Guia 1 - Variables y Vectores Aleatorios

Nivel de dificultad de los ejercicios

Estrellas	Dificultad
$\star$	Normal
$\star\star$	Intermedio
$\star\star\star$	Desafío

Simulación y cambio de variables

$\star\star$ Ejercicio 1

Considere $Z \sim U[0,1]$. Obtener la transformación $g(\cdot)$ tal que $X = g(Z)$ sea:

1. Una variable exponencial de parámetro λ.
2. Una variable Rayleigh de parámetro α.

$\star$ Ejercicio 2 - Histograma

Sea X una variable aleatoria exponencial de parámetro λ ($X \sim \text{Exp}(\lambda)$).

1. Genere $N = 10^4$ muestras de X.
2. Calcule la media y la varianza muestrales de X y compárelas con las teóricas.
3. Construya el histograma de las muestras de X. Normalice el histograma para que tenga área 1 y compare la función obtenida con la función de densidad de probabilidad teórica.

$\star$ Ejercicio 3

Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes uniformes en el intervalo $[-2,2]$.

1. Obtenga las funciones de densidad de probabilidad de las variables $X_3 = X_1 + X_2$ y $X_4 = X_1 + 2X_2$.
2. Verifique por simulación los resultados anteriores construyendo los histogramas de X_3 y X_4.
3. Repita el ejercicio para $X_1 \sim \mathcal{U}[-2,2]$ y $X_2 \sim \mathcal{U}[-1,1]$.

$\star\star$ Ejercicio 4 - Ruido aditivo

Sea $Y = X + N$, con X y N variables aleatorias independientes.

1. Demostrar que $f_Y(y) = f_X(y) * f_N(y)$.
2. Demostrar que $f_{Y|X}(y|x) = f_N(y - x)$.
3. Si $X \in \{0,1\}$ es una variable aleatoria Bernoulli con $\mathbb{P}(X = 0) = p$ y $\mathbb{P}(X = 1) = q = 1 - p$, expresar y representar $f_Y(y)$ y $f_{Y|X}(y|x)$.

⋆⋆ Ejercicio 5 - Cambio de variables

Sean X e Y dos variables exponenciales independientes de parámetros λ_X y λ_Y respectivamente. Hallar la función de densidad de probabilidad conjunta de $W = XY$ y $V = X/Y$.

⋆⋆ Ejercicio 6

Sean U_1, U_2 dos variables aleatorias independientes, ambas de media nula y de varianza σ^2. Defina las variables aleatorias $X_1 = \cos(\theta)U_1 - \sin(\theta)U_2$ y $X_2 = \sin(\theta)U_1 + \cos(\theta)U_2$ para $\theta \in [0, 2\pi)$.

1. Escriba un sistema de ecuaciones de la forma $\mathbf{X} = \boldsymbol{R}(\theta)\mathbf{U}$, donde $\mathbf{X} = [X_1, X_2]^T$, $\mathbf{U} = [U_1, U_2]^T$ y $\boldsymbol{R}(\theta)$ es una matriz de rotación.
2. Muestre que, salvo para los casos en que $\boldsymbol{R}(\theta)$ es diagonal o antidiagonal, las componentes de $\mathbf{X}$ no son independientes pero están descorrelacionadas. ¿Qué sucede cuando U_1 y U_2 son variables Gaussianas?

⋆⋆ Ejercicio 7 - Transformada de Box Muller

Sean U_1, U_2 dos variables aleatorias independientes en $(0,\ 1)$.

1. Halle la densidad conjunta de las variables:
$$\begin{cases} R = \sqrt{-2\ln(U_1)} \\ \Theta = 2\pi U_2. \end{cases}$$
Verifique que R tiene distribución Rayleigh, que Θ es uniforme y que son independientes (¿por qué?).
2. Halle la densidad conjunta de las variables:
$$\begin{cases} Z_1 = R\cos\Theta \\ Z_2 = R\sin\Theta \end{cases}$$
y demuestre que se trata de variables normales estándar independientes.

⋆⋆⋆ Ejercicio 8

Sea $\mathbf{X}$ un vector aleatorio discreto de media $\boldsymbol{\mu_X}$ y cuya matriz de covarianza es $\boldsymbol{C_X}$. Demuestre que $\boldsymbol{C_X}$ es una matriz singular si y sólo si existe un vector determinístico $\mathbf{z}$ tal que $\mathbb{P}\left(\mathbf{z}^T(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu_X}) = 0\right) = 1$.

⋆ Ejercicio 9

Analice las siguientes matrices e indique si pueden ser o no matrices de covarianza asociadas a algún vector aleatorio:

$$\boldsymbol{M}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{M}_2 = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -6 & 9 & 3 \\ 8 & 12 & 16 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{M}_3 = \begin{bmatrix} 1{,}3201 & 0 & -1{,}4892 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1{,}4892 & 0 & 1{,}6799 \end{bmatrix}$$

Gaussiana Multivariable

⋆ Ejercicio 10

El vector $\mathbf{X}$ es gaussiano de media nula y matriz de covarianza

$$\boldsymbol{C}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

1. Obtenga $N = 10^4$ realizaciones del vector $\mathbf{X}$. Estime la matriz de covarianza y compare el resultado con $\boldsymbol{C}_{\mathbf{X}}$.
2. Obtenga la matriz A tal que $\mathbf{Z} = A\mathbf{X}$ tenga componentes descorrelacionadas. Esta transformación "blanquea"las componentes de $\mathbf{X}$.

⋆ Ejercicio 11

Sea $\mathbf{X}$ un vector aleatorio gaussiano cuya media y matriz de covarianza son:

$$\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{C}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 2 & 1{,}7 \\ 1{,}7 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Obtenga las curvas de nivel $\mathcal{C}_\alpha = \{(x, y) : f_{\mathbf{X}}(x, y) = \alpha\}$.
2. Grafique en el plano (x, y) $N = 10^3$ realizaciones del vector $\mathbf{X}$ junto con las curvas de nivel anteriores.

⋆⋆ Ejercicio 12

Sean X e Y dos variables aleatorias Gaussianas. Se necesita caracterizar a $Z = \max(X, Y)$ en los siguientes casos:

1. X e Y son independientes e idénticamente distribuidas con media nula y varianza unitaria.
2. X e Y tiene ambas media nula, varianza unitaria, y coeficiente de correlación $0{,}1$.
3. X e Y tiene ambas media nula, varianza unitaria, y coeficiente de correlación $0{,}9$. Discuta los resultados obtenidos.

⋆⋆ Ejercicio 13

Se tiene un vector aleatorio $\mathbf{X} = [X_1\ X_2]^T$ cuya distribución es Gaussiana con media $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{X}}$ y matriz de covarianza $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{X}}$.

1. Utilizando un cambio de variables, genere un vector aleatorio $\mathbf{Y} = [Y_1\ Y_2]^T$ de componentes descorrelacionadas y media nula.
2. Demuestre que los autovalores de la matriz $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{Y}}$ son proporcionales a la longitud de los ejes mayores y menores de la cónica

   $$\{\mathbf{y} = [y_1, y_2] : \frac{y_1^2}{a_1^2} + \frac{y_2^2}{a_2^2} = 1\},$$

   que contiene a los puntos del plano con igual función de densidad de probabilidad, es decir, $f_Y(\mathbf{y}) = \alpha$, con $\alpha > 0$, para $\mathbf{y}$ en la cónica.

3. ¿Qué sucede si la matriz de correlación $\boldsymbol{C_Y}$ es singular?

⋆⋆ Ejercicio 14

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_N$ variables aleatorias conjuntamente Gaussianas con media $\boldsymbol{\mu_X}$ y matriz de covarianza $\boldsymbol{C_X}$.

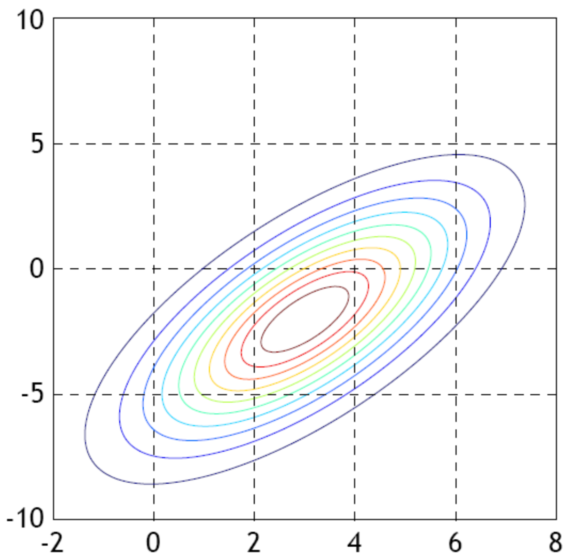
1. Calcular la varianza de la variable aleatoria $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_NX_N$ donde a_i son coeficientes reales tales que el vector $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_N]^T$ tiene norma unitaria.
2. Determine la función característica de Y a partir de la función característica conjunta de las X_i.
3. Sea:

$$\boldsymbol{C_X} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine el máximo y el mínimo valor posible de la varianza de Y cuando $\mathbf{a}$ recorre el círculo unitario.

⋆ Ejercicio 15

Un vector aleatorio $\mathbf{X}$, cuya distribución es Gaussiana multivariable, posee las curvas de nivel que se muestran en la siguiente figura:



1. ¿Es posible estimar gráficamente la media, las varianzas y el coeficiente de correlación? En caso afirmativo, encuentre dichos parámetros.
2. Imagine los valores particulares de cinco realizaciones de este vector aleatorio.
3. ¿Pueden existir realizaciones más allá de la **última** elipse de concentración graficada? Justifique.

⋆ Ejercicio 16

Sea $\mathbf{X} = [X_1\ X_2]^T$ un vector aleatorio normal cuya media y matriz de covarianza tienen las siguientes representaciones:

$$\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{X}} = [\mu_1\ \mu_2]^T \qquad \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$

1. Genere N muestras de $\mathbf{X}$ utilizando diferentes valores del coeficiente de correlación $\rho = \{0;\ 0{,}5;\ 0{,}95;\ -0{,}5\}$.
2. Para cada valor del coeficiente de correlación, gráficar las curvas de densidad de probabilidad constante en el plano X_1, X_2 y las muestras del vector obtenidas en la simulación.
3. Para cada valor del coeficiente de correlación, estimar el vector $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{X}}$ y los elementos de la matriz de covarianza, comparándolos con los valores teóricos.

⋆⋆ Ejercicio 17 - Mezcla de Gaussianas

Sea $\mathbf{Y} = [Y_1\ Y_2]^T$ un vector aleatorio cuya distribución es una mezcla de Gaussianas, es decir,

$$\mathbf{Y} \sim f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = p f_{\mathbf{X_1}}(\mathbf{y}) + (1-p) f_{\mathbf{X_2}}(\mathbf{y}),$$

donde $p \in (0,1)$, $f_{\mathbf{X_1}} = \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{X_1}})$ y $f_{\mathbf{X_2}} = \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{X_2}})$ con

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{X_1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{X_2}} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. ¿Es $\mathbf{Y}$ un vector aleatorio Gaussiano?
2. Calcule la media y la matrix de covarianza de $\mathbf{Y}$.
3. Genere N muestras de $\mathbf{Y}$. Grafique las curvas de nivel de $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$ en el plano (y_1, y_2) y las muestras del vector obtenidas en la simulación.

⋆ Ejercicio 18

Sea $X \sim \mathcal{CN}(0, \sigma^2)$. Obtenga:

1. La función de densidad de $X_r = \Re(X)$, $X_i = \Im(X)$.
2. La función de densidad de $R = |X|$.
3. La función de densidad de $E = |X|^2$.

⋆⋆ Ejercicio 19

Considere ahora un vector $\mathbf{X}$ de n variables aleatorias circulares Gaussianas

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \cdots \\ X_n \end{bmatrix}, \mathbb{E}[\mathbf{X}] = 0, \qquad \mathbb{E}[\mathbf{X}\mathbf{X}^*] = C_{\mathbf{X}}$$

Obtenga:

1. La función de densidad de $\mathbf{X}_r = \Re(\mathbf{X})$ y de $\mathbf{X}_i = \Im(\mathbf{X})$.
2. La función de densidad de $R = \|\mathbf{X}\|$.

3. La función de densidad de $E = \|\mathbf{X}\|^2$.

$\star\star$ Ejercicio 20 - Secuencia Gaussiana

Considere una sucesión de variables aleatorias $\{U_1, U_2, U_3, ...\}$ independientes uniformes en $(0,1)$. A continuación se arma la siguiente secuencia:

$$\begin{cases} X_{2j} &= \sqrt{-\ln(U_{2j})}\cos(2\pi U_{2j-1}) \\ X_{2j-1} &= \sqrt{-\ln(U_{2j})}\sin(2\pi U_{2j-1}) \end{cases} \quad j = 1, 2, 3, ...$$

1. Halle la densidad conjunta del vector $[X_{2j-1}, X_{2j}]$, para $j \in \mathbb{N}$.
   Sugerencia: considere el Ejercicio 7.
2. Utilizando las secuencia X se arma una nueva secuencia:

$$\begin{cases} Y_{2j} = X_{2j} + 0{,}5X_{2j-1} \\ Y_{2j-1} = 0{,}5X_{2j} + X_{2j-1} \end{cases} \quad j = 1, 2, 3, ...$$

   Halle la densidad conjunta del vector $[Y_1, \ldots, Y_{2j}]$ para $j \in \mathbb{N}$.

$\star$ Ejercicio 21 - Verdadero o Falso

En cada caso indique verdadero o falso, y si indica falso proponga un contraejemplo.

1. Si de dos variables aleatorias X e Y una es Gaussiana, entonces son independientes si y sólo si están descorrelacionadas.
2. Si dos variables aleatorias X e Y tienen marginales Gaussianas, entonces son independientes si y sólo si están descorrelacionadas.
3. Si dos variables aleatorias X e Y son conjuntamente Gaussianas, entonces son independientes si y sólo si están descorrelacionadas.

Función Característica

$\star\star$ Ejercicio 22

El objetivo de este problema es calcular los momentos de primero y segundo orden de una variable aleatoria geométrica utilizando la función característica

1. Utilizando el desarrollo de Taylor en el origen, demuestre que

$$\exp(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$$

2. Sea $\Phi_X(\omega) = \mathbb{E}\left[\exp\left(\jmath\omega X\right)\right]$ la función característica de la variable X. Utilice el punto anterior para justificar lo siguiente:

$$\mathbb{E}[X^n] = \left.\frac{d^n\Phi_X(\omega)}{\jmath^n d\omega^n}\right|_{\omega=0}$$

3. Sea X una variable geométrica de parámetro p, es decir

$$\mathbb{P}[X = k] = (1-p)^{k-1}p \quad , \quad k = 1, 2, \cdots$$

Obtenga la media y la varianza de X a partir de los momentos $\mathbb{E}[X]$ y $\mathbb{E}[X^2]$.

4. Verifique los resultados anteriores por simulación de computadora.

$\star\star$ Ejercicio 23

Una variable aleatoria binomial cuenta la cantidad de ocurrencias de un determinado evento luego de n experimentos aleatorios independientes entre sí. Si consideramos que el resultado de cada experimento aleatorio está caracterizado por una variable Bernoulli con probabilidad p, entonces la función de probabilidad de la variable binomial resulta

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad k = 0, 1, \cdots, n$$

1. La variable binomial X resulta la suma de n variables Bernoulli independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.). Obtenga la función característica de X a partir de esta observación.
2. Utilizando el resultado anterior, verifique que el valor medio y la varianza de X son np y $np(1-p)$ respectivamente
3. Sea Y la variable binomial que cuenta la cantidad de ocurrencias en m experimentos aleatorios y forme $W = X + Y$. Qué puede inferir sobre la distribución de W? Diseñe un experimento computacional para verificar su inferencia.

$\star\star$ Ejercicio 24

1. $\star$ Demostrar que la función característica de una variable aleatoria X, Gaussiana de media μ_X y varianza σ_X^2, es $\Phi_X(\omega) = e^{j\mu_X\omega - \sigma_X^2\omega^2/2}$.

2. Utilizando este resultado, obtenga los momentos $\mathbb{E}[X^3]$ y $\mathbb{E}[(X-\mu_X)^3]$. Explique sus resultados.

$\star\star$ Ejercicio 25

Sean X_1, X_2, X_3, X_4, cuatro variables conjuntamente Gaussianas. Utilizando la función característica conjunta demuestre que

$$\mathbb{E}[X_1X_2X_3X_4] = \mathbb{E}[X_1X_2]\mathbb{E}[X_3X_4] + \mathbb{E}[X_1X_3]\mathbb{E}[X_2X_4] + \mathbb{E}[X_1X_4]\mathbb{E}[X_2X_3]$$

Convergencia y teoremas límite

$\star$ Ejercicio 26 - Ley fuerte de los grandes números

Sea X una variable aleatoria discreta definida sobre un conjunto $\mathcal{X}$ y con función de probabilidad p_X. La entropía de la variable X se define como:

$$H(X) \triangleq -\mathbb{E}[\log(p_X(X))] = -\sum_{x\in\mathcal{X}} p_X(x)\log p_X(x).$$

1. Suponga que tiene una secuencia $X_1, X_2, \ldots$ de variables independientes con función de probabilidad p_X. Demuestre que entonces:

   $$-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log p_X(X_i) \to H(X),$$

   siendo la convergencia en forma casi segura.
2. La entropía es una métrica del contenido de información de una variable aleatoria. Halle la entropía de una variable Bernoulli de parámetro p, y demuestre que la entropía es máxima cuando $p = 1/2$ (máxima información) y nula cuando es 0 o 1 (ninguna información).

$\star\star$ Ejercicio 27 - Convergencia en probabilidad

Sea Y una variable aleatoria, $X_1, X_2, ...$ secuencia de variables aleatorias y g una función continua.

1. Demuestre que si $X_n \xrightarrow{p} Y$ entonces $g(X_n) \xrightarrow{p} g(Y)$, es decir, las funciones continuas conservan la convergencia en probabilidad.
   Recordatorio: g es continua si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta$ implica que $|g(x) - g(x_0)| < \epsilon$.
2. Sea $X_1, X_2, ...$ una sucesión de variables aleatorias IID de media nula y varianza σ_X^2. Demuestre la ley débil de los grandes números, es decir, que:

   $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \xrightarrow[n\to\infty]{p} \sigma_X^2.$$

   Sugerencia: utilice la desigualdad de Tchebycheff.
3. Demuestre que:

   $$\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right)^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow[n\to\infty]{p} \frac{1}{\sigma_X}.$$

   Sugerencia: use los dos incisos anteriores.
4. Demuestre que:

   $$e^{\cos^2\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{p} e^{\cos^2(\sigma^2)}.$$

   Sugerencia: use los incisos 1 y 2.

⋆⋆ Ejercicio 28 - Estimación Monte Carlo

Se desea estimar el valor de la constante e mediante un experimento aleatorio. Para ello se cuenta con un generador de números aleatorios que produce variables IID uniformes en $(0,\ 1)$.

1. Diseñe un experimento Monte Carlo para estimar la constante e utilizando el generador de números disponible. Demuestre que su estimador converge en probabilidad al valor deseado.
   Sugerencia: genere variables exponenciales y utilice el Ejercicio 27.
2. Utilice algún *software* de cálculo para simular el experimento Monte Carlo. Utilice distinta cantidad de variables uniformes y compare el resultado con el valor de e.

⋆⋆ Ejercicio 29 - Integral Monte Carlo

El método de Monte Carlo es útil para calcular integrales definidas unidimensionales e incluso multidimensionales.

1. Diseñe un experimento Monte Carlo para estimar la integral unidimensional $I_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{x\cos\phi}d\phi$. $I_0(x)$ es conocida como la función de Bessel de primera clase de orden 0.
2. Utilice algún *software* de cálculo para simular el experimento Monte Carlo. Grafique el error de estimación relativo en función de la cantidad de realizaciónes Monte Carlo.
3. Repita los puntos anteriores para calcular la siguiente integral multidimensional

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r_x r_y}{1+|r_x e^{\jmath\phi_x} - r_y e^{\jmath\phi_y}|^2} d\phi_x d\phi_y dr_x dr_y.$$

⋆ Ejercicio 30 - Convergencia

El consumo de combustible de un micro durante un viaje es una variable aleatoria de la forma:

$$C(i) = V(i)X(i), \quad \text{[litros]},$$

donde las variables $V(i)$ y $X(i)$ son independientes y se sabe que $\mathbb{E}[V(i)] = 1$ y $\mathbb{E}[V(i)^2] = 2$, y $X(i)$ tiene media μ_X y varianza σ_X^2. Considere el consumo promedio al cabo de n viajes:

$$Y(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V(i)X(i).$$

1. Halle la distribución aproximada del consumo promedio al cabo de $n = 365$ viajes asumiendo que el consumo entre viajes es independiente.
2. Suponga ahora que los consumos entre viajes son variables descorrelacionadas, analice el valor del límite de $Y(n)$ cuando $n \to \infty$ utilizando dos modos de convergencia.