Tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé[1]

Nous allons commençer par un cas plus simple, et en démontrant que *Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel normé V de dimension finie est fermé.* Soit $\{f_1, \dots, f_k\}$ une base pour F — où donc $k = dim(F)$ — et complétons-la en une base de l'espace V tout entier, c'est-à-dire choississons $f_{k+1}, \dots, f_n \in V$ telle que $\{f_1, \dots, f_n\}$ soit une base de V — où donc $n = dim(V)$. En particulier, pour tout élément $v \in V$, il existe $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ telles que $v = \sum_{i=1}^n v_i f_i$, et cette décomposition est unique. Nous allons ensuite munir l'espace V d'une norme. Nous rappelons à cette occasion que *toutes les normes sont équivalentes en dimension finie*, si bien que nous pouvons fixer n'importe quelle norme, *quoblibet.* Définissons à cet effet la norme $\|v\| := \max_{i=1,\dots,n} |v_i|$ pour tout élément $v = \sum_{i=1}^n v_i f_i \in V$.

Ceci étant posé, supposons que F ne soit pas fermé. Par définition, il existe donc une suite $(v^j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F admettant une limite $\bar{v}$, *i.e.* $\lim_{j\to\infty} v^j = \bar{v}$ — ce qui se lit encore par définition $\lim_{j\to\infty} \|v^j - \bar{v}\| = 0$ — et telle que $\bar{v} \notin F$. Décomposons $\bar{v}$ dans la base construite précédemment de l'espace V, c'est-à-dire écrivons $\bar{v} = \sum_{j=1}^n \bar{v}_i f_i$. Comme nous avons supposé que $\bar{v}$ n'appartenait pas au sous-espace F, il suit qu'il existe $\ell^* \in \{k+1, \dots, n\}$ telle que $\bar{v}_{\ell^*} \neq 0$. Or, comme $\lim_{j\to\infty} \|v_j - \bar{v}\| = 0$, il suit immédiatement de la définition de la norme $\|\cdot\|$ que pour tout $i = 1, \dots, n$, nous avons $\|v_i^j - \bar{v}_i\| \longrightarrow 0$, où l'on note $v_1^j, \dots, v_n^j$ la décomposition de v^j sur la base en question. Mais, cette fois-ci, et inversément, $v_\ell^j = 0$ pour tout $\ell \in \{k+1, \dots, n\}$ car le $v^j \in F$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Par conséquent, nous obtenons une contradiction:

$$0 \neq |\bar{v}_{\ell^*}| = |\underbrace{v_{\ell^*}^j}_{=0} - \bar{v}_{\ell^*}| \longrightarrow 0.$$

Nous avons donc démontré que tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé de dimension finie est forcément fermé. Maintenant, nous supposons que $(V, \|\cdot\|)$ soit un espace vectoriel normé quelconque de dimension (potentiellement) infinie. Supposons que $F \subset V$ soit un sous-espace de dimension finie, et montrons que nécessairement, il est fermé. Encore une fois, donnons-nous $f_1, \dots, f_k$ une base de F et supposons qu'il existe une suite $(v^j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F admettant une limite $\bar{v}$ et telle que $\bar{v} \notin F$. Alors, l'espace vectoriel $W = Span(\{f_1, \dots, f_k, \bar{v}\})$ est un espace vectoriel normé de dimension *finie* et contenant *strictement* F, *i.e.* $F \subsetneq W$ — notez que ici l'espace vectoriel W est normé par la norme induite, c'est-à-dire que la norme d'un élément $w \in W$ est tout simplement la norme $\|w\|$ heritée de l'espace ambient V. Mais, d'après ce qui précède, F est nécessairement fermé dans W, et donc il suit que $\bar{v} \in F$. Cela implique que $F = W$, une contradiction.

[1] Il s'agit de l'*Exercice 1.15* du polycopié.

L'ensemble de Vitali n'est pas un borélien[2]

Soit $A \subset I := [0,1]$ l'ensemble obtenu par *quotientage* de I par la relation $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$. Il faudrait commençer par y voir plus clair dans cette définition. Cela revient à dire, d'un point de vue ensembliste, que A un *ensemble d'ensembles*. C'est-à-dire, que si a est un élément de A, ce qui se note $a \in A$, alors a est un sous-ensemble de I, ce qui se note $a \subset I$. Si un tel sous-ensemble n'est pas vide, alors (par l'axiome du choix) on peut *choisir* un élément $x \in a$, et l'ensemble a est alors précisément donné par l'ensemble

$$a = \{y \in A : x - y \in \mathbb{Q}\} \subset I.$$

Ce que nous allons faire maintenant, c'est identifier ce sous-ensemble a avec un, n'importe lequel, *quodlibet*, de ses éléments. Pour simplifier, notons cet élément $\bar{a} \in a$. Bien évidemment, il faudrait vérifier que ce choix est consistant, c'est-à-dire que, si on prend a et b deux éléments *distincts* de A — donc, deux sous-ensembles $a, b \subset I$ telles que $a \neq b$ — et qu'on choisit comme réprésentants respectifs pour ces sous-ensembles $\bar{a} \in a$ et $\bar{b} \in b$, alors nécessairement $\bar{a} \neq \bar{b}$ — cela revient à dire, du point de vue des sous-ensembles, que, si $a \neq b$, alors $a \cap b = \varnothing$. Mais cela est vrai par le fait qu'une relation d'équivalence est *transitive*, *i.e.* si $x \sim y$ et $y \sim z$ alors $x \sim z$ (*Je vous laisse vous en convaincre*).

Supposons que nous avons choisi des réprésentants $\bar{a}$ pour chacun des éléments $a \in A$, et notons $\bar{A} \subset I$ l'ensemble formé de ces réprésentants. Notez que, pour tout $\bar{a} \neq \bar{b} \in A$, on a que $\bar{a} - \bar{q}$ est un irrationnel. Nous allons montrer que $\bar{A}$ n'est *pas* un borélien, en supposons le contraire et en obtenant une contradiction. Si $\bar{A}$ est un borélien, alors l'ensemble

$$V := \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap I} (\bar{A} + r) \subset [0,2]$$

est un borélien par union dénombrable de boréliens — en effet, si $\bar{A}$ est un borélien, il est trivial que le translaté $\bar{A}_r := \bar{A} + r := \{\bar{a} + r : \bar{a} \in \bar{A}\}$ reste un borélien. De plus, pour tous $r \neq s \in \mathbb{Q}$, on a que $\bar{A}_r \cap \bar{A}_s = \varnothing$. En effet, s'il existe $x \in \bar{A}_r \cap \bar{A}_s$, alors il existe $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{A}$ telle que $x = \bar{a} + r = \bar{b} + s$. Cela implique $\bar{a} = \bar{b}$, car sinon $\bar{a} - \bar{b} = s - r \in \mathbb{Q}$, ce qui n'est pas possible (*cf.* ci-dessus). Mais par conséquent $r = s$, une contradiction. Donc, on obtient que

$$\lambda(V) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap I} \lambda(\bar{A}_r)$$

Maintenant, il faut noter deux choses. La première, c'est que $V \subset [0,2]$, d'où $\lambda(V) \leq 2 < \infty$. La deuxième, c'est que par défintion de la mesure de

[2] Il s'agit de l'*Exercice 4.12* du polycopié

Lebesgue, $\lambda(\bar{A}) = \lambda(\bar{A}_r)$ pour tout $r \in \mathbb{Q} \cap I$. Donc, nécéssairement, $\lambda(\bar{A})$ doit être nul. En effet, si $\lambda(\bar{A}) > 0$, on obtiendrait la contradiction:

$$\infty > \lambda(V) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap I} \lambda(\bar{A}_r) = \underbrace{\lambda(\bar{A})}_{>0} \underbrace{\sum_{r \in \mathbb{Q} \cap I}}_{=\infty} = \infty.$$

Mais donc, on obtient que V est de mesure nulle, *i.e.* $\lambda(V) = 0$. Cependant, par définition de l'ensemble $\bar{A}$, pour tout réel $a \in I$ il existe forcément un élément $\bar{a} \in \bar{A}$ telle que $a - \bar{a} \in \mathbb{Q} \cap I$. Par conséquent, $I \subset V$. On arrive donc à la conclusion que l'ensemble I serait négligeable pour la mesure, une contradiction évidente. Par conséquent, V ne peut pas être mesurable. $\square$

Continuité d'une intégrale à paramètre[3]

Nous considérons la function $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie comme

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} dt$$

Montrons tout d'abord que cette fonction est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ici, notons tout d'abord que l'intégrande est une fonction continue (d'où mesurable) et positive. Donc, si « *bien définie* » s'entend ici comme « *l'intégrale fait sens* », alors cette fonction est effectivement bien définie, partant qu'on lui autorise à prendre la valeur $+\infty$ — c'est-à-dire comme fonction à valeurs dans la droite étendue $\bar{\mathbb{R}}$. Si « *bien définie* » veut de surcroît dire que « *l'intégrale est finie* », alors c'est aussi le cas. En effet, l'intégrande se comporte comme t^{-2} au voisinage de l'infini et, d'après le fait bien connu que $\cos(u) \sim 1 - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$ pour $u \to 0$, on trouve que l'intégrande se comporte comme $\frac{1}{2}x^2$ proche de l'origine, une quantité fixée indépendante de la variable d'intégration t. Par conséquent, $F(x) < \infty$ est une quantité positive et finie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Montrons à présent que la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est en fait continue. Notons $f(x,t) := \frac{1-\cos(tx)}{t^2}$, de telle façon à ce que $F(x) = \int_0^\infty f(x,t) dt$. Nous avons (i) pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue (par prolongement en $t = 0$) et donc mesurable, (ii) pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ (et a fortiori pour presque tout $t \in \mathbb{R}_+$, donc), la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue. Finalement, il s'agit de trouver une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ indépendante de $x \in \mathbb{R}$ telle que g soit intégrable sur $[0, \infty)$ et telle que $|f(x,t)| \leq g(t)$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. En utilisant que $|cos(u)| \leq 1$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a que $|f(x,t)| \leq 2t^{-2}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Cependant, au voisinage de l'origine, la fonction $t \mapsto t^{-2}$ n'est

[3] Il s'agit de l'*Exercice 4.33* du polycopié

pas intégrable, et n'est donc pas un bon candidat pour g. Pour contourner ce problème, nous pouvons utiliser l'inégalité bien connue[4] $1 - \cos(u) \leq u^2$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. En particulier, si on pose

$$g(t) := \begin{cases} x^2/2 & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{2}{t^2} & t \geq 1. \end{cases} \tag{1}$$

Cependant, cette fonction dépend de x ! Mais n'oublions pas : la continuité est une notion locale — *i.e.* dire que F est continue sur $\mathbb{R}$, c'est dire qu'elle est continue en x_0 pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$. Par conséquent, au lieu de demander que l'inégalité $|f(x,t)| \leq g(t)$ soit vérifiée pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, il suffit, pour chaque $x_0 \in \mathbb{R}$, de trouver une fonction g_{x_0} (qui dépend de x_0) telle que $|f(x,t)| \leq g_{x_0}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et **pour tout x dans un voisinage de x_0**, disons, par exemple, dans $V_{x_0} := (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ pour un certain $\delta > 0$. Ceci étant posé, définissons

$$g_{x_0}(t) := \begin{cases} \max\left(\frac{(x_0-\delta)^2}{2}, \frac{(x_0+\delta)^2}{2}\right) & 0 \leq t \leq 1 \\ 2t^{-2} & t \geq 1. \end{cases} \tag{2}$$

Alors, les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètres sont bien réunies, et la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bien continue $\square$.

[**Remarque**] Travailler avec des équivalents dans la deuxième partie de la preuve (*i.e.* sur la continuité) est *dangereux*, car, ici, la variable x bouge dans un voisinage de x_0. Par exemple, si on considère

$$F(x) := \int_0^{1/x} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

Cette fonction est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, mais elle n'est *pas* continue à l'origine. Si on travaille avec des équivalents sans prendre garde, on pourrait potentiellement écrire de grosses bêtises. En effet, écrivons $f(x,t) := \chi_{[0,x^{-1}]} t^{-\frac{1}{2}}$, de telle façon à ce que $F(x) = \int_0^\infty f(x,t)dt$. Ici, on a l'équivalent $f(x,t) \sim 0$ au voisinage de l'infini, et en fait c'est précisément égal à 0 pour tout $t \geq x^{-1}$. Mais, l'important, ici, c'est que le voisinage sur lequel cette équivalent est véracе, à savoir $[x^{-1}, \infty)$, dépend de x. Si on ne fait pas attention, on dit : *Eh bien,* $|f(x,t)| = 0$ *pour t assez grand et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, et donc voilà !* À bon entendeur.

[4] Qui se démontre en utilisant deux fois le théorème de Lagrange