Terminale

Suites numériques

Contents

1 Rappels de première sur les suites

1.1 Cours:

Ce qu'il faut savoir parfaitement

Notion de suites

Définition - Suite numérique

Une suite numérique est **une fonction** u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$

$$u : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) = u_n \end{array} \right.$$

On note $(u_n)_{n\in N}$ ou plus simplement (u_n) une telle suite.

u_n est le n-ième terme de la suite. On dit que c'est le terme d'indice n ou le terme de rang n.

Remarque : Attention à ne pas confondre u_n qui est le terme de rang n de la suite et (u_n) qui est la suite

Remarque : Certaines suites ne sont pas définies sur $\mathbb{N}$ tout entier. Par exemple, la suite (v_n) définie par $v_n = 1/n$ est définie sur $\mathbb{N}^\star$ car en 0, la suite (v_n) n'est pas définie.

Définition - Définition d'une suite

Une suite peut-être définie :

- De manière **explicite** en donnant la relation qui lie u_n à n.

  On obtient une relation du type $u_n = f(n)$

- Par une relation de **récurrence** en donnant la relation qui lie le terme u_{n+1} à des termes précédents de la suite.

  On obtient en général une relation du type : $u_{n+1} = f(u_n)$ et la définition du premier terme u_0

Exemple :

- Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{2n+5}{n+2}$. La suite (u_n) est définie de manière explicite :

$$u_n = f(n) \text{ avec f la fonction } f : x \mapsto \frac{2x+5}{x+2}$$

- Soit (v_n) la suite définie par $v_{n+1} = \frac{1}{3}(v_n - 1)^2$ et $v_0 = 2$ La suite (v_n) est définie par une relation de récurrence :

$$v_{n+1} = f(v_n) \text{ avec f la fonction } f : x \mapsto \frac{1}{3}(x-1)^2$$

Suites arithmétiques et géométriques

Suites arithmétiques

Définition - Relation de récurrence d'une suite arithmétique

(u_n) est une suite arithmétique s'il existe un unique réel r tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

r est la **raison** de la suite u_n

Remarque : Les suites arithmétiques modélisent les évolutions successives à accroissements constants. Lorsque n s'incrémente de 1, u_n augmente de r

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_{n+1} = u_n + 4$ et $u_0 = 3$ est une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme 3.

Propriété 1 - Expression explicite de u_n

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r, alors pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 + n \times r$$

Attention ! si la suite est définie à partir du rang p :

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_{n+1} = u_n + 4$ et $u_0 = 3$ admet pour relation explicite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 + 4n$$

Propriété 2 - Somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique

On note S la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$S = \frac{\text{Nombre de termes} \times (\text{1er terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

En particulier :

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration à connaître - Somme des entiers de 1 à n

On calcule deux fois la somme des entiers de 1 à n. On l'écrit une fois de 1 à n puis une fois de n à 1 :

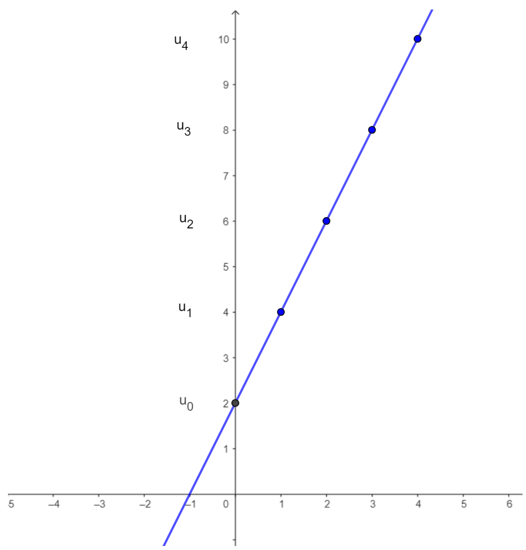
$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
2\sum_{i=1}^{n} i & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\
 & + & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & & \\
 & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) \\
 & = & n(n+1) & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

On remarque qu'en superposant la somme de 1 à n à celle de n à 1, on obtient n groupement de n+1.
On peut donc en conclure que : $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Propriété 3 - Représentation Graphique

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique u de raison r et de premier terme u_0 sont alignés sur la droite d'équation $y = rx + u_0$

Exemple : On représente les 5 premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = u_n + 2$ et $u_0 = 2$
Les points sont alignés sur la droite d'équation $y = 2 + 2x$



Suites géométriques

Définition - Relation de récurrence d'une suite géométrique

(u_n) est une suite géométrique s'il existe un unique réel q tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \times u_n$$

q est la **raison** de la suite géométrique (u_n)

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_{n+1} = 4 \times u_n$ et $u_0 = 3$ est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme 3.

Propriété 4 - Expression explicite de u_n

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q, alors pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Attention ! Si la suite est définie à partir du rang p :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_{n+1} = 4u_n$ et $u_0 = 3$ admet pour relation explicite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 \times 4^n$$

Propriété 5 - Somme de n termes consécutifs d'une suite géometrique

On note S la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison **q différent de 1 :**

$$S = \frac{\text{premier terme} \times (1 - q^{\text{Nombre de termes}})}{1 - q}$$

En particulier pour tout réel q différent de 1 :

$$1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration à connaître - Somme des puissances successives d'un entier

Soit q un entier différent de 1,

Démontrer que $1+q+q^2+...+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ revient à démontrer que $(1-q)(1+q+q^2+...+q^n) = 1-q^{n+1}$

Développons le terme de gauche :

$$\begin{aligned}(1-q)(1+q+q^2+...+q^n) &= (1-q) + q(1-q) + q^2(1-q) + ... + q^n(1-q) \\ &= 1 - q + q - q^2 + q^2 - q^3 + ... + q^n - q^{n+1}\end{aligned}$$

On observe que tous les termes s'annulent à l'exception du premier et du dernier. On obtient donc :

$$(1-q)(1+q+q^2+...+q^n) = 1 - q^{n+1}$$

Puis que

$$1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Variation d'une suite

Définition - Suite croissante

On dit que la suite (u_n) est croissante (respectivement strictement croissante) si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n \text{ (resp.) } u_{n+1} > u_n$$

Exemple : La suite définie par $u_n = 2n$ est strictement croissante car $u_{n+1} = 2n + 2 > u_n = 2n$

Définition - Suite décroissante

On dit que la suite (u_n) est décroissante (respectivement strictement décroissante) si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n \text{ (resp.) } u_{n+1} < u_n$$

Exemple : La suite définie par $u_n = -2n+4$ est strictement décroissante car $u_{n+1} = -2n+2 < u_n = -2n+4$
Remarque : Une suite peut être croissante ou décroissante **à partir d'un certain rang.**

Notion de suite majorée, minorée et bornée

Définition - Suite majorée

On dit que la suite (u_n) est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \in, u_n \leq M$$

Définition - Suite minorée

On dit que la suite $(u_n)_{n\in}$ est **minorée** s'il existe $m \in$ tel que :

$$\forall n \in, u_n \geq m$$

Définition - Suite bornée

Une suite majorée et minorée est dite **bornée**.

1.2 Méthodes et savoir-faire:

L'essentiel des méthodes à maîtriser pour savoir faire les exercices classiques.

Etablir l'ensemble de définition d'une suite

Une suite est toujours définie sur $\mathbb{N}$, elle ne peut pas être définie sur $\mathbb{R}$. Parfois, la suite n'est définie que pour certains termes ou qu'à partir d'un certain rang.

Pour déterminer le plus petit indice à partir duquel la suite est définie, il faut :

1. Déterminer à partir de quel rang le dénominateur ne s'annule plus
2. Déterminer à partir de quel rang les expressions sous les racines sont toujours positives.

Exemple : Déterminer l'ensemble de définition de la suite définie par : $u_n = \dfrac{\sqrt{2n-3}}{n^2}$

1. Le dénominateur doit être non nul donc $n \neq 0$
2. L'expression sous la racine doit être positive donc $2n - 3 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 1.5$ Donc la suite est définie à partir de n=2

On utilisera cette méthode dans l'exercice 2.

Déterminer la nature d'une suite

Démontrer qu'une suite est arithmétique

Il y a trois manières de démontrer qu'une suite est arithmétique :

1. Fixer n, écrire u_{n+1} et faire apparaître u_n afin d'obtenir $u_{n+1} = u_n + r$

   Exemple : $u_n = 2 + 3n$:
   Soit n un entier naturel,
   $$u_{n+1} = 2 + 3(n+1) = 2 + 3n + 3 = u_n + 3$$
   Donc la suite est arithmétique de raison 3.

2. Calculer $v_{n+1} - v_n$ et établir que $v_{n+1} - v_n = r$ où r est une constante. On utilise plutôt cette méthode lorsque la forme de la suite est difficile à faire apparaître

   Exemple : $u_n = (n+1)^2 - n^2$:
   Soit n un entier naturel,
   $$u_{n+1} - u_n = (n+2)^2 - (n+1)^2 - (n+1)^2 + n^2 = n^2 + 4n + 4 - 2n^2 - 4n - 2 + n^2 = 2$$
   Donc la suite est arithmétique de raison 2.

3. Démontrer que (v_n) peut s'écrire sous la forme : $v_n = v_0 + nr$ ou $v_n = v_p + (n-p)r$ si le premier rang de la suite est p.

Démontrer qu'une suite est géométrique

Il y a trois manières de démontrer qu'une suite est géométrique :

1. Fixer n, écrire v_{n+1} et faire apparaître v_n afin d'obtenir $v_{n+1} = qv_n$
2. Calculer $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ et établir que $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = q$ où q est une constante.
3. Démontrer que (v_n) peut s'écrire sous la forme : $v_n = v_0 \times q^n$ ou $v_n = v_p \times q^{n-p}$ si le premier rang de la suite est p.

Démontrer qu'une suite n'est ni géométrique, ni arithmétique

Pour démontrer qu'une suite n'est pas arithmétique il suffit de démontrer que la différence entre deux termes consécutifs n'est pas constante.

Exemple : $u_n = 3n + 2^n$
On calcule $u_1 - u_0 = 4$ et $u_2 - u_1 = 5$

$$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$$

Donc la suite n'est pas arithmétique.

Pour démontrer qu'une suite n'est pas géométrique il suffit de démontrer que le quotient entre deux termes consécutifs n'est pas constant.

Exemple : $u_n = 3n + 2$
On calcule $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{5}{2}$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{8}{5}$

$$\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$$

Donc la suite n'est pas géométrique.

Déterminer le sens de variation d'une suite

On peut procéder de plusieurs façons pour étudier les variations d'une suite :

1. Si le terme général de la suite s'exprime comme une somme. On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$. Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ la suite est décroissante, si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ la suite est croissante.
2. Si le terme général de la suite s'exprime comme un produit et que les termes de la suite sont non nuls à partir d'un certain rang, on peut comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ la suite est décroissante et si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ la suite est croissante.

Pour déterminer le sens de variation d'une suite (u_n), il faut :

1. Fixer n : Soit n $\in \mathbb{N}$
2. Calculer $u_{n+1} - u_n$
3. Comparer le résultat à 0 :
   (a) si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors $u_{n+1} \geq u_n$ et la suite est croissante
   (b) si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors $u_{n+1} \leq u_n$ et la suite est décroissante

Déterminer si une suite est minorée, majorée, bornée

La croissance ou la décroissance d'une suite permettent d'identifier une borne. On retiendra que :

1. Toute suite croissante est minorée par son premier terme.
2. Toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

Pour déterminer qu'une suite est minorée il faut trouver un réel plus petit que tous les termes de la suite.
Pour démontrer qu'une suite est majorée, il faut trouver un réel plus grand que tous les termes de la suite.
Pour démontrer qu'une suite est bornée, il suffit de démontrer qu'elle est majorée et minorée.

Attention, un majorant ou un minorant d'une suite doit forcément être indépendant de n !

Résoudre un problème avec une suite auxiliaire

De nombreux exercices sont construits comme le suivant :

1. On définit une suite (u_n) par récurrence : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$
2. On démontre que la suite n'est ni arithmétique, ni géométrique. En utilisant la méthode 2.
3. La suite n'étant ni arithmétique ni géométrique, il n'existe donc pas de formule connue pour exprimer son terme général.
4. L'exercice introduit **une suite auxiliaire** c'est-à-dire une deuxième suite qui s'exprime en fonction de la première.
   Soit (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ tel que:
   $$v_n = u_n + 3$$
   On démontre que la suite v_n est de nature particulière (soit arithmétique soit géométrique). Ici la suite est géométrique :
   $$v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = 2u_n + 6 = 2(u_n + 3) = 2v_n$$
   La suite (v_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = 4$
5. La suite auxiliaire étant de nature connue, on peut exprimer son terme générale en fonction de n :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n = 4 \times 2^n$$
6. Pour établir l'expression du terme général de (u_n), On inverse la relation donnée dans l'énoncé pour exprimer u_n en fonction de v_n :
   $$u_n = v_n - 3$$
   Puis on remplace l'expression de v_n dans l'équation $u_n = 4 \times 2^n - 3$

Cette méthode de la suite auxiliaire est à maitriser parfaitement car beaucoup de problèmes s'y rapportent.

Déterminer la première valeur telle que $q^n > b$

Prenons l'exemple suivant : Déterminer la plus petite valeur de n telle que 1.05^n soit supérieur à 2.

Cette question est une question que l'on retrouve dans de nombreux problèmes. On peut y répondre de deux manières différentes.

1. On peut intuiter la valeur de n en essayant plusieurs valeurs à la calculatrice.
   Il suffit de trouver n tel que $1.05^{n-1} < 2$ et $1.05^n > 2$
   Ici en testant à la calculatrice plusieurs valeurs de n :

$$1.05^{14} \approx 1.98 \text{ et } 1.05^{15} \approx 2.08$$

   La plus petite valeur de n qui répond à la condition est donc n=15

2. On peut également résoudre cette question en implémentant un algorithme :

```
n=0
while 1.05**n <= 2 :
    n=n+1
print (n)
```

   Cet algorithme renvoie le plus petit rang n tel que 1.05^n soit strictement supérieur à 2. L'algorithme renvoie 15.

Révisions de première : quelques exercices pour bien commencer le chapitre

1.3 Table des exercices à maîtriser

1. Déterminer l'ensemble de définition d'une suite : exercice 1
2. Construire graphiquement les premiers termes d'une suite : exercice 2
3. Déterminer le sens de variation d'une suite : exercices 3 à 6
4. Déterminer si une suite est arithmétique ou géométrique : exercice 7
5. Savoir calculer une somme : exercice 8

1.4 Révisions de première : quelques exercices pour bien commencer le chapitre

Exercice 1 - Ensemble de définition d'une suite

Déterminer le plus petit indice à partir duquel la suite u_n est définie :

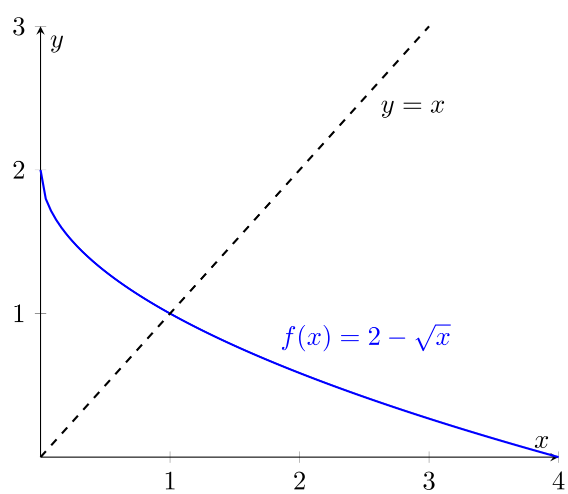
1. $u_n = \dfrac{1}{n^3}$
2. $u_n = \sqrt{2n-17}$
3. $u_n = \dfrac{1}{(n-1)^2}$
4. $u_n = \dfrac{1}{n^2+2n+1}$
5. $u_n = \sqrt{n^2-4n+3}$
6. $u_n = \sqrt{n^2-3n+\frac{5}{4}}$

Exercice 2 - Construction des premières valeurs d'une suite

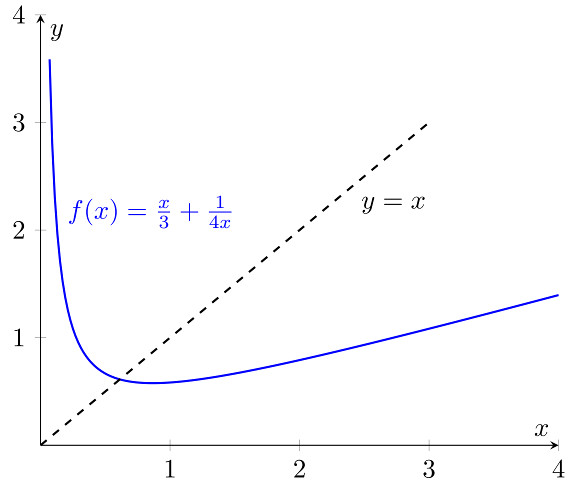
Pour chacune des fonctions et chacun des graphes suivants :

- Construire les quatre premiers termes de la suite
- Conjecturer la limite de la suite (U_n)

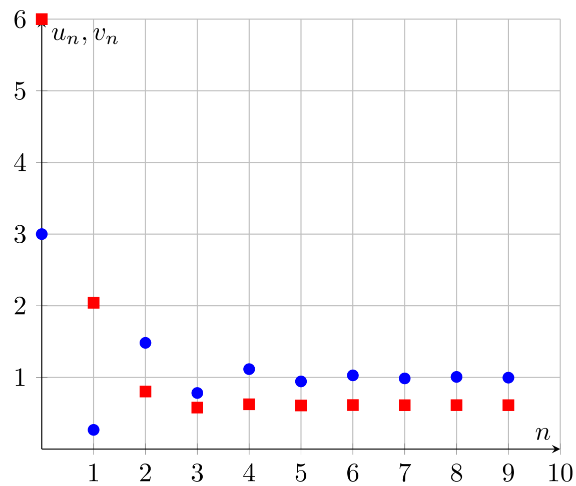
1. $U_{n+1} = 2 - \sqrt{U_n}$ et $U_0 = 3$



2. $V_{n+1} = \dfrac{V_n}{3} + \dfrac{1}{4V_n}$ et $V_0 = 6$



3. Déterminer le nuage de point correspond aux suites (U_n) et (V_n)



Exercice 3 - Sens de variation et bornes

Déterminez le sens de variation des suites suivantes et déterminer si la suite est minorée, majorée et/ou bornée.

a) $a_n = n^2 - 3n + 4$

b) $b_n = \frac{1}{n}$

c) $c_n = (-1)^n$

d) $d_n = \sqrt{n}$

e) $e_n = \frac{1}{2^n}$

f) $f_n = n^3 - 2n^2 + n$

g) $g_n = (-1)^{n+1}n$

Exercice 4 - Sens de variation et bornes (2)

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{2^n}{n+1}$$

1. Démontrer que :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{n}{n+2}$$
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$

Exercice 5 - Sens de variation et fonctions

On définit la suite (w_n) comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{n^2}{3^n}$$

1. Pour tout entier naturel n, calculer $w_{n+1} - w_n$
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f : x \mapsto -2x^2 + 2x + 1$$
étudier le signe de f
3. En déduire à partir de quel rang la suite est décroissante

Exercice 6 - Suites et racines

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n} \quad \text{et} \quad u_0 = 0$$

On admet que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq 3$

1. Calculer $u_{n+1} - u_n$
2. En déduire le sens de variation de la suite

Exercice 7 - Nature de suites

Déterminer la nature des suites définies sur $\mathbb{N}$ par les relations suivantes :

1. $u : n \mapsto 3 + 4n$.
2. $v : n \mapsto 3^n$
3. $w : n \mapsto \dfrac{4-n}{5}$
4. $e : n \mapsto (n+2)^2 - n^2$
5. $f : n \mapsto 2^{n-2}$
6. $g : n \mapsto 2^n \times 5^n$
7. $h : n \mapsto 4^{2n+1}$
8. $i : n \mapsto 2 \times 3^n + 3^{n+2}$

Exercice 8 - Calcul de sommes (1)

Soit une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison r et de premier terme u_0.

a) Déterminez l'expression du n-ième terme de cette suite.

b) Déterminez la somme des n premiers termes de (u_n).

c) Répondez aux deux dernières questions pour les suites suivantes :

- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite arithmétique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison 4.
- $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite arithmétique de premier terme $w_1 = 2$ et de raison -6.

Soit une suite géométrique $(z_n)_{n\in}$ de raison q et de premier terme z_1.

d) Déterminez l'expression du n-ième terme de cette suite.

e) Déterminez la somme des n premiers termes de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

f) Répondez aux deux dernières questions pour les suites suivantes :

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite géométrique de premier terme $x_1 = 3$ et de raison 4.
- $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite géométrique de premier terme $y_1 = 2$ et de raison 1.

2 Les suites en terminale :

2.1 Cours:

Ce qu'il faut savoir parfaitement

Principe de récurrence

Propriété - Principe de récurrence

On note P(n) une propriété de l'entier naturel n,

Si P(0) est vraie et si, pour tout entier naturel m, P(m) implique P(m+1), alors P(n) est vraie pour tout entier naturel n.

Pour démontrer par récurrence la propriété suivante :

$$\forall n \geq n_0, P(n) \text{ est vraie}$$

- Initialisation : on démontre que $P(n_0)$ est vraie
- Hérédité : On suppose $P(n)$ vraie au rang $n \geq n_0$ et on démontre que $P(n+1)$ est vraie.
- On conclut par principe de récurrence

Limite d'une suite

Définitions

On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Définition - Limite en $(+\infty)$

On dit que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $[A, +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$ contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang. Et on note :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Définition - Limite en $(-\infty)$

On dit que u_n tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty, A[$ avec $A \in \mathbb{R}$ contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang. On note :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

Définition - Limite (l)

Soit l un réel.
On dit que u_n tend vers l quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]l-\delta, l+\delta[$ avec $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang. On note :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

Théorème Limite finie l

Soit l un réel,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |u_n - l| = 0$$

Remarque : Plus n est grand, plus u_n se rapproche de l signifie que plus n est grand plus l'écart entre u_n et l se rapproche de 0

Définition - Suites convergentes et divergentes

- Une suite est convergente si et seulement si elle admet une limite finie.
- Une suite est divergente si et seulement si elle n'est pas convergente, c'est-à-dire si elle n'admet pas de limite ou si elle admet une limite infinie.

Limites usuelles à connaître

limites en $+\infty$	limites en $+\infty$
$\lim_{n\to+\infty} n^a = +\infty$ pour $a > 0$	$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^a} = 0$ pour $a > 0$
$\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$	
$\lim_{n\to+\infty} \exp^n = +\infty$	$\lim_{n\to+\infty} \exp^{-n} = 0$

Propriété 6 - Limite d'une suite géométrique (q^n)

- Si $q > 1$, $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- Si q=1, $\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$
- Si $-1 < q < 1$ autrement dit si $|q| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$
- Si $q \leq -1$, (q^n) n'admet pas de limite.

Démonstration à connaître - Inégalité de Bernouilli

On démontre tout d'abord l'inégalité de Bernouilli : $(x+1)^n \geq nx+1$ par récurrence

- Initialisation : D'une part : $(x+1)^0 = 1$ et d'autre part $n \times 0 + 1 = 1$.
  On a bien $(x+1)^0 \geq 0x+1$
- Hérédité : On suppose la propriété vraie au rang n,

  $$(x+1)^{n+1} = (x+1)^n \times (x+1)$$

  Donc :

  $$(x+1)^{n+1} \geq (x+1)(nx+1) \Leftrightarrow$$
  $$(x+1)^{n+1} \geq nx^2 + (n+1)x + 1$$

  Comme $nx^2 > 0$, $(x+1)^{n+1} \geq (n+1)x+1$ Ce qui démontre la propriété au rang n+1
- Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier n.

Démonstration à connaître - Limite de q^n

1. Si $q > 1$, il existe $r > 0$ tel que $q = 1 + r$

   $$q^n = (1+r)^n > nr + 1 \text{ d'après l'inégalité de Bernouilli}$$

   Or $\lim_{n\to+\infty} nr + 1 = +\infty$ et $q^n > nr + 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
2. Si $q = 1$, $q^n = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$
3. Si $0 < q < 1$, on pose $Q = \frac{1}{q}$ donc $Q > 1$.

   $$q^n = \frac{1}{Q^n}$$

   D'après 1. $\lim_{n\to+\infty} Q^n = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$
4. Si $q = 0$, $q^n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$
5. Si $-1 < q < 0$, alors $0 < -q < 1$

   $$(-q)^n = (-1)^n \times q^n \Leftrightarrow q^n = (-1)^n \times (-q)^n$$

   Donc
   $$-(-q)^n \leq q^n \leq (-q)^n$$
   $0 < -q < 1$ donc d'après 3., $\lim_{n\to+\infty}(-q)^n = 0$. En appliquant le théorème des gendarmes, il vient que $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$

Opérations sur les limites

Somme

Si (u_n) a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si (v_n) a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $(u_n + v_n)$ a pour limite	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Produit

Si (u_n) a pour limite	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Si (v_n) a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+ \ -\infty$
Alors $(u_n \times v_n)$ a pour limite	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Quotient

Si (u_n) a pour limite	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$\pm\infty$
Si (v_n) a pour limite	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	0	$\pm\infty$
Alors $(\frac{u_n}{v_n})$ a pour limite	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI

Formes indéterminées

Certaines opérations n'admettent pas systématiquement les mêmes résultats. On les appelle **formes indéterminées** (F.I):

- $\infty - \infty$: F.I
- $\frac{\infty}{\infty}$: F.I
- $\frac{0}{0}$: F.I

Pour ces dernières, il faudra comparer les croissances des suites, pour voir "si un des infini est plus grand que l'autre".

Certaines comparaisons de croissance sont connues, et à connaître:

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n^a} = +\infty$ pour tout $a \in \mathbb{R}$: l'exponentielle l'emporte sur n
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$: n l'emporte sur le logarithme

Exemple : On cherche la limite de $\frac{n+1}{n-1}$. Or, $\lim_{n\to+\infty} n+1 = \lim_{n\to+\infty} n-1 = +\infty$. On a donc une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. Mais on remarque que $\forall n \geq 2$, $\frac{n+1}{n-1} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}$. Donc $\forall n \geq 2$, $\frac{n+1}{n-1} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}$. Ensuite, $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1, \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$, donc par opération sur les limites (finies), $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n-1} = 1$.

Image d'une suite par une fonction

Propriété -

Si (u_n) admet une limite a lorsque n tend vers $+\infty$ et que la fonction f admet b pour limite lorsque x tend vers a, $f(u_n)$ tend vers b lorsque n tend vers $+\infty$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a \text{ et } \lim_{x\to+\infty} a = b \implies \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = b$$

Exemple : Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ alors $\lim_{n\to+\infty} e^{u_n} = e^l$

Théorèmes sur les limites

Théorème **Théorème de comparaison 1**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telle que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$
2. $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Démonstration à connaître - **Divergence vers $+\infty$ d'une suite minorée par une suite divergente vers $+\infty$**

Soit A un réel,
$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc il existe un rang p (avec p entier naturel), tel que :

$$\forall n \geq p, u_n \geq A$$

Puis, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ donc :

$$\forall n \geq p, v_n \geq u_n \geq A$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Théorème **Théorème de comparaison 2**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telle que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$
2. $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Théorème **Passage à la limite dans les inégalités**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes, m et m' deux réels:

1. Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq m$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n \leq m$
2. Si à partir d'un certain rang, $u_n \geq m'$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n \geq m'$
3. Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$

Théorème Théorème des gendarmes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n$
2. $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$
3. $\lim_{n\to+\infty} w_n = l$

Alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$.

Remarque: on peut aussi avoir les inégalités à partir d'un certain rang. Tout ce qui importe est le comportement quand n tend vers l'infini.

Théorème Suite croissante non majorée/ suite décroissante non minorée

- Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.
- Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

Remarque: On dit qu'une suite est "non majorée" si quelque soit $A \in \mathbb{R}$, $u_n \geq A$ pour un certain n.

Théorème Suite croissante majorée / suite décroissante minorée

- Toute suite croissante majorée converge.
- Toute suite décroissante minorée converge.

Démonstration à connaître - Suite croissante non majorée

Soit (u_n) une suite croissante non majorée et A un réel,

Comme la suite n'est pas majorée, il existe un rang p tel que $u_p > A$, puis comme le suite est croissante, $\forall n \geq p, u_n > A$

On a donc démontré que quel que soit A, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont supérieur à A. C'est la définition de $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Théorème Application d'une fonction continue

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ avec f une fonction continue.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite l est telle que $f(l) = l$.

Attention, ce théorème ne garantit pas que la suite converge ! Seulement que si elle converge, la limite vérifie $f(l) = l$.

Suites adjacentes

Cette partie est hors programme. Elle servira à faire le dernier problème, et sera utile pour les études supérieures.

Théorème Suites adjacentes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que:

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$
- $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Elles convergent alors vers une même limite l.

L'essentiel du cours -

1. Principe de récurrence
2. Rappels de première sur les suites
   (a) Définition d'une suite
      - Suite et terme de rang n
      - Définition explicite, défition par récurrence.

   (b) Suites arithmétiques
      - Relation de récurrence
      - Expression explicite
      - Somme des n termes consécutifs et démonstration
      - Représentation graphique

   (c) Suite géométrique
      - Relation de récurrence
      - Expression explicite
      - Somme des n termes consécutifs et démonstration

   (d) Suites croissantes, décroissantes

   (e) Suites majorées, minorées, bornées
3. Limites d'une suite
   - Limites en $+\infty$, $-\infty$ et l
   - Suites convergentes et divergentes
   - Calculs de limites usuelles
   - Opérations sur les limites (somme, produit, quotient, Formes indéterminées, image d'une suite par une fonction)
4. Théorème sur les limites
   - Théorèmes de comparaison
   - Passage à la limite dans les inégalités
   - Théorème des gendarmes
   - Suites croissantes majorées, décroissante minorée
   - Application d'une fonction continue
5. Suites adjacentes (Approfondissement)

2.2 Méthodes et savoir-faire:

L'essentiel des méthodes à maîtriser pour savoir faire les exercices classiques.

Lever une forme indéterminée de type $\frac{\infty}{\infty}$

Les formes indéterminées peuvent faire apparaître des quotients de polynômes comme $\frac{2n^3+2n^2}{3n+2}$, des quotients de puissances comme $\frac{3^n-5}{5^n+3}$ ou des quotients de racines comme $\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+3n}}$.

Dans tous les cas, il faut factoriser au dénominateur et au numérateur par le terme de plus haut degré afin d'obtenir en facteur des termes qui tendent vers un réel ou vers 0.

Par exemple, pour tout n différent de $-\frac{3}{2}$,

$$u_n = \frac{2n^3+2n^2}{3n+2} = \frac{n^3(2+\frac{2}{n})}{n(3+\frac{2}{n})} = \frac{n^2(2+\frac{2}{n})}{3+\frac{2}{n}}$$

Puis :

- $\lim_{n\to+\infty} 2+\frac{2}{n} = 2$
- $\lim_{n\to+\infty} 3+\frac{2}{n} = 3$
- $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

Par opérations sur les limites, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Lever une forme indéterminée de la forme $\infty - \infty$

De la même manière que précédemment, pour lever une forme indéterminée de la forme $\infty - \infty$, il faut factoriser par le terme de plus haut degré. Par exemple pour tout entier naturel n :

$$u_n = \sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n} = n(\sqrt{1+\frac{2}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}})$$

Puis :

- $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{2}{n}} = 1$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
- $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$

Par opérations sur les limites, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Déterminer les limites avec $\cos(n), \sin(n)$ et $(-1)^n$

Lorsque l'on doit déterminer les limites d'une suite contenant $\cos(n), \sin(n)$ ou $(-1)^n$, il faut encadrer $\cos(n), \sin(n)$ et $(-1)^n$ entre -1 et 1 et appliquer le théorème d'encadrement.

Par exemple pour tout entier naturel non nul, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$:
Soit n un entier naturel non nul,

$$\frac{-1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$$

Puis :

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} = 0$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

Donc, d'après le théorème d'encadrement, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Passer à la limite dans une égalité

Lorsque l'énoncé donne u_{n+1} en fonction de u_n : $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut passer à la limite dans l'égalité en suivant les étapes suivantes :

- On démontre que la limite de la suite existe (par exemple parce qu'elle est croissante majorée)
- Une fois qu'on a démontré que celle limite l existe, on peut passer à la limite dans l'égalité car u_n tend vers l et u_{n+1} tend également vers l. On cherche donc à résoudre :

$$l = f(l)$$

- Lorsque l'équation aboutit à plusieurs valeurs possibles de l, il faut éliminer la ou les valeurs impossibles. (Par exemple éliminer la valeur de l négative si on a démontré au préalable que les termes de la suite sont positifs)

2.3 Table des exercices à maîtriser

Les exercices à maîtriser :

1. Savoir manipuler les démonstrations par récurrence avec les suites : exercice 1 à 3
2. Savoir manipuler les démonstrations par récurrence avec les suites et les sommes : exercice 4 et 5
3. Maîtriser les subtilités sur les limites : (vrai ou faux) : exercice 6
4. Savoir déterminer une limite : exercices 7 à 11
5. Savoir manipuler les sommes : exercices 14 à 15
6. Manipuler des suites auxiliaires : exercices 16 à 19
7. Savoir démontrer la convergence : exercice 20
8. Savoir résoudre un problème mélant suites et fonctions : exercice 21 et 22

Les problèmes à maîtriser parfaitement :

1. Un problème classique à maîtriser parfaitement : problème 1
2. Suites imbriquées et systèmes dynamiques : problème 2
3. Suites et probabilités : problèmes 3 et 4
4. Suite et géométrie : Flocon de Von Kock problème 5 (cet exercice est classique mais difficile)
5. Suite induite : problème 6 (cet exercice est classique mais difficile et nécessite d'avoir vu au préalable le chapitre sur la continuité)

Les problèmes type BAC :

1. Un problème classique de révision sur les suites : Amérique du sud 2017
2. Suite induite et logarithme : Antilles-Guyane 2017

2.4 Exercices

Exercice 1 - Récurrence et suite (1)

On considère une suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 2 - Récurrence et suite (2)

Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + u_n}$$

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_n \leq 2$

Exercice 3 - Récurrence et suite (3)

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 2 \text{ et } u_0 = 0$$

Démontrer que :

$$\forall n \in N, u_n = n^2 + n$$

Exercice 4 - Récurrence et calcul de somme

Soit pour tout entier naturel n strictement positif,

$$S_n = 1 + 4 + 9 + ... + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 5 - Récurrence et calcul de somme (2)

1. Démontrer que

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

2. En déduire que

$$\left(\sum_{k=0}^{n} k \right)^2$$

Exercice 6 - VRAI/FAUX sur les limites

Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, justifier.

1. Une suite bornée converge
2. Si (u_n) converge et (v_n) diverge alors la suite $(u_n \times v_n)$ diverge

3. Si (u_n) diverge et (v_n) diverge alors la suite $(u_n + v_n)$ diverge.
4. Si une suite est croissante et majorée par un réel M alros elle converge vers M
5. Si une suite (u_n) n'est pas majorée alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
6. Si une suite est strictement croissante alors elle tend vers $+\infty$
7. Si la suite (u_n) converge alors la suite $(\frac{1}{u_n})$ converge
8. Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle n'est pas majorée
9. Si $(|u_n|)$ converge vers ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ ou (u_n) converge vers $-\ell$.
10. Soit (u_n) une suite qui ne s'annule pas et telle que (u_n) converge vers 0. Alors $(1/u_n)$ tend vers $+\infty$ ou $(1/u_n)$ tend vers $-\infty$.
11. Si (u_n) et (v_n) tendent vers $+\infty$ alors $u_n - v_n$ tend vers 0

Exercice 7 - Limites et encadrement

Soit (b_n) la suite définie, pour tout entier $n \geq 2$, par :

$$b_n = \frac{4n + (-1)^n \cos(n)}{2 - 2n}$$

1. Pour tout entier $n \geq 2$, déterminer un encadrement de b_n
2. En déduire
$$\lim_{n\to+\infty} b_n$$

Exercice 8 - Limites et encadrement (2)

Soit (b_n) la suite définie, pour tout entier n, par :

$$b_n = \frac{2 - \sin^2(n)}{2n^2 - 3n + 5 + (-1)^n}$$

1. Pour tout entier n, déterminer un encadrement de b_n
2. En déduire
$$\lim_{n\to+\infty} b_n$$

Exercice 9 - Calculs de limites et racines

1. $u_n = \dfrac{\sqrt{5n+2}}{4+\sqrt{n}}$
2. $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+2n+3}}{\sqrt{n^2-2n-2}}$
3. $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$
4. $u_n = \sqrt{n^2+2n-1}$

Exercice 10 - Calculs de limites

Déterminer les limites des suites (u_n) suivantes :

1. $u_n = \dfrac{5n^2+4n-2}{3n+2}$
2. $u_n = \dfrac{n^2+6n+8}{3-n}$
3. $u_n = 3-n+(-1)^n$
4. $u_n = 4 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$

Exercice 11 - Calculs de limites-pêle-mêle

Donner les limites des suites suivantes:

1. $\dfrac{n^2+2}{n+7}$
2. $\dfrac{\sqrt{n^2+5}}{3n+7}$
3. $\dfrac{2^n-1}{3^n-2}$
4. $\dfrac{n^3+2n^2+n+5}{2n+2}$
5. $\dfrac{1+2+3+...+n}{2n^2}$
6. $u_n = n-n^2$
7. $e^n(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})$
8. $\dfrac{n}{\ln(n)}$
9. $\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$
10. $(\dfrac{2}{\pi})^n$
11. $\dfrac{1}{\cos^n(\dfrac{1}{2})}$
12. $5n+(-1)^n$
13. $\dfrac{\cos(n)}{n^3}$
14. $\dfrac{\cos(n)}{n}$
15. $\dfrac{4n}{n^2+n\sin(n)}$

Exercice 12 - Calculs de limites et sommes

Déterminer les limites des suites (u_n) suivantes :

1. pour tout n entier naturel :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$

2. Pour tout n entier naturel :
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} (\frac{4}{3})^k$$

Exercice 13 - Suite et sommes

Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$u_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{3^i}$$

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n)
2. Etablir l'expression du terme général de la suite (u_n)
3. Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice 14 - Somme et factorisation de $a^n - b^n$

Soient a et b deux réels,
On cherche une expression factorisée de :
$$a^n - b^n$$

1. On définit S_n par pour tout entier naturel n non nul :
$$S_n = 1 + \frac{b}{a} + (\frac{b}{a})^2 + ... + (\frac{b}{a})^{n-1}$$
Calculer S_n
2. En déduire une forme factorisée de $a^n - b^n$
3. Factoriser :
   - $P(x) = x^4 - 1$
   - $P(x) = x^3 - 8$

Exercice 15 - Somme télescopique

Soit (c_n) la suite définie, pour tout entier $n \geq 1$, par :
$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

a) Soit un entier k tel que $1 \leq k \leq n$. Montrer que :
$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$$

b) En déduire une expression simplifiée de c_n.

1. Calculer alors $\lim_{n\to\infty} c_n$.

Exercice 16 - Suite auxiliaire et suite homographique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4}$ et $u_0 = 0$.

1. Calculer u_1 et u_2. La suite est-elle arithmétique ? Géométrique ?

2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$. Montrer que (v_n) est géométrique.
3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

Exercice 17 - Suite arithmético-géometrique

Soit la suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 2$

a) Cette suite est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?

b) Déterminez la solution x_s de l'équation suivante : $x = 0,5x + 2$

c) Soit la suite v_n définie par $v_n = u_n - x_s$. Quelle est la nature de cette suite ?

d) En déduire l'expression explicite de la suite u_n et déterminer la somme des n premiers de ces termes.

Exercice 18 - Suites arithmético-géométriques

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$ et $u_0 \in \mathbb{R}$. On qualifie cette suite d'arithmético-géométrique.

1. Si $a = 1$, quelle suite reconnaissez-vous ? Même question si $b = 0$.
   On supposera dans la suite que $a \neq 1$ et $b \neq 0$
2. Soit l la solution de l'équation $l = al + b$. Déterminer l. On appelle cette solution le point fixe.
3. On définit pour tout entier naturel $v_n = u_n - l$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
4. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 19 - Se ramener à une suite connue

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et la relation :

$$U_{n+1} = \sqrt{2 + (u_n)^2}$$

a) On pose pour tout entier naturel $v_n = (u_n)^2$,
Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.

b) En déduire une expression explicite de u_n

Exercice 20 - Convergence

Soit (u_n) la suite définie par:

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1 + 3u_n}{3 + u_n}$$

On admet que la suite est positive (se montre facilement par récurrence).

1. Montrer par l'absurde que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.
2. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{3 + u_n}$$
3. En déduire que la suite converge.

Exercice 21 - Suite et fonctions - Fonction exponentielle

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{u_n}$ et $u_0 = 0$.

1. Dresser le tableau de variation de la fonction $f(x) = e^x - x$. En déduire son tableau de signe.
2. Montrez par l'absurde que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$. En déduire le sens de variation de la suite.
3. On admet que $\forall x \geq 0, e^x \geq 1 + x$. En déduire la limite de la suite.

Exercice 22 - Suite et fonction (2)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n(1-u_n) \text{ et } u_0 \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$$

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 2x(1-x)$.

1. On admet que $u_n > 0$. Montrer que $u_n \leq 1/2$ pour tout entier naturel n.
2. En déduire que la suite est croissante, puis qu'elle converge.
3. On admet que la limite de u_n vérifie $l = f(l)$. Trouver cette limite.
4. Si $u_0 \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$, les résultat sont-ils encore valables ? Expliquez votre raisonnement.

Exercice 23 - Suite particulière

On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}^\star$ par :

$$u_1 = 0.63,\ u_2 = 0.6363,\ u_3 = 0.636363\ ...\ u_n = \underbrace{0,63...........63}_{\text{2n chiffres}}$$

Etablir la limite de la suite (u_n).

2.5 Problèmes à maîtriser :

Problème 1 - Relations de récurrence et suite auxilliaire

Soit (u_n) la suite définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$$

et $u_0 = 0$ son premier terme.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite
2. Que peut-on conjecturer sur l'expression de u_n ?
3. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n < 1$
4. En déduire le sens de variation de la suite (u_n)
5. On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$ Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique.
6. En déduire l'expression explicite de (u_n) en fonction de n.
7. As-t-on démontré la conjecture du 1)b) ?
8. Déterminer la limite de cette suite

Problème 2 - Systèmes dynamiques

On réalise l'expérience suivante :
Trois urnes notées U,V et W sont remplies de jetons. On note respectivement u_n, v_n et w_n le nombre de jetons contenus dans l'urne U, V et W à la n-ième itération.
A chaque itération, les manipulation réalisées sont les suivantes :

- On garde la moitié des jetons de l'urne U et on transfère la moitié vers l'urne W
- On garde la moitié des jetons dans l'urne V et on transfère la moitié vers l'urne W
- On transfère la moitié des jetons de W dans V et l'autre moitié dans U

On réalise cette manipulation jusqu'à ce que le partage soit impossible.
On note u_0, v_0 et w_0 le nombre de jetons initial dans chacune des boîtes.

1. On suppose que les n premières manipulations sont réalisables. A quelle condition la (n+1)-ème manipulation est-elle réalisable ?
2. Dans la cas où la condition précédente est réalisée, exprimer u_{n+1}, v_{n+1} et w_{n+1} en fonction de u_n, v_n et w_n
3. On pose pour tout entier n :
$$e_n = u_n + v_n + w_n$$
$$f_n = u_n + v_n - 2w_n$$
   a) Démontrer que la suite (e_n) est constante
   b) Démontrer que la suite (f_n) est géométrique.
   c) Démontrer que $e_n - f_n = 3w_n$
   d) En déduire l'expression de w_n en fonction de n.

e) Déterminer la limite de (w_n) et interpréter

Problème 3 - Poulet rôti

Au marché du dimanche matin, un boucher vend des poulets rôtis. Il cherche à connaître le comportement des clients afin d'anticiper ses commandes. Il a remarqué que :

- quand un client achète un poulet, il en reprendra la semaine suivante 7 fois sur 10 ;
- quand un client n'achète pas de poulet, une fois sur cinq il en prend la fois suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un poulet le premier dimanche et pour $n \in \mathbb{N}*$, on note A_n l'événement : "le client achète un poulet rôti le n-ième dimanche".

a) Représenter les 3 premiers dimanches sous forme d'un arbre.

b) Calculer $P(A_3)$.

c) Sachant que le client achète un poulet le 3ème dimanche, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté un le dimanche précédent ?

d) Démontrer que pour tout $n \geq 1$: $P(A_{n+1}) = 0,5P(A_n) + 0,2$.

e) On admet que $P(A_n) > 0,4$ pour tout $n \geq 1$. Démontrer que la suite $(p(A_n))$ est décroissante.

f) Montrer que la suite (u_n) définie comme $\forall n \in \mathbb{N}* \quad u_n = P(A_n) - 0,4$ est géométrique.

g) En déduire la limite de $(P(A_n))$ quand n tend vers l'infini et interpréter.

Problème 4 - Suites et probabilités

On réalise un jeu avec un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6.

Soit k est un entier compris entre 1 et 6, on désigne par P_k la probabilité d'obtenir, lors d'un lancer, la face numérotée k.

Le dé utilisé dans ce jeu est pipé de telle sorte que :

- Les six faces ne sont pas équiprobables
- Les nombres $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ sont, dans cet ordre, six termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r
- Les nombres P_1, P_2, P_4 sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

1. Démontrer que pour tout entier k compris entre 1 et 6,

$$P_k = \frac{k}{21}$$

2. Lors du jeu, le dé est lancé une fois. Déterminer la probabilité des évènements suivants :
   - A : "Le nombre obtenu est impair"
   - B: "le nombre obtenu est inférieur ou égal à 4"
   - C: "le nombre obtenu est 2 ou 5 "
3. Déterminer la probabilité que le nombre soit inférieur ou égal à 4 sachant qu'il est impair.
4. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Les événements A et C sont-ils indépendants ?

Problème 5 - Flocon de Von Koch

Le flocon de Von Koch est une figure fractale, construite de la manière suivante:

1. Dessiner un triangle équilatéral de côté 1
2. Découper chaque segment en 3 segments de même longueur
3. Sur chaque petit segment du milieu, dessiner un triangle équilatéral
4. Revenir à l'étape 2

Les premières étapes sont illustrées ci-dessous.

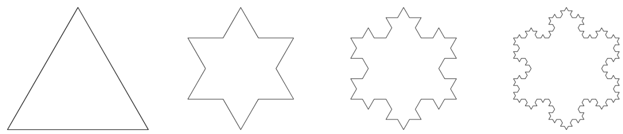


Figure 1: Premières étapes de construction du flocon de Von Koch

1. On note P_n le périmètre du triangle à l'étape n ($P_1 = 3$).

   En observant l'évolution de la longueur d'un segment à l'étape n, et la longueur de ce segment transformé à l'étape $n+1$, déterminer une formule de récurrence pour P_n.
2. Exprimer P_n en fonction de n et trouver sa limite.
3. On note :
   - A_n l'aire de la figure à l'étape n
   - N_n le nombre se segments à l'étape n
   - l_n la longueur d'un petit segment à l'étape n.

   Déterminer N_n en fonction de n, et l_n en fonction de n.
4. A l'aide de ces deux quantités, Déterminer une formule de récurrence pour A_n.
5. En calculant la somme des différences $A_k - A_{k-1}$, déterminer une expression de A_n en fonction de n
6. Déterminer sa limite.
7. Commentez ces deux résultats.

Problème 6 - Suites induites

Pour n entier naturel, on définit les fonctions :

$$f_n : x \in [0,1] \mapsto x^n + x - 1$$

1. Montrer qu'il existe un unique réel x_n vérifiant :
$$f_n(x_n) = 0$$
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.
   Indication : comparer $f_{n+1}(x_n)$ et $f_{n+1}(x_{n+1})$.
3. En déduire que cette suite converge. On note l sa limite. Montrer que l'on a :
$$\frac{1}{2} \leq l \leq 1$$
4. Montrer que $l = 1$.

2.6 Problème de type BAC :

Problème 1 - Exercice de type BAC - Amérique du sud 2017

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve. Cette population est estimée à 12 000 individus en 2016. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60 000 individus.

Partie A : un premier modèle

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an.

L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (v_n) où v_n représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en 2016 + n. On a donc $v_0 = 12$.

1. Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n.
2. Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

Partie B : un second modèle

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = -\frac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n.$$

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = -\frac{1,1}{605}x^2 + 1,1x.$$

   (a) Justifier que g est croissante sur $[0; 60]$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$.

2. On remarquera que $u_{n+1} = g(u_n)$.
   (a) Calculer la valeur arrondie à 10^{-3} de u_1. Interpréter.
   (b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 55$.
   (c) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   (d) En déduire la convergence de la suite (u_n).
   (e) On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$. En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

3. Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle. Il utilise l'algorithme suivant.

Algorithme à compléter :


```
Variables n un entier naturel
u un nombre réel

Traitement n prend la valeur 0
u prend la valeur 12
Tant Que ...
    u prend la valeur ...
    n prend la valeur ...
Fin Tant Que

Sortie Afficher ...
```

Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier r tel que $u_r \geq 50$.

Problème 2 - Exercice de type BAC - Antilles Guyane 2017

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel strictement positif. Le but de l'exercice est d'étudier l'équation

$$(E_n) : \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{n}$$

ayant pour inconnue le nombre réel strictement positif x.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$. On a donné en ANNEXE, qui n'est pas à rendre, la courbe représentative C de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Déterminer son maximum.

Partie B

1. Montrer que, pour $n \geq 3$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[1; e]$ notée α_n.
2. D'après ce qui précède, pour tout entier $n \geq 3$, le nombre réel α_n est solution de l'équation (E_n).
   (a) Sur le graphique sont tracées les droites D_3, D_4 et D_5 d'équations respectives $y = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{4}$ et $y = \frac{1}{5}$. Conjecturer le sens de variation de la suite (α_n).
   (b) Comparer, pour tout entier $n \geq 3$, $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_{n+1})$. Déterminer le sens de variation de la suite (α_n).
   (c) En déduire que la suite (α_n) converge. Il n'est pas demandé de calculer sa limite.
3. On admet que, pour tout entier $n \geq 3$, l'équation (E_n) possède une autre solution β_n telle que

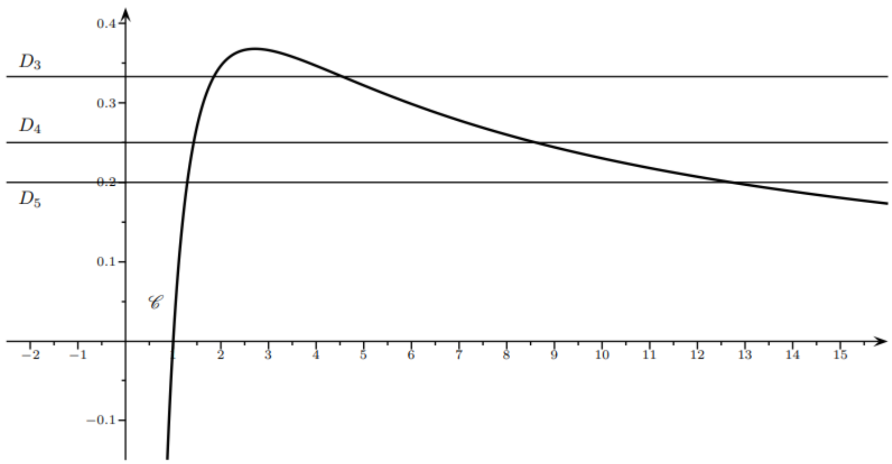
$$1 \leq \alpha_n \leq e \leq \beta_n.$$

   (a) On admet que la suite (β_n) est croissante. Établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3,

$$\beta_n \geq \frac{n\beta_3}{3}.$$

   (b) En déduire la limite de la suite (β_n).

Annexe:



3 Exercices d'Approfondissement:

Exercice 1 - Somme télescopique

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Exercice 2 - Existence de limite

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 + \frac{3}{2}$$

1. Démontrer que la suite (u_n) est croissante
2. Démontrer que la suite (u_n) admet $+\infty$ pour limite

Exercice 3 - Suites particulières

Soit (u_n) la suite définie pour tout n non nul par :

$$u_n = 0,\underbrace{9..........9}_{\text{n chiffres 9}}\overbrace{1..........1}^{\text{n chiffres 1}}$$

Démontrer que (u_n) converge est déterminer la limite.

Exercice 4 - Suites arithmético-géométriques

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4 \text{ et } u_0 = 1$$

Démontrer que (u_n) converge et déterminer la limite.

Exercice 5 - Suite de racines

Pour n entier naturel non nul, on définit le polynôme P_n par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad P_n(x) = \frac{1}{n}x - x - 1$$

1. On fixe n. Déterminer les racines de P_n. On les notera $x_n^{(1)}$ et $x_n^{(2)}$.
2. Déterminer les limites des suites $(x_n^{(1)})_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $(x_n^{(2)})_{n \in \mathbf{N}^*}$.
3. On fixe maintenant un réel x. Quel est la limite de la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbf{N}^*}$?
4. Cette limite est un polynôme en x. Quelles sont ses racines ?
5. Est ce à quoi l'on s'attendait ? Méditer avec le résultat de la question 2.

Exercice 6 - irrationalité de e

Dans ce problème, nous allons prouver que e est un nombre irrationnel.

On définit pour tout entier naturel :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!n}$$

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes. (On démontrera que la suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) décroissante et que la limite de la différence des deux suites est nulle)
2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_1 \leq u_n \leq v_n \leq v_1$
3. En déduire que les deux suites convergent puis qu'elles convergent vers la même limite.
4. On admet que cette limite commune est le nombre e. Encadrer e par les suites (u_n) et (v_n) puis démontrer par l'absurde que e est irrationnel.

Exercice 7 - Suites récurentes linéaires d'ordre 2 (CAS 1)

Dans les exercices suivants, on démontre puis utilise les propriétés suivantes sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 :

Propriété : Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad u_0, u_1 \in \mathbb{R}.$$

L'équation caractéristique associée à cette suite est donnée par :

$$r^2 - ar - b = 0$$

Les solutions de cette équation déterminent la forme générale de la suite :

- Si l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, alors :

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tels que} \quad \forall n \in \mathbb{N},\, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

- Si l'équation caractéristique admet une solution double r, alors :

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tels que} \quad \forall n \in \mathbb{N},\, u_n = \lambda r^n + \mu n r^n.$$

CAS 1 :

On suppose dans cette partie que l'équation (E) admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2.

On va montrer que, pour une telle suite, il existe deux uniques réels λ et μ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

1. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$. Calculer λ et μ en fonction de u_0, u_1, r_1, et r_2.
2. Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la proposition suivante :

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

Démontrer $P(n)$ par récurrence double et conclure.

Exercice 8 - Application du résultat précédent à la suite de Fibonacci

On appelle suite de Fibonacci la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, et la relation, valable pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

En utilisant le résultat de l'exercice précédent, écrire l'équation caractéristique associée, la résoudre, puis exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

Exercice 9 - Limites et parties entières

Déterminer, en utilisant un encadrement, la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor \frac{k^2}{n} \right\rfloor$$

Exercice 10 - Démonstration théorème des suites adjacentes

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante et que

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0.$$

Nous allons démontrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles convergent et elles ont toutes les deux la même limite.

Pour cela, considérons deux suites (u_n) et (v_n) telles que, quitte à inverser les rôles, (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0.$$

1. **Montrer que la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante.**
   - **a.** En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leq v_n$.
2. **Nous allons à présent montrer que (u_n) converge.**
   - **a.** Prouver que la suite (u_n) est majorée.
   - **b.** En déduire que la suite (u_n) converge.
   - **c.** Avec un raisonnement analogue, on montre de même que la suite (v_n) converge.
3. **Nous allons à présent montrer que les deux suites convergent vers la même limite.**
   - **a.** Pour cela, notons $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$ et $l' = \lim_{n\to+\infty} v_n$.
   - **b.** Grâce aux opérations sur les limites, déterminer $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n)$.
   - **c.** En déduire que $l = l'$.

Exercice 11 - Suites adjacentes

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad S'_n = S_n + \frac{1}{n}.$$

Montrer que les suites (S_n) et (S'_n) sont adjacentes.

Indications

Exercice 11 - Calculs de limites-pêle-mêle

Pour la dernière question, on pourra multiplier par $\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = 1$, appelée "quantité conjuguée".

Exercice 20 - Convergence

Pour la première question, on pourra supposer qu'il existe n tel que $u_{n+1} < 1$ et en déduire quelque chose sur u_n.

Exercice 21 - Suite et fonctions - Fonction exponentielle

Pour la dernière question, on pourra poser $v_{n+1} = 1 + v_n$, $v_0 = u_0$, et comparer u_n à v_n.

4 Notions d'Approfondissement sur la récurrence:

1) Point de cours sur la récurrence d'ordre 2

a) Théorème :

Théorème 1 : Principe de récurrence d'ordre 2

Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n et $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose que :

$$\begin{cases} P(n_0) \text{ et } P(n_0+1) \text{ sont vraies} \quad \text{(initialisation)} \\ \forall n \geq n_0,\ (P(n) \text{ et } P(n+1)) \Rightarrow P(n+2) \quad \text{(hérédité)} \end{cases}$$

Alors, pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

b) Démarche

Pour montrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, on procède en trois étapes :

- **Initialisation** : On montre que $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vraies.
- **Hérédité** : On considère un entier n fixé supérieur ou égal à n_0

  On suppose que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies.

  En utilisant $P(n)$ et $P(n+1)$, on montre qu'alors $P(n+2)$ est encore vraie.
- **Conclusion** : Par principe de **récurrence double**, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

c) Exemple :

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = -5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

Montrons que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = 8 \times 2^n - 7 \times 3^n$$

Correction :

Étape 1 : Initialisation

- Pour $n = 0$, on a :

$$u_0 = 1$$

et

$$8 \times 2^0 - 7 \times 3^0 = 8 \times 1 - 7 \times 1 = 8 - 7 = 1$$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

- Pour $n = 1$, on a :

$$u_1 = -5$$

et

$$8 \times 2^1 - 7 \times 3^1 = 8 \times 2 - 7 \times 3 = 16 - 21 = -5$$

La propriété est également vraie pour $n = 1$.

Étape 2 : Hérédité

Supposons que la propriété est vraie pour n et $n+1$, c'est-à-dire :

$$u_n = 8 \times 2^n - 7 \times 3^n$$

et

$$u_{n+1} = 8 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^{n+1}$$

Montrons qu'elle est également vraie pour u_{n+2}.

D'après la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$

En utilisant les hypothèses de récurrence, on remplace u_{n+1} et u_n par leurs expressions :

$$u_{n+2} = 5(8 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^{n+1}) - 6(8 \times 2^n - 7 \times 3^n)$$

Développons cette expression :

$$u_{n+2} = 40 \times 2^{n+1} - 35 \times 3^{n+1} - 48 \times 2^n + 42 \times 3^n$$

Factorisons :

$$u_{n+2} = 8 \times 2^n(5 \times 2 - 6) + 7 \times 3^n(6 - 5 \times 3)$$

Calculons les coefficients :

$$u_{n+2} = 8 \times 2^{n+2} - 7 \times 3^{n+2}$$

Étape 3 : Conclusion

La propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, et elle est héréditaire. Par récurrence double, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{u_n = 8 \times 2^n - 7 \times 3^n}$$

2) Point de cours sur la récurrence forte

a) Théorème :

Théorème 2 Principe de récurrence forte

Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n et $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose que :

$$\begin{cases} P(n_0) \text{ est vraie} \quad \text{(initialisation)} \\ \forall n \geq n_0,\ (P(k) \text{ est vraie pour tout } k \in [n_0, n]) \Rightarrow P(n+1) \quad \text{(hérédité)} \end{cases}$$

Alors, pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

b) Démarche

Pour montrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, on procède en trois étapes :

- **Initialisation** : On montre que $P(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité** : On suppose que $P(k)$ est vraie pour tout k tel que $n_0 \leq k \leq n$.

  À partir de cette hypothèse, on montre que $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

c) Exemple

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n-1}$.

Correction :

Initialisation (n = 1) :
Pour $n = 1$, nous avons :

$$u_1 = \sum_{k=0}^{0} u_k = u_0 = 1$$

et

$$2^{1-1} = 2^0 = 1$$

La propriété est donc vraie pour $n = 1$.

Hérédité :
Supposons que la propriété est vraie pour tout entier k comrpris entre 1 et n, c'est-à-dire que :

$$\forall k \in [\![1; n]\!], u_k = 2^{k-1}$$

Montrons qu'elle est également vraie pour $n+1$, c'est-à-dire que $u_{n+1} = 2^n$.

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence forte, $u_k = 2^{k-1}$ pour tout $1 \leq k \leq n$, donc :

$$u_{n+1} = u_0 + \sum_{k=1}^{n} (2^{k-1})$$

Cette somme est la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$$

Ainsi,

$$u_{n+1} = u_0 + \sum_{k=1}^{n} (2^{k-1}) = 1 + 2^n - 1 = 2^n$$

Ainsi, $u_{n+1} = 2^n$.

Conclusion :
La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire que :

$$u_n = 2^n - 1$$

5 Exercices d'approfondissement sur la récurrence forte et double

Exercice 1 - Récurrence double (1)

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = 2^{n+1} - 1$$

Exercice 2 - Récurrence double (2)

Soit n un entier naturel.

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 5 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = 2^n + 3^n$$

Exercice 3 - Récurrence forte (1)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2^n$.

Exercice 4 - Récurrence forte (2)

Démontrer que tout entier $n \geq 2$ admet un diviseur premier

6 Correction des exercices et problèmes

6.1 Correction des exercices de révision de première

Exercice 5 - Ensemble de définition d'une suite

Déterminer le plus petit indice à partir duquel la suite u_n est définie :

1. $u_n = \dfrac{1}{n^3}$
2. $u_n = \sqrt{2n - 17}$
3. $u_n = \dfrac{1}{(n-1)^2}$
4. $u_n = \dfrac{1}{n^2 + 2n + 1}$
5. $u_n = \sqrt{n^2 - 4n + 3}$
6. $u_n = \sqrt{n^2 - 3n + \frac{5}{4}}$

Correction :

1. $u_n = \dfrac{1}{n^3}$
   Le dénominateur ne doit pas s'annuler. La suite est définie pour tout n strictement positif, soit sur $\mathbb{N}^\star$
2. $u_n = \sqrt{2n - 17}$
   L'expression sous la racine doit être positive ou nulle.
   $$2n - 17 \geq 0 \Leftrightarrow 2n \geq 17 \Leftrightarrow n \geq 8,5$$
   La suite est donc définie pour tout entier supérieur ou égal à 9.
3. $u_n = \frac{1}{(n-1)^2}$
   Le dénominateur ne doit pas s'annuler. Il s'annule pour n=1 et n=-1. La suite est donc définie pour tout n supérieur ou égal à 2.
4. $u_n = \frac{1}{n^2+2n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$. Le dénominateur ne s'annule pas. La suite est donc définie sur $\mathbb{N}$
5. L'expression sous la racine doit être positive. Etudions le polynôme associé défini sur $\mathbb{R}$:
   $$P(x) = x^2 - 4x + 3$$
   $$\Delta = 16 - 12 = 4 = 2^2$$
   $$X_\pm = \frac{4 \pm 2}{2} = 3 \text{ ou } 1$$
   On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

P(x) est positif ou nul pour tout x supérieur ou égal à 3. Donc la suite (u_n) est définie à partir de $n = 3$

6. L'expression sous la racine doit être positive. Etudions le polynôme associé à $n^2 - 3n + \frac{5}{4}$ défini sur $\mathbb{R}$:

$$P(x) = x^2 - 3x + \frac{5}{4}$$

$$\Delta = 9 - 5 = 4 = 2^2$$

$\Delta > 0$ $P(x)$ admet donc deux racines distinctes :

$$x_{\pm} = \frac{3 \pm 2}{2} = \frac{1}{2} \text{ ou } \frac{5}{2}$$

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

P(x) est positif ou nul pour tout x supérieur ou égal à $\frac{5}{2} = 2.5$. Donc la suite (u_n) est définie à partir de $n = 3$

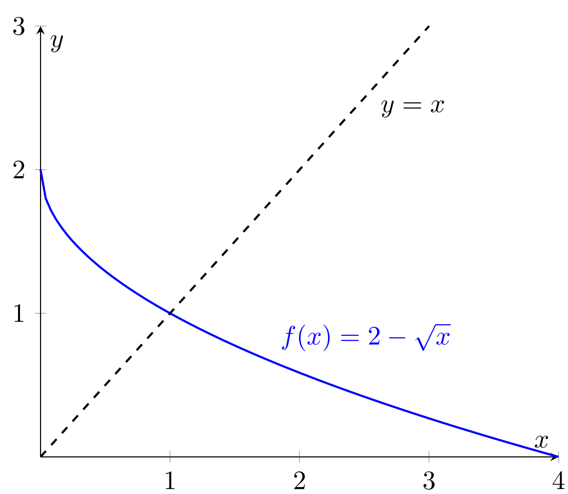
.

Exercice 6 - Construction des premières valeurs d'une suite

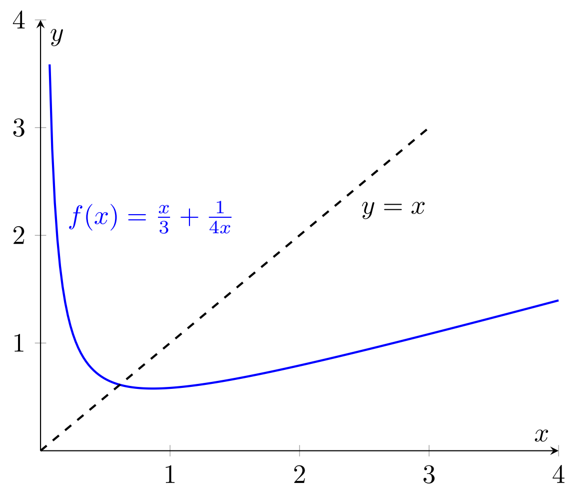
Pour chacune des fonctions et chacun des graphes suivants :

- Construire les quatre premiers termes de la suite
- Conjecturer la limite de la suite (U_n)

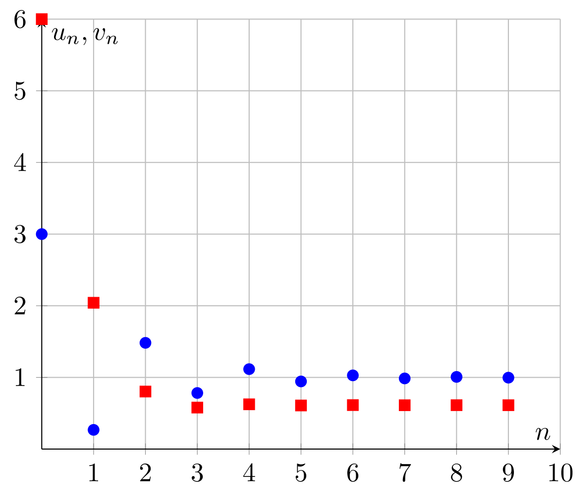
1. $U_{n+1} = 2 - \sqrt{U_n}$ et $U_0 = 3$



2. $V_{n+1} = \dfrac{V_n}{3} + \dfrac{1}{4V_n}$ et $V_0 = 6$



3. Déterminer le nuage de point correspond aux suites (U_n) et (V_n)



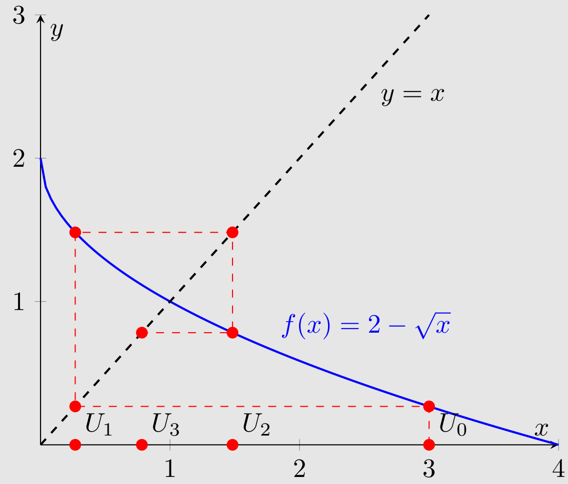
Correction :

1. La suite (U_n) semble converger vers le point d'intersection de f et de la courbe $y = x$ On cherche donc à résoudre : On note l le réel tel que $U_{n+1} = U_n$

$$\begin{cases} U_{n+1} & = U_n = l \\ U_{n+1} & = f(U_n) \end{cases}$$

On cherche donc à résoudre

$$l = f(l)$$



$$
\begin{aligned}
l = f(l) &\Leftrightarrow l = 2 - \sqrt{l} \\
&\Leftrightarrow l + \sqrt{l} - 2 = 0
\end{aligned}
$$

On poste $L = \sqrt{l}$:

$$l + \sqrt{l} - 2 = 0 \implies L^2 + L - 2 = 0$$

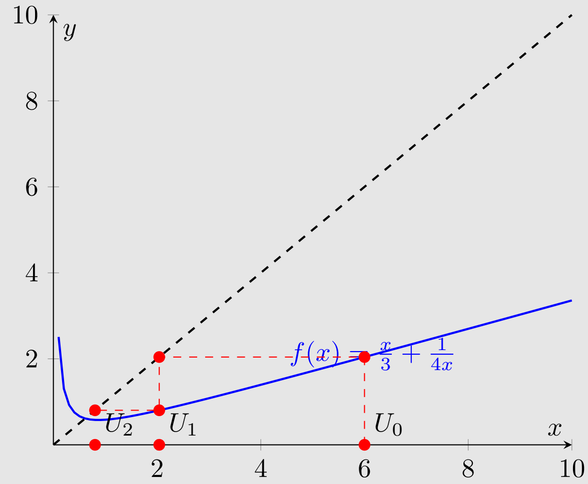
Les racines du polynôme $L^2 + L - 2 = 0$ sont 1 et -2. -2 étant négatif l'équation $\sqrt{l} = -2$ n'admet pas de solution.
On obtient donc $l = 1$
La limite de la suite (U_n) semble être 1

2. La suite (U_n) semble converger vers le point d'intersection de f et de la courbe $y = x$ On cherche donc à résoudre : On note l le réel tel que $U_{n+1} = U_n$

$$\begin{cases} U_{n+1} &= U_n = l \\ U_{n+1} &= f(U_n) \end{cases}$$

On cherche donc à résoudre

$$l = f(l)$$



$$
\begin{aligned}
l = f(l) &\Leftrightarrow l = \frac{l}{3} + \frac{1}{4l} \\
&\Leftrightarrow l^2 - \frac{l^2}{3} = \frac{1}{4} \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{3}l^2 = \frac{1}{4} \\
&\Leftrightarrow l^2 = \frac{3}{8} \\
&\Leftrightarrow l = \sqrt{\frac{3}{8}} \text{ ou } -\sqrt{\frac{3}{8}}
\end{aligned}
$$

Or on observe que le point de convergence est positif donc la limite de la suite (U_n) semble être $\sqrt{\frac{3}{8}}$

3. On observe que le nuage de point bleu oscille autour de 1 avec des valeurs qui alternent (supérieure à un, inférieur à 1). Cela correspond bien à la structure en escargot (U_n) construite ci-dessus. De plus la limite de la suite semble bien être 1. Le nuage de point bleu est celui de la suite (U_n)

   Le nuage de point rouge correpond bien à une suite décroissante tendant approximativement vers 0.6 ce nuage de point correpond à la suite (V_n)

Exercice 7 - Sens de variation et bornes

Déterminez le sens de variation des suites suivantes et déterminer si la suite est minorée, majorée et/ou bornée.

a) $a_n = n^2 - 3n + 4$

b) $b_n = \frac{1}{n}$

c) $c_n = (-1)^n$

d) $d_n = \sqrt{n}$

e) $e_n = \frac{1}{2^n}$

f) $f_n = n^3 - 2n^2 + n$

g) $g_n = (-1)^{n+1}n$

Correction :

a) Soit n un entier naturel, $a_n = n^2 - 3n + 4$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (n+1)^2 - 3(n+1) + 4 - (n^2 - 3n + 4) \\ &= n^2 + 2n + 1 - 3n - 3 + 4 - n^2 + 3n - 4 \\ &= 2n - 2 \end{aligned}$$

On observe que $a_{n+1} - a_n$ est positif pour tout $n \geq 1$.
Par conséquent, la suite (a_n) est strictement croissante dès que $n \geq 1$.

Une suite croissante est minorée par son premier terme elle est donc minorée par $a_1 = 2$ pour tout n supérieur à 1 puis $u_0 = 4$. Donc la suite est minorée par 2. On conjecture qu'elle n'est pas majorée. (On ajoute des termes de plus en plus grand)

b) Soit n un entier naturel non nul, $b_n = \frac{1}{n}$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$$

La suite (b_n) est donc strictement décroissante.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, b_n > 0$ la suite est donc minorée par 0.

Puis $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ donc $\frac{1}{n} \leq 1$ la suite est donc majorée par 1.
La suite est minorée et majorée, elle est donc bornée.

c) Soit n un entier naturel, $c_n = (-1)^n$

La suite (c_n) est périodique avec une période de 2. On observe que $c_1 = -1$, $c_2 = 1$, $c_3 = -1$, $c_4 = 1$, et ainsi de suite.
On a $c_1 < c_2$ et $c_2 > c_3$ donc la suite (c_n) n'est ni croissante ni décroissante.

$$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq c_n \leq 1$$

La suites est donc bornée entre 1 et -1.

d) Soit n un entier naturel, $d_n = \sqrt{n}$

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} > 0$$

Donc la suite (d_n) est strictement croissante pour tout $n \geq 1$. Une suite croissante est minorée par son premier terme, la suite est donc minorée par 0. La suite ne semble pas majorée.

e) Soit n un entier naturel, $e_n = \frac{1}{2^n}$

$$\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 2^{n+1}}{2^n \cdot 2^{n+1}} = \frac{2^n(1-2)}{2^n.2^{n+1}} = -\frac{1}{2^{n+1}} < 0$$

La suite (e_n) est donc strictement décroissante. Une suite décroissante est majorée par son premier terme. La suite est donc majorée par 1. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, e_n > 0$ donc la suite est minorée par 0.

f) Soit n un entier naturel, $f_n = n^3 - 2n^2 + n$

Pour déterminer le sens de variation de la suite f_n, on calcule $f_{n+1} - f_n$:

$$\begin{aligned} f_{n+1} - f_n &= (n+1)^3 - 2(n+1)^2 + (n+1) - (n^3 - 2n^2 + n) \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - 4n - 2 + n + 1 - n^3 + 2n^2 - n \\ &= 3n^2 - n \\ &= n(3n-1) \end{aligned}$$

n est positif et 3n-1 est positif pour tout n supérieur à 1. Donc $f_{n+1} - f_n$ est positif pour tout $n \geq 1$. Par conséquent, la suite (f_n) est strictement croissante à partir de $n = 1$.

$\forall n \in \mathbb{N}, f_n > 0$. La suite est donc minorée par zero et ne semble pas majorée.

g) Soit n un entier naturel, $g_n = (-1)^{n+1} n$

On a $g_1 = 1, g_2 = -2et g_3 = 3$ On a donc $g_1 > g_2$ et $g_2 < g_3$. La suite n'est donc ni croissante, ni décroissante. Elle ne semble pas bornée.

À retenir

Pour déterminer le sens de variation d'une suite il faut calculer la différence $u_{n+1} - u_n$ et la comparer à 0. Une suite peut être croissante ou décroissante à partir d'un certain rang.

Une suite croissante est minorée par son premier terme, une suite décroissante est majorée par son premier terme.

Exercice 8 - Sens de variation et bornes (2)

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{2^n}{n+1}$$

1. Démontrer que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{n}{n+2}$$

2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$

Correction :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{2^{n+1}}{n+2}}{\frac{2^n}{n+1}} \\ &= \frac{2^{n+1}(n+1)}{(n+2)2^n} \\ &= \frac{2(n+1)}{n+2} \\ &= \frac{2n+2}{n+2} \\ &= \frac{(n+2)+n}{n+2} \\ &= 1+\frac{n}{n+2}\end{aligned}$$

On déduit de la question précédente que :

$$n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$$

Donc la suite (u_n) est croissante.

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq u_0 = 1$$

Exercice 9 - Sens de variation et fonctions

On définit la suite (w_n) comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{n^2}{3^n}$$

1. Pour tout entier naturel n, calculer $w_{n+1} - w_n$
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f : x \mapsto -2x^2 + 2x + 1$$
étudier le signe de f
3. En déduire à partir de quel rang la suite est décroissante

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned}w_{n+1} - w_n &= \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} - \frac{n^2}{3^n} \\ &= \frac{n^2+1+2n-3n^2}{3^{n+1}} \\ &= \frac{-2n^2+2n+1}{3^{n+1}}\end{aligned}$$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$
$$f(x) = -2x^2 + 2x + 1$$

$$\Delta = 4 + 8 = 12$$

$$x_{\pm} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{-4} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$$

x	$-\infty$		$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$		$\frac{2+\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. On a :

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{2} \approx 1.9$$

Donc pour tout n supérieur à 2 :

$$w_{n+1} - w_n = \frac{-2n^2 + 2n + 1}{3^{n+1}} \leq 0$$

La suite (w_n) est donc décroissante à partir de $n = 2$

Exercice 10 - Suites et racines

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n} \quad \text{et} \quad u_0 = 0$$

On admet que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq 3$

1. Calculer $u_{n+1} - u_n$
2. En déduire le sens de variation de la suite

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{6 + u_n} - u_n \\ &= \frac{(\sqrt{6 + u_n} - u_n)(\sqrt{6 + u_n} + u_n)}{\sqrt{6 + u_n} + u_n} \\ &= \frac{6 + u_n - u_n^2}{\sqrt{6 + u_n} + u_n} \end{aligned}$$

2. Le dénominateur étant positif, le signe de $u_{n+1} - u_n$ est celui du numérateur. On pose $P(x)$ le polynôme associé :

$$P(x) = -x^2 + x + 6$$

$$\Delta = 1 + 24 = 25 = 5^2$$

$$x_{\pm} = \frac{-1 \pm 5}{-2} = -2 \text{ ou } 3$$

Le polynôme étant du signe opposé de a entre les racines, on en déduit que :

$$\forall x \in [-2, 3], P(x) \geq 0$$

Or, on admet que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq 3$ Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 6 + u_n - u_n^2 \geq 0$$

La suite (u_n) ets donc croissante.

Exercice 11 - Nature de suites

Déterminer la nature des suites définies sur $\mathbb{N}$ par les relations suivantes :

1. $u : n \mapsto 3 + 4n$.
2. $v : n \mapsto 3^n$
3. $w : n \mapsto \dfrac{4-n}{5}$
4. $e : n \mapsto (n+2)^2 - n^2$
5. $f : n \mapsto 2^{n-2}$
6. $g : n \mapsto 2^n \times 5^n$
7. $h : n \mapsto 4^{2n+1}$
8. $i : n \mapsto 2 \times 3^n + 3^{n+2}$

Correction :

1. Soit n un entier naturel,

$$u_{n+1} = 3 + 4(n+1) = 3 + 4n + 4 = u_n + 4$$

On obtient donc la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n + 4$$

La suite est donc arithmétique de raison 4.

2. Soit n un entier naturel,

$$v_{n+1} = 3^{n+1} = 3 \times 3^n = 3 \times v_n$$

On obtient donc la relation de récurrence

$$v_{n+1} = 3v_n$$

La suite est donc géométrique de raison 3.

3. Soit n un entier naturel,

$$w_{n+1} - w_n = \frac{4-(n+1)}{5} - \frac{4-n}{5} = -\frac{1}{5}$$

On obtient donc la relation de récurrence

$$w_{n+1} = w_n - \frac{1}{5}$$

La suite est donc arithmétique de raison $-\dfrac{1}{5}$.

4. Soit n un entier naturel,

$$\begin{aligned} e_{n+1} - e_n &= (n+3)^2 - (n+1)^2 - (n+2)^2 + n^2 \\ &= n^2 + 9 + 6n - n^2 - 1 - 2n - n^2 - 4 - 4n + n^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

   On obtient donc la relation de récurrence

$$e_{n+1} = e_n + 4$$

   La suite est donc arithmétique de raison 4.

5. Soit n un entier naturel,

$$f_{n+1} = 2^{n-1} = 2 \times 2^{n-2} = 2 \times f_n$$

   On obtient donc la relation de récurrence

$$f_{n+1} = 2f_n$$

   La suite est donc géométrique de raison 2.

6. Soit n un entier naturel,

$$g_{n+1} = 2^{n+1} \times 5^{n+1} = 10 \times 2^n \times 5^n = 10 \times g_n$$

   On obtient donc la relation de récurrence

$$g_{n+1} = 10g_n$$

   La suite est donc géométrique de raison 10.

7. Soit n un entier naturel,

$$h_{n+1} = 4^{2(n+1)+1} = 4^{2n+3} = 4^2 \times 4^{2n+1} = 16h_n$$

   On obtient donc la relation de récurrence

$$h_{n+1} = 16h_n$$

   La suite est donc géométrique de raison 16.

8. Soit n un entier naturel,

$$i_n = 3^n(2 + 3^2) = 11 \times 3^n$$

   On obtient une suite géométrique de la forme $u_0 \times q^n$ avec $u_0 = 11$ et $q = 3$
   La suite est donc géométrique de raison 3.

À retenir

Il faut savoir démontrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique en exprimant u_{n+1} en fonction de u_n.
Il faut parfaitement maitriser les règles sur les puissances pour manipuler les suites géométriques.

Exercice 12 - Calcul de sommes (1)

Soit une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison r et de premier terme u_0.

a) Déterminez l'expression du n-ième terme de cette suite.

b) Déterminez la somme des n premiers termes de (u_n).

c) Répondez aux deux dernières questions pour les suites suivantes :

- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite arithmétique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison 4.
- $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite arithmétique de premier terme $w_1 = 2$ et de raison -6.

Soit une suite géométrique $(z_n)_{n\in}$ de raison q et de premier terme z_1.

d) Déterminez l'expression du n-ième terme de cette suite.

e) Déterminez la somme des n premiers termes de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

f) Répondez aux deux dernières questions pour les suites suivantes :

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite géométrique de premier terme $x_1 = 3$ et de raison 4.
- $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite géométrique de premier terme $y_1 = 2$ et de raison 1.

Correction :

a) D'après le cours, le terme d'indice n de la suite est

$$\forall n \in, u_n = u_0 + nr$$

b) La somme des n premiers termes de la suite (u_n) s'écrit

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} u_i &= \frac{\text{nombre de termes} \times (\text{ 1er terme + dernier terme })}{2} \\ &= n \times \frac{u_0 + u_{n-1}}{2} \\ &= \frac{nu_0}{2} + \frac{n}{2} \times (u_0 + (n-1)r) \\ &= nu_0 + r\frac{n(n-1)}{2}\end{aligned}$$

c) On applique les relations trouvées précédemment.

- Pour la suite (v_n) :

  L'expression du terme d'indice n de la suite est donnée par : $v_n = 3 + 4n$.

  La somme S_v des n premiers termes de la suite (v_n) s'écrit $S_v = 3n + 4\dfrac{n(n-1)}{2} = 2n^2 + n$.
- Pour la suite (w_n) :
  Attention ici, le rang du premier terme est 1 et pas 0 !

  L'expression du terme d'indice n de la suite est donc donnée par : $w_n = 2 - 6(n-1)$.

La somme S_w des n premiers termes de la suite (w_n) s'écrit

$$\begin{aligned} S_w &= \frac{\text{nombre de termes} \times (\text{ 1er terme} + \text{dernier terme })}{2} \\ &= n\frac{w_1 + w_n}{2} \\ &= n\frac{2+2-6(n-1)}{2} \\ &= n(5-3n) \\ &= 5n - 3n^2 \end{aligned}$$

d) D'après le cours, le terme d'indice n de la suite est

$$\forall n \in, z_n = z_1.q^{n-1}$$

e) La somme S_z des n premiers termes de la suite (z_n) s'écrit :

Si $q \neq 1$:

$$S_z = \text{1er terme } \times \frac{1 - q^{\text{ Nombre de termes}}}{1-q}$$

On a donc :
Si $q \neq 1$, $S_z = z_1\dfrac{1-q^n}{1-q}$
Si $q = 1$, cette relation n'est plus valable et la somme devient simplement :

$$S_z = nz_1$$

f) On applique les relations trouvées précédemment.

Pour la suite (x_n), l'expression du terme d'indice n de la suite est donnée par : $x_n = 3 \times 4^n$.
La raison étant différente de 1, la somme S_x des n premiers termes de la suite (x_n) s'écrit :

$$S_x = 3 \times \frac{1-4^n}{1-4} = 4^n - 1$$

.

Pour la suite (w_n), l'expression du terme d'indice n de la suite est donnée par : $w_n = 2.1^n = 2$.

La somme S_w des n premiers termes de la suite (w_n) vaut $S_w = 2n$ car, la raison étant 1, chaque terme de la suite vaut 2.

À retenir

1. Il faut bien faire attention lorsque la suite ne commence pas à u_0 afin d'exprimer correctement le terme général de la suite.
2. Dans le calcul de la somme des termes d'une suite géométrique, il faut bien distinguer le cas où la raison est égale à 1 et le cas où elle est différente de 1.

6.2 Correction des exercices types de terminale

Exercice 1 - Récurrence et suite (1)

On considère une suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Correction : On veut donc démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$.

Initialisation :

Si $n = 0$ alors $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{2+u_0} = \sqrt{3}$
On a bien $u_0 \leq u_1$
La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité :

On suppose la propriété vraie au rang n : $u_n \leq u_{n+1}$

Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$: on cherche donc à démontrer que $u_{n+1} \leq u_{n+2}$

$$\begin{aligned} u_n \leq u_{n+1} &\Leftrightarrow u_n + 2 \leq u_{n+1} + 2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{u_n+2} \leq \sqrt{u_{n+1}+2} \quad \text{par croissance de la fonction racine} \\ &\Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2} \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion :

La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire.
Par conséquent la suite (u_n) est croissante.

Exercice 2 - Récurrence et suite (2)

Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+u_n}$$

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_n \leq 2$

Correction :

Initialisation :

Pour $n = 0$:

$$u_0 = 2$$

On a bien $1 \leq 2 \leq 2$.
La propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité :

Supposons la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire :

$$1 \leq u_n \leq 2$$

Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$:

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+u_n}$$

Sachant que $u_n \geq 1$, on a :

$$1 + u_n \geq 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+u_n} \leq \frac{1}{2}$$

Donc :

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+u_n} \leq 1 + \frac{1}{2} = 1.5 \leq 2$$

De plus, puisque $u_n \leq 2$, on a :

$$1 + u_n \leq 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+u_n} \geq \frac{1}{3}$$

Donc :

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+u_n} \geq 1 + \frac{1}{3} = 1.33 \geq 1$$

Ainsi, on a :

$$1 \leq u_{n+1} \leq 2$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion :

La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire.
Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_n \leq 2$.

Exercice 3 - Récurrence et suite (3)

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 2 \text{ et } u_0 = 0$$

Démontrer que :

$$\forall n \in N, u_n = n^2 + n$$

Correction :

Initialisation :

Pour $n = 0$, on a :

$$u_0 = 0^2 + 0 = 0$$

La propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité :

Supposons la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire :

$$u_n = n^2 + n$$

Montrons qu'elle est encore vraie au rang $n+1$, on cherche à démontrer que

$$u_{n+1} = (n+1)^2 + (n+1)$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 2n + 2 \\ &= n^n + n + 2n + 2\text{par hypothèse de récurrence} \\ &= n^2 + 3n + 2 \end{aligned}$$

D'autre part, développons :

$$(n+1)^2 + (n+1) = n^2 + 1 + 2n + n + 1 = n^2 + 3n + 2$$

On obtient donc bien :

$$u_{n+1} = (n+1)^2 + (n+1)$$

La propriété est vraie au rang $n+1$

Conclusion :

La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire.
Par conséquent, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = n^2 + n$$

Exercice 4 - Récurrence et calcul de somme

Soit pour tout entier naturel n strictement positif,

$$S_n = 1 + 4 + 9 + ... + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Correction : Soit $P_n : S_n = S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- Initialisation ($n = 1$): $S_1 = 1$ et $\frac{1\times(1+1)(2+1)}{6} = 1$, donc P_1 est vraie.
- Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que P_n est vraie. Montrons que P_{n+1} est vraie.

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)(n+1) \text{ car } P_n \text{ est vraie} \\ &= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1\right) \\ &= \frac{n+1}{6}\left(2n^2 + n + 6n + 6\right) \\ \text{Or, } \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} &= \frac{n+1}{6}\left(2n^2 + 7n + 6\right) \\ \text{Donc } S_{n+1} &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \text{ et } P_{n+1} \text{ est vraie} \end{aligned}$$

- Conclusion: Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n$ est vraie.

Exercice 5 - Récurrence et calcul de somme (2)

1. Démontrer que
$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
2. En déduire que
$$\left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$$

Correction :

1. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$
Montrons la propriété par récurrence.

Initialisation :

Si $n = 0$ alors $S_0 = 0^3 = \frac{0^2 \times (0+1)^2}{4} = 0$.
La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité :

On suppose la propriété vraie au rang n : $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Montrons qu'elle est encore vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire que :
$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 \\
&= S_n + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{(n^2 + 4(n+1))(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion :

La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire.
Par conséquent, pour tout entier naturel n, on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

2. On sait que pour tout entier naturel n on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Par conséquent :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \sum_{k=0}^{n} k^3$$

Exercice 6 - VRAI/FAUX sur les limites

Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, justifier.

1. Une suite bornée converge
2. Si (u_n) converge et (v_n) diverge alors la suite $(u_n \times v_n)$ diverge
3. Si (u_n) diverge et (v_n) diverge alors la suite $(u_n + v_n)$ diverge.
4. Si une suite est croissante et majorée par un réel M alros elle converge vers M
5. Si une suite (u_n) n'est pas majorée alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
6. Si une suite est strictement croissante alors elle tend vers $+\infty$
7. Si la suite (u_n) converge alors la suite $(\frac{1}{u_n})$ converge
8. Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle n'est pas majorée
9. Si $(|u_n|)$ converge vers ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ ou (u_n) converge vers $-\ell$.
10. Soit (u_n) une suite qui ne s'annule pas et telle que (u_n) converge vers 0. Alors $(1/u_n)$ tend vers $+\infty$ ou $(1/u_n)$ tend vers $-\infty$.
11. Si (u_n) et (v_n) tendent vers $+\infty$ alors $u_n - v_n$ tend vers 0

Correction :

1. Faux : La suite (u_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$ est une suite bornée car :

$$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq u_n \leq 1$$

mais la suite ne converge pas.

2. Faux : Prenons $u_n = 0$ qui converge et $v_n = n$ qui diverge :

$$u_n \times v_n = 0$$

Donc la suite définie par le produit converge.

3. Faux : prenons $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ qui diverge et $v_n = -- \frac{(-1)^n}{n}$ qui diverge alors :

$$u_n + v_n = 0$$

Donc la suite définie par la somme converge

4. Faux : prenons l'exemple de la suite $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ la suite est majorée par 2, 3 ou même par 1000 et converge vers 1

5. Faux : contre-exemple $u_n = (-2)^n$

6. Faux : contre-exemple $u_n = 1 - \frac{1}{n}$

7. Faux : contre-exemple $u_n = \frac{1}{n}$

8. Vrai : Par l'absurde. Si elle était majorée par M, alors il n'existerait aucun n tel que $u_n > M$, ce qui contredirait la définition.

9. faux : Un contre-exemple est donné par $u_n = (-1)^n$.

10. Faux : Un contre-exemple est donné par $u_n = (-1)^n/n$.

11. Faux : un contre -exemple est donné avec $u_n = n^2$ et $v_n = n$ alors ;

$$u_n - v_n = n^2 - n = n^2(1 - \frac{1}{n}$$

Qui converge vers $+\infty$

Exercice 7 - Limites et encadrement

Soit (b_n) la suite définie, pour tout entier $n \geq 2$, par :

$$b_n = \frac{4n + (-1)^n \cos(n)}{2 - 2n}$$

1. Pour tout entier $n \geq 2$, déterminer un encadrement de b_n
2. En déduire

$$\lim_{n \to +\infty} b_n$$

Correction :

1. Soit $n \geq 2$, nous avons :

$$-1 \leq (-1)^n \cos(n) \leq 1$$

Donc :

$$\frac{4n - 1}{2 - 2n} \leq \frac{4n + (-1)^n \cos(n)}{2 - 2n} \leq \frac{4n + 1}{2 - 2n}$$

Ainsi,

$$\frac{4n - 1}{2 - 2n} \leq b_n \leq \frac{4n + 1}{2 - 2n}$$

2. Calculons les limites :

$$\frac{4n - 1}{2 - 2n} = \frac{4n(1 - \frac{1}{4n})}{-2n(1 - \frac{1}{n})} = -2\frac{1 - \frac{1}{4n}}{1 - \frac{1}{n}}$$

D'où :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{4n - 1}{2 - 2n} = -2$$

De même :

$$\frac{4n+1}{2-2n} = \frac{4n(1+\frac{1}{4n})}{-2n(1-\frac{1}{n})} = -2\frac{1+\frac{1}{4n}}{1-\frac{1}{n}}$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4n+1}{2-2n} = -2$$

D'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = -2$$

Exercice 8 - Limites et encadrement (2)

Soit (b_n) la suite définie, pour tout entier n, par :

$$b_n = \frac{2-\sin^2(n)}{2n^2-3n+5+(-1)^n}$$

1. Pour tout entier n, déterminer un encadrement de b_n
2. En déduire

$$\lim_{n\to+\infty} b_n$$

Correction :

1. Soit n un entier :

$$0 \leq \sin^2(n) \leq 1$$

Donc :

$$1 \leq 2-\sin^2(n) \leq 2$$

Pour le dénominateur :

$$2n^2-3n+4 \leq 2n^2-3n+5+(-1)^n \leq 2n^2-3n+6$$

En combinant ces deux encadrements, nous obtenons :

$$\frac{1}{2n^2-3n+6} \leq \frac{2-\sin^2(n)}{2n^2-3n+5+(-1)^n} \leq \frac{2}{2n^2-3n+4}$$

Ainsi :

$$\frac{1}{2n^2-3n+6} \leq b_n \leq \frac{2}{2n^2-3n+4}$$

2. Calculons les limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n^2-3n+6} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n^2(1-\frac{3}{2n}+\frac{3}{n^2})} = 0$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{2n^2-3n+4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{2n^2(1-\frac{3}{2n}+\frac{2}{n^2})} = 0$$

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$$

Exercice 9 - Calculs de limites et racines

1. $u_n = \dfrac{\sqrt{5n+2}}{4+\sqrt{n}}$

2. $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+2n+3}}{\sqrt{n^2-2n-2}}$

3. $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

4. $u_n = \sqrt{n^2+2n-1}$

Correction :

1. Soit n un entier non nul :
$$u_n = \frac{\sqrt{5n+2}}{4+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n(5+\frac{2}{n})}}{\sqrt{n}(1+\frac{4}{\sqrt{n}})} = \frac{\sqrt{5+\frac{2}{n}}}{1+\frac{4}{\sqrt{n}}}$$
Donc, $\lim_{n\to\infty} u_n = \sqrt{5}$.

2. Soit n un entier non nul :
$$u_n = \frac{\sqrt{n^2(1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2})}}{\sqrt{n^2(1-\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2})}} = \frac{n\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}}{n\sqrt{1-\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}}} = \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}}{\sqrt{1-\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}}}$$
Donc, $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$.

3. Soit n un entier :
$$u_n = \frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{(n+2-n)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$
Donc, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

4. Soit n un entier non nul :
$$u_n = \sqrt{n^2(1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2})} = n\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}$$
Donc, $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 10 - Calculs de limites

Déterminer les limites des suites (u_n) suivantes :

1. $u_n = \dfrac{5n^2+4n-2}{3n+2}$

2. $u_n = \dfrac{n^2+6n+8}{3-n}$

3. $u_n = 3-n+(-1)^n$

4. $u_n = 4 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$

Correction :

1. Soit n un entier non nul :

$$u_n = \frac{5n^2+4n-2}{3n+2} = \frac{5n^2(1+\frac{4}{5n}-\frac{2}{5n^2})}{n(3+\frac{2}{n})} = \frac{5n(1+\frac{4}{5n}-\frac{2}{5n^2})}{3+\frac{2}{n}}$$

Donc, $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

2. Soit n un entier non nul :

$$u_n = \frac{n^2+6n+8}{3-n} = \frac{n^2(1+\frac{6}{n}+\frac{8}{n^2})}{-n(1-\frac{3}{n})} = -n\frac{1+\frac{6}{n}+\frac{8}{n^2}}{1-\frac{3}{n}}$$

3. Soit n un entier :

$$u_n = 3-n+(-1)^n$$

$$u_n \leq 4-n \text{ et } \lim_{n\to\infty} 4-n = -\infty$$

Donc, par théorème de comparaison, $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

4. Soit n un entier non nul :

$$u_n = 4 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = 4 \times \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = 6\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

Or $\lim_{n\to\infty}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = 1$ Donc, $\lim_{n\to\infty} u_n = 6$.

Exercice 11 - Calculs de limites-pêle-mêle

Donner les limites des suites suivantes:

1. $\dfrac{n^2+2}{n+7}$
2. $\dfrac{\sqrt{n^2+5}}{3n+7}$
3. $\dfrac{2^n-1}{3^n-2}$
4. $\dfrac{n^3+2n^2+n+5}{2n+2}$
5. $\dfrac{1+2+3+...+n}{2n^2}$
6. $u_n = n-n^2$
7. $e^n(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})$
8. $\dfrac{n}{\ln(n)}$
9. $\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$
10. $(\dfrac{2}{\pi})^n$

11. $\dfrac{1}{\cos^n\left(\frac{1}{2}\right)}$

12. $5n + (-1)^n$

13. $\dfrac{\cos(n)}{n^3}$

14. $\dfrac{\cos(n)}{n}$

15. $\dfrac{4n}{n^2 + n\sin(n)}$

Correction :

1. On remarque une forme indéterminée du type "$\frac{\infty}{\infty}$".
Soit n un entier naturel,
$$u_n = \frac{n^2(1+2/n^2)}{n(1+7/n)} = n\frac{1+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{7}{n}}$$
   - $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{2}{n^2} = 1$
   - $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{7}{n} = 1$
   - $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$

   Donc, par produit de limites, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. On remarque une forme indéterminée du type "$\frac{\infty}{\infty}$".
Soit n un entier naturel différent de $\frac{-7}{3}$,
$$u_n = \frac{\sqrt{n^2+5}}{3n+7} = \frac{n\sqrt{1+\frac{5}{n^2}}}{3n(1+\frac{7}{3n})} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{1+\frac{5}{n^2}}}{1+\frac{7}{3n}}$$
   - $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{7}{3n} = 1$
   - $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{5}{n^2}} = 1$

   Donc, par produit de limites, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{3}$.

3. On remarque une forme indéterminée du type "$\frac{\infty}{\infty}$".
Soit n un entier naturel,
$$u_n = \frac{2^n-1}{3^n-2} = \frac{2^n(1-\frac{1}{2^n})}{3^n(1-\frac{2}{3^n})} = (\frac{2}{3})^n \times \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{2}{3^n}}$$
   - $\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{2^n} = 1$
   - $\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{2}{3^n} = 1$
   - $\lim_{n\to+\infty} (\frac{2}{3})^n = 0$

   Donc, par produit et quotient de limites, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4. On remarque une forme indéterminée du type "$\frac{\infty}{\infty}$".
   Soit n un entier naturel différent de -1,

$$u_n = \frac{n^3 + 2n^2 + n + 5}{2n+2} = \frac{n^3(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^3})}{n(2 + \frac{2}{n})} = \frac{n^2(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^3})}{2 + \frac{2}{n}}$$

   - $\lim_{n\to+\infty} 2 + \frac{2}{n} = 2$
   - $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^3} = 1$
   - $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

   Donc, par produit de limites, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

5. On remarque une forme indéterminée du type "$\frac{\infty}{\infty}$".
   Soit n un entier naturel différent de 0,

$$u_n = \frac{1+2+3+...+n}{2n^2} = \frac{n(n+1)}{4n^2} = \frac{n^2+n}{4n^2} = \frac{n^2(1+\frac{1}{n})}{4n^2} = \frac{1+\frac{1}{n}}{4}$$

   - $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$

   Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{4}$

6. On remarque une forme indéterminée du type "$\infty - \infty$".
   Soit n un entier naturel,

$$u_n = n^2\left(\frac{1}{n} - 1\right)$$

   - $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} - 1 = -1$
   - $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

   Donc, par produit de limites, $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

7. On remarque une forme indéterminée du type "$\infty \times 0$".
   Soit n un entier naturel,

$$u_n = \frac{e^n}{n}(1 - \frac{1}{n})$$

   - $\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$
   - $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$ par croissance comparée.

   Par produit de limites, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

8. On sait que $\frac{\ln(n)}{n}$ a pour limite 0. Donc $\frac{n}{\ln(n)}$ a pour limite $+\infty$.

9. On remarque une forme indéterminée du type "$\infty - \infty$".
   Soit n un entier naturel, on multiplie par la quantité conjuguée:

$$u_n = (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})\frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$$

   Puis on reconnaît une identité remarquable au numérateur,

$$u_n = \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$$

- $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+2}+\sqrt{n} = +\infty$

Par quotients de limite, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

10. $0 < \frac{2}{\pi} < 1$ donc la suite $(\frac{2}{\pi})^n$ converge vers 0
11. $0 < \cos(\frac{1}{2}) < 1$ donc la suite $(\cos^n(\frac{1}{2}))$ converge vers 0 puis $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
12. Soit n un entier naturel,
$5n-1 < 5n+(-1)^n$ et $\lim_{n\to+\infty} 5n-1 = +\infty$

    D'après le théorème de comparaison des limites, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
13. Soit n un entier naturel non nul,
$$-\frac{1}{n^3} < \frac{\cos(n)}{n^3} < \frac{1}{n^3}$$
    - $\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n^3} = 0$
    - $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$

    D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$
14. $$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos(n) \leq 1 \implies \frac{-1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$$
    Or, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

    D'après le théorème des gendarmes, (u_n) a pour limite 0.
15. Soit n un entier naturel non nul,
$$u_n = \frac{4}{n\left(1+\frac{\sin(n)}{n}\right)}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \sin(n) \leq 1 \implies \frac{-1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$
    Or, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

    D'après le théorème des gendarmes, $(\frac{\sin n}{n})$ a pour limite 0.
    $\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{\sin n}{n} = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} n(1+\frac{\sin n}{n}) = +\infty$ puis $\lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n\left(1+\frac{\sin(n)}{n}\right)} = 0$

    Donc (u_n) tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$

Exercice 12 - Calculs de limites et sommes

Déterminer les limites des suites (u_n) suivantes :

1. pour tout n entier naturel :
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$
2. Pour tout n entier naturel :
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} (\frac{4}{3})^k$$

Correction :

1. Soit n un entier naturel :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{(1-\frac{1}{2})} = 2 \times (1-(\frac{1}{2})^n)$$

   Or, Donc

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 2$$

   Donc, $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$.

2. Soit n un entier naturel :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} (\frac{4}{3})^k = \frac{1-(\frac{4}{3})^n}{(1-\frac{4}{3})} = -3 \times (1-(\frac{4}{3})^n)$$

   Or,

$$\lim_{n\to\infty} (1-(\frac{4}{3})^n) = -\infty$$

   Donc, $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 13 - Suite et sommes

Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{3^i}$$

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n)
2. Etablir l'expression du terme général de la suite (u_n)
3. Déterminer la limite de la suite (u_n)

Correction :

1. Soit n un entier naturel,

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{3^i} - \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{3^i} = \frac{1}{3^{n+1}}$$

   $u_{n+1} - u_n \geq 0$. La suite (u_n) est donc croissante.

2. Soit n un entier naturel, u_n est la somme des n+1 premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 1$

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{3}{2} \times (1-(\frac{1}{3})^{n+1}) \\ &= \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \times (\frac{1}{3})^{n+1} \end{aligned}$$

3. $0 < \frac{1}{3} < 1$ donc la suite géométrique $n \mapsto -\frac{3}{2} \times (\frac{1}{3})^{n+1}$ converge vers 0.
   On conclut donc par opérations sur les limites que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{2}$

Exercice 14 - Somme et factorisation de $a^n - b^n$

Soient a et b deux réels,
On cherche une expression factorisée de :

$$a^n - b^n$$

1. On définit S_n par pour tout entier naturel n non nul :

$$S_n = 1 + \frac{b}{a} + (\frac{b}{a})^2 + ... + (\frac{b}{a})^{n-1}$$

   Calculer S_n

2. En déduire une forme factorisée de $a^n - b^n$
3. Factoriser :
   - $P(x) = x^4 - 1$
   - $P(x) = x^3 - 8$

Correction :

1. S_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{b}{a}$ donc :

$$S_n = \frac{1 - (\frac{b}{a})^n}{1 - \frac{b}{a}}$$

$$S_n = \frac{\frac{a^n - b^n}{a^n}}{\frac{a-b}{a}}$$

$$S_n = \frac{a^n - b^n}{a^{n-1}(a-b)}$$

2. D'après la question précédente on obtient :

$$a^n - b^n = (a-b)(S_n \times a^{n-1})$$

   En remplaçant S_n par son expression on obtient :

$$S_n = (a-b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + b^2a^{n-3} + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

3.
   - $P(x) = x^4 - 1$ donc $a = x$, $b = 1$ et $n = 4$ d'après la formule démontrée ci-dessus on obtient :

$$(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)$$

   - $P(x) = x^3 - 2^3$ donc $a = x$, $b = 2$ et $n = 3$ d'après la formule démontrée ci-dessus on obtient :

$$P(x) = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

Exercice 15 - Somme télescopique

Soit (c_n) la suite définie, pour tout entier $n \geq 1$, par :

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

a) Soit un entier k tel que $1 \leq k \leq n$. Montrer que :

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$$

b) En déduire une expression simplifiée de c_n.

1. Calculer alors $\lim_{n\to\infty} c_n$.

Correction :

a) Soit un entier k tel que $1 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) &= \frac{1}{2}\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{2}\frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{k+2-k}{k(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{1}{k(k+1)(k+2)}\end{aligned}$$

b)

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$$

En simplifiant par télescopage la première somme, il reste le premier et le dernier terme :

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n+1})$$

En simplifiant par télescopage la deuxième somme, il reste le premier et le dernier terme :

$$c_n = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = -\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2})$$

Donc :

$$c_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

1. Calculer alors $\lim_{n\to\infty} c_n$:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{4}$$

Exercice 16 - Suite auxiliaire et suite homographique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{2u_n+3}{u_n+4}$ et $u_0 = 0$.

1. Calculer u_1 et u_2. La suite est-elle arithmétique ? Géométrique ?
2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$. Montrer que (v_n) est géométrique.
3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

Correction :

1. $u_1 = \frac{3}{4}$, $u_2 = \frac{18}{19}$. On remarque que $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$, et $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$. La suite n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. Soit n un entier naturel,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} \\ &= \frac{u_n - 1}{u_n + 4} \times \frac{u_n + 4}{5u_n + 15} \\ &= \frac{u_n - 1}{5u_n + 15} \\ &= \frac{1}{5} \times v_n \end{aligned}$$

   donc la suite (v_n) est géométrique, de raison $1/5$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{-1}{3}$.

3. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{-1}{3} \times \dfrac{1}{5^n}$. Puis, pour n un entier naturel,

$$\begin{aligned} v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} &\implies u_n - 1 = v_n u_n + 3v_n \\ &\implies u_n(1 - v_n) = 3v_n + 1 \\ &\implies u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 - v_n} \end{aligned}$$

   Ainsi,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1 - \dfrac{1}{5^n}}{1 + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{5^n}} \\ &= \frac{5^n - 1}{5^n + \dfrac{1}{3}} \end{aligned}$$

Exercice 17 - Suite arithmético-géometrique

Soit la suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 2$

a) Cette suite est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?

b) Déterminez la solution x_s de l'équation suivante : $x = 0,5x + 2$

c) Soit la suite v_n définie par $v_n = u_n - x_s$. Quelle est la nature de cette suite ?

d) En déduire l'expression explicite de la suite u_n et déterminer la somme des n premiers de ces termes.

Correction :

a) Déterminons si la suite est arithmétique en examinant les différences entre deux termes consécutifs :

   Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_1 - u_0 = 2.5 - 1 = 1.5$ et $u_2 - u_1 = 2.75 - 1.5 = 1.25$

La différence entre les termes n'est pas constante, donc la suite n'est pas arithmétique.

Déterminons si la suite est géometrique en examinant le quotient entre deux termes consécutifs :

$$\frac{u_1}{u_0} = 2,5 \text{ et } \frac{u_2}{u_1} = 3,25$$

Le quotient entre deux termes consecutifs n'est pas constant donc la suite n'est pas géométrique.
La suite n'est ni géométrique ni arithmétique.

b)

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{2}x + 2 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 2 \\ &\Leftrightarrow x = 4 \end{aligned}$$

La solution de l'équation est $x_s = 4$.

c) Soit n un entier,
$v_n = u_n - 4$, calculons v_{n+1}

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = 0,5u_n + 2 - 4 = 0,5u_n - 2 = \frac{1}{2}v_n$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$

d) (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ donc son terme général s'exprime :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0(\frac{1}{2})^n = -3 \times (\frac{1}{2})^n$$

Puis $v_n = u_n - x_s$ donc $u_n = v_n + x_s$
On obtient donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -3 \times (\frac{1}{2})^n + 4$$

La somme des n premiers termes de u se décompose comme la somme des termes d'une suite géométriques de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme -3 et la somme d'une suite constante de valeur 4.

$$S_u = -3 \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{\frac{1}{2}} + 4n = -6 \times (1 - (\frac{1}{2})^n) + 4n$$

À retenir

Pour démontrer qu'une suite n'est pas arithmétique (respectivement géométrique) il faut touver deux différences (respectivement quotient) de termes consécutifs différents.

L'exercice des suites arithmético-géométrique est un grand classique qu'il faut maîtriser !

Exercice 18 - Suites arithmético-géométriques

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$ et $u_0 \in \mathbb{R}$. On qualifie cette suite d'arithmético-géométrique.

1. Si $a = 1$, quelle suite reconnaissez-vous ? Même question si $b = 0$.

On supposera dans la suite que $a \neq 1$ et $b \neq 0$

2. Soit l la solution de l'équation $l = al + b$. Déterminer l. On appelle cette solution le point fixe.
3. On définit pour tout entier naturel $v_n = u_n - l$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
4. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Correction :

1. Si $a = 1$, (u_n) est une suite arithmétique de raison b. Si $b = 0$, (u_n) est une suite géométrique de raison a.
2. $$l = al + b \Leftrightarrow l = \frac{b}{1-a} \text{ car } a \neq 1$$
3. Soit n un entier naturel,
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - l \\ &= au_n + b - l \\ &= a\,(u_n - l) + al + b - l \\ &= av_n + (a-1)l + b \\ &= av_n - b + b \\ &= av_n \end{aligned}$$
donc (v_n) est géométrique de raison a et premier terme $u_0 - l$.
4. Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n = a^n(u_0 - l)$. On en déduit que pour tout entier naturel n, $u_n = a^n(u_0 - l) + l$

Exercice 19 - Se ramener à une suite connue

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et la relation :

$$U_{n+1} = \sqrt{2 + (u_n)^2}$$

a) On pose pour tout entier naturel $v_n = (u_n)^2$,
Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.

b) En déduire une expression explicite de u_n

Correction :

a) Soit n un entier naturel,
$$v_{n+1} = \sqrt{2 + (u_n)^2}^2 = +2(u_n)^2 = 2 + v_n$$
La suite (v_n) est donc arithmétique de raison 2.

b) On a $v_0 = u_0^2 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 1 + 2n$
Puis pour tout n, v_n est positif donc $u_n = \sqrt{v_n}$ donc $u_n = \sqrt{1 + 2n}$

À retenir

Dans ce type d'exercice, on pose une suite auxiliaire qui est de nature arithmétique ou géometrique, on détermine sa raison puis on exprime son terme général. On peut alors exprimer le terme général de la première suite à l'aide de la relation entre la suite et la suite auxiliaire.

Exercice 20 - Convergence

Soit (u_n) la suite définie par:

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n}$$

On admet que la suite est positive (se montre facilement par récurrence).

1. Montrer par l'absurde que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.
2. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$$
3. En déduire que la suite converge.

Correction :

1. Supposons qu'il existe $n \geq 1$ tel que $u_n < 1$.

   Alors $1 + 3u_{n-1} \leq 3 + u_{n-1} \implies u_{n-1} < 1$. Donc $u_n < 1 \implies u_{n-1} < 1$.

   On peut remonter comme cela jusqu'à u_0. On obtient donc $u_0 < 1$ ce qui est absurde car $u_0 = 2$ Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.
2.
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n &= \frac{1+3u_n}{3+u_n} - u_n \\ &= \frac{1+3u_n - u_n(3+u_n)}{3+u_n} \\ &= \frac{1+3u_n - 3u_n - u_n^2}{3+u_n} \\ &= \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}\end{aligned}$$
3.
   - $\forall n \in \mathbb{N}, 1 - u_n \leq 0$
   - $\forall n \in \mathbb{N}, 1 + u_n > 0$
   - $\forall n \in \mathbb{N}, 3 + u_n > 0$

   Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq 0$: la suite est donc décroissante. D'après la question 1, elle est aussi minorée. Donc la suite converge.

Exercice 21 - Suite et fonctions - Fonction exponentielle

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{u_n}$ et $u_0 = 0$.

1. Dresser le tableau de variation de la fonction $f(x) = e^x - x$. En déduire son tableau de signe.

2. Montrez par l'absurde que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$. En déduire le sens de variation de la suite.
3. On admet que $\forall x \geq 0, e^x \geq 1 + x$. En déduire la limite de la suite.

Correction :

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et
$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x - 1$$
$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 &\Leftrightarrow e^x \geq 1 \\ &\Leftrightarrow e^x \geq e^0 \\ &\Leftrightarrow x \geq 0 \text{ car la fonction exponentielle est croissante} \end{aligned}$$
Donc f est décroissante sur $]-\infty, 0]$, et croissante sur $[0, +\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Or, $f(0) = 1$. Donc f est positive sur $\mathbb{R}$

2. Supposons qu'il existe n tel que $u_{n+1} < 0$.

Alors $e^{u_n} < 0$, ce qui est impossible (par propriété de l'exponentielle). Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.
On remarque que
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = f(u_n)$$
Puisque $u_n \geq 0, f(u_n) \geq 0$ d'après la question 1. Ainsi :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$$
Donc la suite (u_n) est croissante.

3. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$ on peut donc appliquer l'inégalité donnée à u_n, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq 1 + u_n$$
Soit (v_n) la suite définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 1 + v_n \text{ et } v_0 = u_0$$
Cette suite est arithmétique de raison 1 et de premier terme 0, donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = n$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq v_n = n$. Par théorème de comparaison, (u_n) a pour limite $+\infty$.

Exercice 22 - Suite et fonction (2)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n) \text{ et } u_0 \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$$

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 2x(1-x)$.

1. On admet que $u_n > 0$. Montrer que $u_n \leq 1/2$ pour tout entier naturel n.
2. En déduire que la suite est croissante, puis qu'elle converge.
3. On admet que la limite de u_n vérifie $l = f(l)$. Trouver cette limite.
4. Si $u_0 \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$, les résultat sont-ils encore valables ? Expliquez votre raisonnement.

Correction :

1. $$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -2x^2 + 2x$$
   f est un polynôme du second degré avec $a < 0$. Donc f admet un maximum en $1/2$ qui vaut $f(1/2) = 1/2$.

   Or, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \leq 1/2$, et $u_0 \leq 1/2$.

   Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 1/2$.
2. Soit n un entier naturel,
   $$u_{n+1} - u_n = u_n - 2u_n^2 = u_n(1 - 2u_n)$$
   D'après la question précédente, $u_n \leq 1/2$ donc $1 - 2u_n \geq 0$ et d'après l'hypothèse de l'énoncé $u_n > 0$.

   Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$ on en conclue que la suite est croissante.

   De plus, elle est majorée par $1/2$. Donc elle converge.
3. $$f(l) = l \iff l(1-2l) = 0 \iff l = 0 \text{ ou } l = 1/2$$
   Or, la suite est croissante et $u_0 > 0$ donc la limite ne peut être 0. Donc $l = 1/2$.
4. Les résultats sont encore valables, car si $u_0 \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$, alors $u_1 = f(u_0) \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$. En décalant les indices d'une unité, on retrouve exactement le même cas que précédemment.

Exercice 23 - Suite particulière

On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}^\star$ par :

$$u_1 = 0.63,\ u_2 = 0.6363,\ u_3 = 0.636363\ ...\ u_n = \underbrace{0,63..........63}_{\text{2n chiffres}}$$

Etablir la limite de la suite (u_n).

Correction : Soit n un entier naturel,on note $u_0 = 0$ et

$$u_{n+1} = u_n + \frac{63}{100^{n+1}}$$

Donc

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{63}{100^i} = 63 \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{100})^i$$

$\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{100})^i$ est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{100}$ donc :

$$u_n = \frac{63}{100}\frac{1-(\frac{1}{100})^n}{\frac{99}{100}} = \frac{7\times 9}{9\times 11}\times(1-(\frac{1}{100})^n) = \frac{7}{11}\times(1-(\frac{1}{100})^n)$$

Or $\lim_{n\to+\infty} 1-(\frac{1}{100})^n = 1$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{7}{11}$$

6.3 Correction des problèmes

Problème 1 - Relations de récurrence et suite auxilliaire

Soit (u_n) la suite définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$$

et $u_0 = 0$ son premier terme.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite
2. Que peut-on conjecturer sur l'expression de u_n ?
3. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n < 1$
4. En déduire le sens de variation de la suite (u_n)
5. On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$ Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique.
6. En déduire l'expression explicite de (u_n) en fonction de n.
7. As-t-on démontré la conjecture du 1)b) ?
8. Déterminer la limite de cette suite

Correction :

1. Dans cette question $u_0 = 0$

   (a)
   $$u_0 = 0, u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{2}{3}, u_3 = \frac{3}{4}$$

   (b) On peut donc conjecturer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n}{n+1}$$

2. Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n < 1$:

   Initialisation :

   $u_0 = 0$ donc $0 \leq u_0 < 1$ La relation est vérifiée au rang 0

   Hérédité :
   On suppose que la relation est vraie à un rang n fixé, ainsi,
   $$0 \leq u_n < 1$$

   Démontrons que $0 \leq u_{n+1} < 1$:

$$\begin{aligned}
0 \leq u_n < 1 &\implies -1 < -u_n \leq 0 \\
&\implies 1 < 2 - u_n \leq 2 \\
&\implies \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2-u_n} < 1 \\
&\implies 0 \leq \frac{1}{2-u_n} < 1
\end{aligned}$$

La propriété est donc vérifiée au rang $n+1$

Conclusion :
Par principe de récurrence, la suite propriété est vérifiée pour tout entier naturel.

3. Soit n un entier naturel,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2-u_n} - u_n \\
&= \frac{1-(2-u_n)u_n}{2-u_n} \\
&= \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2-u_n} \\
&= \frac{(u_n-1)^2}{2-u_n}
\end{aligned}$$

Or $2 - u_n > 0$ car $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n < 1$

et $(u_n - 1)^2 \geq 0$ Donc

$$u_{n+1} \geq u_n$$

La suite (u_n) est donc croissante.

4. Soit n un entier naturel,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1}-1} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{2-u_n} - 1} \\
&= \frac{1}{\frac{1-2+u_n}{2-u_n}} \\
&= \frac{2-u_n}{u_n-1}
\end{aligned}$$

Puis calculons : $v_{n+1} - v_n$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{2-u_n}{u_n-1} - \frac{1}{u_n-1} \\ &= \frac{2-u_n-1}{u_n-1} \\ &= \frac{1-u_n}{u_n-1} \\ &= -1 \end{aligned}$$

D'où :

$$v_{n+1} = v_n - 1$$

(v_n) est donc arithmétique de raison -1.

5. On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -1 - n$$

Puis on exprime (u_n) en fonction de (v_n) :

$$\begin{aligned} v_n = \frac{1}{u_n-1} &\Leftrightarrow \frac{1}{v_n} = u_n - 1 \\ &\Leftrightarrow u_n = 1 + \frac{1}{v_n} \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$u_n = 1 - \frac{1}{1+n} = \frac{n}{n+1}$$

6. On a bien démontré la conjecture du 1)b).
7. $u_n = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

À retenir

Cet exercice est très complet, il permet de manier relation de récurrence et suite auxiliaire. Il faut savoir le faire !

Problème 2 - Systèmes dynamiques

On réalise l'expérience suivante :
Trois urnes notées U,V et W sont remplies de jetons. On note respectivement u_n, v_n et w_n le nombre de jetons contenus dans l'urne U, V et W à la n-ième itération.
A chaque itération, les manipulation réalisées sont les suivantes :

- On garde la moitié des jetons de l'urne U et on transfère la moitié vers l'urne W
- On garde la moitié des jetons dans l'urne V et on transfère la moitié vers l'urne W
- On transfère la moitié des jetons de W dans V et l'autre moitié dans U

On réalise cette manipulation jusqu'à ce que le partage soit impossible.
On note u_0, v_0 et w_0 le nombre de jetons initial dans chacune des boîtes.

1. On suppose que les n premières manipulations sont réalisables. A quelle condition la (n+1)-ème manipulation est-elle réalisable ?
2. Dans la cas où la condition précédente est réalisée, exprimer u_{n+1}, v_{n+1} et w_{n+1} en fonction de u_n, v_n et w_n

3. On pose pour tout entier n :

$$e_n = u_n + v_n + w_n$$

$$f_n = u_n + v_n - 2w_n$$

   a) Démontrer que la suite (e_n) est constante
   b) Démontrer que la suite (f_n) est géométrique.
   c) Démontrer que $e_n - f_n = 3w_n$
   d) En déduire l'expression de w_n en fonction de n.
   e) Déterminer la limite de (w_n) et interpréter

Correction :

1. La (n+1)-ème itération est réalisable si et seulement si un partage est possible. C'est-à-dire si et seulement si u_n, v_n et w_n sont pairs.
2. a) Soit n un entier naturel,
   On obtient :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}w_n$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2}w_n$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n$$

   b) Soit n un entier naturel :

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= u_{n+1} + v_{n+1} + w_{n+1} \\ &= \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}w_n + \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2}w_n + \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n \\ &= u_n + v_n + w_n \\ &= e_n \end{aligned}$$

   On en déduit que le suite (e_n) est constante.
3. (a) Soit n un entier naturel,

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= u_{n+1} + v_{n+1} - 2w_{n+1} \\ &= \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}w_n + \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2}w_n - 2(\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n) \\ &= -\frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}v_n + w_n \\ &= -\frac{1}{2}f_n \end{aligned}$$

   Donc (f_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$

   (b) Soit n un entier naturel,

$$e_n - f_n = u_n - u_n + v_n - v_n + w_n - (-2w_n) = 3w_n$$

   (c) Soit n un entier naturel, La suite e_n étant constante,

$$e_n = e_0 = u_0 + v_0 + w_0$$

La suite (f_n) étant géométrique de raison $-\frac{1}{2}$:

$$f_n = f_0 \times (-\frac{1}{2})^n = (u_0 + v_0 - 2w_0) \times (-\frac{1}{2})^n$$

On obtient donc :

$$w_n = \frac{1}{3}(u_0 + v_0 + w_0 - (u_0 + v_0 - 2w_0) \times (-\frac{1}{2})^n)$$

4. $\lim_{n\to+\infty}(\frac{-1}{2})^n = 0$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \frac{1}{3}(u_0 + v_0 + w_0)$$

Lorsque l'on réalise un grand nombre de manipulation, l'urne W tend à contenir un tiers des jetons initialement présents.

Problème 3 - Poulet rôti

Au marché du dimanche matin, un boucher vend des poulets rôtis. Il cherche à connaître le comportement des clients afin d'anticiper ses commandes. Il a remarqué que :

- quand un client achète un poulet, il en reprendra la semaine suivante 7 fois sur 10 ;
- quand un client n'achète pas de poulet, une fois sur cinq il en prend la fois suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un poulet le premier dimanche et pour $n \in \mathbb{N}*$, on note A_n l'événement : "le client achète un poulet rôti le n-ième dimanche".

a) Représenter les 3 premiers dimanches sous forme d'un arbre.

b) Calculer $P(A_3)$.

c) Sachant que le client achète un poulet le 3ème dimanche, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté un le dimanche précédent ?

d) Démontrer que pour tout $n \geq 1$: $P(A_{n+1}) = 0,5P(A_n) + 0,2$.

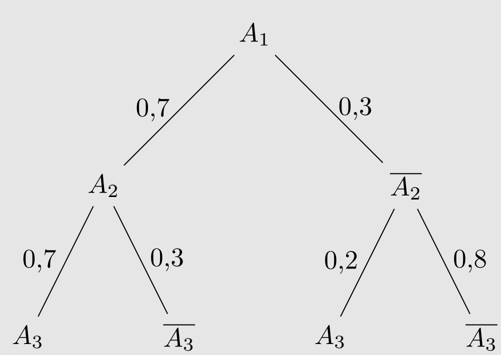
e) On admet que $P(A_n) > 0,4$ pour tout $n \geq 1$. Démontrer que la suite $(p(A_n))$ est décroissante.

f) Montrer que la suite (u_n) définie comme $\forall n \in \mathbb{N}* \quad u_n = P(A_n) - 0,4$ est géométrique.

g) En déduire la limite de $(P(A_n))$ quand n tend vers l'infini et interpréter.

Correction :

a) L'arbre représentant les 3 premiers dimanches est :



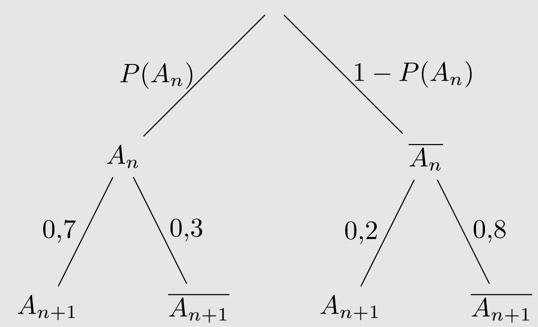
b) On applique la formule des probabilités totales en sachant que A_2 et $\overline{A_2}$ forment un système complet d'événements, puis on s'aide de l'arbre :

$$P(A_3) = P(A_3 \cap A_2) + P(A_3 \cap \overline{A_2}) = 0,7 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,3 = 0,55$$

c) On s'intéresse ici à $P_{A_3}(A_2)$. On a

$$P_{A_3}(A_2) = \frac{P(A_2 \cap A_3)}{P(A_3)} = \frac{0,7 \cdot 0,7}{0,55} = \frac{49}{55} \approx 0,89$$

d) On peut représenter la situation ainsi :



Comme A_n et $\overline{A_n}$ forment un système complet d'événements, alors

$$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap \overline{A_n}) = 0,7P(A_n) + 0,2(1 - P(A_n)) = 0,2 + 0,5P(A_n)$$

e) On a pour tout $n \geq 1$:

$$P(A_{n+1}) - P(A_n) = 0,2 - 0,5P(A_n) = 0,5(0,4 - P(A_n))$$

En sachant que pour tout $n \geq 1$ on a $P(A_n) > 0,4$, on a également pour tout $n \geq 1$

$$P(A_{n+1}) - P(A_n) < 0$$

La suite $(P(A_n))$ est donc décroissante.

f) On a pour tout $n \in \mathbb{N}*$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= P(A_{n+1}) - 0,4 \\ &= (0,5P(A_n) + 0,2) - 0,4 \\ &= 0,5P(A_n) - 0,2 \\ &= 0,5(P(A_n) - 0,4) \\ &= 0,5(u_n) \end{aligned}$$

On en déduit que la suite (u_n) est géométrique de raison $1/2$.

g) Comme (u_n) est géométrique de raison $1/2 < 1$, elle tend vers 0 quand n tend vers l'infini. On a alors

$$\lim_{n \to +\infty} P(A_n) = \lim_{n \to +\infty} (u_n + 0,4) = 0,4 + \lim_{n \to +\infty} u_n = 0,4$$

Au bout d'un certain grand nombre de dimanches, la probabilité qu'un client ayant acheté un poulet le premier dimanche achète un poulet au dimanche suivant tend vers 0,4.

À retenir

On a ici commencé par étudier les premiers rangs à la main puis on a généralisé notre raisonnement et établi une relation de récurrence reliant la probabilité d'un événement au rang n et au rang $n+1$. Ensuite, les méthodes sur les suites ont été exploitées (notamment suites adjacentes).

Problème 4 - Suites et probabilités

On réalise un jeu avec un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6.

Soit k est un entier compris entre 1 et 6, on désigne par P_k la probabilité d'obtenir, lors d'un lancer, la face numérotée k.

Le dé utilisé dans ce jeu est pipé de telle sorte que :

- Les six faces ne sont pas équiprobables
- Les nombres $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ sont, dans cet ordre, six termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r
- Les nombres P_1, P_2, P_4 sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

1. Démontrer que pour tout entier k compris entre 1 et 6,
$$P_k = \frac{k}{21}$$
2. Lors du jeu, le dé est lancé une fois. Déterminer la probabilité des évènements suivants :
   - A : "Le nombre obtenu est impair"
   - B: "le nombre obtenu est inférieur ou égal à 4"
   - C: "le nombre obtenu est 2 ou 5 "
3. Déterminer la probabilité que le nombre soit inférieur ou égal à 4 sachant qu'il est impair.
4. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Les événements A et C sont-ils indépendants ?

Correction :

1. On sait que :
   - La somme des probabilités est égale à 1 d'où :
   $$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1$$
   D'autre part, On sait que les nombres $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ sont, dans cet ordre, six termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r d'où d'après la formule de la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :
   $$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = \frac{6(P_1 + P_6)}{2}$$
   Puis $P_6 = P_1 + 5r$ donc :
   $$6P_1 + 15r = 1$$

- Puis les nombres $P_1 et P_2$ sont, dans cet ordre, deux termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q. On a donc :

$$P_2 = q \times P_1 \Leftrightarrow q = \frac{P_2}{P_1}$$

De plus, $P_2 = P_1 + r$ donc :

$$q = \frac{P_1 + r}{P_1}$$

$$P$$

- On a ensuite P_2 et P_4 deux termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q. Donc :

$$P_4 = P_1 \times q^2 \text{ et } P_2 = q \times P_1$$

D'où :

$$q = \frac{P_4}{P_2} = \frac{P_1 + 3r}{P_1 + r}$$

A l'aide des points deux et trois on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{P_1 + r}{P_1} = \frac{P_1 + 3r}{P_1 + r} &\Leftrightarrow (P_1 + r)^2 = P_1(P_1 + 3r) \\ &\Leftrightarrow P_1^2 + r^2 + 2P_1 r = P_1^2 + 3P_1 r \\ &\Leftrightarrow P_1 r = r^2 \\ &\Leftrightarrow P_1 = r \end{aligned}$$

On obtient donc le système de deux équations à deux inconnues P_1 et r :

$$\begin{cases} P_1 = r \\ 6P_1 + 15r = 1 \end{cases}$$

Substituons P_1 par r dans la deuxième équation :

$$6P_1 + 15r = 1 \Leftrightarrow 6r + 15r = 1 \Leftrightarrow 21r = 1 \Leftrightarrow r = \frac{1}{21}$$

Comme $P_1 = r$, nous avons :

$$P_1 = \frac{1}{21}$$

Donc, la solution du système est :

$$\begin{cases} P_1 = \frac{1}{21} \\ r = \frac{1}{21} \end{cases}$$

Puis comme Les nombres $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ sont, dans cet ordre, six termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r, on obtient bien que pour tout entier k compris entre 1 et 6,

$$P_k = P_1 + (k-1)r = \frac{1}{21} + \frac{k-1}{21} = \frac{k}{21}$$

2. - A : "Le nombre obtenu est impair"

$$P(A) = P(1) + P(3) + P(5) = \frac{1}{21} + \frac{3}{21} + \frac{5}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

- B: "le nombre obtenu est inférieur ou égal à 4"

$$P(B) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = \frac{1}{21} + \frac{2}{21} + \frac{3}{21} + \frac{4}{21} = \frac{10}{21}$$

- C: "le nombre obtenu est 2 ou 5

$$P(B) = P(2) + P(5) = \frac{2}{21} + \frac{5}{21} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$$

3. On cherche à calculer : $P_A(B)$

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Puis l'intersection de A et B est l'évènement "tirer 1 ou 3"

$$P(A \cap B) = P(1) + P(3) = \frac{1}{21} + \frac{3}{21} = \frac{4}{21}$$

Donc :

$$P_A(B) = \frac{\frac{4}{21}}{\frac{3}{7}} = \frac{4}{21} \times \frac{7}{3} = \frac{4}{9}$$

Problème 5 - Flocon de Von Koch

Le flocon de Von Koch est une figure fractale, construite de la manière suivante:

1. Dessiner un triangle équilatéral de côté 1
2. Découper chaque segment en 3 segments de même longueur
3. Sur chaque petit segment du milieu, dessiner un triangle équilatéral
4. Revenir à l'étape 2

Les premières étapes sont illustrées ci-dessous.

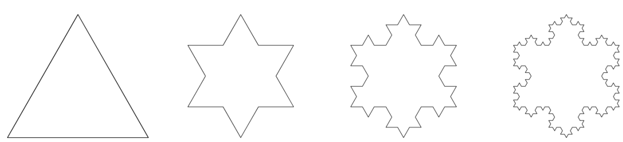


Figure 2: Premières étapes de construction du flocon de Von Koch

1. On note P_n le périmètre du triangle à l'étape n ($P_1 = 3$).

   En observant l'évolution de la longueur d'un segment à l'étape n, et la longueur de ce segment transformé à l'étape $n+1$, déterminer une formule de récurrence pour P_n.

2. Exprimer P_n en fonction de n et trouver sa limite.
3. On note :
   - A_n l'aire de la figure à l'étape n
   - N_n le nombre se segments à l'étape n
   - l_n la longueur d'un petit segment à l'étape n.

   Déterminer N_n en fonction de n, et l_n en fonction de n.

4. A l'aide de ces deux quantités, Déterminer une formule de récurrence pour A_n.
5. En calculant la somme des différences $A_k - A_{k-1}$, déterminer une expression de A_n en fonction de n
6. Déterminer sa limite.
7. Commentez ces deux résultats.

Correction :

1. Si le segment à l'étape n est de longueur l, la longueur de la forme générée par ce segment à l'étape $n+1$ aura une longueur de :
$$\frac{4}{3}l$$
Ainsi,
$$P_{n+1} = \frac{4}{3}P_n$$
Donc (P_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{3}$ et de premier terme $P_1 = 3$.
2. (P_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{3}$ et de premier terme $P_1 = 3$ donc :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n = 3\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$
Donc le périmètre tend vers $+\infty$ (suite géométrique de raison $q > 1$).
3. - Un segment à l'étape n en génère 4 à l'étape $n+1$. Ainsi :
$$N_{n+1} = 4N_n \text{ et } N_1 = 3$$
(N_n) est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme 3 donc :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, N_n = 3 \times 4^{n-1}$$
   - La longueur d'un petit segment est divisée par 3 à chaque étape. Donc
$$l_{n+1} = \frac{l_n}{3} \text{ et } l_1 = 1$$
(l_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme 1 ainsi :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, l_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
4. L'aire d'un triangle équilatéral de côté a est
$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$
Pour passer de l'aire A_n à A_{n+1}, on rajoute N_n triangles équilatéraux de côté l_{n+1}. Soit
$$A_{n+1} = A_n + N_n \times \frac{l_{n+1}^2\sqrt{3}}{4} = A_n + 3 \times 4^{n-1} \times \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^n$$
Donc
$$A_{n+1} = A_n + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

5. En sommant
$$(A_n - A_{n-1}) + (A_{n-1} - A_{n-2}) + ... + (A_2 - A_1)$$
on obtient la somme
$$\frac{3\sqrt{3}}{16} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^k$$
qui est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique.
Ainsi,
$$A_n - A_1 = \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \frac{4}{9} \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}{1 - \frac{4}{9}}$$
En utilisant
$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$
On obtient
$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{3}{4} \times \frac{4}{9} \times \frac{9}{5} \times \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)\right)$$
soit
$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{3}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)\right)$$
En prenant la limite pour $n \to +\infty$, on a $\lim_{n\to+\infty} A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{8}{5} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$.
6. On remarque donc que cette figure a un périmètre infini mais une aire finie !

Problème 6 - Suites induites

Pour n entier naturel, on définit les fonctions :
$$f_n : x \in [0,1] \mapsto x^n + x - 1$$
1. Montrer qu'il existe un unique réel x_n vérifiant :
$$f_n(x_n) = 0$$
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.
Indication : comparer $f_{n+1}(x_n)$ et $f_{n+1}(x_{n+1})$.
3. En déduire que cette suite converge. On note l sa limite. Montrer que l'on a :
$$\frac{1}{2} \leq l \leq 1$$
4. Montrer que $l = 1$.

Correction :

1. La fonction est f est dérivable car polynomiale et l'on a :
$$f_n'(x) = nx^{n-1} + 1 \geq 0$$
pour tout x compris entre 1 et 2. La fonction f_n est donc strictement croissante sur $[0,1]$.
Ainsi,
   - La fonction f_n est continue car polynomiale sur l'intervalle $[0,1]$.
   - La fonction f_n est strictement croissante sur $[0,1]$.

- On a bien $f_n(0) \leq 0 \leq f_n(1)$ car $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1$ dès que $n \geq 1$.

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel x_n appartenant à $[0,1]$ tel que :

$$f_n(x_n) = 0$$

2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.

Soit $n \in \mathbf{N}$. On a :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x_n) &= x_n^{n+1} + x_n - 1 \\ &= x_n^{n+1} + (x_n^n - x_n - n) + x_n - 1 \\ &= (x_n^{n+1} - x_n^n) + x_n^n + x_n - 1 \\ &= (x_n^{n+1} - x_n^n) + f_n(x_n) \text{ or } f_n(x_n) = 0 \\ &= x_n^{n+1} - x_n^n \\ &= x_n^n(x_n^n \\ &\leq 0 \text{ car } x_n^n \geq 0 \text{ et } x_n^n \leq 0 \\ &\leq f_{n+1}(x_{n+1}) \text{ car } f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, on a pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$f_{n+1}(x_n) \leq f_{n+1}(x_{n+1})$$

et donc par croissance de f_{n+1}, on en déduit que :

$$x_n \leq x_{n+1}$$

ce qui montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante.

3. La suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante et majorée par 1. En vertu du théorème de la limite monotone, cette suite converge donc vers un certain réel l.

De plus, on a :

$$f_n(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}((\frac{1}{2})^{n-1} - 1) < 0$$

dès que $n \geq 1$, donc par croissance de f_n, on a aussi $\frac{1}{2} \leq x_n$.

Ainsi, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{2} \leq x_n \leq 1$$

Et par passage à la limite dans une inégalité, il vient :

$$\frac{1}{2} \leq l \leq 1$$

4. Par l'absurde, on suppose que $l < 1$. On sait que :

$$f_n(x_n) = x_n^n + x^n - 1 = 0$$

Or $0 \leq x_n \leq l < 1$ donc, ce qui montre que

$$0 \leq x_n^n \leq l^n$$

Or, l^n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini puisque $|l| < 1$. Ainsi, en passant à la limite dans la première égalité, il vient :

$$0 + l - 1 = 0$$

ce qui se simplifie en

$$l = 1$$

ce qui est absurde puisqu'on avait supposé $l < 1$. Donc finalement,

$$l = 1$$

À retenir

Cet exercice est un bon entraînement pour maîtriser le raisonnement par l'absurde !

6.4 Correction des problèmes de type BAC

Problème 1 - Exercice de type BAC - Amérique du sud 2017

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve. Cette population est estimée à 12 000 individus en 2016. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60 000 individus.

Partie A : un premier modèle

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an.

L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (v_n) où v_n représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en 2016 + n. On a donc $v_0 = 12$.

1. Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n.
2. Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

Partie B : un second modèle

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = -\frac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n.$$

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = -\frac{1,1}{605}x^2 + 1,1x.$$

   (a) Justifier que g est croissante sur $[0; 60]$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$.

2. On remarquera que $u_{n+1} = g(u_n)$.

   (a) Calculer la valeur arrondie à 10^{-3} de u_1. Interpréter.
   (b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 55$.
   (c) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   (d) En déduire la convergence de la suite (u_n).
   (e) On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$. En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

3. Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle. Il utilise l'algorithme suivant.

Algorithme à compléter :


```
Variables n un entier naturel
u un nombre réel

Traitement n prend la valeur 0
u prend la valeur 12
Tant Que ...
    u prend la valeur ...
    n prend la valeur ...
Fin Tant Que

Sortie Afficher ...
```

Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier r tel que $u_r \geq 50$.

Correction :

Partie A : un premier modèle

1. Soit n un entier naturel.
$$v_{n+1} = v_n + \frac{5}{100}v_n = 1,05v_n.$$
Donc, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 12$ et de raison $q = 1,05$. On en déduit que pour tout entier naturel n,
$$v_n = v_0 \times q^n = 12 \times (1,05)^n.$$

2. Puisque $1,05 > 1$,
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} 12 \times (1,05)^n = +\infty.$$
La population dépassera donc strictement les 60 000 individus à partir d'une certaine année. Le modèle ne répond pas aux contraintes du milieu naturel.

Partie B : un second modèle

1. (a) La fonction g est dérivable sur $[0;60]$ et pour $x \in [0;60]$,
$$g'(x) = -\frac{2,2}{605}x + 1,1.$$
Comme $x \leq 60$,
$$-\frac{2,2}{605}x + 1,1 \geq 0,88 \Rightarrow g'(x) \geq 0.$$
Donc, la fonction g est croissante sur $[0;60]$.

   (b) Soit x un réel.
$$g(x) = x \Leftrightarrow -\frac{1,1}{605}x^2 + 1,1x = x \Leftrightarrow -\frac{1,1}{605}x^2 + 0,1x = 0 \Leftrightarrow x(-\frac{1,1}{605}x + 0,1) = 0$$
$$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{0,1 \times 605}{1,1} \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 55.$$
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $g(x) = x$ sont 0 et 55.

2. (a)
$$u_1 = -\frac{1,1}{605} \times 12^2 + 1,1 \times 12 = 12,938 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$
En 2017, la population est de 12 938 individus.

(b) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 55$.

- Initialisation :

  $u_0 = 12$ et donc $0 \leq u_0 \leq 55$.

  La propriété est donc vérifiée au rang 0
- Hérédité :

  Soit $n \geq 0$. Supposons que $0 \leq u_n \leq 55$.

  Alors, puisque u_n et 55 appartiennent à $[0; 60]$ et que la fonction g est croissante sur $[0; 60]$, on en déduit que :
  $$g(0) \leq g(u_n) \leq g(55)$$
  Donc que :
  $$0 \leq u_{n+1} \leq 55 \quad (\text{puisque } g(0) = 0 \text{ et } g(55) = 55 \text{ d'après la question 1)b)})$$
  .

On a montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 55$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n = u_n\left(-\frac{1,1}{605}u_n + 0,1\right) = \frac{1,1}{605}u_n(55 - u_n).$$
Puisque $u_n \in [0; 55]$, cette dernière expression est positive.

On a donc montré que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Donc, la suite (u_n) est croissante.

(d) La suite est croissante majorée donc elle converge.

(e) Les solutions de $g(l) = l$ ont été trouvées à la question 1)b) :
$$l = 0 \text{ou} l = 55$$
Comme (u_n) est croissante et $u_0 = 12$:
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 12$$
Donc $l = 55$ A long terme la population va se stabiliser à 55 000 individus.

3. **Algorithme à compléter :**


```
Variables n un entier naturel
u un nombre réel

Traitement n prend la valeur 0
u prend la valeur 12
Tant Que u<50 :
    u prend la valeur \frac{-1.1}{605}\times u**2+1.1 \times u
    n prend la valeur n+1
Fin Tant Que

Sortie Afficher n
```

Problème 2 - Exercice de type BAC - Antilles Guyane 2017

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel strictement positif. Le but de l'exercice est d'étudier l'équation

$$(E_n) : \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{n}$$

ayant pour inconnue le nombre réel strictement positif x.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

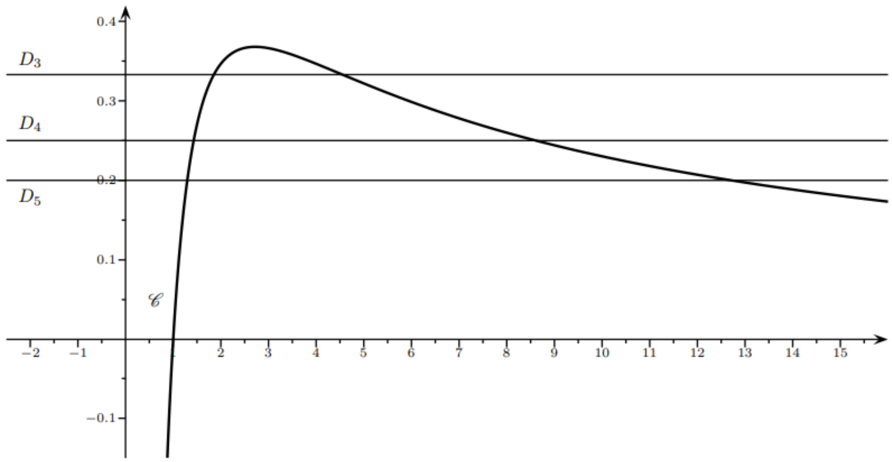
On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$. On a donné en ANNEXE, qui n'est pas à rendre, la courbe représentative C de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Déterminer son maximum.

Partie B

1. Montrer que, pour $n \geq 3$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[1; e]$ notée α_n.
2. D'après ce qui précède, pour tout entier $n \geq 3$, le nombre réel α_n est solution de l'équation (E_n).
   (a) Sur le graphique sont tracées les droites D_3, D_4 et D_5 d'équations respectives $y = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{4}$ et $y = \frac{1}{5}$. Conjecturer le sens de variation de la suite (α_n).
   (b) Comparer, pour tout entier $n \geq 3$, $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_{n+1})$. Déterminer le sens de variation de la suite (α_n).
   (c) En déduire que la suite (α_n) converge. Il n'est pas demandé de calculer sa limite.
3. On admet que, pour tout entier $n \geq 3$, l'équation (E_n) possède une autre solution β_n telle que
$$1 \leq \alpha_n \leq e \leq \beta_n.$$
   (a) On admet que la suite (β_n) est croissante. Établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3,
$$\beta_n \geq \frac{n\beta_3}{3}.$$
   (b) En déduire la limite de la suite (β_n).

Annexe:



Correction :

Partie A

1. Pour $x > 0$,
$$f'(x) = \frac{1}{x} \times x - \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}.$$
Pour tout réel $x > 0$, $x^2 > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(x)$. Or, par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$,
$$1 - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow -\ln(x) > -1 \Leftrightarrow \ln(x) < 1 \Leftrightarrow x < e$$
et de même,
$$1 - \ln(x) < 0 \Leftrightarrow x > e \quad \text{et} \quad 1 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = e.$$
La fonction f est strictement croissante sur $]0, e]$ et strictement décroissante sur $[e, +\infty[$.

2. La fonction f admet un maximum en e et ce maximum est
$$f(e) = \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1}{e}.$$

Partie B

1. Soit $n \geq 3$.

Donc, $n > e$ puis :
$$0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{e}$$

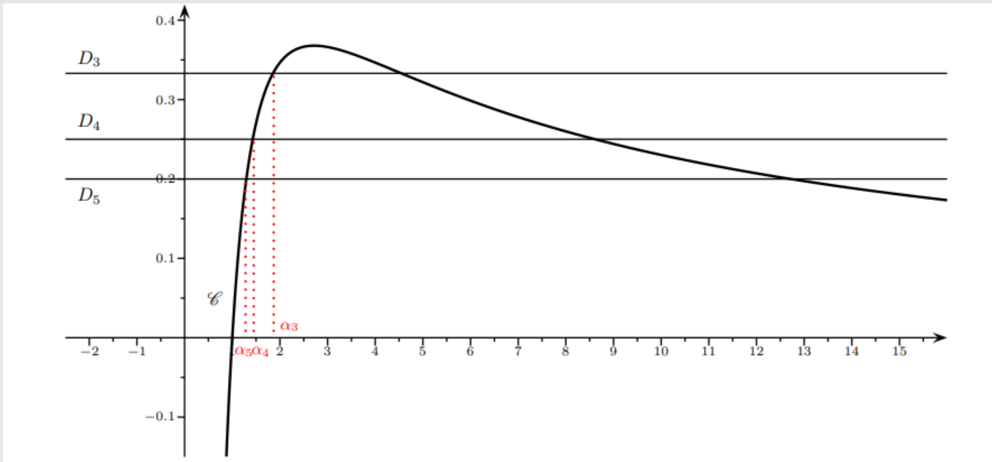
La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1, e]$.

Donc, pour tout réel k de $[f(1), f(e)] = [0, \frac{1}{e}]$, il existe un unique réel x de $[1, e]$ tel que $f(x) = k$.

En particulier, il existe un unique réel α_n de $[1, e]$ tel que $f(\alpha_n) = \frac{1}{n}$.

Ceci montre que l'équation (E_n) admet une unique solution, notée α_n, dans $[1, e]$.

2. (a) α_n est la plus petite des deux abscisses des points d'intersection de la courbe C et de la droite d'équation $y = \frac{1}{n}$.



Sur le graphique, il semble que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ soit décroissante.

(b) Soit $n \geq 3$. Par définition,

$$f(\alpha_n) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad f(\alpha_{n+1}) = \frac{1}{n+1}.$$

Donc,

$$f(\alpha_{n+1}) < f(\alpha_n) \quad (\text{et} \quad 1 \leq \alpha_n \leq e \quad \text{et} \quad 1 \leq \alpha_{n+1} \leq e).$$

Puisque la fonction f est strictement croissante sur $[1, e]$, on en déduit que :

$$\alpha_{n+1} < \alpha_n$$

Ainsi, la suite $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ est strictement décroissante.

(c) La suite $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ est décroissante et est minorée par 1. Donc, la suite $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ converge.

3. (a) Par définition, pour tout $n \geq 3$,

$$\frac{\ln(\beta_n)}{\beta_n} = \frac{1}{n} \quad \text{ou encore} \quad \ln(\beta_n) = \frac{\beta_n}{n}.$$

En particulier,

$$\ln(\beta_3) = \frac{\beta_3}{3}.$$

Puisque la suite $(\beta_n)_{n\geq 3}$ est croissante, on en déduit que pour $n \geq 3$, $\beta_n \geq \beta_3$ puis, par stricte croissance de la fonction ln, sur $]0, +\infty[$,

$$\ln(\beta_n) \geq \ln(\beta_3) \quad \text{et donc} \quad \frac{\beta_n}{n} \geq \frac{\beta_3}{3}.$$

Finalement,

$$\beta_n \geq \frac{n\beta_3}{3}.$$

6.5 Correction de l'approfondissement

Exercice 1 - Somme télescopique

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Correction :

Décomposons la fraction :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Ainsi, la somme devient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right).$$

En développant la somme télescopique, nous obtenons :

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Les termes intermédiaires se simplifient, laissant :

$$1 - \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Exercice 2 - Existence de limite

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 + \frac{3}{2}$$

1. Démontrer que la suite (u_n) est croissante
2. Démontrer que la suite (u_n) admet $+\infty$ pour limite

Correction :

1. Soit n un entier naturel,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n^2 + \frac{3}{2} - u_n = \frac{1}{2}(u_n^2 - 2u_n) + 3 = \frac{1}{2}(u_n - 1)^2 + 2 \geq 0$$

   Donc le suite (u_n) est croissante.

2. Supposons par l'absurde que la suite (u_n) est convergente de limite l,
Alors l vérifie :

$$\begin{aligned} l = \frac{1}{2}l^2 + \frac{3}{2} &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(l^2 - 2l) + \frac{3}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(l-1)^2 + \frac{1}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow (l-1)^2 = -1 \end{aligned}$$

On aboutit à une absurdité avec une carré réel négatif. Donc le suite (u_n) est divergente.

La suite (u_n) est croissante et n'est pas majorée. (si elle était majorée, elle convergerait...) Donc la suite (u_n) tend vers $+\infty$

Exercice 3 - Suites particulières

Soit (u_n) la suite définie pour tout n non nul par :

$$u_n = 0,\underbrace{9..........9}_{\text{n chiffres 9}}\overbrace{1..........1}^{\text{n chiffres 1}}$$

Démontrer que (u_n) converge est déterminer la limite.

Correction : La suite (u_n) est croissante et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 1$ dons la suite (u_n) est croissante majorée. Donc la suite converge.
Pout tout entier n,

$$0,\underbrace{9........9}_{\text{n chiffres}} < u_n < 1$$

Donc :

$$-10^n < u_n - 1 < 0$$

D'après le théorème des gendarmes, $(u_n - 1)$ tend vers 0 donc (u_n) tend vers 1.

Exercice 4 - Suites arithmético-géométriques

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4 \text{ et } u_0 = 1$$

Démontrer que (u_n) converge et déterminer la limite.

Correction : Soit f la fonction suivante définie sur $\mathbb{R}$: $f : x \mapsto \frac{1}{2}x + 4$. On a $u_{n+1} = f(u_n)$
On cherche le point fixe c'est-à-dire le réel l tel que $f(l) = l$:

$$\begin{aligned} f(l) = l &\Leftrightarrow \frac{1}{2}l + 4 = l \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2}l = -4 \\ &\Leftrightarrow l = 8 \end{aligned}$$

On pose pour tout entier naturel, $v_n = u_n - 8$. Démontrons que (v_n) est une suite géométrique :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 8 \\ &= \frac{1}{2}u_n - 4 \\ &= \frac{1}{2}(u_n - 8) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 8 = -7$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{-7}{2^n}$$

Puis

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 8 - \frac{7}{2^n}$$

Soit n un entier naturel,

$$u_{n+} - u_n = -\frac{7}{2^{n+1}} + \frac{7}{2^n} = \frac{7}{2^n}(1 - \frac{1}{2}) \geq 0$$

Donc la suite (u_n) est croissante et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 8$. La suite est croissante majorée donc la suite converge. On note l sa limite.

Si la suite converge alors la limite vérifie l'équation suivante :

$$l = \frac{1}{2}l + 4 \Leftrightarrow l = 8$$

Donc la suite (u_n) converge vers 8.

Exercice 5 - Suite de racines

Pour n entier naturel non nul, on définit le polynôme P_n par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad P_n(x) = \frac{1}{n}x - x - 1$$

1. On fixe n. Déterminer les racines de P_n. On les notera $x_n^{(1)}$ et $x_n^{(2)}$.
2. Déterminer les limites des suites $(x_n^{(1)})_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(x_n^{(2)})_{n\in\mathbf{N}^*}$.
3. On fixe maintenant un réel x. Quel est la limite de la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbf{N}^*}$?
4. Cette limite est un polynôme en x. Quelles sont ses racines ?
5. Est ce à quoi l'on s'attendait ? Méditer avec le résultat de la question 2.

Correction :

1. On calcule le discriminant :

$$\Delta_n = 1 + \frac{4}{n} > 0$$

Il existe donc deux racines réels qui sont donc :

$$x_n^{(1)} = 2n(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{n}})$$

et

$$x_n^{(2)} = 2n(1 - \sqrt{1 + \frac{4}{n}})$$

2. Pour $x_n^{(1)}$, $\lim_{n\to+\infty} 2n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{n}} = 1$

   Donc par produit de limite,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n^{(1)} = +\infty$$

   On obtient de même :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n^{(2)} = +\infty$$

3. A x fixé,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}x - x - 1 = -x - 1$$

   La limite de cette suite est $-x-1$.

4. La limite de cette suite est le polynôme $P(x) = -x-1$ dont l'unique racine est -1.

5. Ce qui est surprenant c'est que les racines du polynômes $P_n(x)$ ne tendent pas du tout vers les racines du polynôme P, limite simple du polynôme P_n !

Exercice 6 - irrationalité de e

Dans ce problème, nous allons prouver que e est un nombre irrationnel.

On définit pour tout entier naturel :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!n}$$

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes. (On démontrera que la suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) décroissante et que la limite de la différence des deux suites est nulle)

2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_1 \leq u_n \leq v_n \leq v_1$

3. En déduire que les deux suites convergent puis qu'elles convergent vers la même limite.

4. On admet que cette limite commune est le nombre e. Encadrer e par les suites (u_n) et (v_n) puis démontrer par l'absurde que e est irrationnel.

Correction :

1. • $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.

- Soit n un entier naturel,

$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= u_{n+1}-u_n+\frac{1}{(n+1)!(n+1)}-\frac{1}{n!n} \\ &= \frac{1}{(n+1)!}+\frac{n}{(n+1)!(n+1)n}-\frac{(n+1)^2}{(n+1)!(n+1)n} \\ &= \frac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{(n+1)!(n+1)n} \\ &= \frac{-1}{(n+1)!(n+1)n}<0 \end{aligned}$$

  donc (v_n) est strictement décroissante
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - v_n = \frac{-1}{n!n}$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$

Donc ces deux suites sont adjacentes.

2. - La suite (u_n) est croissante donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_1 \leq u_n$
   - La suite (v_n) est décroissante donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq v_1$
   - Puis $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$

   On obtient donc que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_1 \leq u_n \leq v_n \leq v_1$

3. (u_n) est croissante et majorée par v_1 donc elle converge vers une limite l. (v_n) est décroissante et minorée par u_1 donc elle converge vers une limite l'.

   On a démontré précédemment que $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$ On peut donc écrire que $l - l' = 0$ donc $l = l'$.

   (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

4. (u_n) est croissante et converge vers e donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq e$.
   (v_n) est décroissante et converge vers e donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq e$.
   On obtient donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq e \leq v_n$.

   Supposons que e est rationnel: $e = \frac{p}{q}$ avec p, q deux entiers naturels non nuls, premiers entre eux (la fraction est irréductible).

   On obtient donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < \frac{p}{q} < v_n$. Pour $n = q$, on obtient

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{k!}<\frac{p}{q}<\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{k!}+\frac{1}{q!q} \\ \Longrightarrow &\sum_{k=1}^{q}\frac{q!}{k!}<(q-1)!p<\sum_{k=1}^{q}\frac{q!}{k!}+\frac{1}{q} \end{aligned}$$

   Notons $S = \sum_{k=1}^{q} \frac{q!}{k!}$.

   On remarque que S est une somme de termes entiers, car chaque $\frac{q!}{k!}$ est entier pour $k \leq q$. Or, $(q-1)!p$ est également entier. On obtient :

$$S<(q-1)!p<S+\frac{1}{q} \implies S<(q-1)!p<S+1$$

Cela implique qu'un entier est strictement compris entre deux entiers consécutifs. Ce qui est absurde !

Donc e est irrationnel.

Exercice 7 - Suites récurentes linéaires d'ordre 2 (CAS 1)

Dans les exercices suivants, on démontre puis utilise les propriétés suivantes sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 :

Propriété : Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad u_0, u_1 \in \mathbb{R}.$$

L'équation caractéristique associée à cette suite est donnée par :

$$r^2 - ar - b = 0$$

Les solutions de cette équation déterminent la forme générale de la suite :

- Si l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, alors :

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tels que} \quad \forall n \in \mathbb{N},\, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

- Si l'équation caractéristique admet une solution double r, alors :

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tels que} \quad \forall n \in \mathbb{N},\, u_n = \lambda r^n + \mu n r^n.$$

CAS 1 :

On suppose dans cette partie que l'équation (E) admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2.

On va montrer que, pour une telle suite, il existe deux uniques réels λ et μ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

1. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$. Calculer λ et μ en fonction de u_0, u_1, r_1, et r_2.
2. Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la proposition suivante :

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

   Démontrer $P(n)$ par récurrence double et conclure.

Correction :

1. **Calcul de λ et μ en fonction de u_0, u_1, r_1, et r_2**

   On sait que :

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

   Utilisons les valeurs initiales u_0 et u_1 pour déterminer λ et μ.

   - Pour $n = 0$, on a :

$$u_0 = \lambda r_1^0 + \mu r_2^0 = \lambda + \mu$$

Donc :

$$u_0 = \lambda + \mu \quad (1)$$

- Pour $n = 1$, on a :

$$u_1 = \lambda r_1^1 + \mu r_2^1 = \lambda r_1 + \mu r_2$$

Donc :

$$u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2 \quad (2)$$

Nous avons donc un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = u_1 \end{cases}$$

Pour résoudre ce système :

- De l'équation (1), on exprime λ :

$$\lambda = u_0 - \mu$$

- On remplace λ dans l'équation (2) :

$$(u_0 - \mu)r_1 + \mu r_2 = u_1$$

Ce qui donne :

$$u_0 r_1 - \mu r_1 + \mu r_2 = u_1$$

$$u_0 r_1 + \mu(r_2 - r_1) = u_1$$

D'où :

$$\mu = \frac{u_1 - u_0 r_1}{r_2 - r_1}$$

- Ensuite, on remplace μ dans l'équation (1) :

$$\lambda = u_0 - \frac{u_1 - u_0 r_1}{r_2 - r_1} = \frac{u_0 r_2 - u_1}{r_2 - r_1}$$

Ainsi, λ et μ sont exprimés en fonction de u_0, u_1, r_1, et r_2.

2. **Démonstration de $P(n)$ par récurrence double**

Nous devons maintenant montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$P(n) : u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

Initialisation :

- Pour $n = 0$:

$$P(0) : u_0 = \lambda r_1^0 + \mu r_2^0 = \lambda + \mu$$

Par les conditions initiales et le calcul de λ et μ, cela est vrai.

- Pour $n = 1$:

$$P(1) : u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2$$

Par les conditions initiales et le calcul de λ et μ, cela est également vrai.

Ainsi, $P(0)$ et $P(1)$ sont vérifiées.

Hérédité :

Supposons que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies, c'est-à-dire que :

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

et

$$u_{n+1} = \lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}$$

Montrons que $P(n+2)$ est vraie, c'est-à-dire :

$$u_{n+2} = \lambda r_1^{n+2} + \mu r_2^{n+2}$$

Par la relation de récurrence donnée :

$$u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$$

En remplaçant u_n et u_{n+1} par leurs expressions en fonction de λ, μ, r_1, et r_2, on obtient :

$$u_{n+2} = a(\lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}) + b(\lambda r_1^n + \mu r_2^n)$$

Développons cette expression :

$$u_{n+2} = \lambda(a r_1^{n+1} + b r_1^n) + \mu(a r_2^{n+1} + b r_2^n)$$

Factorisons r_1^n et r_2^n :

$$u_{n+2} = \lambda r_1^n(a r_1 + b) + \mu r_2^n(a r_2 + b)$$

D'après l'équation caractéristique $r^2 - ar - b = 0$, on sait que r_1 et r_2 sont solutions de cette équation, donc :

$$a r_1 + b = r_1^2 \quad \text{et} \quad a r_2 + b = r_2^2$$

Ainsi, on a :

$$u_{n+2} = \lambda r_1^n r_1^2 + \mu r_2^n r_2^2 = \lambda r_1^{n+2} + \mu r_2^{n+2}$$

La propriété $P(n+2)$ est donc vérifiée.

Conclusion :

Par récurrence double, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Nous avons donc montré que :

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 8 - Application du résultat précédent à la suite de Fibonacci

On appelle suite de Fibonacci la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, et la relation, valable pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

En utilisant le résultat de l'exercice précédent, écrire l'équation caractéristique associée, la résoudre, puis exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

Correction : On appelle suite de Fibonacci la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, et la relation de récurrence suivante, valable pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Nous allons résoudre cette suite en utilisant l'équation caractéristique et exprimer u_n en fonction de n.

1. **Équation caractéristique :**

La suite de Fibonacci est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est donnée par :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \Rightarrow \quad r^2 = r + 1$$

D'où l'équation caractéristique :

$$r^2 - r - 1 = 0$$

2. Résolution de l'équation caractéristique

On résout l'équation quadratique $r^2 - r - 1 = 0$:

$$r = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Les deux racines de cette équation sont donc :

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

3. Expression générale de la suite

La solution générale de la suite récurrente est de la forme :

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

où $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Il reste à déterminer λ et μ en fonction des conditions initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.

4. Calcul de λ et μ

- Pour $n = 0$, on a :

  $$u_0 = \lambda r_1^0 + \mu r_2^0 = \lambda + \mu$$

  Donc :

  $$\lambda + \mu = 1 \quad (1)$$

- Pour $n = 1$, on a :

  $$u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2$$

  Donc :

  $$\lambda r_1 + \mu r_2 = 1 \quad (2)$$

Nous obtenons ainsi le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = 1 \end{cases}$$

En résolvant ce système :

- De l'équation $\lambda + \mu = 1$, on déduit que $\lambda = 1 - \mu$.

- En remplaçant cette valeur dans l'équation $\lambda r_1 + \mu r_2 = 1$, on obtient :

$$(1-\mu)r_1 + \mu r_2 = 1$$

$$r_1 - \mu r_1 + \mu r_2 = 1$$

$$r_1 + \mu(r_2 - r_1) = 1$$

D'où :

$$\mu = \frac{1-r_1}{r_2-r_1}$$

- En utilisant les valeurs de $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, nous obtenons :

$$\mu = \frac{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\frac{2-(1+\sqrt{5})}{2}}{\frac{-2\sqrt{5}}{2}} = \frac{-\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Donc $\mu = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

- En remplaçant μ dans l'équation $\lambda + \mu = 1$, on obtient :

$$\lambda = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

5. Conclusion
La solution de la suite de Fibonacci est donc :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Cette formule explicite exprime u_n en fonction de n, et correspond à la solution de la suite de Fibonacci.

Exercice 9 - Limites et parties entières

Déterminer, en utilisant un encadrement, la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor \frac{k^2}{n} \right\rfloor$$

Correction :

On commence par encadrer $(u_n)_{n\geq 1}$ grâce à la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x.$$

En prenant $x = \frac{k^2}{n}$, on obtient l'encadrement suivant pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{n} - 1\right) \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n}.$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\frac{1}{n^3} \times \sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n^3} \times \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Or, on sait que :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Donc :

$$\frac{1}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

En simplifiant les expressions :

$$u_n \geq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} - \frac{1}{n}, \quad u_n \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

On sait que :

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par conséquent, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{3}.$$

Exercice 10 - Démonstration théorème des suites adjacentes

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante et que

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0.$$

Nous allons démontrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles convergent et elles ont toutes les deux la même limite.

Pour cela, considérons deux suites (u_n) et (v_n) telles que, quitte à inverser les rôles, (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0.$$

1. **Montrer que la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante.**
   - **a.** En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leq v_n$.
2. **Nous allons à présent montrer que (u_n) converge.**
   - **a.** Prouver que la suite (u_n) est majorée.
   - **b.** En déduire que la suite (u_n) converge.
   - **c.** Avec un raisonnement analogue, on montre de même que la suite (v_n) converge.
3. **Nous allons à présent montrer que les deux suites convergent vers la même limite.**
   - **a.** Pour cela, notons $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$ et $l' = \lim_{n\to+\infty} v_n$.
   - **b.** Grâce aux opérations sur les limites, déterminer $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n)$.
   - **c.** En déduire que $l = l'$.

Correction :

1. **Montrer que la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante.**

   Comme (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} \geq u_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} \leq v_n.$$

En soustrayant les deux inégalités, on obtient :

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq v_n - u_n.$$

Donc, la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante.

a. Puisque $(v_n - u_n)$ est décroissante, et que $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_n - u_n \geq 0 \Leftrightarrow u_n \leq v_n.$$

2. Montrer que (u_n) converge.

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$$

Or (v_n) est décroissante donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq v_0$$

Et (u_n) est croissante donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_0$$

On obtient donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_n \leq v_n \leq v_0$$

(u_n) est croissante et majorée par v_0 donc elle converge et (v_n) est décroissante et minorée par u_0 donc elle converge

3. Montrer que les deux suites convergent vers la même limite.

a. Supposons que $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = l'$.

b. On sait que $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$. Par les propriétés des limites, on a alors :

$$\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = l' - l = 0.$$

c. On en déduit que $l = l'$. Donc, (u_n) et (v_n) convergent toutes les deux vers la même limite l.

Exercice 11 - Suites adjacentes

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad S'_n = S_n + \frac{1}{n}.$$

Montrer que les suites (S_n) et (S'_n) sont adjacentes.

Correction : On a :

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0.$$

$$S'_{n+1} - S'_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) \leq 0.$$

Donc, (S_n) est croissante et (S'_n) est décroissante.
Enfin, on a :

$$S'_n - S_n = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}(S'_n - S_n) = 0.$$

Les suites (S_n) et (S'_n) sont donc adjacentes.

6.6 Correction de l'approfondissement récurrence double et forte

Exercice 1 - Récurrence double (1)

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = 2^{n+1} - 1$$

Correction : **Étape 1 : Initialisation**

Nous allons vérifier que la propriété est vraie aux rangs 0 et 1.

- Pour $n = 0$:

  $$u_0 = 1$$

  et

  $$2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

  Donc, la propriété est vraie pour $n = 0$.

- Pour $n = 1$:

  $$u_1 = 3$$

  et

  $$2^{1+1} - 1 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

  Donc, la propriété est vraie pour $n = 1$.

Étape 2 : Hérédité

Supposons que la propriété est vraie pour deux entiers n et $n + 1$, c'est-à-dire que :

$$u_n = 2^{n+1} - 1$$

et

$$u_{n+1} = 2^{n+2} - 1$$

Montrons qu'elle est vraie pour $n + 2$.

D'après la relation de récurrence, nous avons :

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

En remplaçant u_n et u_{n+1} par leurs expressions respectives :

$$u_{n+2} = 3(2^{n+2} - 1) - 2(2^{n+1} - 1)$$

Développons cette expression :

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 3 \times 2^{n+2} - 3 - 2 \times 2^{n+1} + 2 \\
&= 6 \times 2^{n+1} - 3 - 4 \times 2^{n+1} + 2 \\
&= (6 \times 2^{n+1} - 4 \times 2^{n+1}) + (-3 + 2) \\
&= 2 \times 2^{n+1} - 1 \\
&= 2^{n+2} - 1
\end{aligned}$$

Nous obtenons bien l'expression attendue pour u_{n+2}.

Étape 3 : Conclusion

La propriété est vérifiée pour $n = 0$ et $n = 1$, et nous avons montré qu'elle est héréditaire. Par le principe de récurrence double, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{u_n = 2^{n+1} - 1 \quad \text{pour tout}\, n \in \mathbb{N}}$$

Exercice 2 - Récurrence double (2)

Soit n un entier naturel.

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 5 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = 2^n + 3^n$$

Correction :

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit P_n la propriété :

$$u_n = 2^n + 3^n$$

On cherche à démontrer P_n par une récurrence double.

Initialisation :

- On a $u_0 = 2 = 2^0 + 3^0$
- et $u_1 = 5 = 2^1 + 3^1$.

Les propriétés P_0 et P_1 sont donc vérifiées.

Hérédité :

Supposons que pour un entier n donné, P_n et P_{n+1} sont vraies, c'est-à-dire que :

$$u_n = 2^n + 3^n$$

et

$$u_{n+1} = 2^{n+1} + 3^{n+1}$$

Montrons que P_{n+2} est également vraie, c'est-à-dire :

$$u_{n+2} = 2^{n+2} + 3^{n+2}$$

D'après la relation de récurrence, nous avons :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$

En remplaçant u_n et u_{n+1} par leurs expressions respectives, on obtient :

$$u_{n+2} = 5(2^{n+1} + 3^{n+1}) - 6(2^n + 3^n)$$

Développons cette expression :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 5 \times 2^{n+1} + 5 \times 3^{n+1} - 6 \times 2^n - 6 \times 3^n \\ &= 2^n(5 \times 2 - 6) + 3^n(5 \times 3 - 6) \\ &= 2^n(10 - 6) + 3^n(15 - 6) \\ &= 2^n \times 4 + 3^n \times 9 \\ &= 2^{n+2} + 3^{n+2} \end{aligned}$$

La propriété P_{n+2} est donc vérifiée.

Conclusion :
La propriété est vérifiée pour $n = 0$ et $n = 1$, et elle est héréditaire. Par le principe de récurrence double, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{u_n = 2^n + 3^n \quad \text{pour tout}\, n \in \mathbb{N}}$$

Exercice 3 - Récurrence forte (1)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \, u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2^n$.

Correction : Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ la propriété suivante :

$$P(n) : u_n \leq 2^n$$

Montrons par récurrence forte que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation :
Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et $2^0 = 1$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :
Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in [0, n]$, $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire :

$$\forall k \in [0, n], \, u_k \leq 2^k$$

Montrons que $P(n + 1)$ est également vraie.

D'après la définition de la suite, nous avons :

$$u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, nous savons que $u_k \leq 2^k$ pour tout $k \in [0, n]$, donc :

$$u_{n+1} \leq 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n$$

La somme des puissances de 2 est une somme géométrique :

$$u_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1$$

Donc :

$$u_{n+1} \leq 2^{n+1} - 1$$

Ce qui implique que :

$$u_{n+1} \leq 2^{n+1}$$

La propriété $P(n+1)$ est donc vérifiée.

Conclusion :
Par le principe de récurrence forte, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\, u_n \leq 2^n}$$

Exercice 4 - Récurrence forte (2)

Démontrer que tout entier $n \geq 2$ admet un diviseur premier

Correction : **Étape 1 : Initialisation**
Pour $n = 2$, on a :

2 est premier, donc il admet bien un diviseur premier, à savoir lui-même.

La propriété est donc vraie pour $n = 2$.

Étape 2 : Hérédité Supposons que la propriété est vraie pour tous les entiers k tels que $2 \leq k \leq n$, c'est-à-dire que tout entier $k \geq 2$ admet un diviseur premier.

Montrons qu'elle est également vraie pour $n + 1$.
Soit l'entier $n + 1$. Il existe deux cas possibles :

- $n + 1$ **est premier** : Dans ce cas, $n + 1$ admet lui-même comme diviseur premier, et la propriété est vérifiée.
- $n + 1$ **n'est pas premier** : Cela signifie que $n + 1$ peut être écrit comme un produit de deux entiers strictement plus petits que $n + 1$, disons

  $$n + 1 = a \times b \text{ avec } 2 \leq a \leq n \text{ et } 2 \leq b \leq n$$

  D'après l'hypothèse de récurrence forte, les entiers a et b admettent chacun un diviseur premier.

  Ainsi, un diviseur premier de a ou de b est aussi un diviseur de $n + 1$.

Dans tous les cas, $n + 1$ admet un diviseur premier.

Étape 3 : Conclusion
La propriété est vraie pour $n = 2$, et elle est héréditaire pour tout $n \geq 2$.

Par le principe de récurrence forte, nous concluons que tout entier $n \geq 2$ admet un diviseur premier.

$$\boxed{\text{Tout entier naturel } n \geq 2 \text{ admet un diviseur premier.}}$$