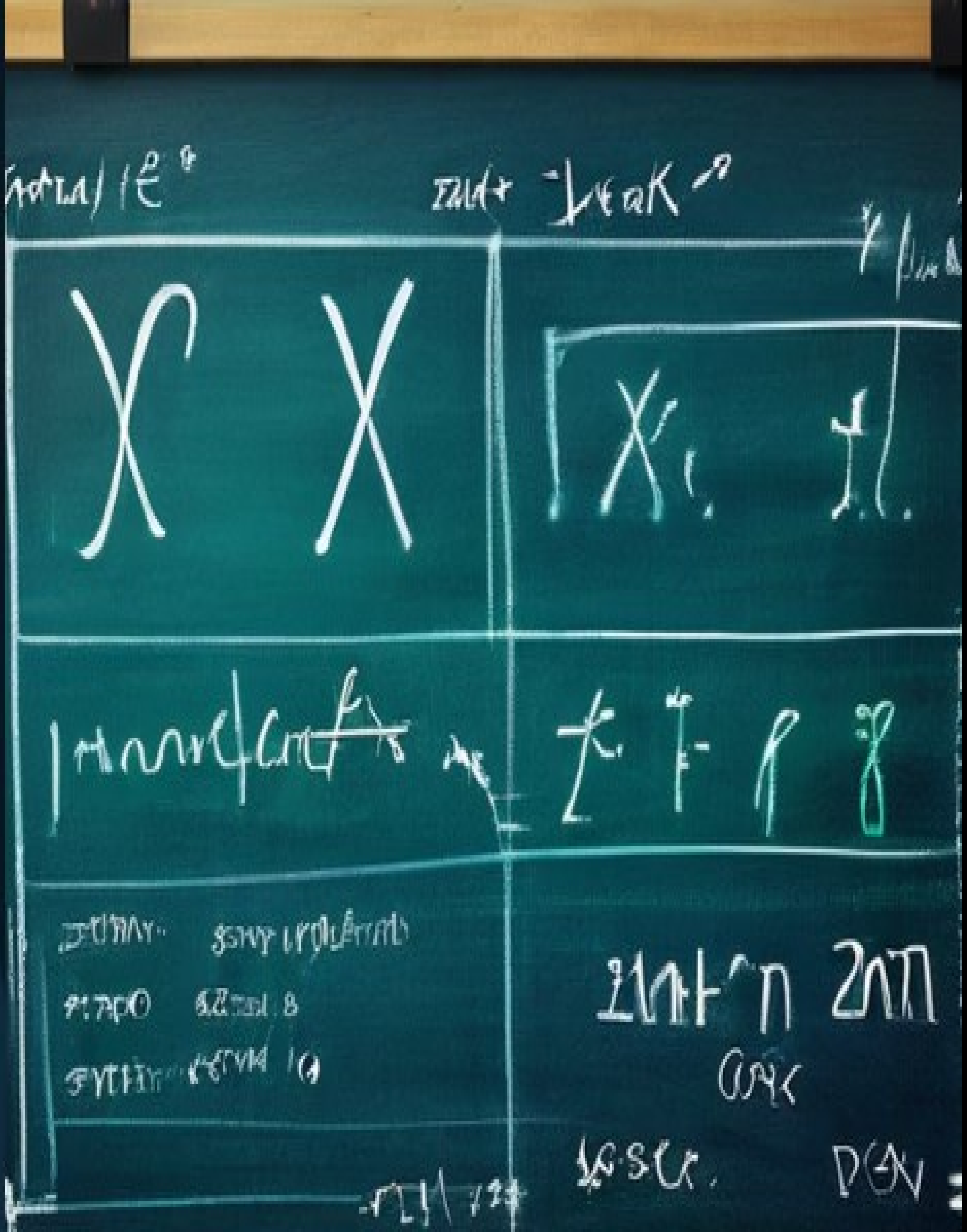
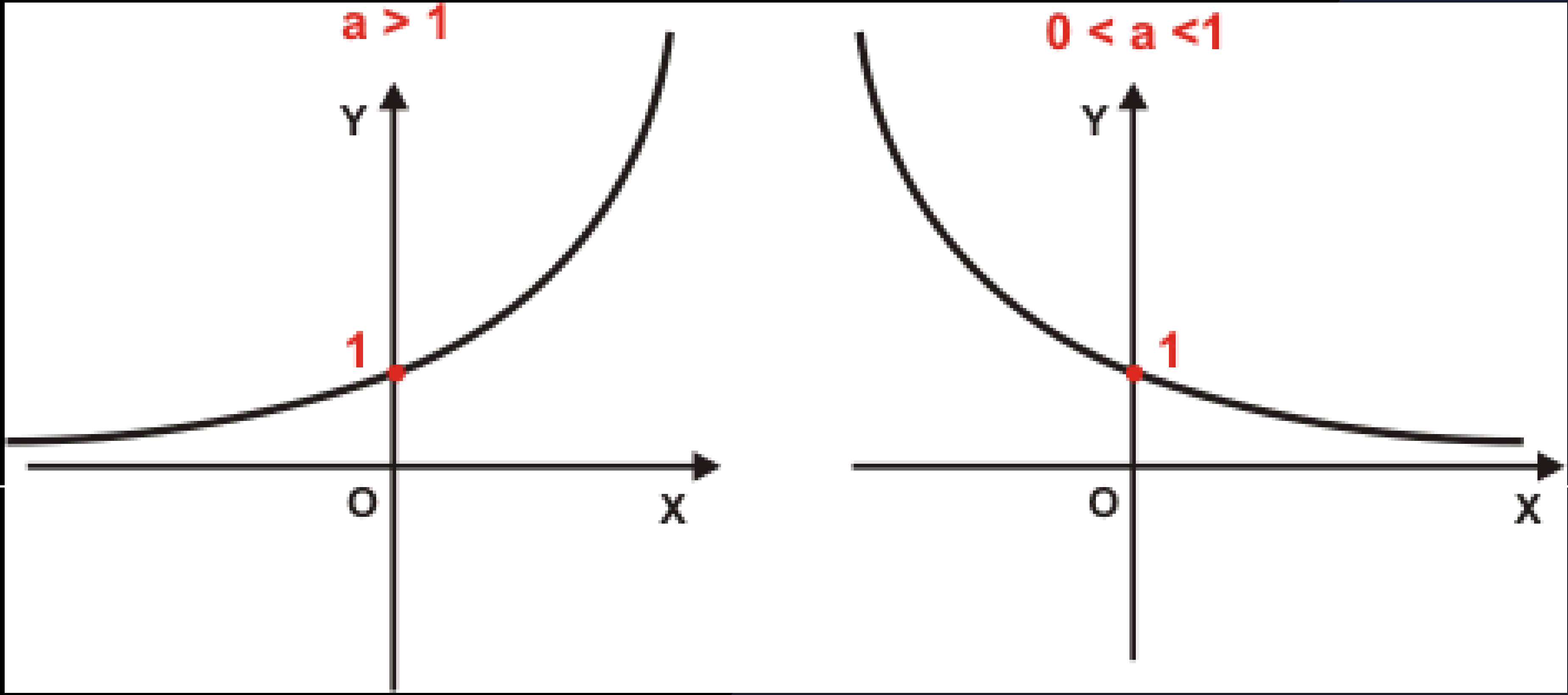


CÁLCULO 1

Aula 3 – Função Exponencial

Curso de Ciência da Computação
Dr. Rodrigo Xavier de Almeida Leão
Cientista de Dados

FUNÇÃO EXPONENCIAL



Prof. Rodrigo Xavier

- Dizemos que uma **função** é **exponencial** quando a variável se encontra no expoente de um número real, sendo que esse número precisa ser maior que zero

$$f(x) = a^{x}$$

Variável independente

Número Real Constante
Maior que zero!

Construindo a função exponencial

$$f(x) = a^x$$

- Número pelo qual a função é multiplica a cada variação de x.
  - a = 2 _ Função dobra a cada variação de x.
  - a = 3 _ Função triplica a cada variação de x.
  - a = 4 _ Função quadruplica a cada variação de x.

Função Exponencial

- Caracterizada pelo crescimento e decrescimento muito rápido.

Um boato se espalha da seguinte maneira:

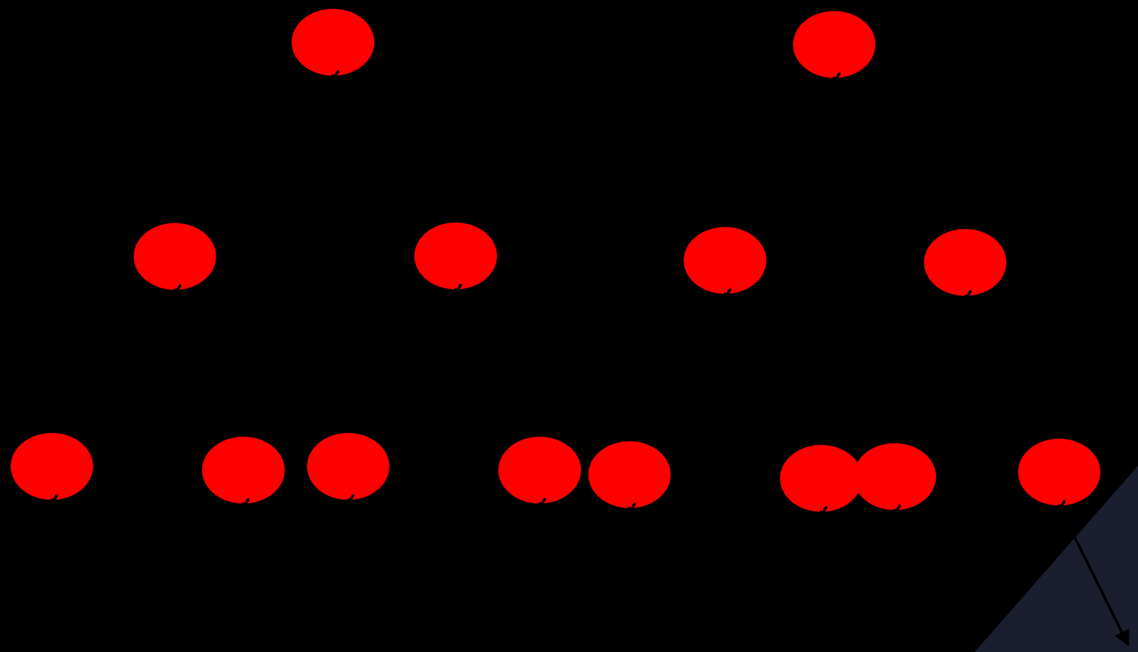
1º Dia _ Duas pessoas ficam sabendo

2° Dia _ Cada uma das duas conta para mais duas

(4 pessoas sabem)

3° Dia _ Cada uma das quatro conta para mais duas

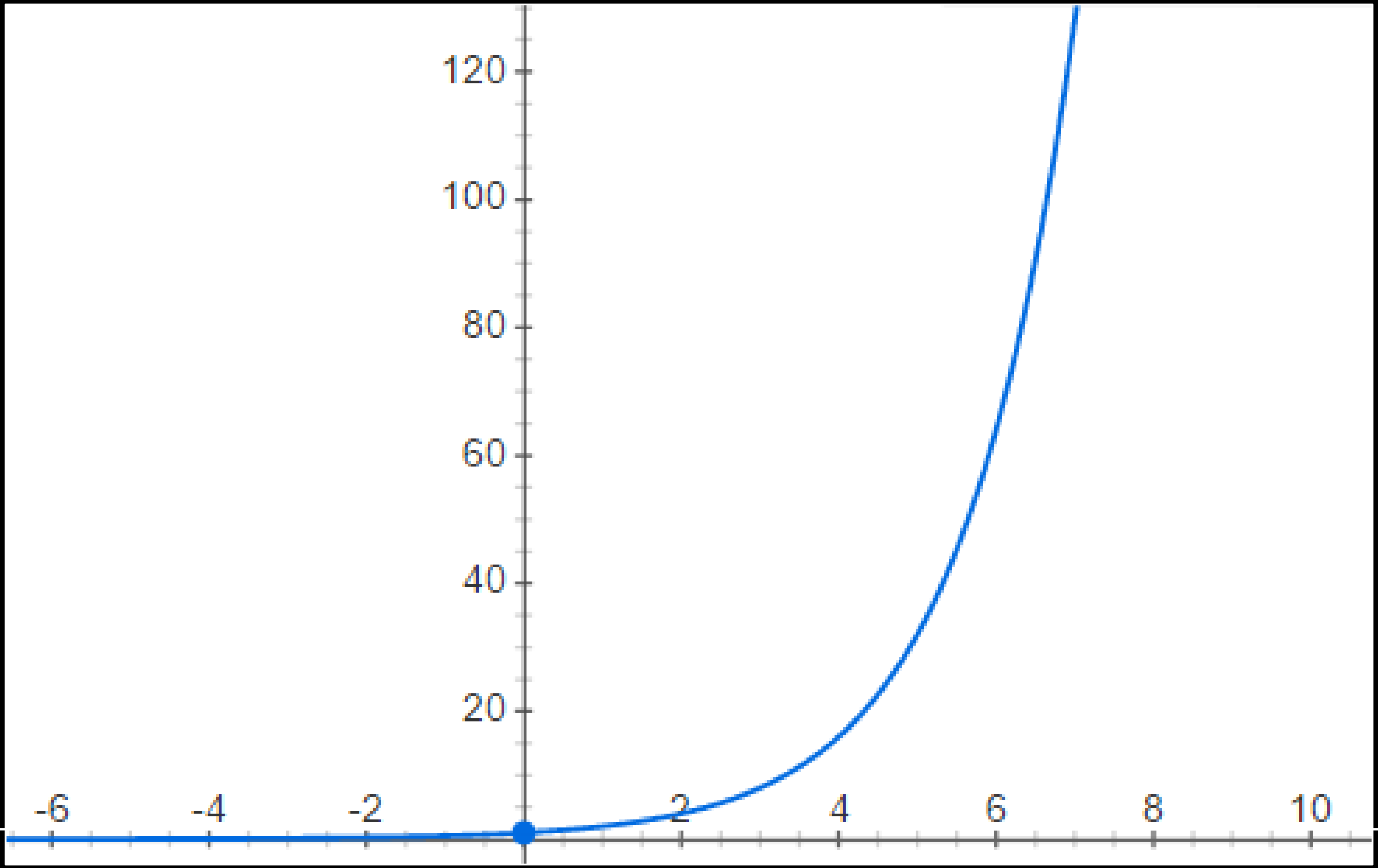
(8 pessoas sabem)



Neste caso a função seria $f(x) = 2^x$

- Caracterizada pelo crescimento e decrescimento muito rápido.

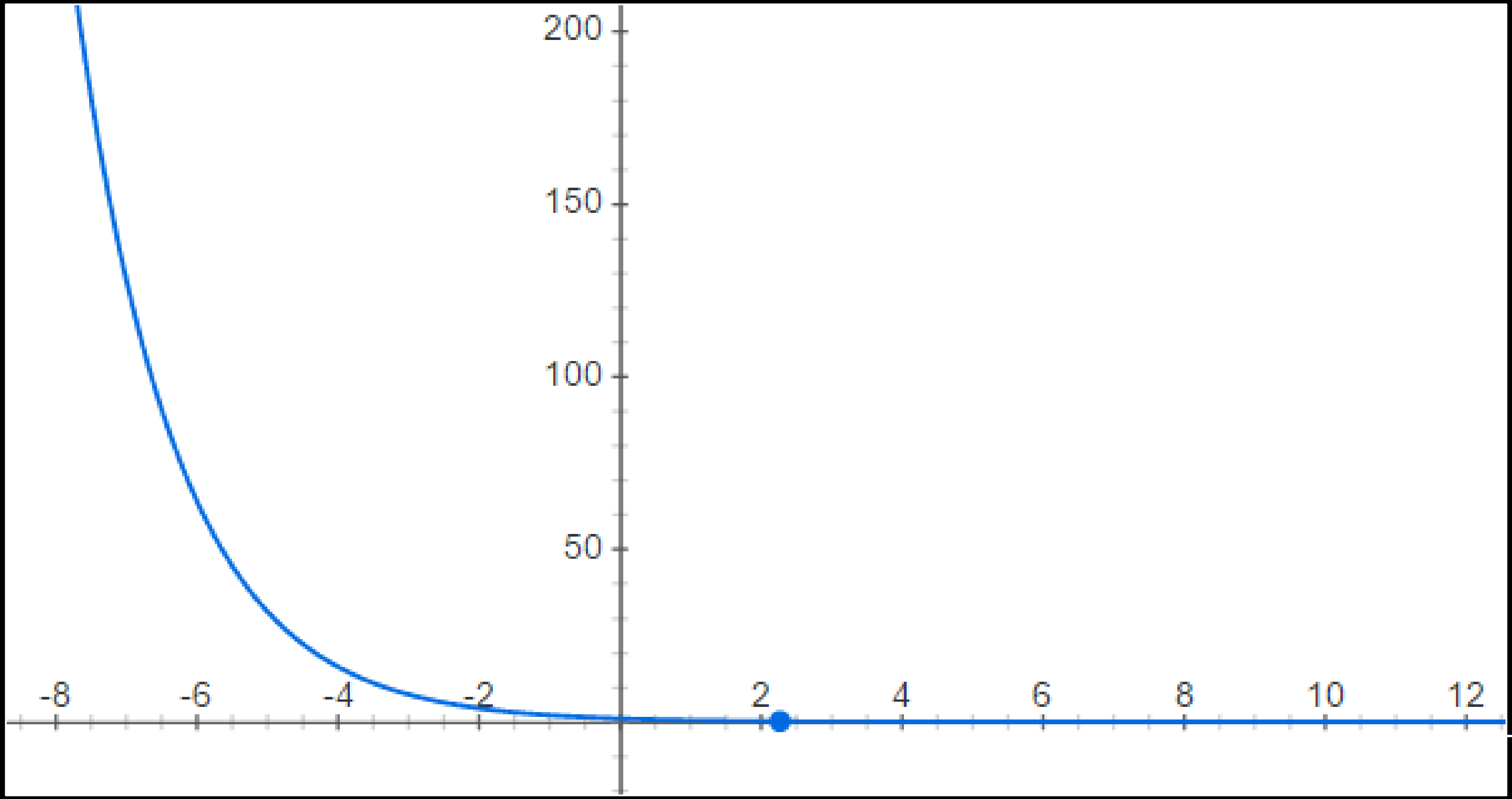
$$f(x) = 2^x$$



Prof. Dr. Rodrigo Xavier de Almeida Leão

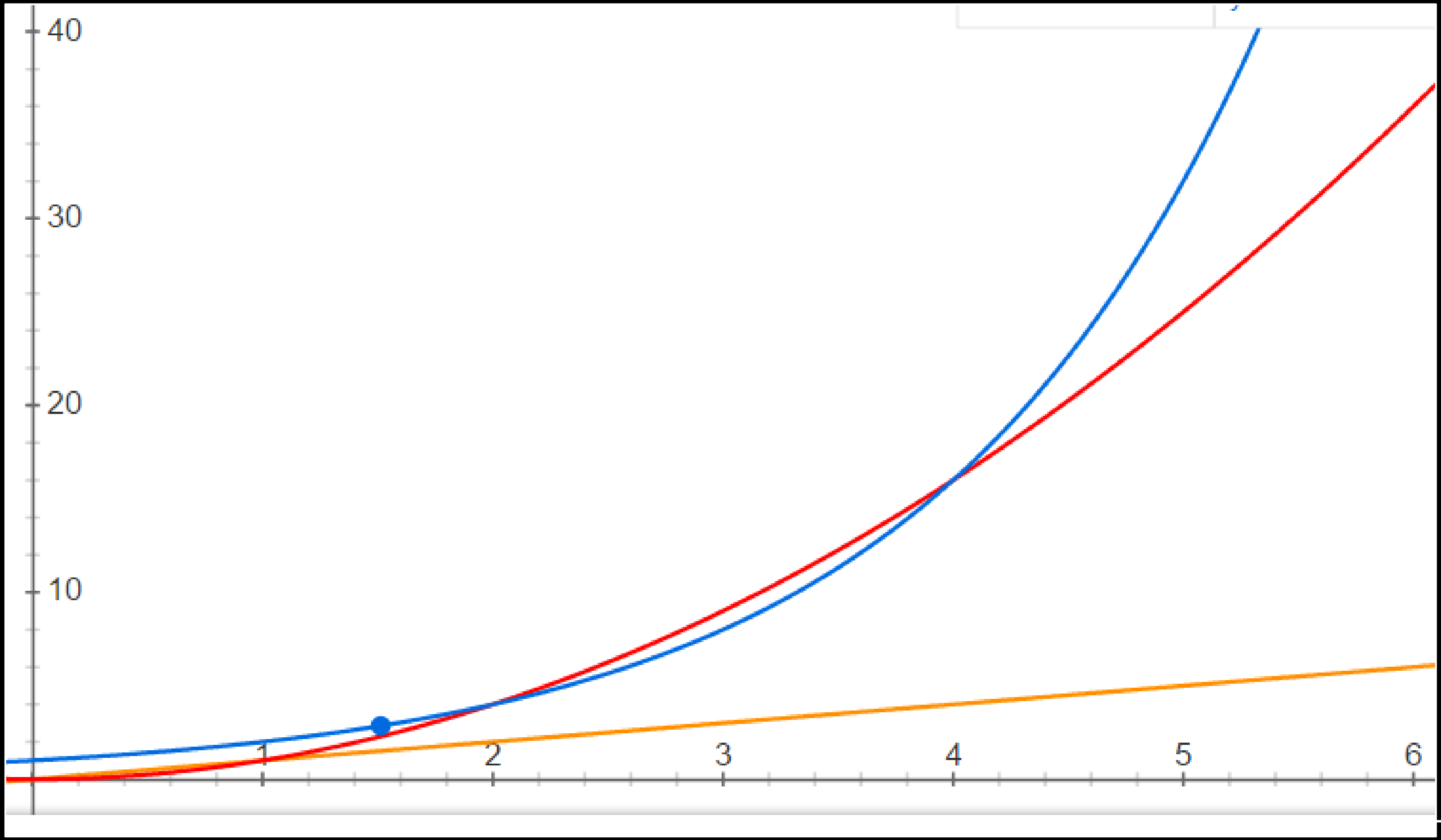
- Caracterizada pelo crescimento e decrescimento muito rápido.

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$



- Caracterizada pelo crescimento e decrescimento muito rápido.

$$y = 2^x$$



$$y = x^2$$

$$y = x$$

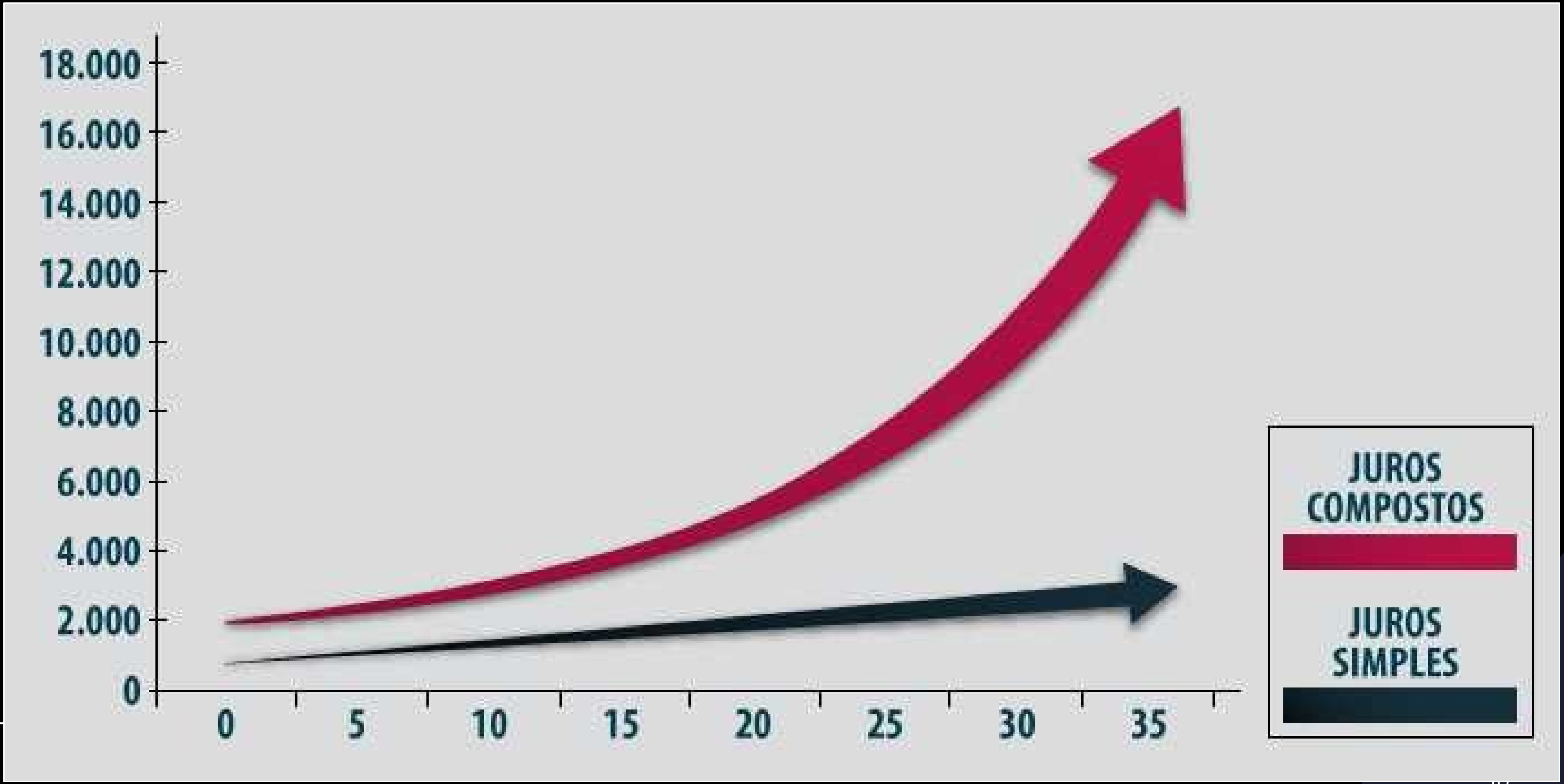
Prof. Dr. Rodrigo Xavier de Almeida Leão

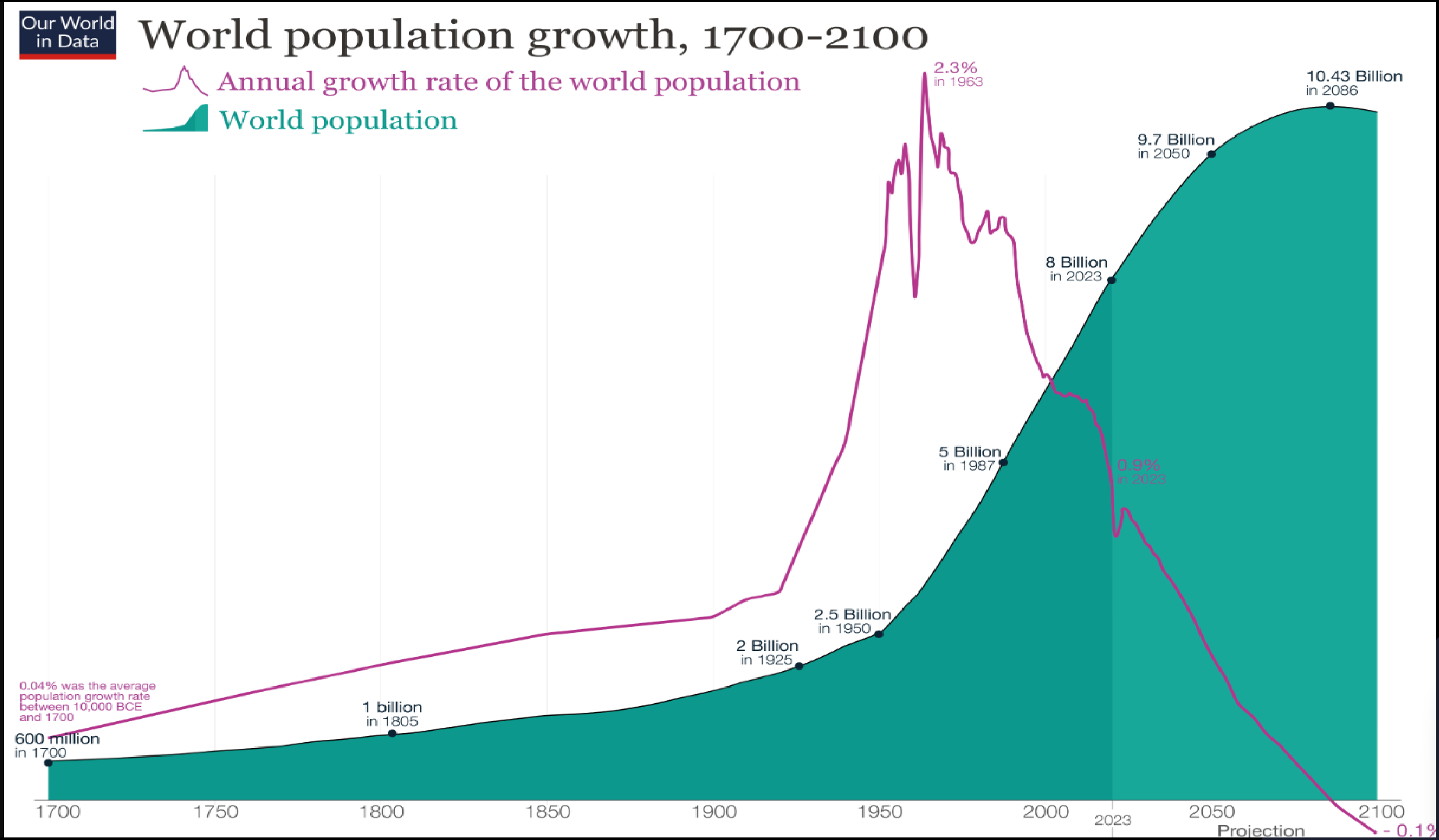
APLICAÇÕES

Prof. Rodrigo Xavier

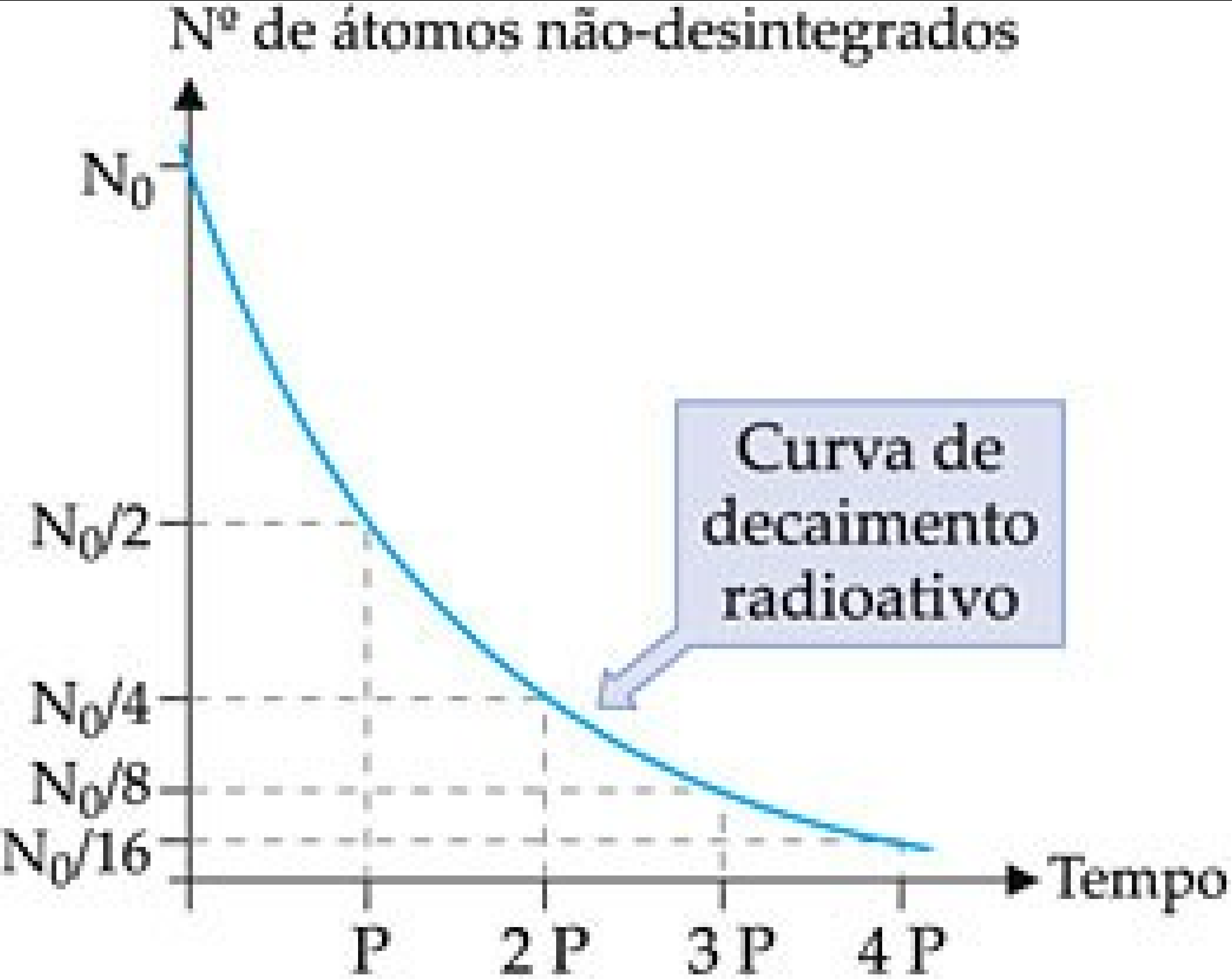
Juros Compostos

$$M = C\,(1+i)^t$$




Our World in Data
World population growth, 1700-2100
Annual growth rate of the world population
World population
2.3%
in 1963
10.43 Billion
in 2086
9.7 Billion
in 2050
8 Billion
in 2023
5 Billion
in 1987
0.9%
in 2023
2.5 Billion
in 1950
2 Billion
in 1925
1 billion
in 1805
0.04% was the average population growth rate between 10,000 BCE and 1700
600 million
in 1700
1700
1750
1800
1850
1900
1950
2000
2023
2050
2100
Projection
- 0.1%

Decaimento Radioativo



$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

N = número de núcleos radioativos remanescentes após um tempo t

N_o = número de núcleos radioativos na amostra num tempo t = 0

Decaimento Radioativo

- Ernest Rutherford foi quem propôs o método do decaimento radioativo e que é aceito até hoje. De acordo com esse método, as rochas mais antigas identificadas na Terra já possuíam minérios de urânio, sendo que o isótopo de urânio 238 sofre decaimento radioativo, terminando por se transformar em chumbo 206 (Pb-206).

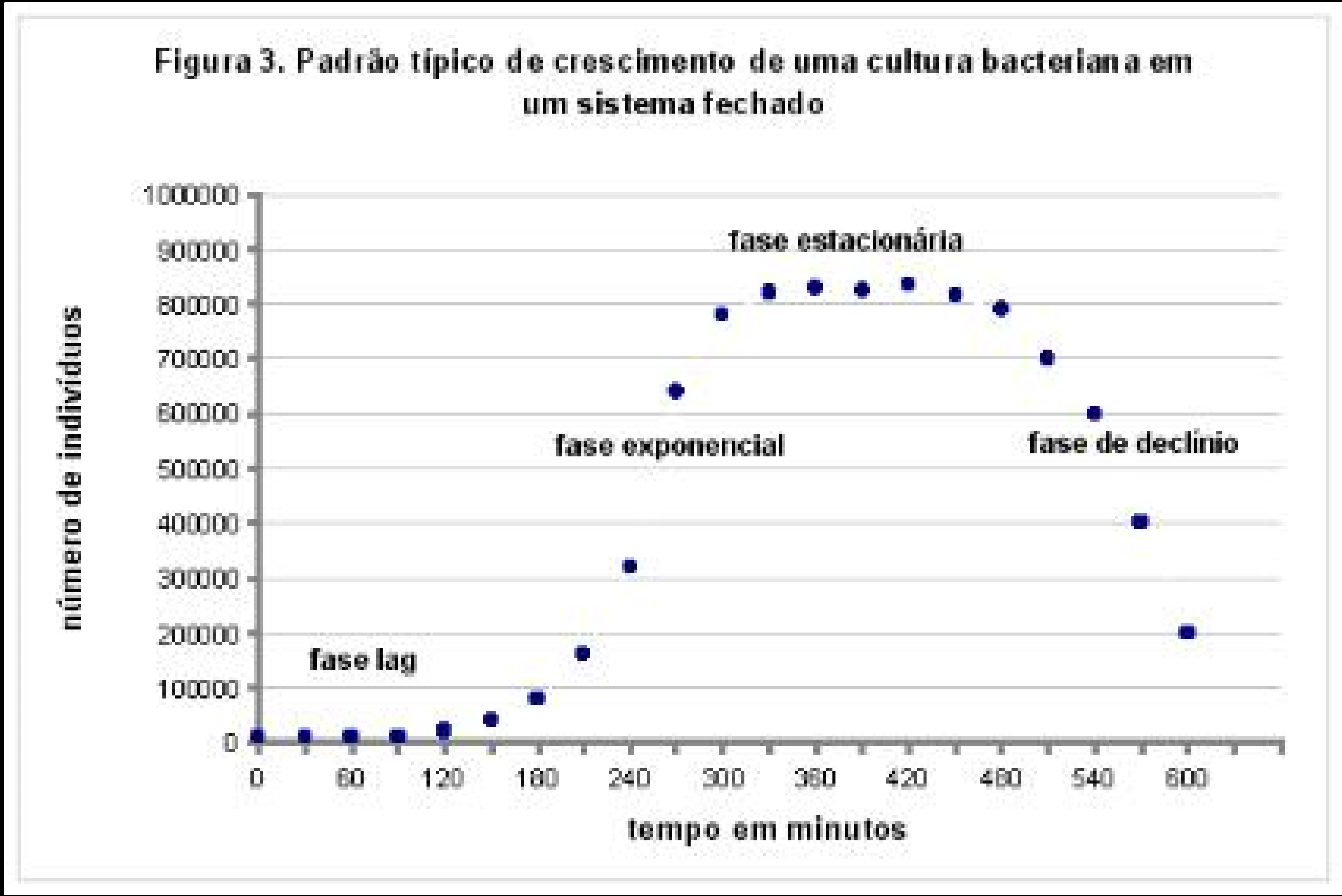
- O tempo de meia-vida, isto é, o tempo necessário para que a quantidade dos núcleos do urânio 238 se reduza à metade, em qualquer amostra, é de **4,5 . 10^9 anos**. No caso do decaimento do urânio 238, um átomo seu resulta em um átomo de chumbo. Assim, realiza-se uma **comparação das quantidades de urânio e chumbo presentes em minérios de urânio nas rochas ou em meteoritos e podem-se determinar as suas idades.**

Por exemplo, a seguir temos uma tabela que relaciona o Pb-206 com o U-238, considerando uma quantidade inicial de urânio igual a 64:

Número de meias-vidas	Número de átomos de ^{238}U	Número de átomos de ^{206}Pb	Relação Pb/U
0	64	0	0/64 = 0
1	32	32	32/32 = 1
2	16	48	48/16 = 3
3	8	56	56/8 = 7
4	4	60	60/4 = 15

Digamos que determinada rocha tenha a relação Pb/U igual a **15.** Isso significa que ela foi formada a **4 meias-vidas do ^{238}U**. Se uma meia vida corresponde a $4{,}5 \cdot 10^9$ anos, então 4 meias-vidas serão **$1{,}8 \cdot 10^{10}$ anos** ou 18 bilhões de anos, que será o tempo de vida da rocha.

População de Bactérias



Fase de lag: Fase de adaptação metabólica ao novo ambiente.

Fase exponencial: Fase na qual o número de células da população dobra a cada geração.

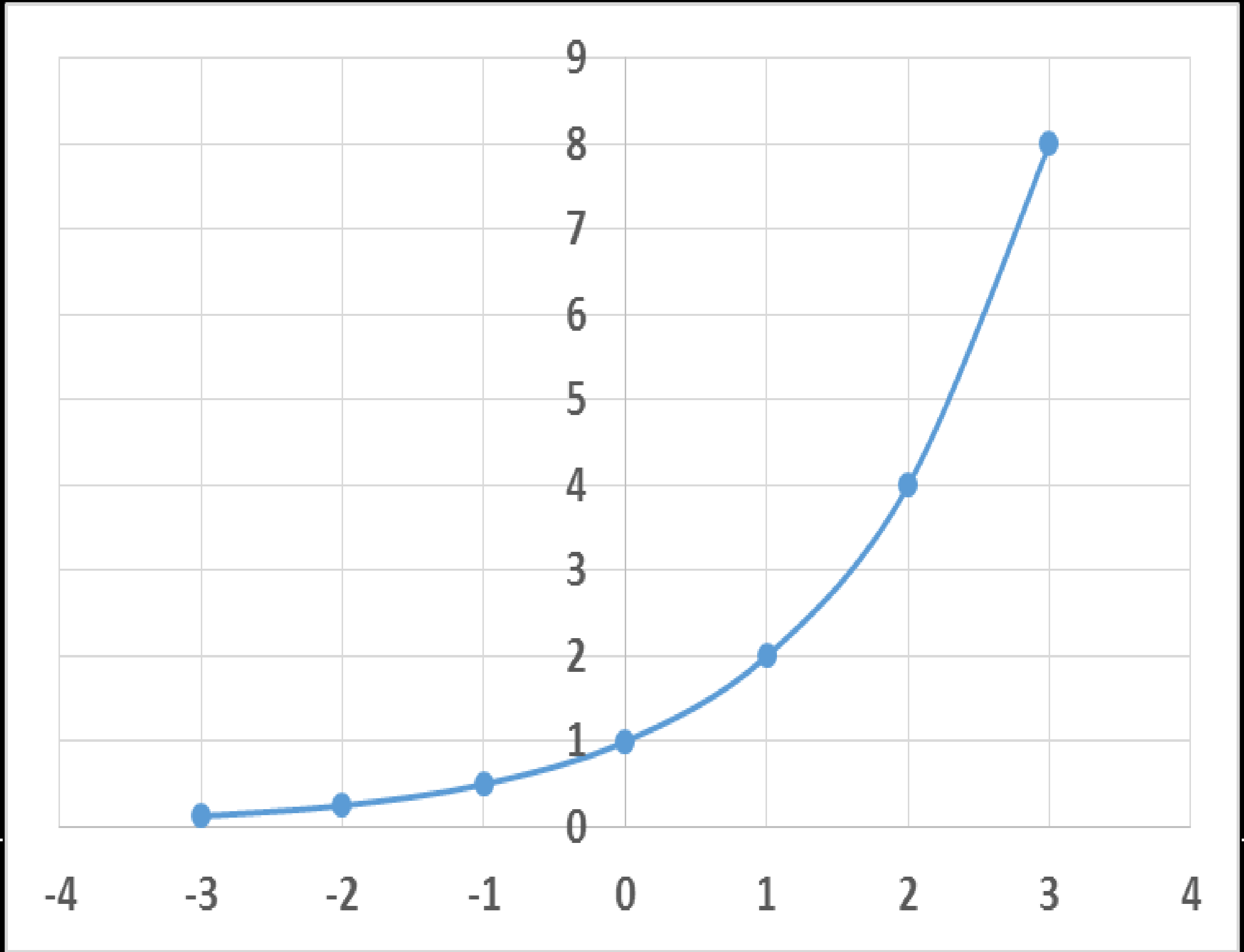
Fase estacionária: Fase em que a taxa de crescimento diminui significativamente devido às condições limitantes do meio. A taxa de divisão celular é muito próxima da taxa de morte celular, o que mantém constante o número de indivíduos.

Fase de declínio: Fase em as células perdem a capacidade de se dividir, a taxa de morte celular torna-se maior que a taxa de divisão e o número de células viáveis decresce exponencialmente até a completa extinção da população.

$$f(x) = a^x$$

Crescente se **a** > **1**.

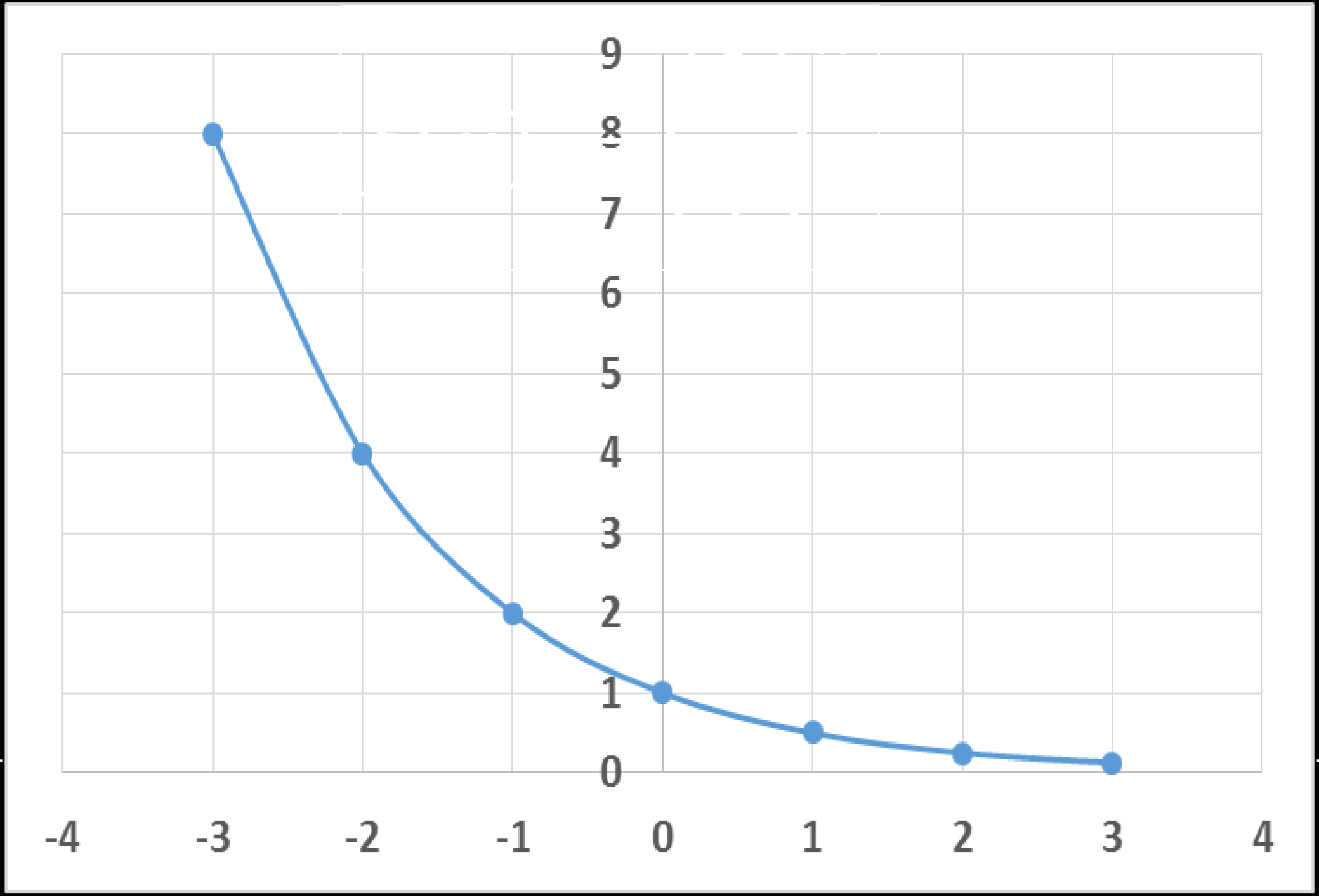
$$f(x) = 2^x$$



$$f(x) = a^x$$

Decrescente se **0** < **a** < **1.**

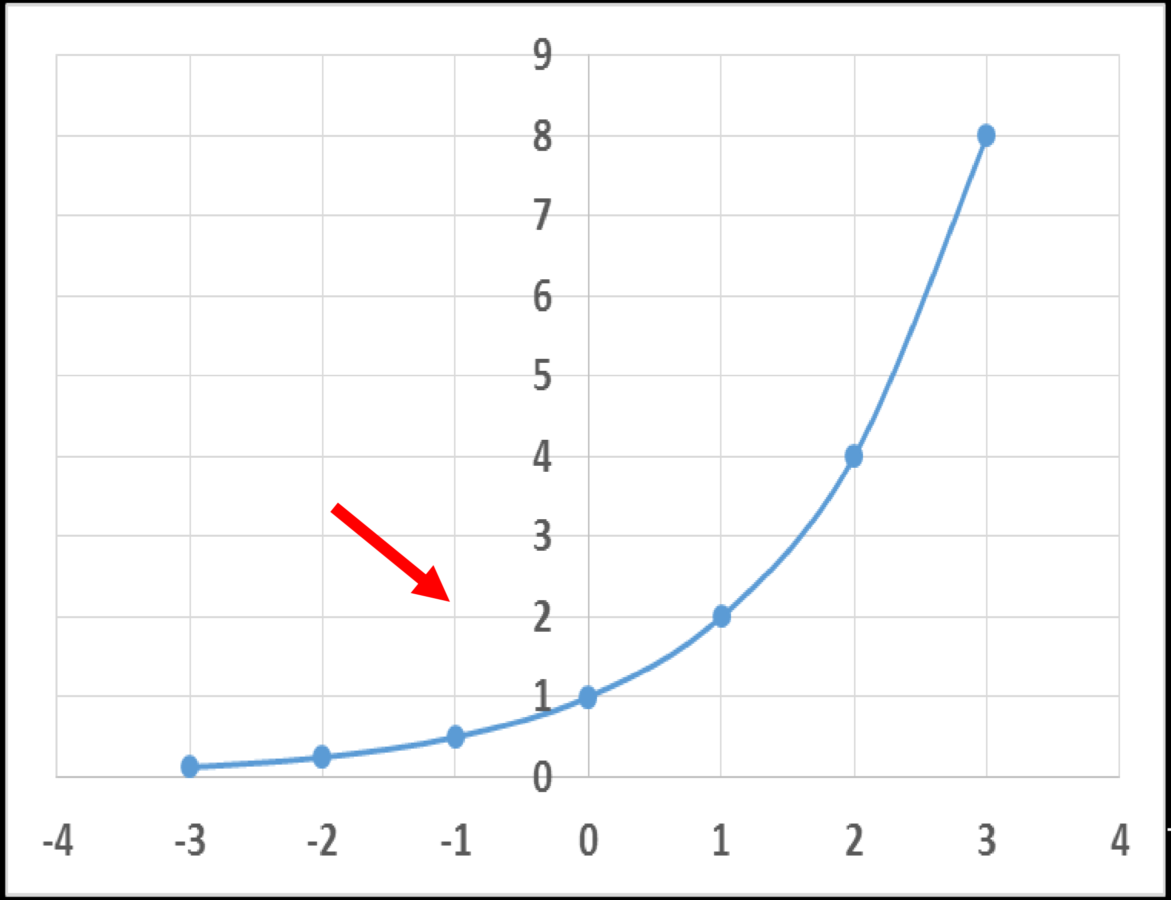
OBS: $a^{-x} = \frac{1}{a}^{x}$

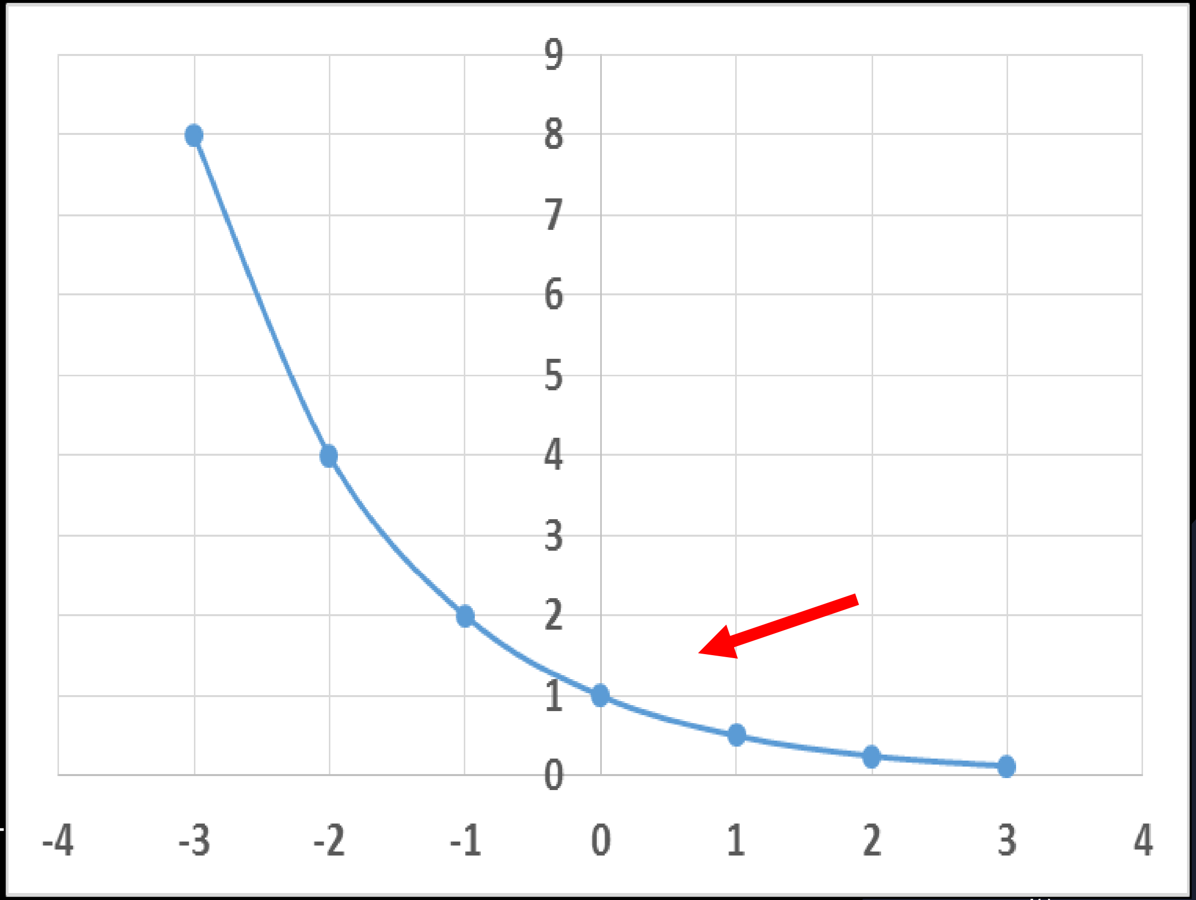


$$f(x) = a^x$$

O gráfico passa por y = 1 em x = 0.

Nunca toca o eixo x





Construindo a função exponencial

$f(x) = a^x$

- Número pelo qual a função é multiplica a cada variação de x.

  - a = 2 _ Função dobra a cada variação de x.
  - a = 3 _ Função triplica a cada variação de x.
  - a = 4 _ Função quadruplica a cada variação de x.

Construindo a função exponencial

Variável independente

$$f(t) = C.a^t$$

Multiplicador.

Valor da função para determinado valor de t.

Valor inicial.
Valor quando t = 0.

- Expoente negativo = inverte a base!

- A função é decrescente!

$$f(t) = C.\boxed{a^{-b}}t$$

$$f(t) = C.\boxed{\frac{1}{a^b}}^t$$

Construindo a função exponencial

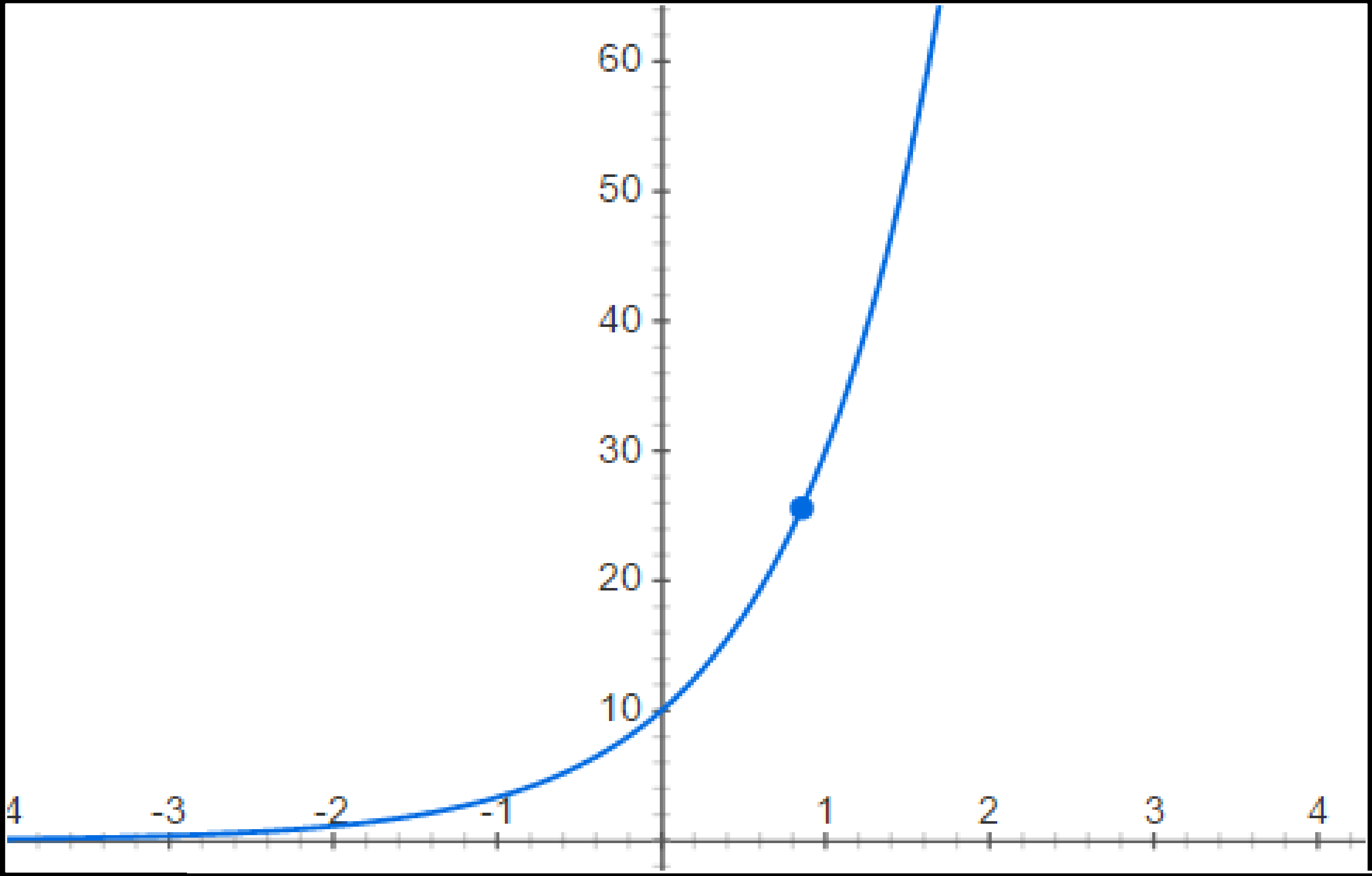
Exemplo:

a) Construa o gráfico de uma população de bactérias cuja população inicial é de 10 bactérias, sabendo que a população triplica a cada minuto.

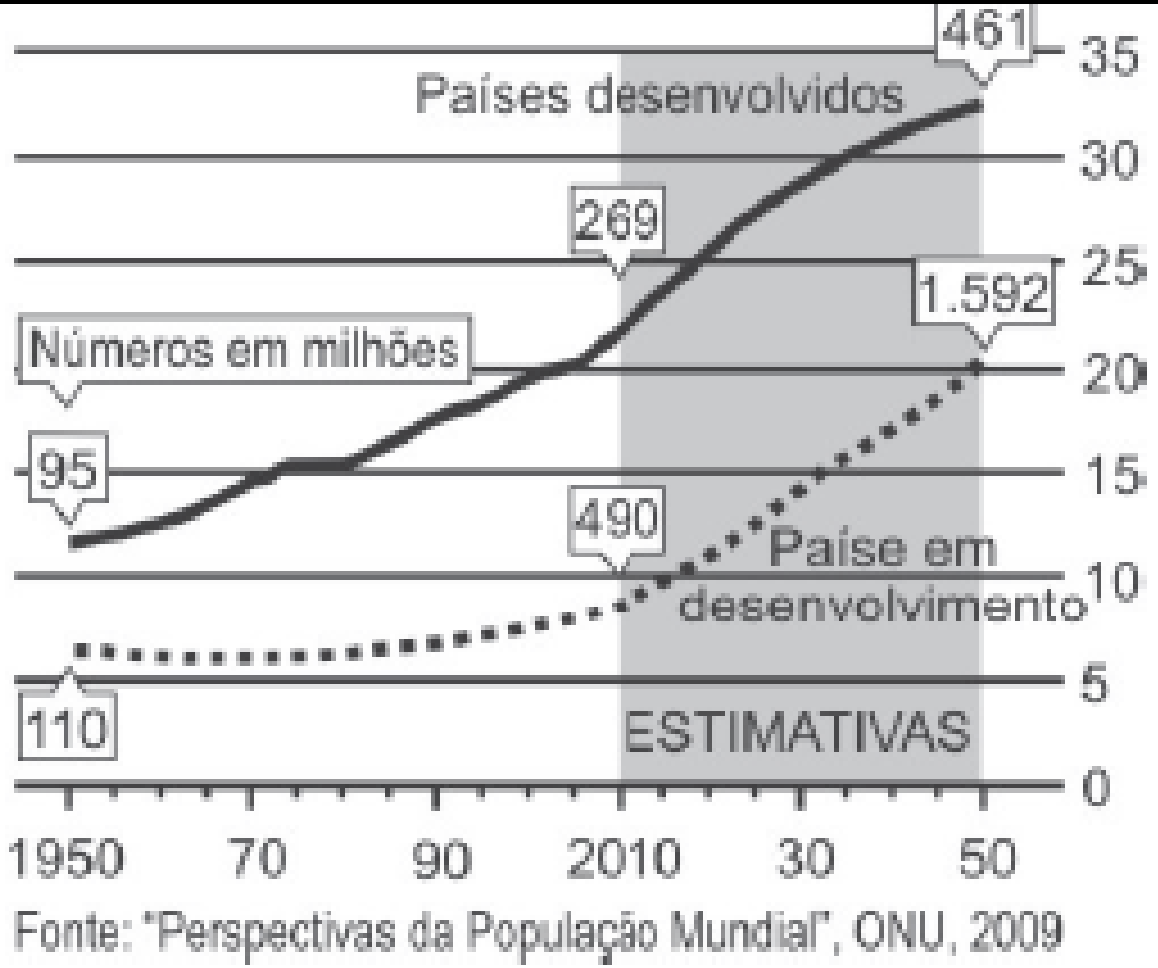
b) Qual a população de bactérias após 4 min?

Construindo a função exponencial

$$f(t) = 10.3^t$$



$$t = 4$$
$$\text{f(t)} = 810$$



Disponível em: www.economist.com.
Acesso em: 9 jul. 2009 (adaptado).

Suponha que o modelo exponencial $\mathbf{y = 363\ e^{0,03x}}$, em que x = 0 corresponde ao ano 2000, x = 1 corresponde ao ano 2001, e assim sucessivamente, e que y é a população em milhões de habitantes no ano x, seja usado para estimar essa população com 60 anos ou mais de idade nos países em desenvolvimento entre 2010 e 2050. Desse modo, **considerando $\mathbf{e^{0,3} = 1,35}$**, estima-se que a população com 60 anos ou mais estará, **em 2030**, entre:

A) 490 e 510 milhões.

B) 550 e 620 milhões.

C) 780 e 800 milhões.

D) 810 e 860 milhões.

E) 870 e 910 milhões.

R. E

A equação exponencial

- Na equação exponencial, o termo desconhecido se encontra no expoente.
- Nestes casos deve-se **reduzir os dois lados da equação à mesma base e igualar os expoentes.**

$$a^{x_1} = a^{x_2} \quad \text{então} \quad x_1 = x_2$$

Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $2^X = 32$ b) $5^X = 125$ c) $4^X = 1/32$ d) $8^X = 0{,}125$

e) $\left(\sqrt[4]{3}\right)^X = \sqrt[3]{9}$ f) $\frac{1}{e^2} = e^{x-3}$

FIX 2. (ACAFE-SC-2012) Um dos perigos da alimentação humana são os microrganismos, que podem causar diversas doenças e até levar a óbito. Entre eles, podemos destacar a Salmonella. Atitudes simples como lavar as mãos, armazenar os alimentos em locais apropriados, ajudam a prevenir a contaminação pelos mesmos. Sabendo que certo microrganismo se prolifera rapidamente, dobrando sua população a cada 20 minutos, pode-se concluir que o tempo que a população de 100 microrganismos passará a ser composta de 3 200 indivíduos é:

a) 1h e 35min.

b) 1h e 40min.

c) 1h e 50min.

d)1he55min.

R. B

FIX 4. Em um experimento no laboratório de pesquisa, observou-se que o número de bactérias de uma determinada cultura, sob certas condições, evolui conforme a função

$$B(t) = 10 \, . \, 3^{(t-1)}$$

em que B(t) expressa a quantidade de bactérias e t representa o tempo em horas. Para atingir uma cultura de 810 bactérias, após o início do experimento, o tempo decorrido, em horas, corresponde a:

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.
E) 5.

Inequação exponencial

Inequação exponencial

- Nestes casos deve-se **reduzir os dois lados da equação à mesma base.**

$$a^{x_1} > a^{x_2}$$

- **Se a > 1:** Mantém o sinal.

$$\boxed{x_1 > x_2}$$

- **Se a < 1:** Inverte o sinal.

$$\boxed{x_1 < x_2}$$

FIX 3. (UNIRIO - RJ) Assinale o conjunto solução da inequação:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} \leq \frac{1}{4}$$

a)] -∞ , 5 [
b) [4 , + ∞ [
c) [5 , + ∞ [
d) X ≤ -5
e) X ≥ -5

PROP 1. (Espcex - SP) Na pesquisa e desenvolvimento de uma nova linha de defensivos agrícolas, constatou-se que a ação do produto sobre a população de insetos em uma lavoura pode ser descrita pela expressão $N(t) = N_0 \, . \, 2^{kt}$,sendo N_0 a população no início do tratamento, N(t), a população após t dias de tratamento e k uma constante, que descreve a eficácia do produto. Dados de campo mostraram que, após dez dias de aplicação, a população havia sido reduzida à quarta parte da população inicial. Com estes dados, podemos afirmar que o valor da constante de eficácia deste produto é igual a

a) 5^{-1}

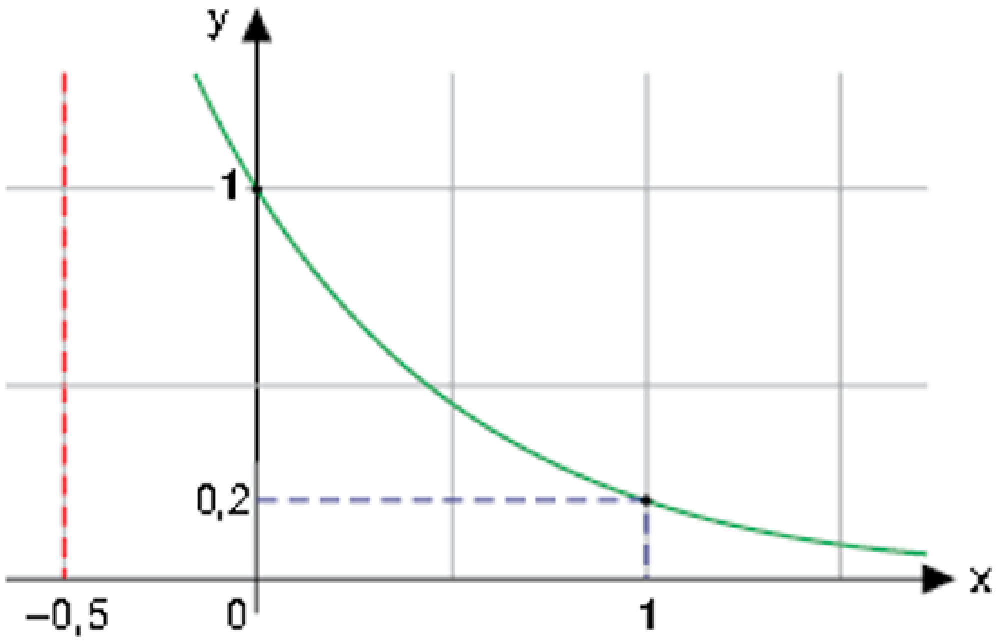
b) -5^{-1}

c) 10

d) 10^{-1}

e) -10^{-1}

PROP 2. (Unesp 2016) A figura descreve o gráfico de uma função exponencial do tipo a^x. Nesta função, o valor de y para x = -0,5 é:



a) log 5
b) $\log_5 2$
c) $\sqrt{5}$
d) $\log_2 5$
e) 2,5

36

R. C

PROP 3. (UFPR 2016) A análise de uma aplicação financeira ao longo do tempo, mostrou que $V(t) = 1000 \, . \, 2^{0,0625.t}$ fornece o valor **V** após um tempo **t** de aplicação. Depois de quanto tempo o valor investido dobrará?

a)8

b)12

c)16

d)24

e)32

PROP 6.

9. (Ulbra 2016) Em um experimento de laboratório, 400 indivíduos de uma espécie animal foram submetidos a testes de radiação, para verificar o tempo de sobrevivência da espécie. Verificou-se que o modelo matemático que determinava o número de indivíduos sobreviventes, em função do tempo era $N_{(t)} = C \cdot A^{t}$, com o tempo t dado em dias e A e C dependiam do tipo de radiação. Três dias após o início do experimento, havia 50 indivíduos.

Quantos indivíduos vivos existiam no quarto dia após o início do experimento?

a) 40
b) 30
c) 25
d) 20
e) 10

R. C

PROP 7. (UNIRIO) Numa população de bactérias , há $P(t) = 10^a\, 4^{3t}$ bactérias no instante t medido em horas (ou fração da hora). Sabendo-se que inicialmente existem 10^a bactérias, quantos minutos são necessários para que se tenha o dobro da população inicial?

a)20
b)12
c)30
d)15
e)10

PROP 8. (UEPA 2014) ... Considere que em 2012 foram registrados 60.000 mortes decorrentes de acidentes de trânsito e destes 40% estavam em motos.

A função $N(t) = N_0\ 1{,}2^t$ fornece o número de vítimas que estavam em moto a partir de 2012, o número previsto de vítimas em moto previstos para 2015 é de:

a) 41.472
b) 51.840
c) 62.208
d) 82.944
e) 103.680

PROP 9.

Analisando o gráfico, o bolsista informou ao orientador que a cultura crescia segundo o modelo matemático, $N = k \cdot 2^{at}$, com t em horas e N em milhares de micro-organismos.

Para constatar que o modelo matemático apresentado pelo bolsista estava correto, o orientador coletou novos dados com t = 4 horas e t = 8 horas.

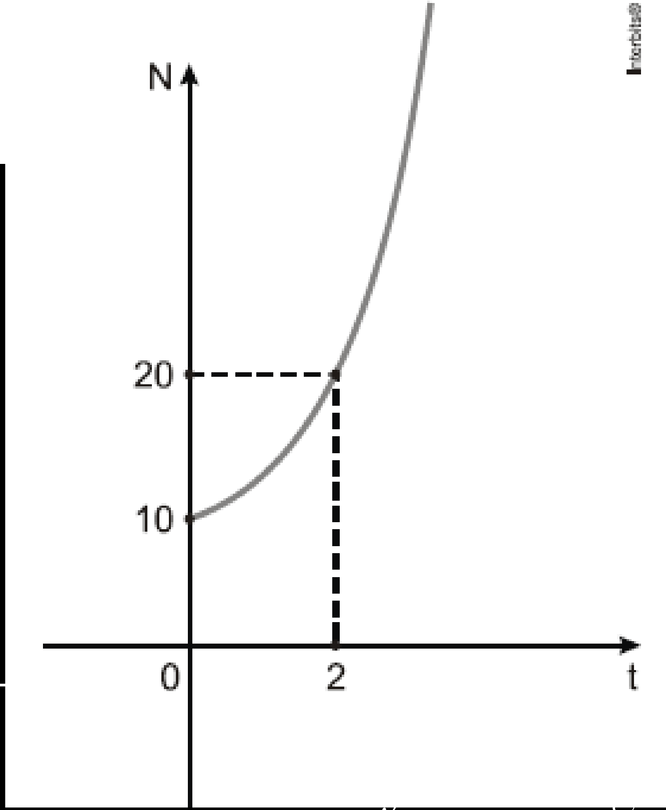
Para que o modelo construído pelo bolsista esteja correto, nesse período, o orientador deve ter obtido um aumento na quantidade de micro-organismos de

a) 80.000.

b) 160.000.

c) 40.000.

d) 120.000.



PROP 10. (UFPR 2014)

Uma pizza a 185ºC foi retirada de um forno quente. Entretanto, somente quando a temperatura atingir 65ºC será possível segurar um de seus pedaços com as mãos nuas, sem se queimar. Suponha que a temperatura T da pizza, em graus Celsius, possa ser descrita em função do tempo t, em minutos, pela expressão

$$T(t) = 160\,.\,2^{-0,8\,t} + 25$$

Qual o tempo necessário para que se possa segurar um pedaço dessa pizza com as mãos nuas, sem se queimar?

a) 6,63 minutos.

b) 10,0 minutos.

c) 2,5 minutos.

d) 0,68 minutos.

e) 0,25 minutos.

Prof. Dr. Rodrigo Xavier de Almeida Leão

R. C

PROP 14. (UFCE) Meia-vida de uma substância radioativa é o tempo necessário para que sua massa se reduza à metade. Tomemos, hoje, 16 gramas de uma substância radioativa cuja meia-vida é de 5 anos. Se daqui a **n** anos sua massa for 2^{-111} gramas, o valor de **n** é igual a quanto?

a) 525
b) 550
c) 565
d) 575
e) 595

01. A madeira foi um dos primeiros materiais usados pelo homem, na construção de sua habitação e de seus primeiros meios de transporte. Com a alta utilização desse material, intensificaram-se o desmatamento e a significativa diminuição das florestas no mundo. A fim de solucionar esse problema, tende-se à produção de madeira a partir de florestas plantadas e regeneradas. Para calcular o rendimento **V** de uma dessas florestas, podemos utilizar a fórmula:

$$V = 6{,}7 . e^{\frac{-48{,}1}{t}}$$

em que **V** nos dá o valor em metros cúbicos de madeira por are, em função da idade da floresta, t. Considerando $e^{-0{,}481} = 0{,}62$, a quantidade de m^3 de madeira que renderá uma floresta de 80 hectares com 100 anos de idade está entre

a) 10.000 e 20.000.
b) 20.000 e 30.000.
c) 30.000 e 40.000.
d) 40.000 e 50.000.
e) 50.000 e 60.000.