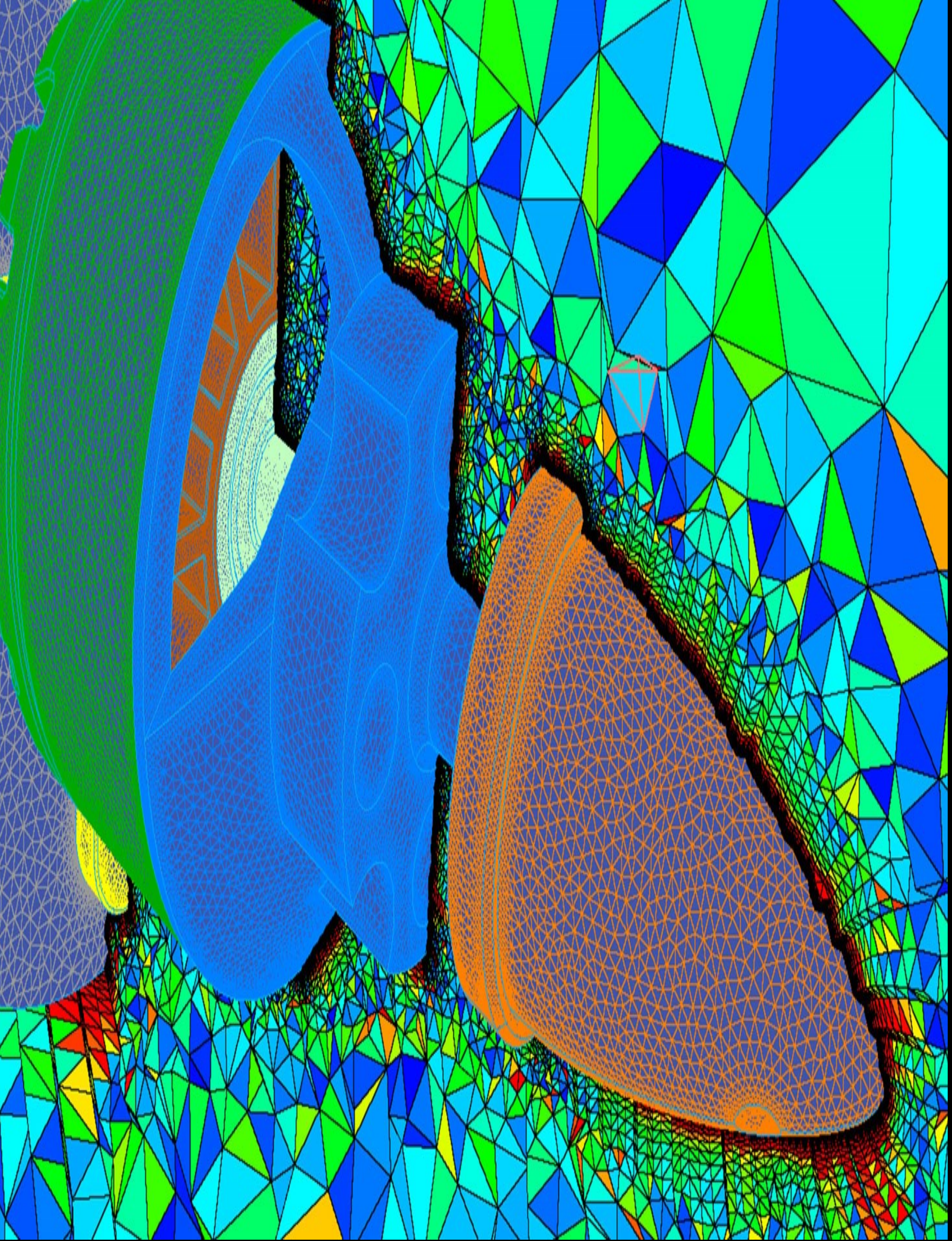


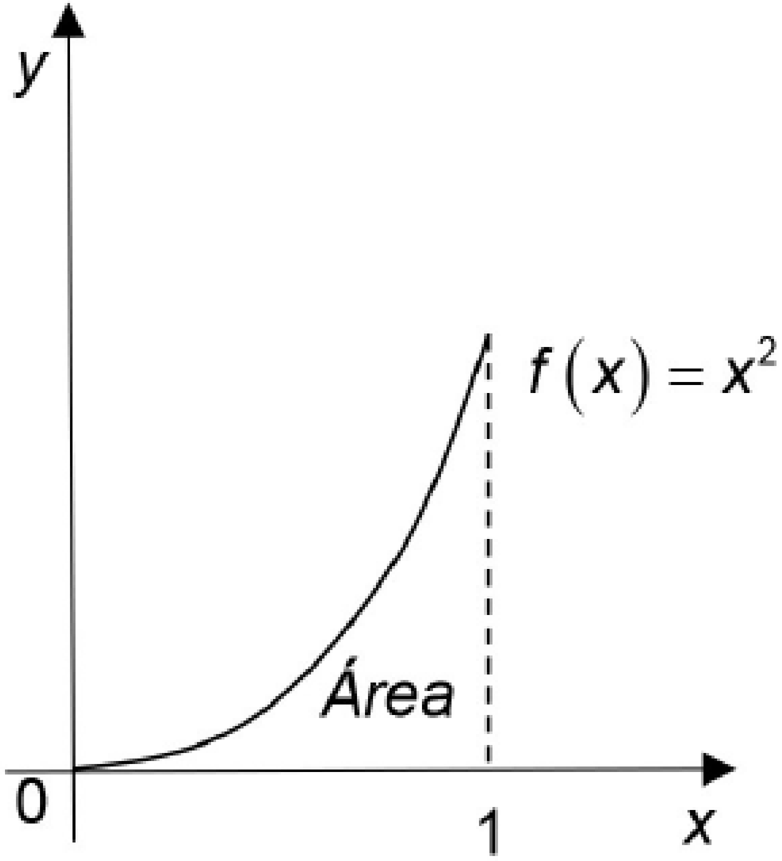
MÉTODO NUMÉRICOS

Aula 5 – Integral

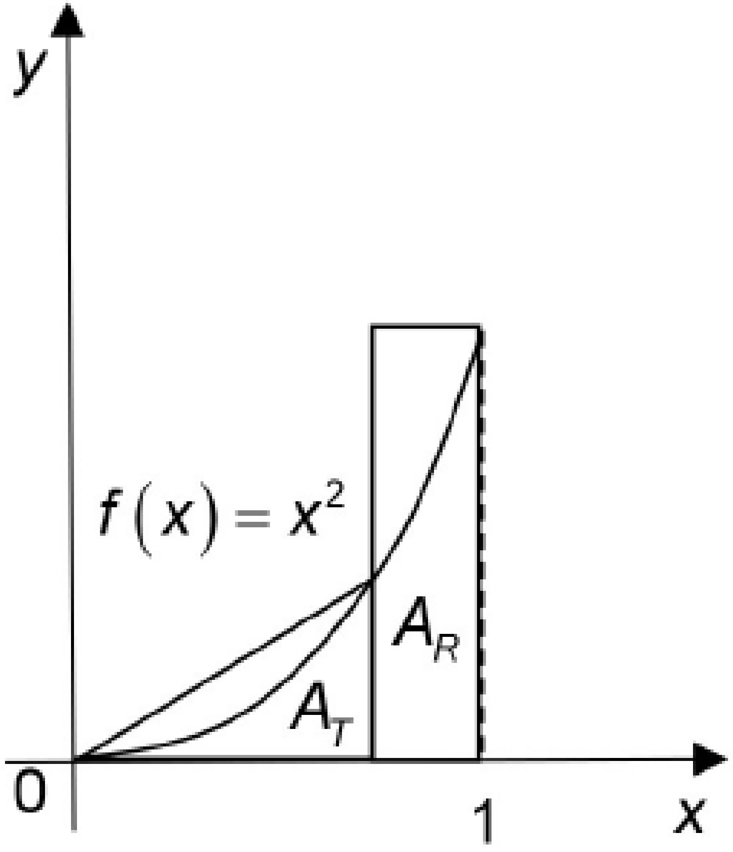
Curso de Ciência da Computação
Dr. Rodrigo Xavier de Almeida Leão
Cientista de Dados

Qual área?

Função parabólica

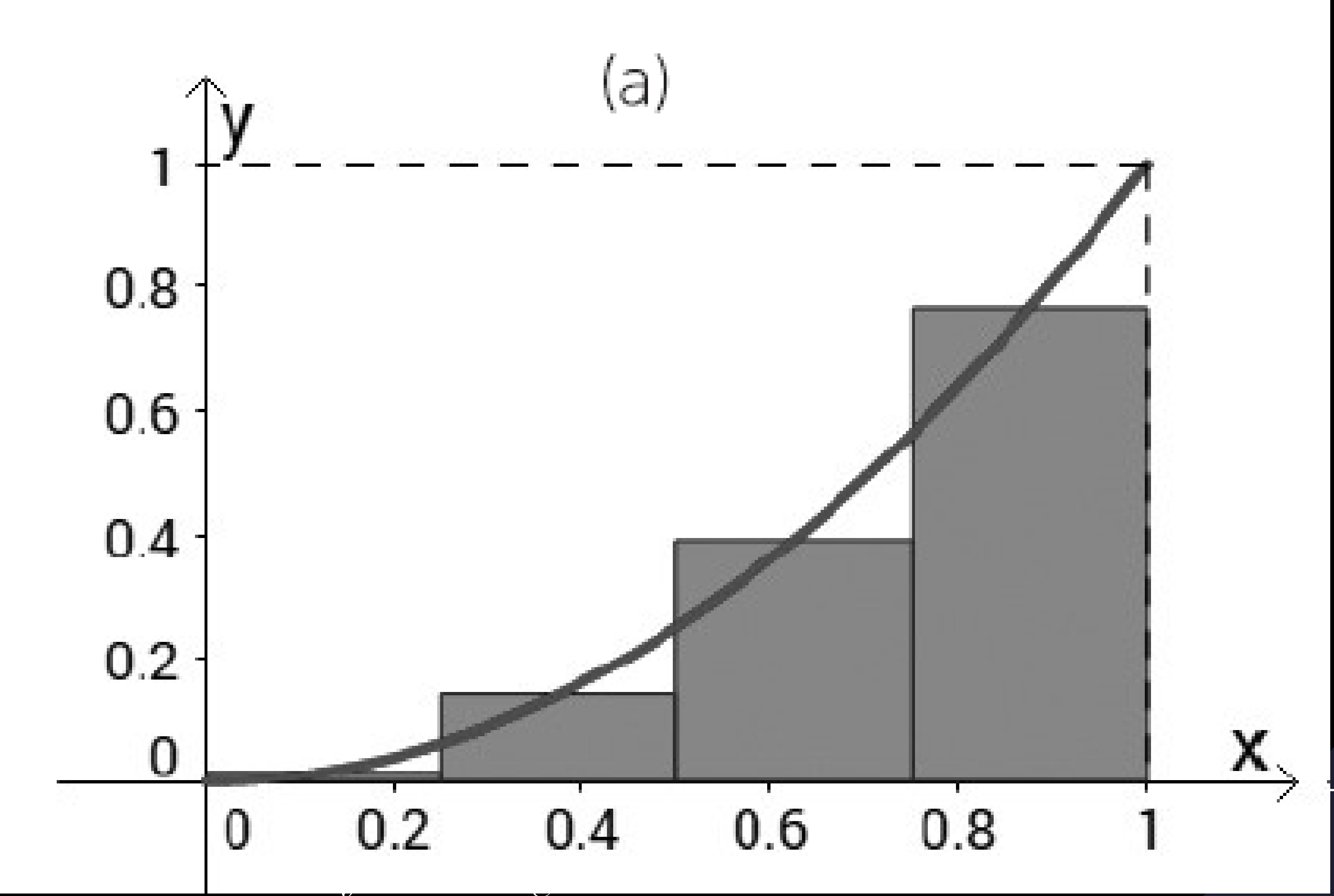


Aproximação da área da parábola



Soma de Riemann

visto na Figura 4.4, cada um desses retângulos tem comprimento da base de $\Delta x = x_{i+1} - x_i = 1/4$ e altura $f\left(x_i^*\right)$, onde $x_i^* = \dfrac{x_{i+1} + x_i}{2}$, logo sua área é obtida pelo produto da base com a altura, $f\left(x_i^*\right)\Delta x$.

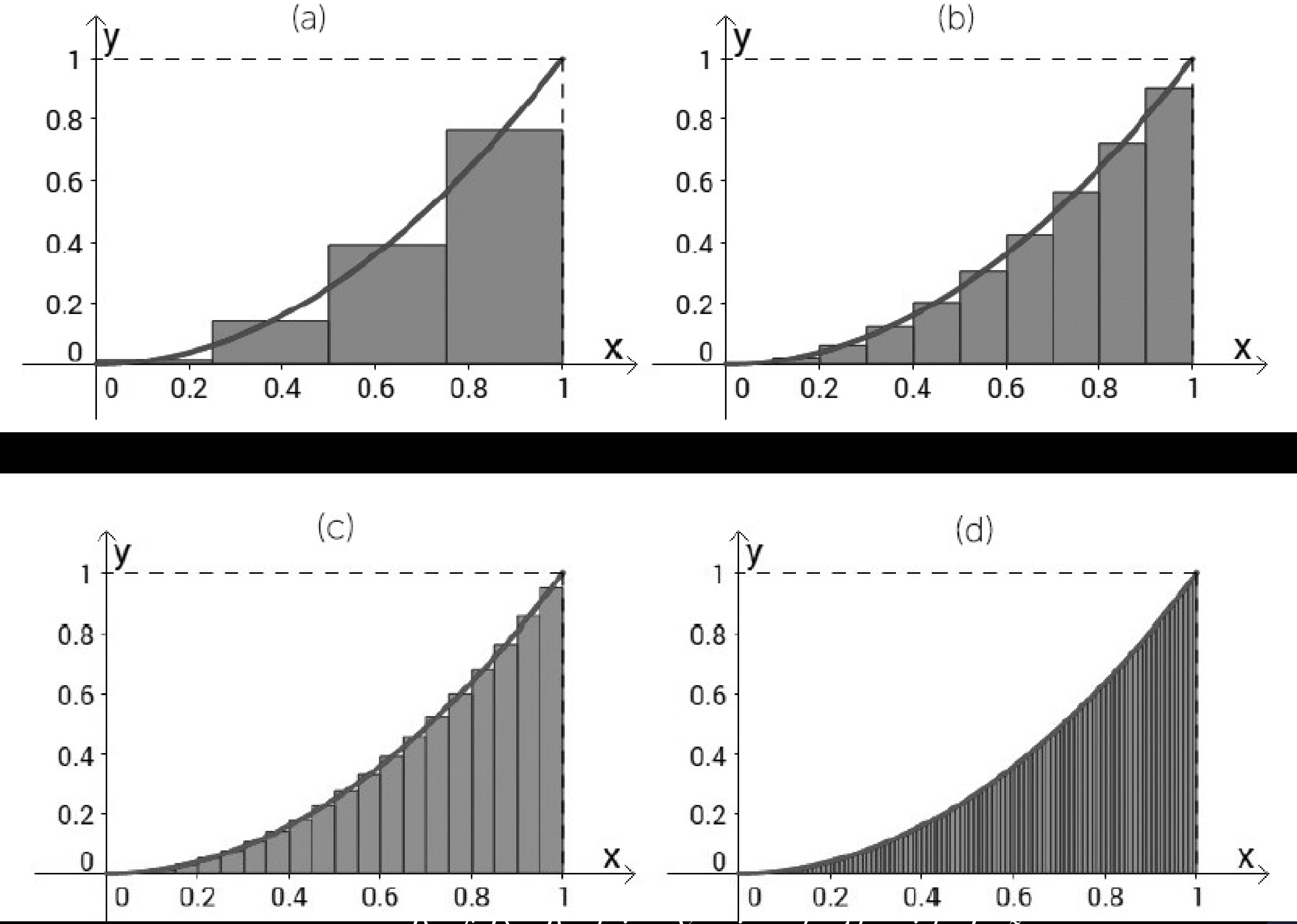


visto na Figura 4.4, cada um desses retângulos tem comprimento da base de $\Delta x = x_{i+1} - x_i = \frac{1}{4}$ e altura $f\left(x_i^*\right)$, onde $x_i^* = \dfrac{x_{i+1} + x_i}{2}$, logo sua área é obtida pelo produto da base com a altura, $f\left(x_i^*\right)\Delta x$. Somando cada uma das parcelas, obtemos uma aproximação para a área que desejamos determinar, assim:

$$\sum_{i=1}^{4} f\left(x_i^*\right)\Delta x = f\left(x_1^*\right)\Delta x + \cdots + f\left(x_4^*\right)\Delta x =$$

$$0,25 \cdot 0,015625 + 0,25 \cdot 0,140625 + 0,25 \cdot 0,390625 + 0,25 \cdot 0,765625 = 0,328125$$

Figura 4.4 | Aproximação inicial: (a) 4 retângulos; (b) 10 retângulos; (c) 20 retângulos; (d) 100 retângulos



```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def calcular_integral_riemann(f, a, b, n):
    """
     Args:
      f: A função a ser integrada.
      a: O limite inferior do intervalo de integração.
      b: O limite superior do intervalo de integração.
      n: O número de retângulos a serem usados na soma.
    """

    delta_x = (b - a) / n  # Largura de cada retângulo
    x_values = np.linspace(a, b, n + 1)  # Valores de x para os retângulos
    y_values = f(x_values)  # Valores de f(x) para os retângulos

    # Soma de Riemann (usando o ponto médio de cada retângulo)
    integral_aproximada = 0
    for i in range(n):
        x_medio = (x_values[i] + x_values[i+1]) / 2
        integral_aproximada += f(x_medio) * delta_x
    return integral_aproximada, x_values, y_values, delta_x

```

```python
# Exemplo de uso:
def f(x):
  return x**2  # Função a ser integrada

a = 0  # Limite inferior
b = 2  # Limite superior
n = 10  # Número de retângulos

integral, x_values, y_values, delta_x = calcular_integral_riemann(f, a, b, n)

print("Integral aproximada:", integral)

# Plotar a função e os retângulos
plt.plot(x_values, y_values, label='f(x)')
for i in range(n):
  plt.bar(x_values[i], f((x_values[i] + x_values[i+1]) / 2),
          width=delta_x, alpha=0.5, align='edge', color='lightblue')

plt.xlabel('x')
plt.ylabel('f(x)')
plt.title('Soma de Riemann para a integral de f(x)')
plt.legend()
plt.show()
```

De maneira análoga, vamos particionar a região abaixo desta mesma curva com 10 e 100 retângulos, como mostra, Figura 4.4, e de modo análogo vamos calcular a área dos retângulos, assim:

$$\sum_{i=1}^{10} f\left(x_i^*\right)\Delta x = f\left(x_1^*\right)\Delta x + \cdots + f\left(x_4^*\right)\Delta x = 0{,}3325$$

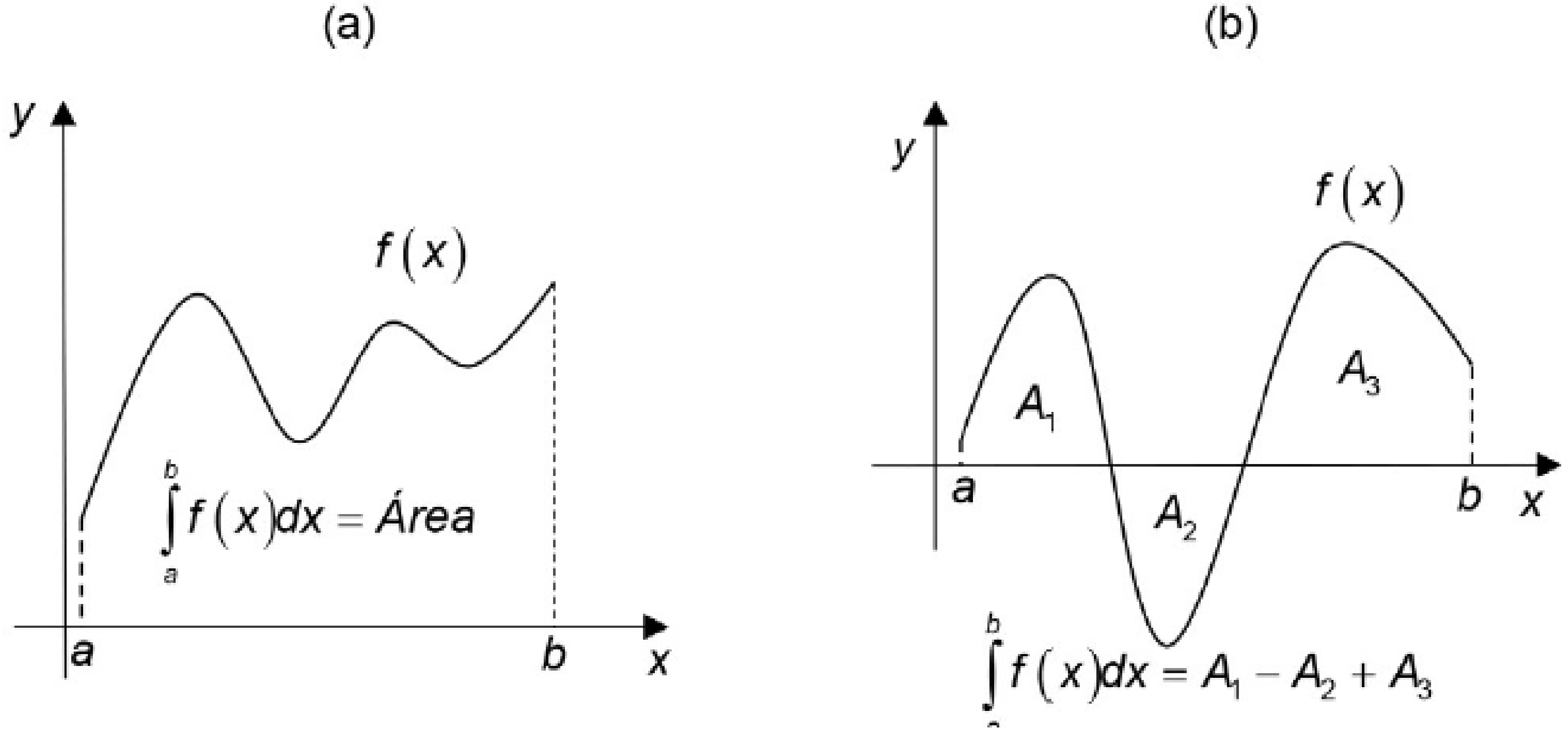
$$\sum_{i=1}^{100} f\left(x_i^*\right)\Delta x = f\left(x_1^*\right)\Delta x + \cdots + f\left(x_4^*\right)\Delta x = 0{,}333325$$

Podemos observar que, à medida que aumentamos o número de retângulos, as aproximações obtidas foram melhorando, e elas tendem a convergir para o valor $\frac{1}{3} \cong 0{,}33333\ldots$. De posse desse conceito geométrico, vamos definir agora a soma de Riemann para a integral de uma função.

Seja $f(x)$ uma função contínua definida no intervalo $a \leq x \leq b$; se dividirmos o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais a $\Delta x = \dfrac{(b-a)}{n}$, tomarmos $a = x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n = b$ como os extremos desses subintervalos e escolhermos pontos $x_1^*,\ x_2^*,\ \ldots,\ x_n^*$ no interior desses subintervalos de forma que x_i^* está no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$; então, a integral de $f(x)$ de a até b é:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

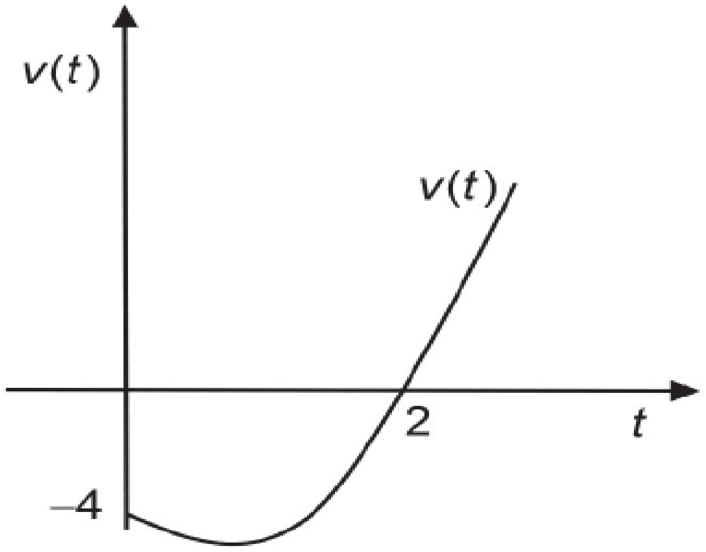
Figura 4.5 | Intepretação geométrica da integral: (a) f(x) > 0; (b) f(x) troca de sinal em [a,b]



Uma partícula se move em linha reta e sua velocidade em função do tempo assume a forma $v(t) = 2t^2 - 2t - 4$. Nesse contexto, determine:

a) O deslocamento da partícula entre os instantes de tempo $0 \leq t \leq 4$.

b) A distância percorrida pela partícula entre os instantes de tempo $0 \leq t \leq 4$.



Fonte: elaborada pelo autor.

O deslocamento da função é obtido através da integral $\int_0^4 \left(2t^2 - 2t - 4\right) dt$, ou seja, consiste na área líquida definida pela função; assim, temos:

$$\int_0^4 \left(2t^2 - 2t - 4\right) dt = \left[2 \cdot \frac{t^3}{3} - \frac{2t^2}{2} - 4t\right]_0^4$$

$$= \left[2 \cdot \frac{4^3}{3} - \frac{2 \cdot 4^2}{2} - 4 \cdot 4\right] - \left[2 \cdot \frac{0^3}{3} - \frac{2 \cdot 0^2}{2} - 4 \cdot 0\right] = \frac{32}{3}$$

Ao passo que a distância total percorrida consiste na área total, assim:

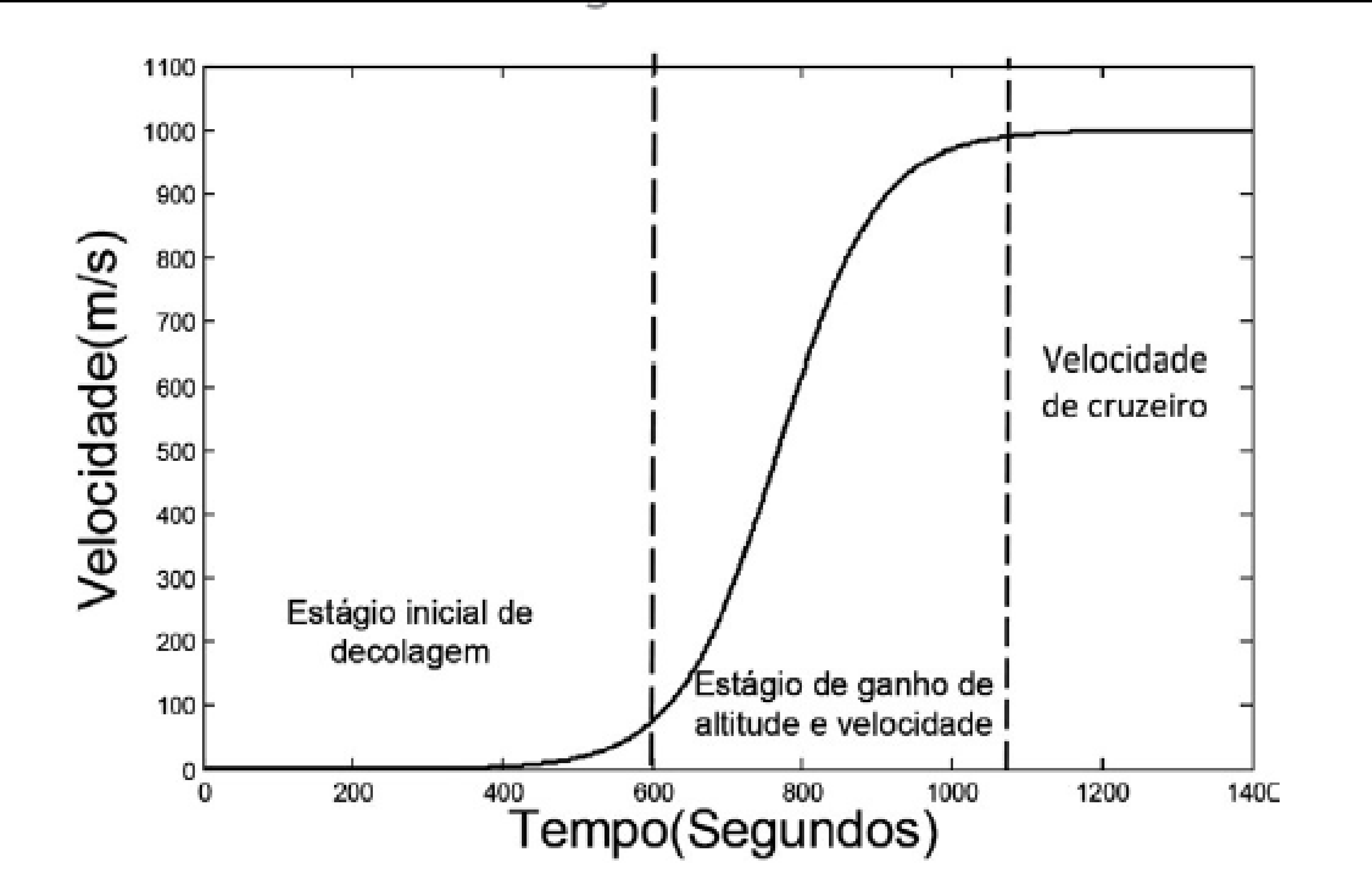
$$\int_0^4 \left|2t^2 - 2t - 4\right| dt = \int_0^2 -\left(2t^2 - 2t - 4\right) dt + \int_2^4 \left(2t^2 - 2t - 4\right) dt =$$

$$-\left[2\frac{t^3}{3} - 2\frac{t^2}{2} - 4t\right]_0^2 + \left[2\frac{t^3}{3} - 2\frac{t^2}{2} - 4t\right]_2^4 = 24$$

Neste ponto, reunimos todo o ferramental teórico matemático e computacional necessário para iniciarmos a primeira etapa do projeto aeroespacial empreendido pela TTGTTech. Nesta fase, é sua função determinar a distância percorrida pelo foguete até que ele atinja a velocidade de cruzeiro. Os dados de que você dispõe foram fornecidos pela equipe de propulsão e consistem na função que descreve o perfil de velocidade, dado no Quadro 4.1, e a identificação de cada um dos estágios de voo, como mostra a Figura 4.7.

Quadro 4.1 | Perfil de velocidade

$v(t) = \dfrac{N_0 \cdot r}{r + (N_0 - r) \cdot e^{-at}}$	Parâmetros da Equação $r = 0{,}01$ arrasto aerodinâmico. $a = 0{,}015$, taxa de aceleração. $N_0 = 1000$, combustível necessário para atingir a velocidade de cruzeiro.



$$v(t) = \frac{N_0 \cdot r}{r + (N_0 - r) \cdot e^{-at}}$$

Parâmetros da Equação

$r = 0,01$ arrasto aerodinâmico.

$a = 0,015$, taxa de aceleração.

$N_0 = 1000$, combustível necessário para atingir a velocidade de cruzeiro.

COMPARAR A DIFERENÇA DOS RESULTADOS PARA N= 5, 10, 50 e 100

Prof. Dr. Rodrigo Xavier de Almeida Leão

Uma aeronave, ao se aproximar da pista de pouso de um aeroporto, inicia os procedimentos de descida. Por questões de segurança, a redução de velocidade durante esse procedimento deve ser feita (hipoteticamente) seguindo a lei $v(t) = v_0 e^{-kt}$, onde v_0 é a velocidade que a aeronave se encontra ao receber a autorização para o pouso e k é a taxa de redução de velocidade determinada pela torre de controle. De posse dessas informações, determine a distância que a aeronave se encontrava do aeroporto ao receber a autorização para o pouso. Em seus cálculos, utilize tanto a estratégia computacional aprendida anteriormente (faça $n = 10$) quanto a forma analítica. Ao final, compare os resultados.

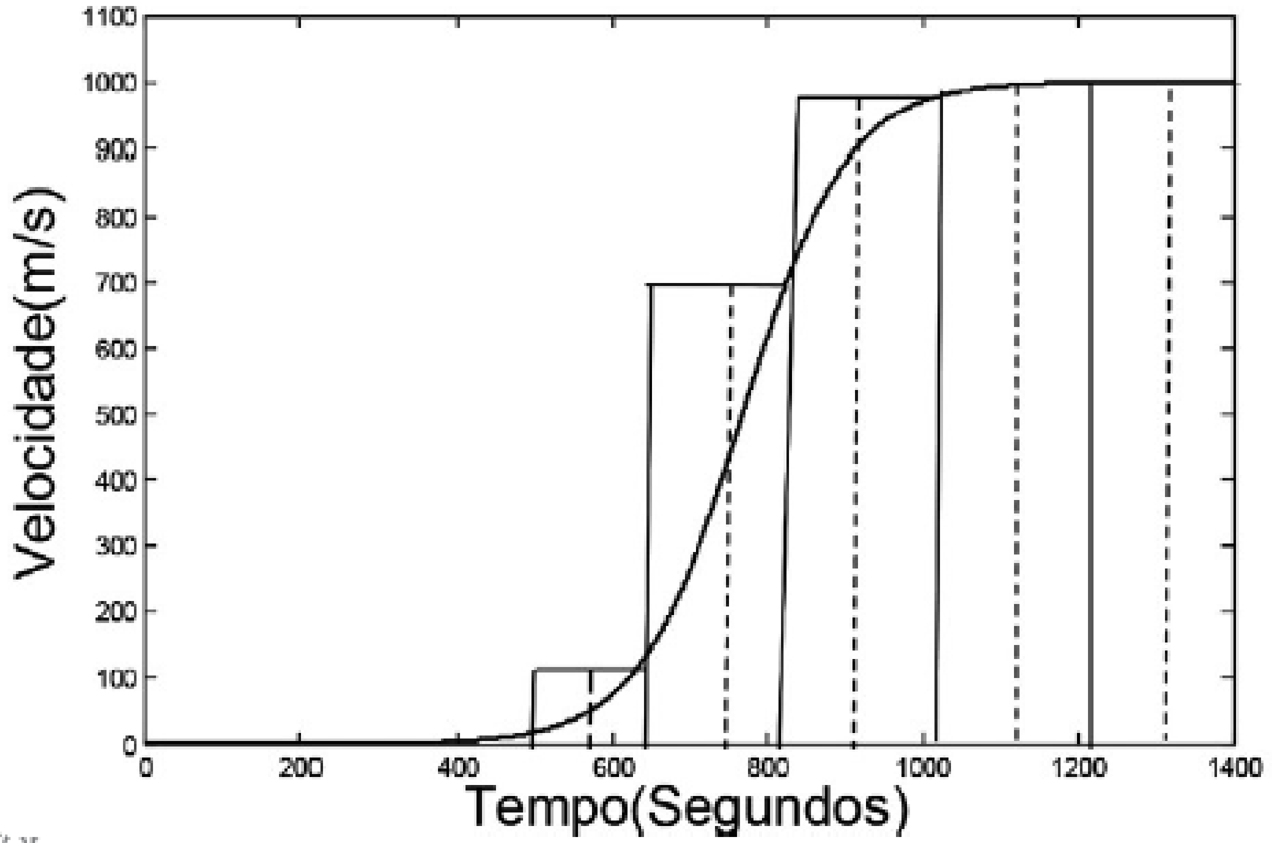
Dados:

Velocidade inicial: $v_0 = 200\, m/s$

Taxa de desaceleração: $k = 0{,}005\, m/s^2$

Tempo total de descida: $t = 1000 s$

Perfil de velocidade de descida



a pelo autor.

$$v(t) = v_0 e^{-kt}$$

Dados:

Velocidade inicial: $v_0 = 200\, m/s$

Taxa de desaceleração: $k = 0{,}005\, m/s^2$

Tempo total de descida: $t = 1000 s$

Regra dos trapézios generalizada

Ao aproximarmos a integral de uma função $f(x)$ pelo método dos trapézios, duas caraterísticas dessa estratégia merecem nossa atenção, a saber: se a função $f(x)$ apresentar um comportamento não linear e se $h = x_2 - x_1$ for muito maior do que 1, o método fornece resultados muito ruins, o que inviabiliza o seu uso prático. Dessa forma, uma ideia intuitiva seria utilizar não apenas um trapézio, mas vários deles a fim de conseguirmos uma melhor aproximação no cálculo da integral de $f(x)$. A Figura 4.22 ilustra a aproximação realizada por oito trapézios para a área abaixo da curva definida pela função $f(x)$.

Figura 4.22 | Interpretação geométrica da regra dos trapézios generalizada