mathbf{0}\,,\ \mathbf{v}_1 \text{ autovector asociado a } \lambda_1\\
&\Rightarrow \quad \mathbf{v}_1^T\boldsymbol{C_X}\mathbf{v}_1=0
\end{aligned}$$

donde, en el último paso, se multiplicará a ambos lados de la igualdad por el vector $\mathbf{v}_1^T$. Es preciso notar que el vector $\mathbf{v}_1$ se trata de un vector determinístico debido a que es un autovector de la matriz de covarianza $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{X}}$ y, como se sabe, los momentos son constantes (determinísticos) para una función de distribución dada.
Ahora, se define

$$\alpha = \mathbf{v}_1^T\left(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{X}}\right)$$

donde debe notarse que α es una variable aleatoria dado que se trata de una transformación de un vector aleatorio, $\mathbf{X}$. AdemÃ¡s, $\alpha \in \mathbb{R}$, es una variable aleatoria unidimensional.
Se procede calculando los momentos de α,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\alpha] &= \mathbb{E}[\mathbf{v}_1^T(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{X}})] = \mathbf{v}_1^T\mathbb{E}[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{X}})] = 0 \\
\mathbb{E}[\alpha^2] &= \mathbb{E}[\alpha \cdot \alpha] = \mathbb{E}[\alpha \cdot \alpha^T] \\
&= \mathbb{E}[\mathbf{v}_1^T(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{X}})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{X}})^T\mathbf{v}_1] = \mathbf{v}_1^T\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{X}}\mathbf{v}_1 = 0
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se cumple por lo demostrado en (1).
Ahora se puede obtener la varianza,

$$\mathbf{Var}(\alpha) = \mathbb{E}[\alpha^2] - (\mathbb{E}[\alpha])^2 = 0$$

Y, como se sabe que una variable aleatoria unidimensional tiene varianza nula si y sólo si es igual a su expectación con probabilidad uno, entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}(\alpha) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \mathbb{P}(\alpha = \mathbb{E}[\alpha]) = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(\alpha = 0) = 1 \\
&\Rightarrow \quad \mathbb{P}(\mathbf{v}_1^T(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{X}}) = 0) = 1
\end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar.

Ahora se probaría la implicancia de derecha a izquierda, es decir, se sabe que

$$\mathbb{P}\left(\mathbf{z}^T(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{X}}) = 0\right) = 1 \tag{1}$$

Se define

$$\beta = \mathbf{z}^T(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{X}})$$

donde, una vez más, se observa que β es una variable aleatoria por ser transformación de un vector aleatorio, $\mathbf{X}$. Además, debe notarse que $\mathbb{P}(\beta = 0) = 1$ por hipótesis (1).
Si ahora se calculan los momentos de β, se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\beta] &= \mathbb{E}[\mathbf{z}^T(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{X}})] = \mathbf{z}^T\mathbb{E}[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{X}})] = 0 \\
\mathbb{E}[\beta^2] &= \mathbb{E}[\mathbf{z}^T(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{X}})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{X}})^T\mathbf{z}] = \mathbf{z}^T\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{X}}\mathbf{z}
\end{aligned}$$

Ahora bien, si se recuerda el mismo teorema utilizado anteriormente, donde una variable aleatoria toma un valor determinado (su media) con probabilidad uno si y sólo si su varianza es cero, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\beta = 0) = 1 \qquad &\Rightarrow \qquad \mathbb{P}(\beta = \mathbb{E}[\beta]) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{Var}(\beta) = 0 \\ \Rightarrow \qquad &\mathbb{E}[\beta^2] = \mathbf{Var}(\beta) + (\mathbb{E}[\beta])^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{z}^T \boldsymbol{C}_X \mathbf{z} = 0 \end{aligned}$$

Ahora se debe recordar que una matriz semidefinida positiva (como lo es $\boldsymbol{C_X}$) tiene todos sus autovalores mayores o iguales a cero. A su vez, si la matriz es definida estrictamente positiva, entonces todos sus valores son mayores estricto que cero, por lo tanto implica que si la matriz es semidefinida positiva, tiene al menos algún autovalor igual a cero (de lo contrario, sería definida positiva en sentido estricto).

Y, si se observa que la ecuación $\mathbf{z}^T \boldsymbol{C_X} \mathbf{z} = 0$ convierte a $\boldsymbol{C_X}$ en semidefinida positiva, entonces se sabe que al menos uno de los autovalores de $\boldsymbol{C_X}$ es igual a cero, lo que automáticamente convierte a la matriz $\boldsymbol{C_X}$ en una matriz singular, demostrando lo que se pedía.