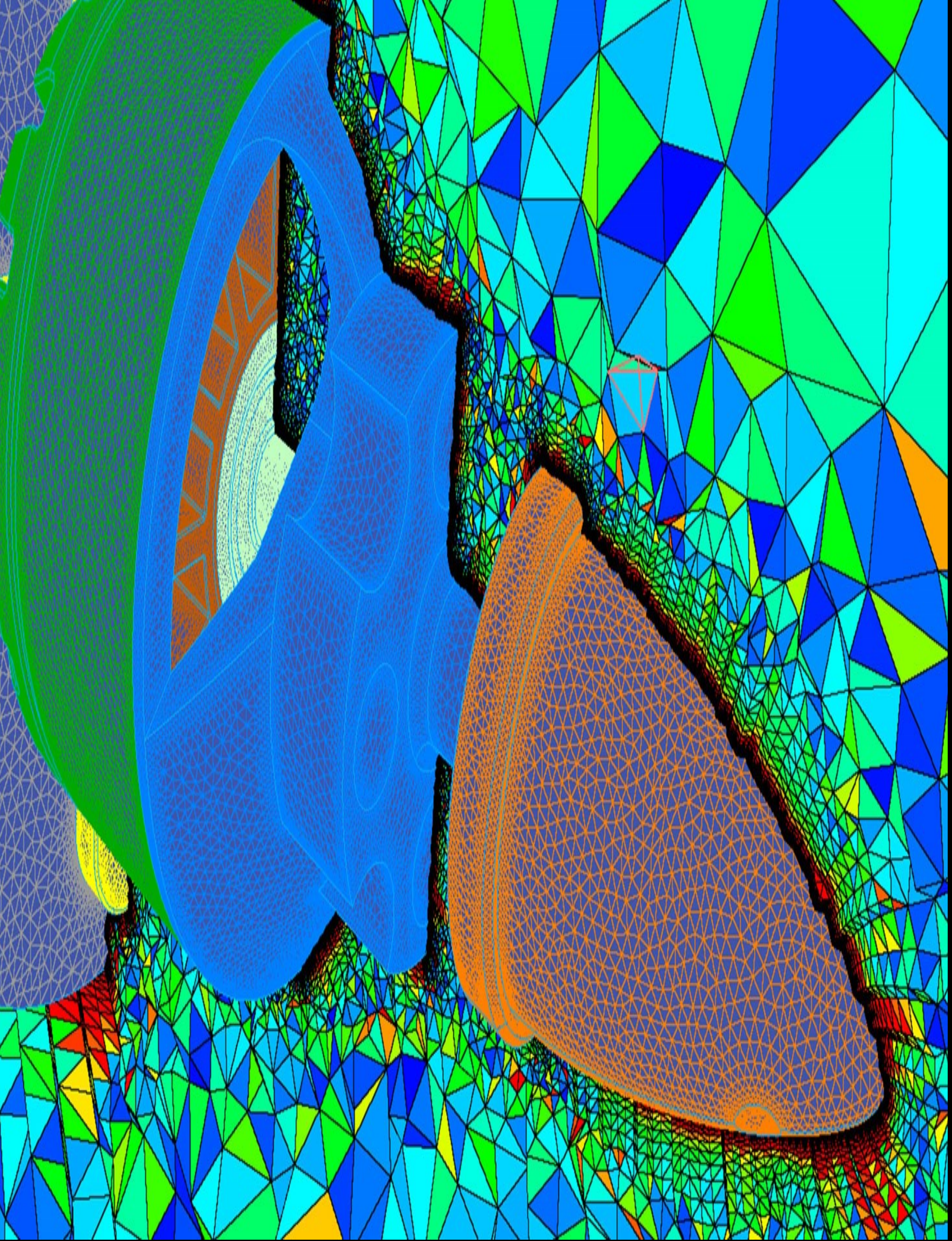
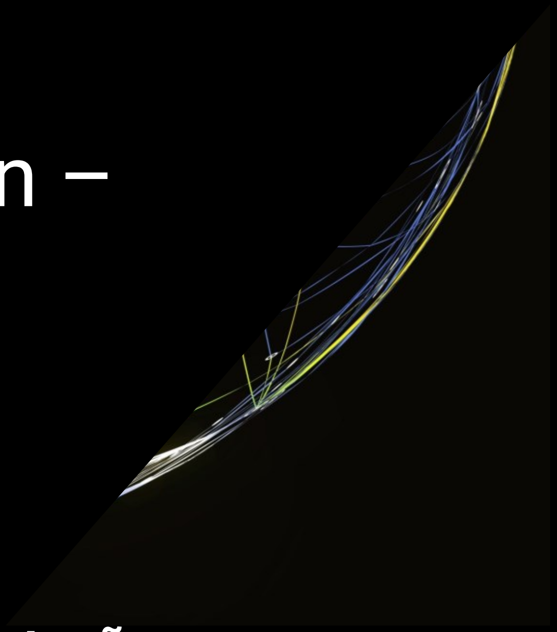
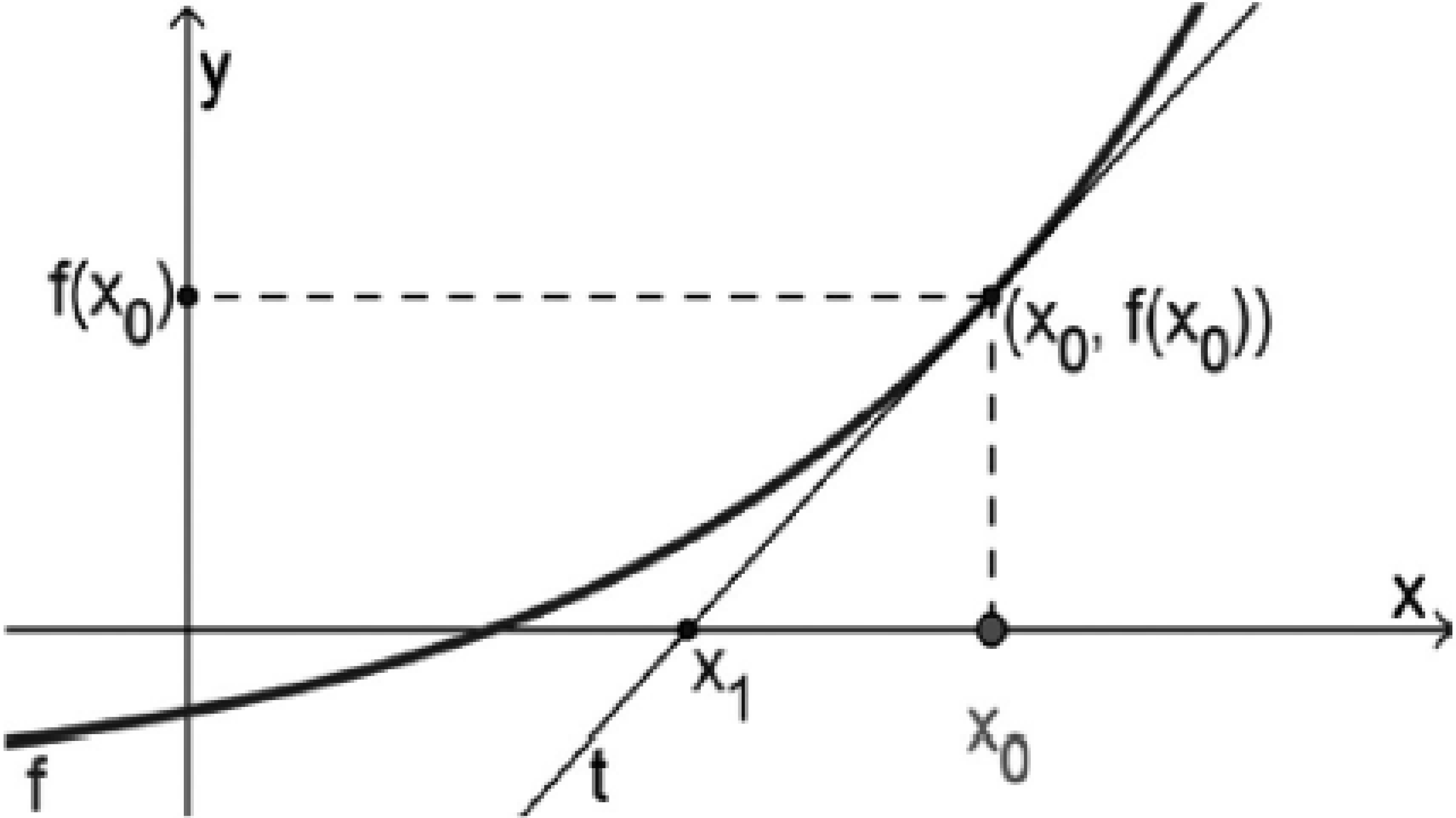


MÉTODO NUMÉRICOS

Aula 3 – Newton – Raphson



Curso de Ciência da Computação
Dr. Rodrigo Xavier de Almeida Leão
Cientista de Dados


y
f(x0)
(x0, f(x0))
x
x1
x0
f
t

A inclinação da reta tangente t que passa pelo ponto $(x_0, f(x_0))$, definida previamente por $f'(x)$, pode ser calculada por:

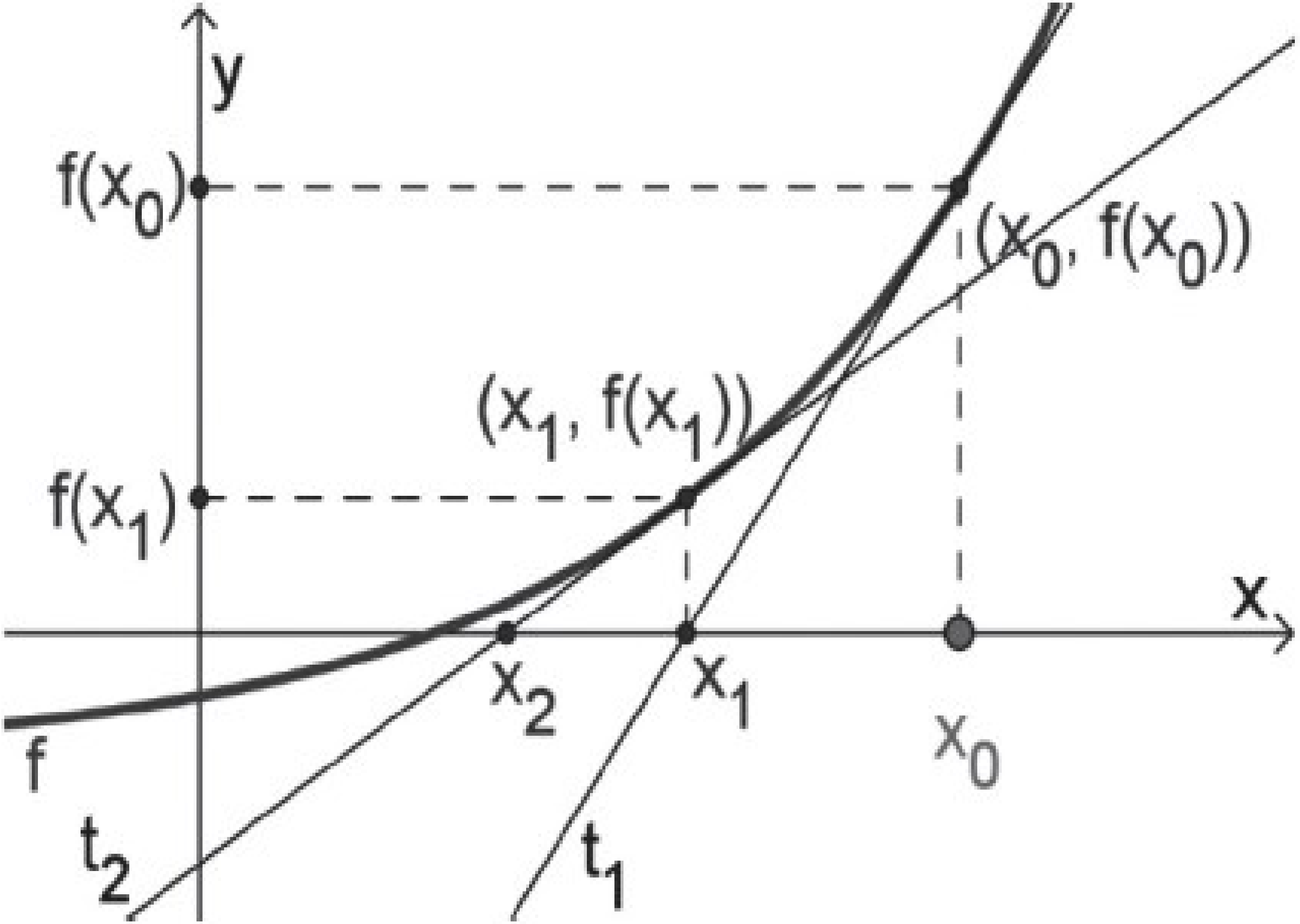
$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_0) - 0}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}.$$

Na equação apresentada, podemos isolar o ponto x_1 obtido pela intersecção da reta t com o eixo x, de forma que representa um "zero melhorado" da função e possui o seguinte valor:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$



Método de Newton-Raphson

Para uma função $f(x)$ contínua num intervalo $[a,b]$, que possui apenas uma raiz, e $f'(x)$, bem como $f''(x)$ (derivada segunda da função, obtida a partir da derivada de $f'(x)$), não nulas e que preservam o sinal, podemos definir a função de iteração do método de Newton-Raphson a partir dos passos realizados no item 1, ou seja:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad \text{para } k = 0,1,2,\ldots$$

O método de Newton-Raphson foi desenvolvido por Isaac Newton em 1736 para encontrar o zero do polinômio cúbico $x^3 - 2x - 5$, apesar de Joseph Raphson, em 1697, tê-lo apresentado em seu livro *Analysis*

Com isso, podemos afirmar que o método de Newton-Raphson possui convergência a um zero em (a,b) caso tenhamos:

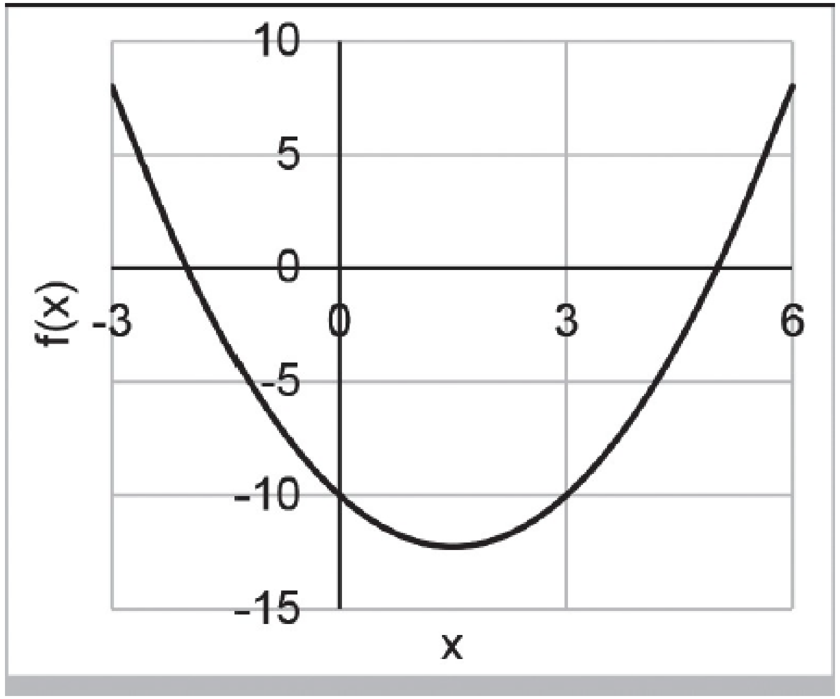
$f(a)\cdot f(b)<0$, $f'(a)\cdot f'(b)>0$ e $f''(a)\cdot f''(b)>0$.

Uma função pode ter mais de um zero. Por exemplo, lembremos de um polinômio de grau 2 que pode ter duas raízes reais iguais, distintas ou complexas, mas sempre duas raízes. Assim, de acordo com a estimativa inicial utilizada, o método de Newton-Raphson convergirá para um determinado zero. Em virtude disso, em um intervalo (a,b), podemos observar as seguintes situações, conforme pondera Lobão ([s.d.]):

- Se $f(a)\cdot f(b)>0$, existe um número par de raízes reais ou não há raízes reais em (a,b).
- Se $f(a)\cdot f(b)<0$, existe um número ímpar de raízes reais em (a,b).
- Se $f'(a)\cdot f'(b)>0$, o comportamento da função em (a,b) é apenas decrescente ou crescente, logo não se alterna.
- Se $f'(a)\cdot f'(b)<0$, a função terá ora um comportamento crescente, ora decrescente.
- Se $f''(a)\cdot f''(b)>0$, a concavidade não se altera em (a,b).
- Se $f''(a)\cdot f''(b)<0$, a concavidade se modifica em (a,b).

Vamos verificar como podemos obter o zero de $f(x) = x^2 - 3x - 10$ pelo método de Newton-Rapshon. Utilizaremos 4 casas decimais com a técnica do arredondamento e admitiremos como critério de parada um erro inferior a 0,002, isto é, $|x_{k+1} - x_k| < 0{,}002$. Para facilitar a explanação, esboçamos o gráfico da função em análise:

Figura 1.15 | Gráfico de $f(x) = x^2 - 3x - 10$



Fonte: elaborada pela autora.

condições necessárias para a convergência do método são satisfeitas. Iniciaremos o procedimento iterativo com $x_0 = 6$, as demais etapas seguem os passos:

1º) Cálculo de x_1: $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) = 6 - 8/9 = 5{,}1111$,

$|x_1 - x_0| = |6 - 5{,}1111| = 0{,}8889$

2º) Cálculo de x_2:

$$x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1) = 5{,}1111 - 0{,}7901/7{,}2222 = 5{,}0017,$$

$$|x_2 - x_1| = |5{,}1111 - 5{,}0017| = 0{,}1094$$

3º) Cálculo de x_3:

$$x_3 = x_2 - f(x_2)/f'(x_2) = 5{,}0017 - 0{,}0000/7{,}0000 = 5{,}0000,$$

$|x_3 - x_2| = |5{,}0017 - 5{,}0000| = 0{,}0017$. Como o critério de parada estipulado foi $|x_{k+1} - x_k| < 0{,}002$, e $|x_3 - x_2| < 0{,}002$, então temos que um zero de $f(x)$ é 5,0000. Caso seja desejado obter o outro zero da função, é necessário estipular outro chute inicial, por exemplo -6.

Resumidamente, temos os resultados organizados na Tabela 1.8.

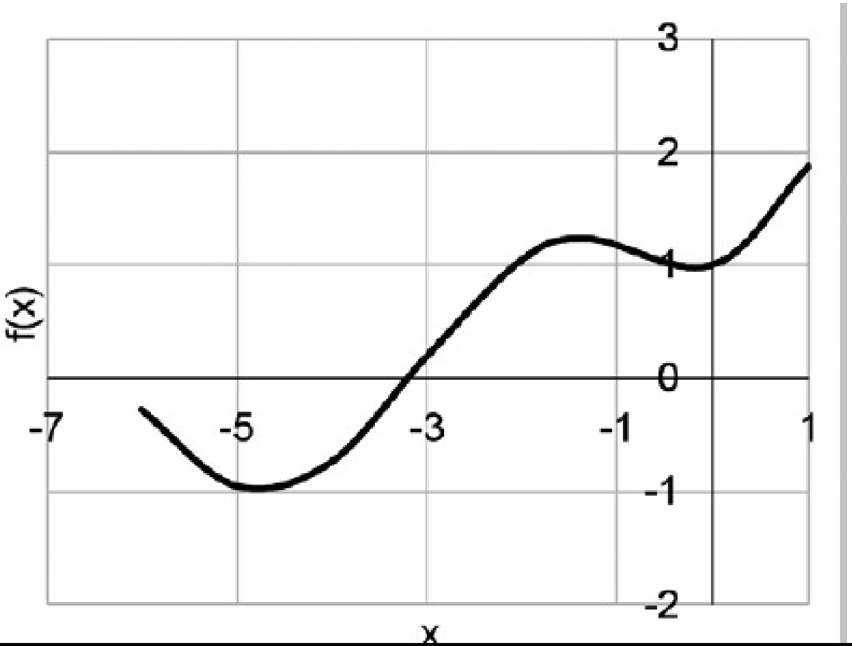
Tabela 1.8 | Resultados do método Newton-Raphson

Passo	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
1	6	8	9
2	5,1111	0,7901	7,2222
3	5,0017	0,0120	7,0034
4	5,0000	-	-

É importante mencionar que o método de Newton-Raphson não é capaz de determinar o zero desejado de uma função se, para um dado, x_n, $f'(x_n) \cong 0$, pois, na função de iteração, a derivada da função é o denominador, e a divisão de um número por outro muito próximo a zero resulta em um número muito grande, o que inviabiliza a convergência na região de interesse. Vamos verificar isso no caso de $f(x) = \exp(x) - sen(x)$ com $x_0 = -1,3$. Na Figura

1.16, temos que o zero mais próximo a essa estimativa inicial está contido no intervalo $[-5,-3]$. Contudo, se aplicássemos o referido procedimento numérico, encontraríamos como zero -251,327, efetuando-se os cálculos com três casas decimais e adotando como critério de convergência $|x_{k+1} - x_k| < 0,1$.

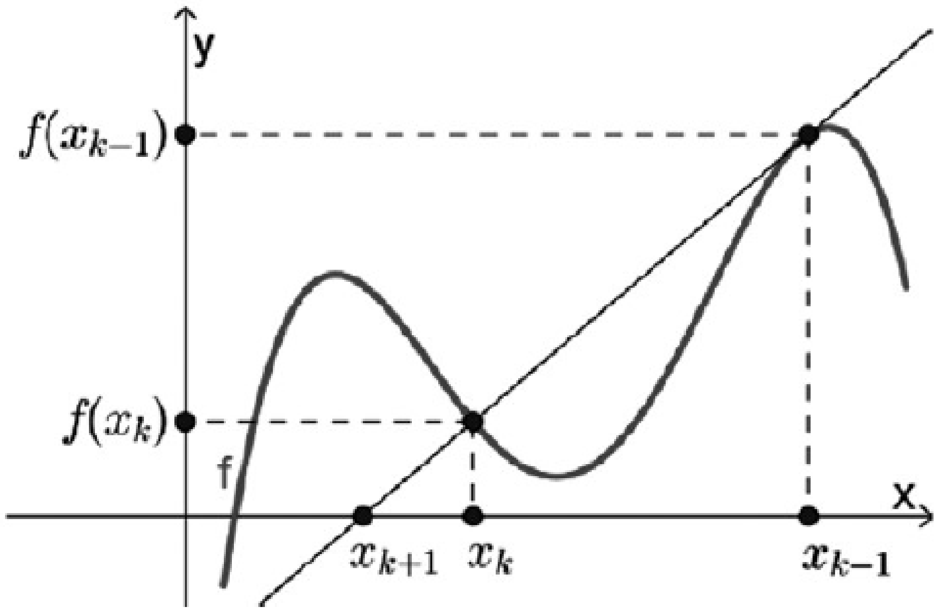
Figura 1.16 | Gráfico de $f(x) = \exp(x) - sen(x)$

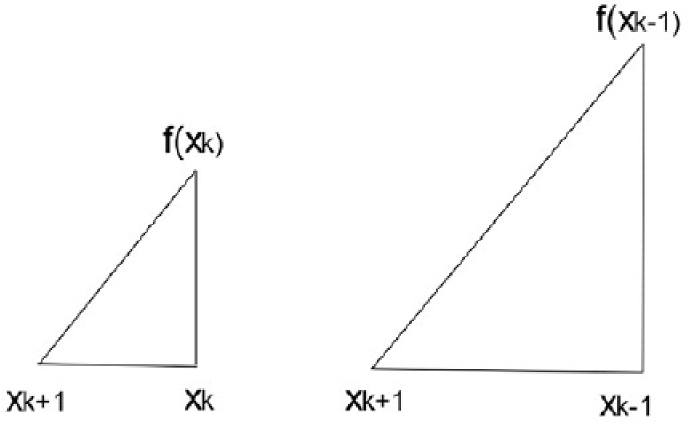


Interpretação geométrica do método da Secante

Uma desvantagem do uso do método de Newton-Raphson é a necessidade de determinar a derivada de uma função, que pode ser uma tarefa dificultosa ou inconveniente de se avaliar em um determinado ponto. Podemos driblar esse impasse com a seguinte estratégia: traçar uma reta secante em dois pontos de coordenadas: $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ e $(x_k, f(x_k))$. O prolongamento dessa reta cruza com o eixo x, originando o ponto x_{k+1}, como ilustra a Figura 1.17.

Figura 1.17 | Interpretação geométrica do método da Secante





Fonte: elaborada pela autora.

A partir da técnica de semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{f(x_{k-1})}{f(x_k)} = \frac{x_{k-1} - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}$$

Rearranjando a equação, obtemos a função de iteração do método da Secante, cujas estimativas iniciais são x_{k-1} e x_k, sendo que o procedimento é repetido até que um critério de parada, semelhante ao apresentado no método de Newton-Raphson, seja alcançado:

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \text{ para k=1,2,3,...}$$

Vamos analisar a sequência de cálculo para determinar o zero de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 5$ pelo método da Secante. Necessitaremos de dois chutes iniciais – estipularemos os valores 2 e 2,5 –, e utilizaremos três casas decimais com a técnica do arredondamento e critério de parada um erro relativo menor ou igual a 0,003, isto é, $\left|\dfrac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+1}}\right| \leq 0{,}003$, o qual se apresenta como uma alternativa para a definição da convergência do método, além do erro absoluto utilizado no exemplo anterior.

A primeira iteração é calculada por: $x_2 = \dfrac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} =$

$$= \frac{2 \cdot (2{,}5^3 - 2 \cdot 2{,}5^2 + 2 \cdot 2{,}5 - 5) - 2{,}5 \cdot (2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 5)}{(2{,}5^3 - 2 \cdot 2{,}5^2 + 2 \cdot 2{,}5 - 5) - (2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 5)} = 2{,}121,$$

sendo $\left|\dfrac{x_2 - x_1}{x_2}\right| = 0{,}179 > 0{,}003$, logo, devemos prosseguir com as iterações.

A segunda iteração é expressa por: $x_3 = \dfrac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} =$

$$= \frac{2{,}5 \cdot (2{,}121^3 - 2 \cdot 2{,}121^2 + 2 \cdot 2{,}121 - 5) - 2{,}121 \cdot (2{,}5^3 - 2 \cdot 2{,}5^2 + 2 \cdot 2{,}5 - 5)}{(2{,}5^3 - 2 \cdot 2{,}5^2 + 2 \cdot 2{,}5 - 5) - (2{,}121^3 - 2 \cdot 2{,}121^2 + 2 \cdot 2{,}121 - 5)}$$

$= 2{,}143$, sendo $\left|\dfrac{x_3 - x_2}{x_3}\right| = 0{,}01 > 0{,}003$.

Na terceira iteração, encontraremos $x_4 = 2{,}151$ e $\left|\dfrac{x_4 - x_3}{x_4}\right| = 0{,}003$, sendo que esse erro relativo é o critério de parada imposto no enunciado deste exemplo. Assim, um zero de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 5$ determinado pelo método da Secante é 2,151.

```python
# prompt: encontrar zero da funçãoa través do método de newton-raphson e apresentar tabela contendo x, f e f'.

def f(x):
  # Defina sua função aqui
  return x**3 - x**2 - 4

def df(x, h=0.001):
  return (f(x + h) - f(x)) / h

def newton_raphson(x0, tolerancia=1e-3, max_iteracoes=100):
  x = x0
  tabela = []
  for i in range(max_iteracoes):
    fx = f(x)
    dfx = df(x)
    tabela.append([x, fx, dfx])
    x_novo = x - fx / dfx
    if abs(x_novo - x) < tolerancia:
      tabela.append([x_novo, f(x_novo), df(x_novo)])
      print("Zero encontrado em x =", x_novo)
      break
    x = x_novo
  return tabela
```

```python
# Exemplo de uso
x0 = 5 # Chute inicial
tabela = newton_raphson(x0)

# Imprimindo a tabela
print("-" * 30)
print("x\t\tf(x)\t\tf'(x)")
print("-" * 30)
for linha in tabela:
  print("{:.6f}\t{:.6f}\t{:.6f}".format(*linha))
```

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# prompt: a partir do código anterior plotar a função e asa linhas tangente

# ... (código anterior)

# Plotando a função e as linhas tangentes
x_range = np.linspace(-3, 3, 100)
y_range = f(x_range)
plt.plot(x_range, y_range, label='f(x)')

for linha in tabela:
  x, fx, dfx = linha
  tangente_y = dfx * (x_range - x) + fx
  plt.plot(x_range, tangente_y, '--', color='gray')
  plt.scatter(x, fx, color='red')

plt.legend()
plt.title('Método de Newton-Raphson')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.grid(True)
plt.show()
```

200 PTS. ENCONTRE AS RAÍZES DA EQUAÇÃO

$$SEN(X^3) - 2X + 5$$

NO INTERVALO DE [-10 , 10]

COMPARE O NÚMERO DE INTERAÇÕES NECESSÁRIAS PARA OBTER A SOLUÇÃO PELOS MÉTODOS DA BISSEÇÃO E NEWTON-RAPHSON.

ENVIAR PDF COM SOLUÇÃO ATÉ AS 22:00H PARA
rodrigo.leao@kroton.com.br
