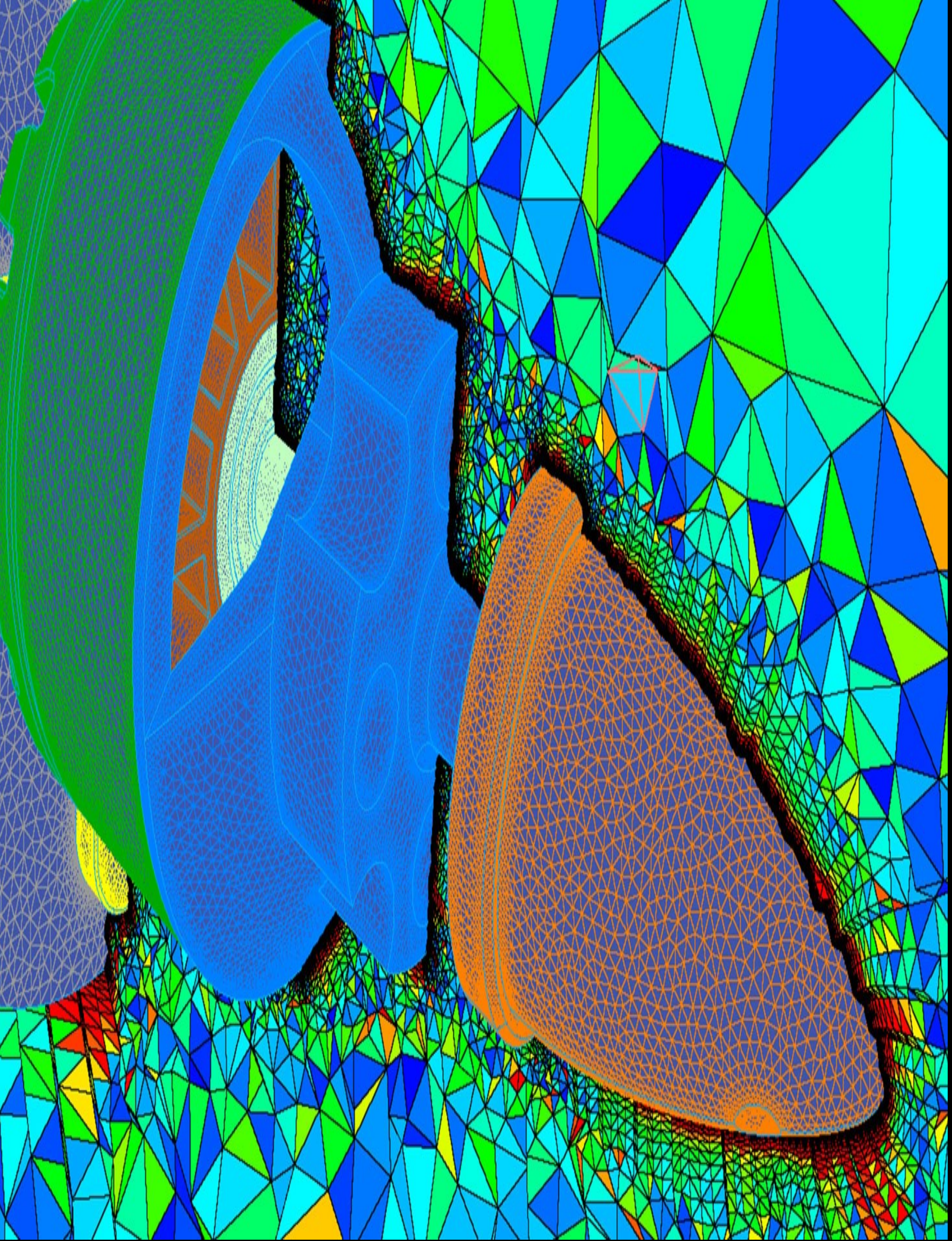
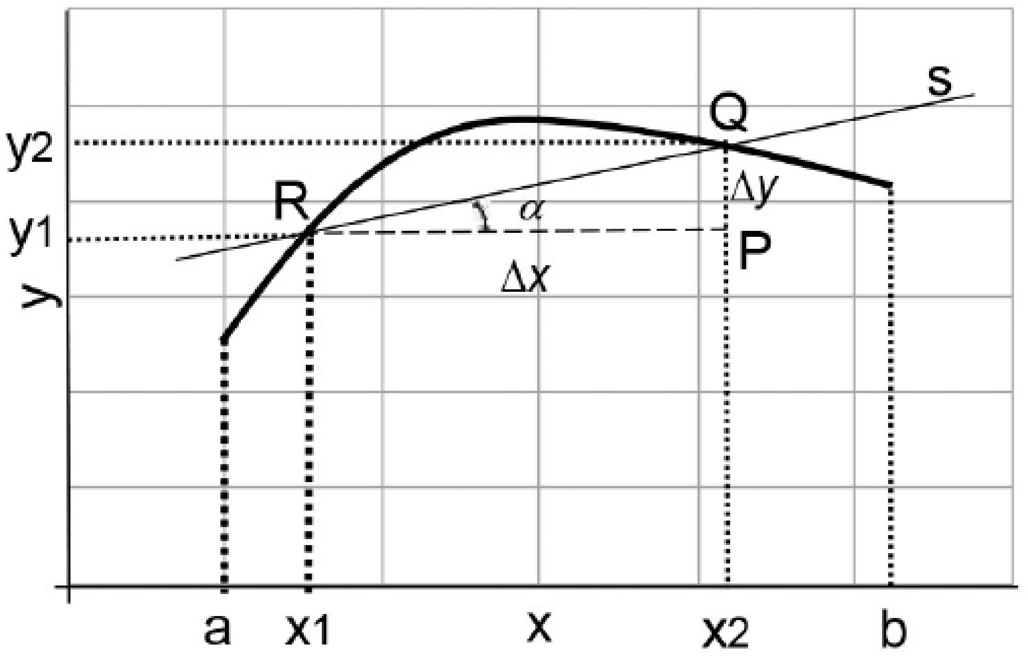


MÉTODO NUMÉRICOS

Aula 3 – Derivada

Curso de Ciência da Computação
Dr. Rodrigo Xavier de Almeida Leão
Cientista de Dados

Figura 1.4 | Gráfico de uma função definida em (a,b)

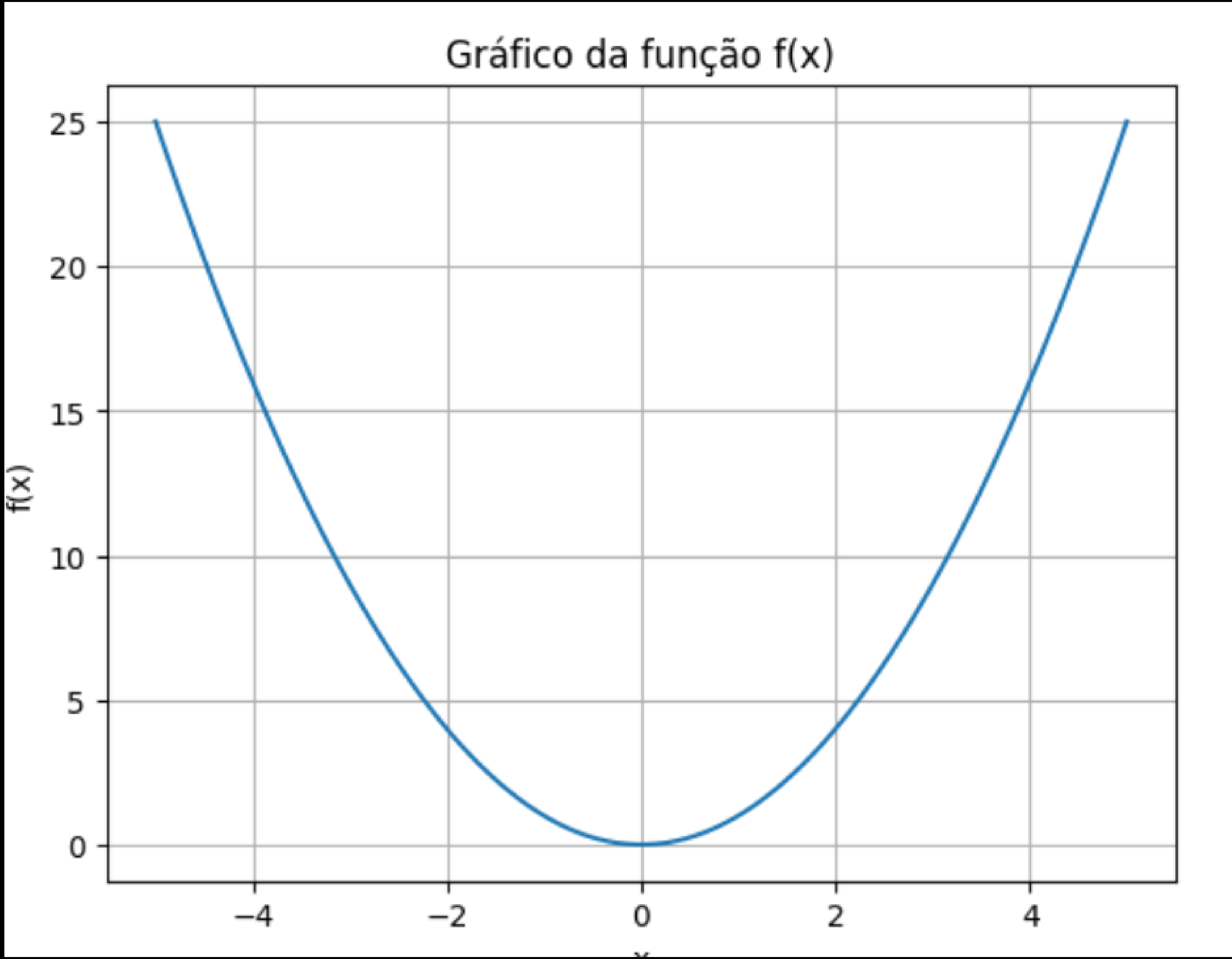


Fonte: elaborada pela autora.

A partir da reta s traçada, podemos determinar o coeficiente angular considerando o triângulo retângulo PRQ formado:

$$tg\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Assim, temos que a variação de $f(x)$ entre os pontos R e Q é a inclinação da reta secante e representa a taxa média de variação de uma função em relação à sua variável independente entre dois pontos.



Prof. Dr. Rodrigo Xavier de Almeida Leão

Verificaremos que, para $f(x) = x^2$, o coeficiente angular da reta tangente t à função em $(2,4)$ é determinado por:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\Delta x + \Delta x^2 - 4}{\Delta x} =$$

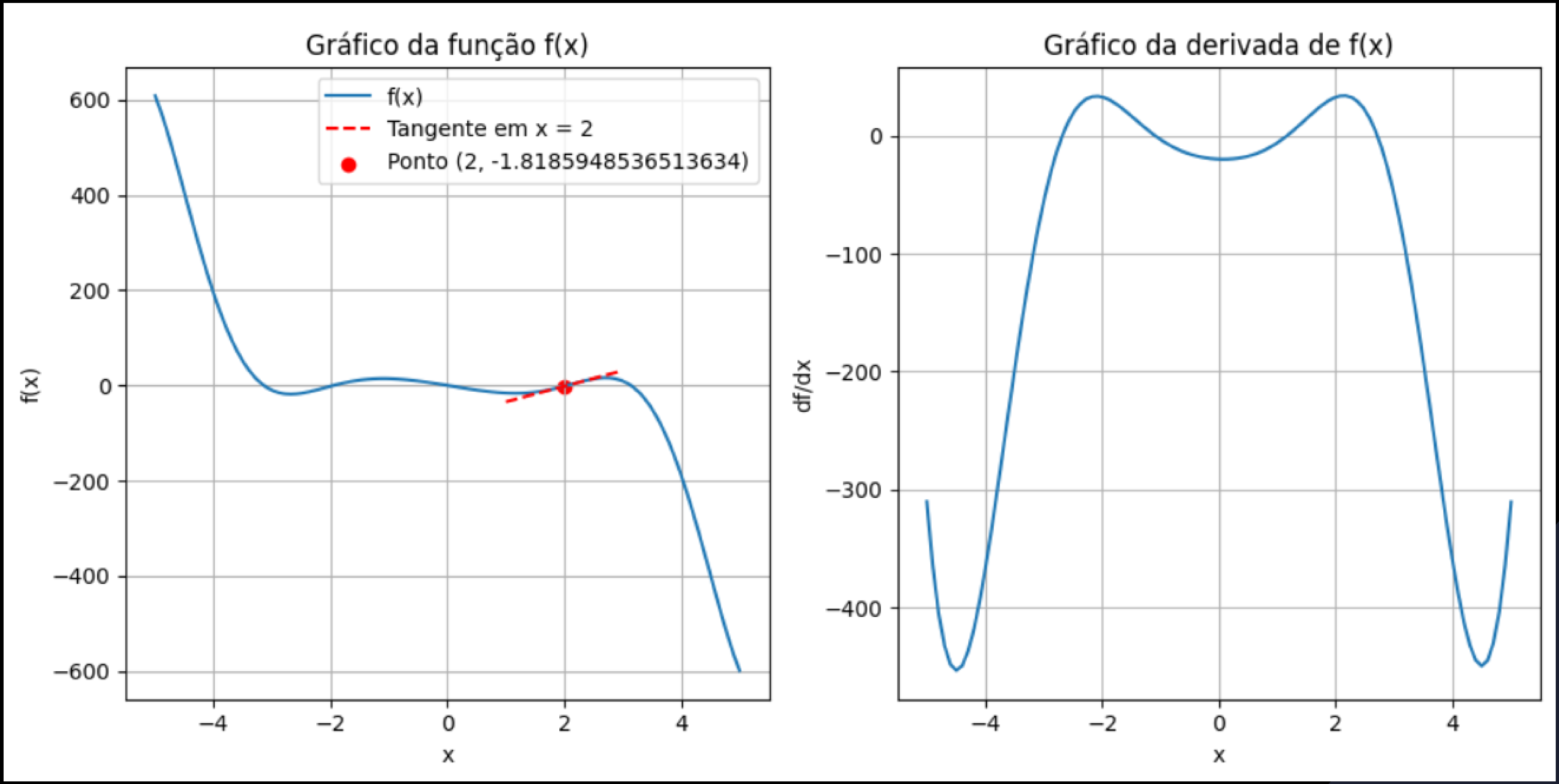
$$= \lim_{\Delta x \to 0} 4 + \Delta x = 4$$

Com o coeficiente angular, pode-se determinar a equação da reta t: $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$. Substituindo os valores conhecidos: $(x_0, y_0) = (2,4)$ e $m = 4$, temos: $y - 4 = 4 \cdot (x - 2)$, ou $y = 4x - 4$. A Figura 1.6 apresenta o gráfico da função e a respectiva derivada em $(2,4)$.

Figura 1.6 | Gráfico $f(x) = x^2$ e reta tangente em $(2,4)$

```python
# Define a função f(x)
def f(x):
  return np.sin(x)*(x**4+(x**2)-x-20)

# Cria um array de valores para x
x = np.linspace(-5, 5, 100)

# Calcula os valores correspondentes de f(x)
y = f(x)

# Calcula a derivada usando (y - y0) / (x - x0)
h = 0.001  # Um pequeno incremento para aproximar a derivada
dydx = (f(x + h) - f(x)) / h

# Ponto onde queremos desenhar a linha tangente
x0 = 2
y0 = f(x0)
m = (f(x0 + h) - f(x0)) / h # Inclinação da reta tangente

# Equação da reta tangente: y = m(x - x0) + y0
x_tan = np.linspace(x0 - 1, x0 + 1, 10) # Pequeno intervalo em torno de x0
y_tan = m * (x_tan - x0) + y0
```

```python
# Plota o gráfico da função original e da derivada
plt.figure(figsize=(10, 5))

plt.subplot(1, 2, 1)
plt.plot(x, y, label='f(x)')
plt.plot(x_tan, y_tan, 'r--', label='Tangente em x = {}'.format(x0))
plt.scatter(x0, y0, color='red', label='Ponto ({}, {})'.format(x0, y0))
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('f(x)')
plt.title('Gráfico da função f(x)')
plt.grid(True)
plt.legend()

plt.subplot(1, 2, 2)
plt.plot(x, dydx)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('df/dx')
plt.title('Gráfico da derivada de f(x)')
plt.grid(True)

plt.tight_layout()
plt.show()
```



Prof. Dr. Rodrigo Xavier de Almeida Leão

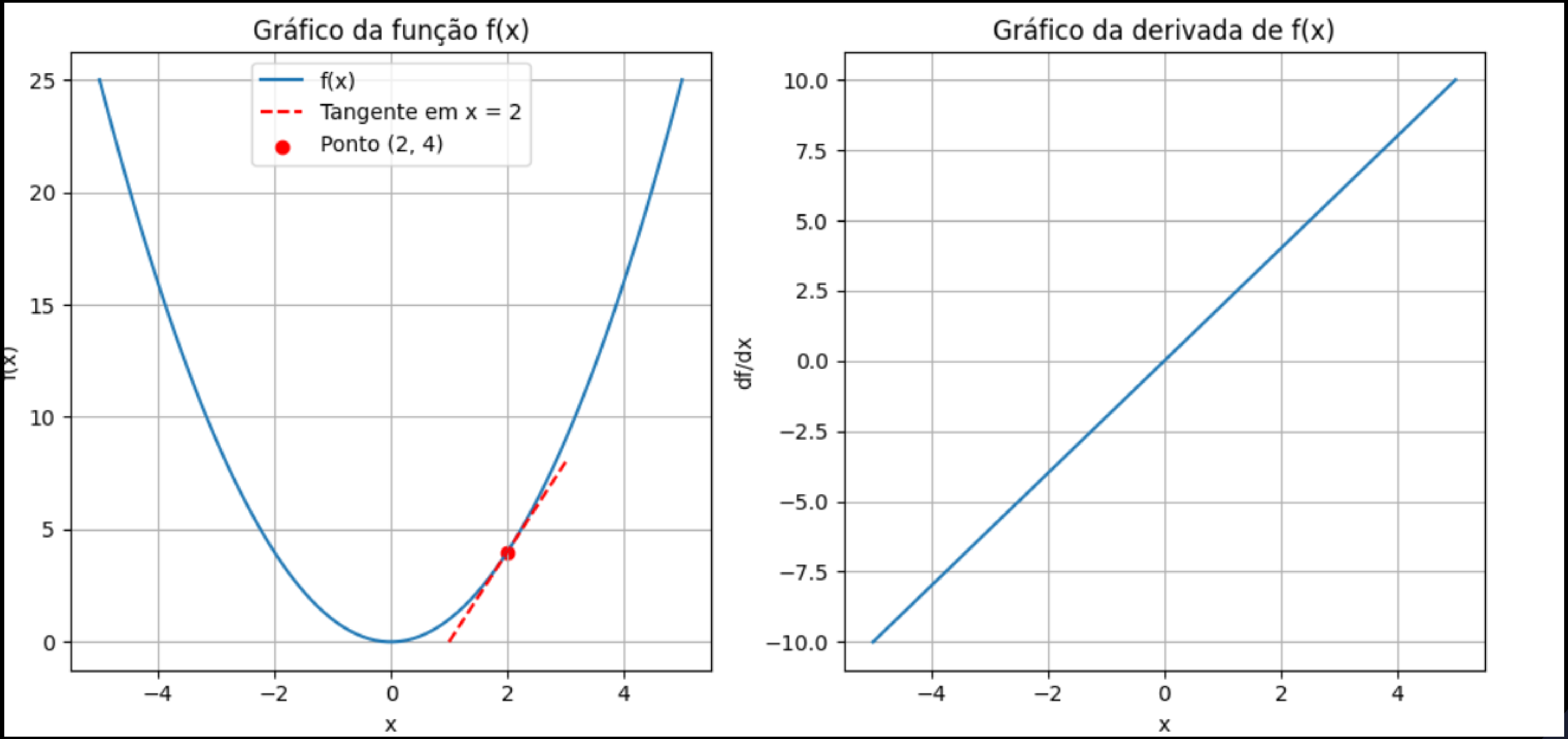


Gráfico da função f(x)
f(x)
Tangente em x = 2
Ponto (2, 4)
25
20
15
10
5
0
−4
−2
0
2
4
x
Gráfico da derivada de f(x)
10.0
7.5
5.0
2.5
0.0
−2.5
−5.0
−7.5
−10.0
df/dx
−4
−2
0
2
4
x

Derivada de uma função

Definições

Uma $f(x)$ é diferenciável num ponto se existe uma reta tangente à curva nesse ponto, ou seja, se a função possui comportamento suave e nenhum pico pontudo. A Figura 1.7(a) ilustra que a $f(x)$ não é derivável em (x_0, y_0), pois a inclinação da reta tangente se modifica bruscamente nos pontos próximos à direita e à esquerda de x_0, ou seja, $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$. A Figura 1.7(b) ilustra outro caso em que a função não é derivável, pois $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Suponhamos que desejamos construir uma trave para um campo de futebol. Dispomos de um tronco de árvore com 20 m, assim podemos determinar o comprimento e a altura para que a área do gol seja a maior possível efetuando:

Material máximo de tronco disponível é igual a 20.

Precisamos de duas traves com altura x e uma com comprimento y. Assim, temos: $2x + y = 20$, ou $y = 20 - 2x$.

A função de maximização é a área delimitada pela trave, sendo que ela forma um retângulo, assim $A = xy$.

Substituindo o valor de y na expressão da área, temos: $A = x(20-2x) = 20x - 2x^2$.

Como desejamos maximizar a área, derivamos a expressão da área em função de x e igualamos a zero, assim:

$A'(x) = (20x)' - (2x^2)' = 20 - 4x = 0$, logo $x = 5m$ e $y = 20 - 2 \cdot 5 = 10m$.

```python
# Encontra os índices onde a derivada cruza o zero (muda de sinal)
indices_zero = np.where(np.diff(np.sign(dydx)))[0]

# Pontos de derivada zero
pontos_zero_x = x[indices_zero]
pontos_zero_y = y[indices_zero]

print("Pontos de derivada zero:")
for i in range(len(pontos_zero_x)):
    print("x = {:.2f}, y = {:.2f}".format(pontos_zero_x[i], pontos_zero_y[i]))

# Plota os pontos de derivada zero no gráfico da função
plt.figure(1)
plt.scatter(pontos_zero_x, pontos_zero_y, color='green', label='Pontos de derivada zero')
plt.legend()

plt.show()
```

```python
indices_zero = np.where(np.diff(np.sign(dydx)))[0]
```

1. `np.sign(dydx)`: Esta função retorna um array do mesmo tamanho que `dydx`, onde cada elemento do array é:

   `-1` se o valor correspondente em `dydx` é negativo,

   `0` se o valor correspondente em `dydx` é zero,

   `1` se o valor correspondente em `dydx` é positivo.
2. `np.diff(np.sign(dydx))`: A função `np.diff` calcula a diferença entre elementos consecutivos no array. Quando aplicada ao resultado de `np.sign(dydx)`, ela calcula a mudança no sinal entre cada par de elementos consecutivos. O resultado será:

   `2` ou `-2` se houver uma mudança direta de `-1` para `1` ou de `1` para `-1` (indicando uma mudança de sinal),

   `1`, `-1` ou `0` caso contrário.

3. `np.where(np.diff(np.sign(dydx)))`: A função `np.where` retorna os índices dos elementos no array resultante de `np.diff(np.sign(dydx))` que não são zero. Estes índices correspondem às posições onde há uma mudança no sinal da derivada, ou seja, onde a função `dydx` pode estar mudando de crescente para decrescente (ou vice-versa), indicando possivelmente um ponto de máximo ou mínimo.
4. `[0]`: Como `np.where` retorna uma tupla (uma estrutura que pode conter mais de um array), `[0]` é usado para pegar o primeiro elemento da tupla, que é o array de índices.

```
Pontos de derivada zero:
x = -2.78, y = -17.80
x = -1.16, y = 14.37
x = 1.16, y = -16.51
x = 2.68, y = 16.06
```

Dimensão de um tanque de água

Descrição da situação-problema

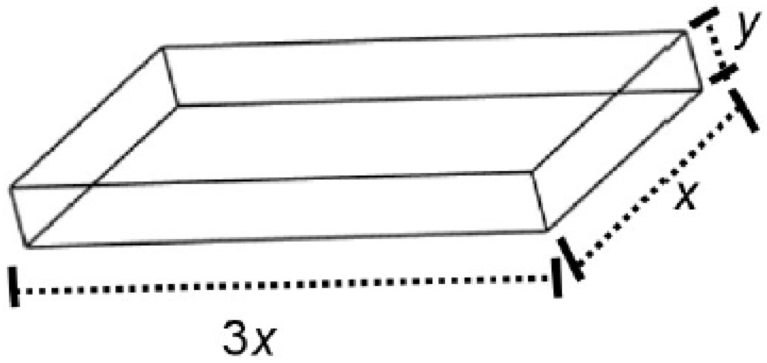
Você se informou num jornal televisivo de que a crise hídrica deixará a cidade onde vive vulnerável no fornecimento de água limpa, então você pensou em construir um tanque no formato de um paralelepípedo retangular para armazenar uma quantidade de água suficiente para o consumo de cinco semanas de sua família,

o que equivale a $60\ m^3$. Em síntese, você necessita dispor das dimensões do reservatório que possibilitem a minimização de custos de aquisição de tijolos, sendo que, por uma questão de escolha, você adotou que o comprimento deve ter o triplo da dimensão da profundidade.

Resolução da situação-problema

Primeiramente, esboçaremos a imagem do reservatório desejado:

Figura 1.10 | Imagem do tanque de armazenamento



Fonte: elaborada pela autora.

Por definição, o volume (V) do paralelepípedo retangular é: $V = 3x \cdot x \cdot y = 3x^2 \cdot y$. Como necessitamos de um volume de $60m^3$, temos: $V = 3x^2 \cdot y = 60$, que podemos reescrever na forma: $y = \dfrac{60}{3x^2} = \dfrac{20}{x^2}$.

A área total do reservatório (A), considerando que ele não possui tampa, é calculada por: $A = 3x \cdot x + 3x \cdot y \cdot 2 + x \cdot y \cdot 2 = 3x^2 + 8xy$, que pode ser reescrita em função apenas de x a partir da relação obtida pelo volume, o que resulta em: $A(x) = 3x^2 + 8x \cdot \frac{20}{x^2} = 3x^2 + \frac{160}{x}$. Assim, derivaremos essa expressão da área para encontrarmos a dimensão x que maximiza ou minimiza a função $A(x)$. Temos $A'(x) = 6x - \frac{160}{x^2}$. Em seguida, igualamos a função a zero: $6x - \frac{160}{x^2} = 0$, que também pode ser reescrita por: $\frac{6x^3 - 160}{x^2} = 0$ ou $6x^3 - 160 = 0$. Assim, temos que $x = \sqrt[3]{\dfrac{160}{6}} \cong 3$ e $y = \dfrac{60}{3x^2} = \dfrac{20}{3^2} = 2{,}22$. Para verificarmos se esses valores correspondem às dimensões para uma área mínima e, consequentemente, com menores custos, analisaremos o resultado da área para valores aleatórios de x em torno da solução encontrada, conforme mostra a Figura 1.11.

Figura 1.11 | Área do tanque em função da profundidade