Linguagens Formais e Autômatos

Aula 2:

Elementos de Matemática Discreta

Prof. Dr. Rodrigo Xavier de Almeida Leão

Cientista de Dados e Big Data

ELEMENTOS DE MATEMÁTICA DISCRETA

- Em **1968 a Association for Computing Machinery (ACM)** passou a recomendar que todos os cursos de engenharia dos EUA incluíssem em seus currículos um curso de matemática discreta, pois se trata da matemática que fundamenta a Computação.
- Nesta seção será feita a **introdução aos fundamentos de matemática discreta.** Incluindo conjuntos, relações e funções.
- As referências clássicas de matemática discreta são Menezes (2013) e Preparata e Yeh (1973).

Definição 1.1 Conjunto.

Um *Conjunto* é uma coleção de zero ou mais objetos distintos, denominados *Elementos* do conjunto. ❑

Um *elemento* é uma entidade básica a qual não é definida formalmente. Relativamente ao relacionamento entre elementos e conjuntos, tem-se que:

a) Se um elemento a *pertence* a um conjunto A denota-se por $a \in A$; caso contrário, $a \notin A$

b) Se todos os elementos de um conjunto A também são elementos de um conjunto B, então afirma-se que A está *contido* em B ou que A é *subconjunto* de B e denota-se por $A \subseteq B$ (ou ainda B *contém* A e $B \supseteq A$). Adicionalmente, se existe $b \in B$ tal que $b \notin A$, então afirma-se que A está *contido propriamente* em B ou que A é *subconjunto próprio* de B e denota-se por $A \subset B$ (ou ainda B *contém propriamente* A e $B \supset A$)

c) Os conjuntos A e B são *iguais* se, e somente se, possuem os mesmos elementos, ou seja, $A = B$ se, e somente se, $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$

O conjunto sem elementos (ou seja, com zero elementos) é denominado *conjunto vazio* e é denotado por { } ou $\emptyset$. Conjuntos (finitos ou infinitos)

EXEMPLO 1 Conjuntos, Elementos.

a) $a \in \{b, a\}$ e $c \notin \{b, a\}$

b) $\{a, b\} = \{b, a\}$, $\{a, b\} \subseteq \{b, a\}$ e $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$

c) Os seguintes conjuntos são infinitos:

- $\mathbb{N}$ *Conjunto dos Números Naturais*;
- $\mathbb{Z}$ *Conjunto dos Números Inteiros*;
- $\mathbb{Q}$ *Conjunto dos Números Racionais*;
- $\mathbb{I}$ *Conjunto dos Números Irracionais*;
- $\mathbb{R}$ *Conjunto dos Números Reais*.

d) $\{1, 2, 3\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 0 \text{ e } x < 4\}$ e $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}$

e) O conjunto dos números pares pode ser denotado por compreensão como segue:

$$\{y \mid y = 2x \text{ e } x \in \mathbb{N}\}$$ ❑

Definição 1.2 União, Intersecção, Diferença, Complemento, Partes, Produto Cartesiano.

Sejam A e B conjuntos. Então:

a) *União.*

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \}$$

b) *Intersecção.*

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \in B \}$$

c) *Diferença.*

$$A - B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \notin B \}$$

d) *Complemento*. A operação de complement
conjunto fixo $\mathbb{U}$ denominado *conjunto univ*

$$A' = \{x \mid x \in \mathbb{U} \text{ e } x \notin A\}$$

e) *Conjunto das Partes*.

$$2^A = \{S \mid S \subseteq A\}$$

f) *Produto Cartesiano*.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$$

É usual denotar um produto cartesiano de um conjunto com ele mesmo
como um expoente. Por exemplo:

$$A \times A = A^2$$

EXEMPLO 2 Operações sobre Conjuntos.

Suponha o universo $\mathbb{N}$ e sejam $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{2, 3\}$. Então:

a) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$

b) $A \cap B = \{2\}$

c) $A - B = \{0, 1\}$

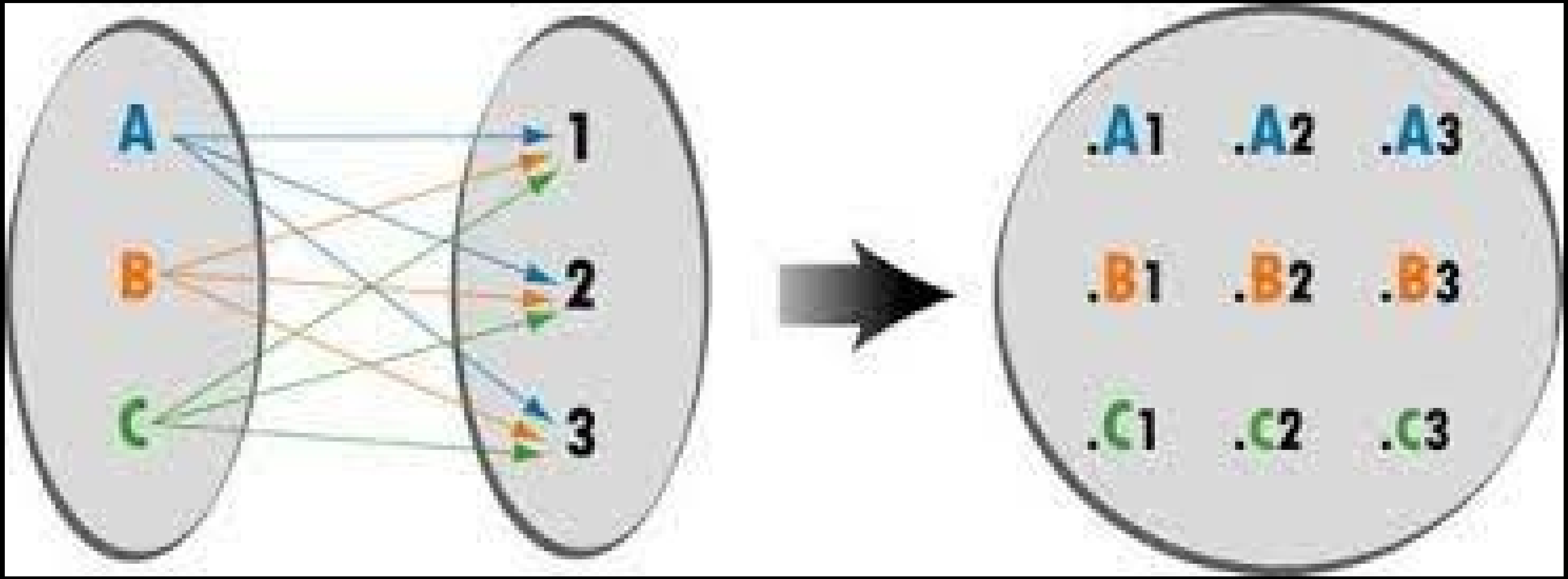
d) $A' = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 2\}$

e) $2^B = \{\varnothing, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$

f) $A \times B = \{(0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$

Produto Cartesiano

R é uma relação entre elementos de A e de B se, e somente se, $R \subseteq A \times B$.



1.3 Lógica

No texto que segue é suposto que o leitor está familiarizado com os conceitos básicos relativos à Lógica Booleana. Entende-se por *Lógica Booleana* como o estudo dos princípios e métodos usados para distinguir sentenças verdadeiras de falsas.

Definição 1.15 Proposição.

a) Uma *Proposição* é uma sentença declarativa a qual possui valor lógico *verdadeiro* ou *falso* (não-verdadeiro);

b) Considere um conjunto universo $\mathbb{U}$. Uma *Proposição Sobre* $\mathbb{U}$ é uma proposição cujo valor lógico depende de um elemento $x \in \mathbb{U}$ considerado. $\square$

Os valores lógicos verdadeiro e falso são usualmente denotados por V e F, respectivamente. Uma proposição p a qual descreve alguma propriedade de um elemento $x \in \mathbb{U}$ é usualmente denotada por $p(x)$. Toda a proposição p sobre $\mathbb{U}$ induz uma partição de $\mathbb{U}$ em duas classes de equivalência, como segue:

a) $\{x \mid p(x)$ é verdadeira$\}$, denominado *conjunto verdade* de p

b) $\{x \mid p(x)$ é falsa$\}$, denominado *conjunto falsidade* de p

Definição 1.16 Tautologia, Contradição.

Seja p uma proposição sobre o conjunto universo $\mathbb{U}$. Então:

a) p é dita uma *Tautologia* se $p(x)$ é verdadeira para qualquer $x \in \mathbb{U}$

b) p é dita uma *Contradição* se $p(x)$ é falsa para qualquer $x \in \mathbb{U}$ ❑

EXEMPLO 12 Proposição, Tautologia, Contradição.

a) A sentença $3 + 4 > 5$ é uma proposição;

b) Para a proposição $n! < 10$ sobre $\mathbb{N}$, tem-se que $\{0, 1, 2, 3\}$ é o conjunto verdade e $\{n \in \mathbb{N} \mid n > 3\}$ é o conjunto falsidade;

c) A proposição $n + 1 > n$ sobre $\mathbb{N}$ é uma tautologia;

d) A proposição "$2n$ é ímpar" sobre $\mathbb{N}$ é uma contradição. ❑

Uma *operação* ou um *operador* sobre um conjunto A é uma função da forma op: $A^n \to A$. Portanto, um *operador lógico*, também denominado *conetivo (lógico)*, é um operador sobre o conjunto das proposições. Uma proposição que não contém operadores é denominada *proposição atômica* ou simplesmente *átomo*. O conjunto de todas as proposições lógicas é denotado por $\mathbb{P}$.

Uma *tabela verdade* é uma tabela que descreve os valores lógicos de uma proposição em termos das possíveis combinações dos valores lógicos das proposições componentes.

Definição 1.17 Operadores Lógicos.

Os seguintes *Operadores* ou *Conetivos* sobre o conjunto das proposições lógicas $\mathbb{P}$ são definidos conforme a tabela verdade ilustrada abaixo:

a) *Negação*. Operador denotado pelo símbolo $\neg$

b) *E*. Operador denotado pelo símbolo $\wedge$

c) *Ou*. Operador denotado pelo símbolo $\vee$

d) *Se-Então*. Operador denotado pelo símbolo $\rightarrow$

e) *Se-Somente-Se*. Operador denotado pelo símbolo $\leftrightarrow$

d) *Se-Então*. Operador denotado pelo símbolo $\rightarrow$

e) *Se-Somente-Se*. Operador denotado pelo símbolo $\leftrightarrow$

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

CONECTIVOS LÓGICOS

Formalmente, propriedades são especificadas através de uma linguagem lógica que faz uso dos **conectivos lógicos:**

- conjunção ($\wedge$), disjunção ($\vee$), negação ($\neg$) e implicação ($\rightarrow$).

Definição 1.18 Relação de Implicação, Equivalência.

As seguintes relações são induzidas pelos operadores $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ sobre $\mathbb{P}$:

a) A relação $\Rightarrow$, denominada *Relação de Implicação* ou simplesmente *Implicação*, é definida pelo conjunto:

$$\{(p, q) \in \mathbb{P}^2 \mid p \rightarrow q \text{ é uma tautologia}\}$$

b) A relação $\Leftrightarrow$, denominada *Relação de Equivalência* ou simplesmente *Equivalência*, é definida pelo conjunto:

$$\{(p, q) \in \mathbb{P}^2 \mid p \leftrightarrow q \text{ é uma tautologia}\}$$ ❑

É fácil verificar que $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$ são relações de ordem e de equivalência, respectivamente.

Negação (Conectivo ~ ou ¬)

- Conectivo: “não”
- Símbolo: ~ ou ¬
- Esquema: ~p ou ¬p (não p)
- Proposição p: O carro é amarelo
- Proposição ~p: O carro não é amarelo

~p : Não é verdade que o carro é amarelo

~p : É falso que o carro é amarelo

Negação (Conectivo ~ ou ¬)

- Conectivo: “não”
- Símbolo: ~ ou ¬
- Esquema: ~p ou ¬p (não p)
- Proposição p: O carro é amarelo
- Proposição ~p: O carro não é amarelo

~p : Não é verdade que o carro é amarelo

~p : É falso que o carro é amarelo

Negação (Conectivo ~ ou ¬)

O carro é amarelo (p)

Uma proposição: $2^1 = 2$

p	~p ou ¬p
V	F
F	V

Conjunção (conectivo “e”)

Conectivo “e” é denominado conjunção

Símbolo: “^”

Esquema é p ^ q (p e q)

Ex.: Irei para a escola e ao teatro

Irei para a escola (p)

irei para ao teatro (q)

2 proposições = 2^2 = 4

p	q	p ^ q (p e q)
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Será verdadeira somente se todas as proposições forem verdadeiras.

Conjunção (conectivo "e")

Irei para a escola (p)

irei para ao teatro (q)

2 proposições = $2^2 = 4$

p	q	p ^ q (p e q)
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjunção inclusiva

Símbolo: “v”

Conectivo: “ou”

Esquema: p v q (p ou q)

Ex.: Como ou bebo

Proposição 1: como

Proposição 2: bebo

Tem duas proposições: $2^2 = 4$

p	q	p v q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Embora tenha usado o conectivo ou, nada me impede de fazer as duas coisas, ou seja, significa uma inclusão.

Disjunção inclusiva

Proposição 1: como

Proposição 2: bebo

Tem duas proposições: $2^2 = 4$

p	q	p v q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disjunção exclusiva

Símbolo “$\underline{v}$”

Conectivo “ou...ou”

Esquema: p $\underline{v}$ q (p ou q)

Ex.: Ou como ou bebo

Com a repetição do conectivo ou, ele exclui a possibilidade de fazer as duas coisas, ou seja, significa uma exclusão.

Disjunção exclusiva

Proposição 1: Ou como

Proposição 2: Ou bebo

Tem duas proposições: $2^2 = 4$

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Implicação

Símbolo: $\rightarrow$

Conectivo "se...então"

Esquema: $p \rightarrow q$ (se p então q)

Ex.: Se sim então imprima.

Implicação

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicional: $p \leftrightarrow q$ (p se e somente se q)

P	Q	$\mathbf{P \leftrightarrow Q}$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**V**

Quantificador Universal

Utilizado quando queremos nos referir a todos os elementos de um conjunto.

“para todo”, “qualquer que seja” ou “para cada”.

$$\forall n \in \mathbb{N}, n.0 = 0.n = 0$$

Quantificador Existencial

Faz referência a pelo menos um elemento pertencente ao conjunto.

“existe um”, “existe pelo menos um”, “algum” ou “existe”

Exemplo: existe pelo menos um número natural n que, subtraído de seu quadrado, resulta em 0, isto é:

$$\exists\, n \in \mathbb{N},\ n^2 - n = 0$$

Como sabemos que dois conjuntos são iguais?

Ora, dois conjuntos são iguais se ambos possuem os mesmos elementos.

Dado um subconjunto arbitrário B de um conjunto A, a propriedade $x \in B$ especifica B .

Ou seja, B e $\{ x / x \in A \wedge x \in B \}$ são o mesmo conjunto.

Inclusão entre conjuntos

Sejam B e C conjuntos.

Dizemos que B está incluído em C , ou que C contém B , se, e somente se, todo elemento de B é também um elemento de C .

Em lógica, isto é descrito como

$$\forall x \ ((x \in B) \rightarrow (x \in C))$$

Sejam B e C subconjuntos de A.

União: $B \cup C$ é especificado por $\{ x / \ x \in A \text{ e } ((x \in B) \lor (x \in C))\}$

Interseção: $B \cap C$ é especificado por $\{x / x \in A \text{ e } ((x \in B) \land (x \in C))\}$

Complemento em A: $C_A\, B$ é especificado por $\{ x / \ x \in A \text{ e } \neg(x \in B) \}$

Diferença: $B - C$ é especificado por $\{x / x \in A \text{ e } ((x \in B) \land \neg(x \in C))\}$

Definições

Menor que:

X < Z

$\exists y(\neg(y = 0) \wedge x + y = z)$, que indica que $x < z$

Definições

Definição do número zero,
quando estamos no domínio dos números naturais.

Por exemplo, sendo suc a função sucessor no conjunto dos números naturais, que a cada n associa $n+1$, a propriedade $\neg\exists y(suc(y)=x)$ só é verdadeira quando x é o número 0 (zero).

A fórmula define 0, pois é verdade se, e somente se, x = 0 .

R é uma relação entre elementos de A e de B se, e somente se, $R \subseteq A \times B$.

Um tipo especial de relação é a funcional. Uma função de F de A em B é qualquer relação na qual para cada a existe um, e somente um, b, tal que $(a,b) \in F$. Isto também implica que todo elemento de a está relacionado com algum $b \in B$. Como cada a possui um, e somente um, b, podemos denominar tal b $F(a)$. Por exemplo, cada ser humano possui uma, e somente uma, mãe biológica. Quando Maria é mãe de João, podemos denotar Maria por $Mae-de(Joao)$. Neste caso, também se chama b de imagem de a via F.

Exercícios

Questão 1 (PM PB – IBFC) Considerando o conjunto verdade dos conectivos lógicos proposicionais e sabendo que o valor lógico de uma proposição “p” é falso e o valor lógico de uma proposição “q” é verdade, é correto afirmar que o valor lógico:

a) da conjunção entre “p” e “q” é verdade

b) da disjunção entre “p” e “q” é falso

c) do condicional entre “p” e “q”, nessa ordem, é falso

d) do bicondicional entre “p” e “q” é falso

Exercícios

2) Dadas as proposições simples:

p: “Sou aposentado”
q: “Nunca faltei ao trabalho”.

Escreva a proposição composta na forma de conectivos lógicos:

“Se sou aposentado e nunca faltei ao trabalho, então não sou aposentado”

Exercícios

2) Dadas as proposições simples:

p: “Sou aposentado”
q: “Nunca faltei ao trabalho”.

Escreva a proposição composta na forma de conectivos lógicos:

“Se sou aposentado e nunca faltei ao trabalho, então não sou aposentado”

Exercícios

3) Se o valor lógico de uma proposição p é verdade e o valor lógico de uma proposição q é falso, então é correto afirmar que o valor lógico:

a) da conjunção entre p e q é falso

b) da disjunção entre p e q é falso

c) do bicondicional entre p e q é verdade

d) do condicional entre p e q, nessa ordem, é verdade

e) da negação entre a disjunção entre p e q é verdade

Exercícios

4) O conectivo cujo valor lógico é falso se duas proposições tiverem valores lógicos iguais é:

a) Disjunção
b) Conjunção
c) Bicondicional
d) Dsjunção exclusiva

Exercícios

4) O conectivo cujo valor lógico é falso se duas proposições tiverem valores lógicos iguais é:

a) Disjunção
b) Conjunção
c) Bicondicional
d) Dsjunção exclusiva

Exercícios

5 - Seja *p* a proposição "está chovendo" e seja *q* "está ventando". Escreva uma sentença verbal simples, em português, que descreva cada uma das seguintes proposições lógicas:

a) $\sim\sim p$

b) $p \wedge \sim q$

c) $q \vee \sim p$

d) $q \rightarrow p$

e) $\sim (p \wedge q)$

Exercícios

6) De acordo com João, ele não lerá o livro se e somente se não chover.

É possível que chova e João leia o livro?

Exercícios

7) Verifique se o conjunto W:

$\{(2, 2); (4, 2); (1, 3); (2, 3); (4, 3)\}$

É uma relação entre os conjuntos:

$S = \{1, 2, 3, 4\}$
$T = \{2, 3\}$

Exercícios

8) Identifique uma função para a qual y = F(x)

$$x = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$y = \{2, 6, 12, 20, 30\}$$