Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 3y = 11 \end{cases}$$

a) Escreva o sistema na forma matricial $A\vec{x} = \vec{b}$.

b) Resolva o sistema utilizando o **método de eliminação de Gauss**.

a) Forma matricial:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Então:

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

b) Eliminação de Gauss:

Montar a matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 11 \end{array}\right]$$

Passo 1: Zerar o elemento abaixo do 2 (linha 2, coluna 1):

- $L_2 \leftarrow L_2 - 2 \cdot L_1$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Passo 2: Substituição reversa

- Da segunda linha: $y = 1$
- Da primeira linha: $2x + 1 = 5 \Rightarrow x = 2$

Dado o sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x + 6y = 24 \end{cases}$$

a) Calcule o determinante da matriz dos coeficientes.

b) O sistema possui solução única? Justifique.

c) Que operação elementar **preserva a solução** do sistema?

a) Matriz dos coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{Det}(A) = 1 \cdot 6 - 3 \cdot 2 = 6 - 6 = 0$$

b) Como o determinante é **zero**, o sistema **não possui solução única**. Ele é:

- **indeterminado** (infinitas soluções), ou
- **inconsistente** (sem solução), dependendo do vetor b

Neste caso:

- A segunda equação é múltipla da primeira ⇒ **sistema indeterminado**

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 0x + y + 4z = 13 \\ 5x + 6y + 0z = 23 \end{cases}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ 13 \\ 23 \end{bmatrix}$$

Passo 3: Multiplicar A^{-1} por $\mathbf{b}$

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 13 \\ 23 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Passo 3: Multiplicar A^{-1} por $\mathbf{b}$

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 13 \\ 23 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 13 \\ 23 \end{bmatrix}$$

- $x = -24 \times 14 + 18 \times 13 + 5 \times 23 = -336 + 234 + 115 = 13$
- $y = 20 \times 14 - 15 \times 13 - 4 \times 23 = 280 - 195 - 92 = -7$
- $z = -5 \times 14 + 4 \times 13 + 1 \times 23 = -70 + 52 + 23 = 5$

Solução final:

$$\boxed{\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot (-1 \cdot -1 - 1 \cdot 2) - 1 \cdot (2 \cdot -1 - 1 \cdot 1) + 1 \cdot (2 \cdot 2 - (-1) \cdot 1)$$

$$\det(A) = -1 + 3 + 5 = \boxed{7}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Zerar o elemento da 2ª linha (posição 2,1):

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -(2 \times 1) & -1 - 2 \times 1 & 1 - 2 \times 1 & 3 - 2 \times 6 \end{bmatrix} = [0,\ -3,\ -1,\ -9]$$

Zerar o elemento da 3ª linha (posição 3,1):

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$[1 - 1,\ 2 - 1,\ -1 - 1,\ 2 - 6] = [0,\ 1,\ -2,\ -4]$$

Agora temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right]$$

Queremos zerar o 1 na linha 3. Para isso:

$$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{3} L_2$$

$$[0,\ 1,\ -2,\ -4] + \frac{1}{3}[0,\ -3,\ -1,\ -9] = [0,\ 0,\ -2.333,\ -7]$$

Arredondando:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & -7 \end{array}\right]$$

3ª equação:

$$-\frac{7}{3}z = -7 \Rightarrow z = 3$$

2ª equação:

$$-3y - 1z = -9 \Rightarrow -3y - 3 = -9 \Rightarrow y = 2$$

1ª equação:

$$x + y + z = 6 \Rightarrow x + 2 + 3 = 6 \Rightarrow x = 1$$

Você coletou a temperatura de um líquido em diferentes instantes:

Tempo (min)	Temperatura (°C)
2	18
5	30

Sabendo que a variação de temperatura no intervalo é aproximadamente linear, qual é a **temperatura estimada no instante t = 3 minutos**, usando **interpolação linear**?

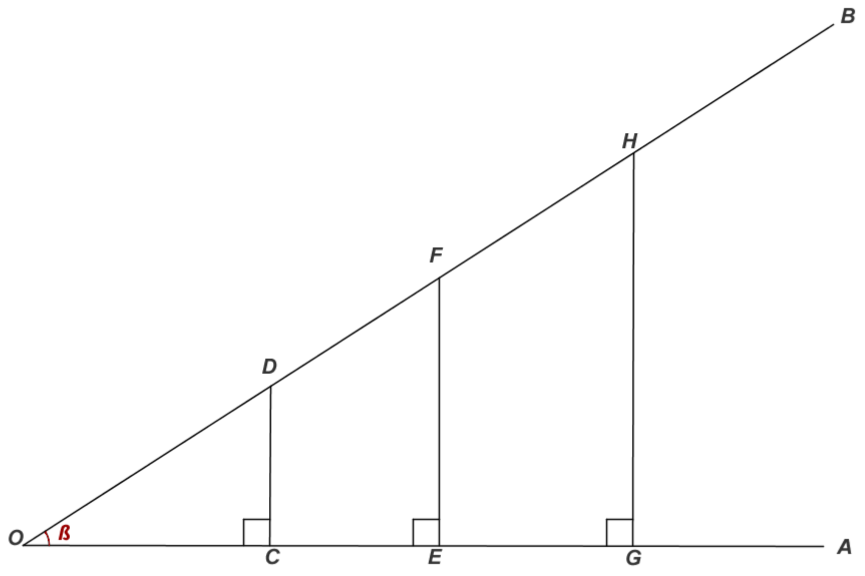
A) 20 °C

B) 22 °C

C) 24 °C

D) 26 °C

$$f(x) = y_0 + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \cdot (y_1 - y_0)$$



Usando interpolação linear:

$$f(3) = 18 + \frac{(3-2)}{(5-2)} \cdot (30 - 18) = 18 + \frac{1}{3} \cdot 12 = 18 + 4 = \boxed{22\ ^{\circ}\mathrm{C}}$$

Considere os pontos:

$$(1,1),\quad (2,4),\quad (3,9)$$

Construa o **polinômio interpolador de grau 2** que passa por esses pontos.

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

Monte o sistema usando os pontos:

1. $a(1)^2 + b(1) + c = 1 \Rightarrow a + b + c = 1$
2. $a(2)^2 + b(2) + c = 4 \Rightarrow 4a + 2b + c = 4$
3. $a(3)^2 + b(3) + c = 9 \Rightarrow 9a + 3b + c = 9$

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 4 \\ 9a + 3b + c = 9 \end{cases}$$

Eliminando c:

- Subtrair a 1ª da 2ª: $(4a + 2b + c) - (a + b + c) = 3a + b = 3$
- Subtrair a 2ª da 3ª: $(9a + 3b + c) - (4a + 2b + c) = 5a + b = 5$

Agora:

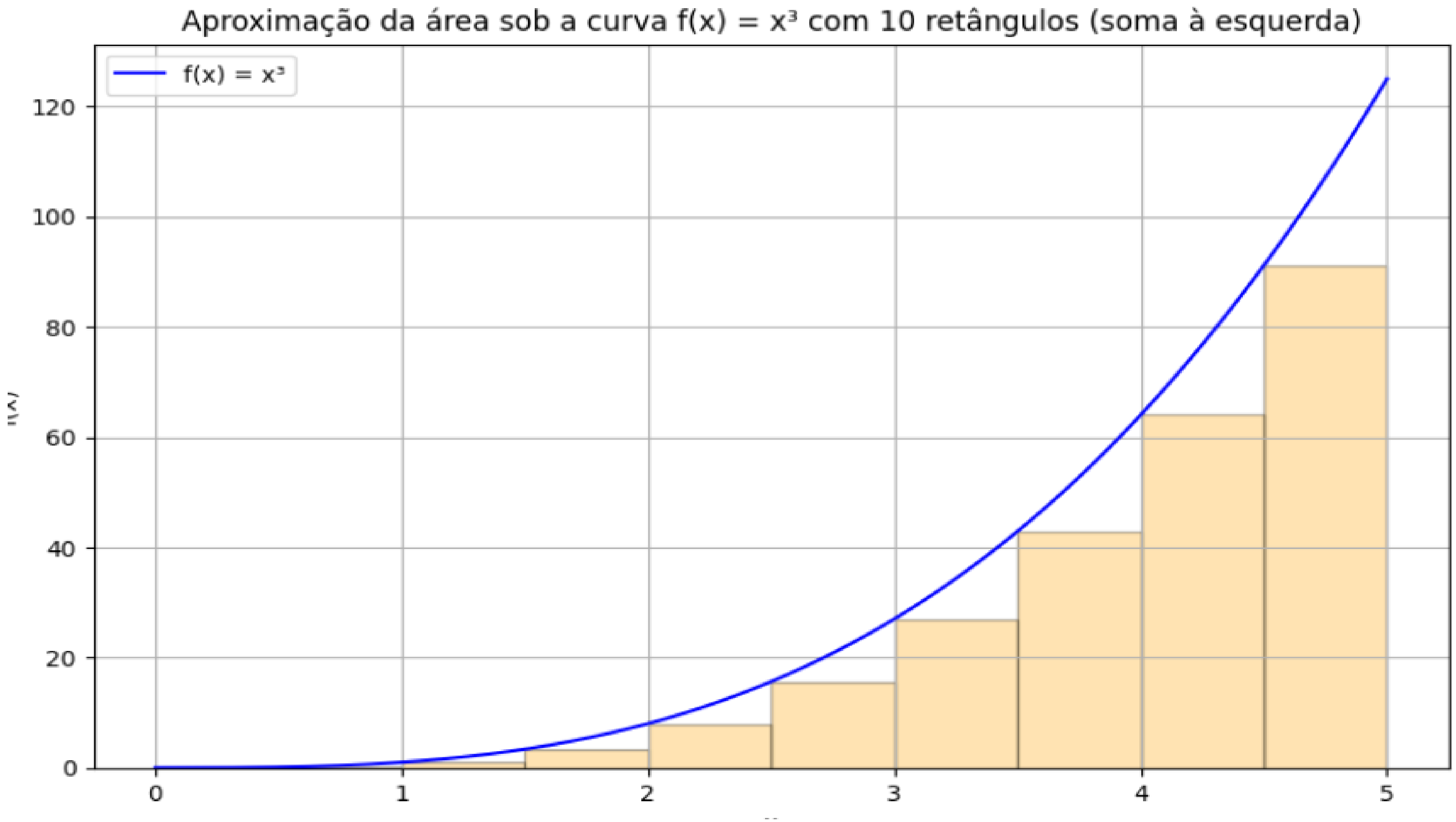
$$\begin{cases} 3a + b = 3 \\ 5a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow (5a + b) - (3a + b) = 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

Substituindo:

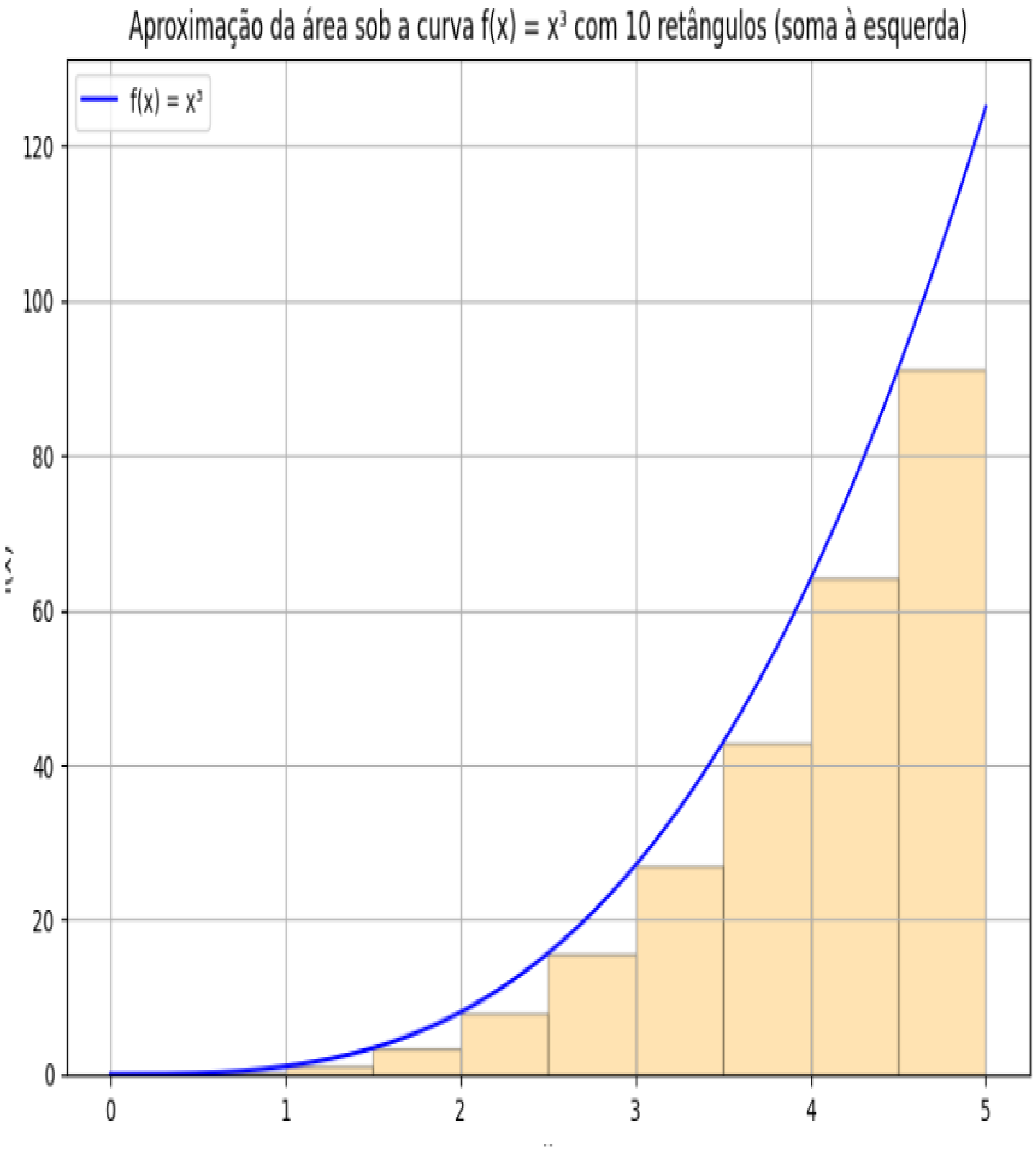
- $3(1) + b = 3 \Rightarrow b = 0$
- $a + b + c = 1 \Rightarrow 1 + 0 + c = 1 \Rightarrow c = 0$

$$P(x) = x^2$$

calcular a área sob a curva da função $f(x) = x^3$ no intervalo $[0, 5]$



i	x_i	$f(x_i) = (x_i)^3$	$A_i = f(x_i) \times 0.5$
0	0.0	$0.0^3 = 0.0$	$0.0 \times 0.5 = 0.0$
1	0.5	$0.5^3 = 0.125$	$0.125 \times 0.5 = 0.0625$
2	1.0	$1.0^3 = 1.0$	$1.0 \times 0.5 = 0.5$
3	1.5	$1.5^3 = 3.375$	$3.375 \times 0.5 = 1.6875$
4	2.0	$2.0^3 = 8.0$	$8.0 \times 0.5 = 4.0$
5	2.5	$2.5^3 = 15.625$	$15.625 \times 0.5 = 7.8125$
6	3.0	$3.0^3 = 27.0$	$27.0 \times 0.5 = 13.5$
7	3.5	$3.5^3 = 42.875$	$42.875 \times 0.5 = 21.4375$
8	4.0	$4.0^3 = 64.0$	$64.0 \times 0.5 = 32.0$
9	4.5	$4.5^3 = 91.125$	$91.125 \times 0.5 = 45.5625$



Somando as áreas:

$$A = 0 + 0.0625 + 0.5 + 1.6875 + 4 + 7.8125 + 13.5 + 21.4375 + 32 + 45.5625 = 126.5625$$