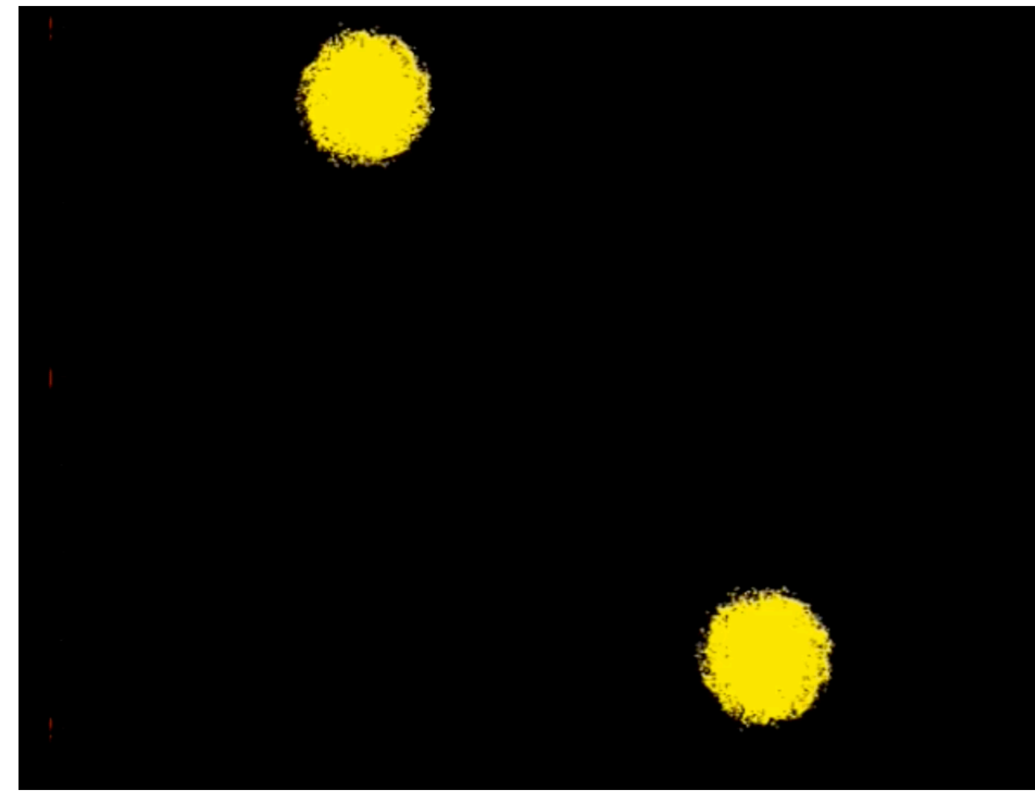
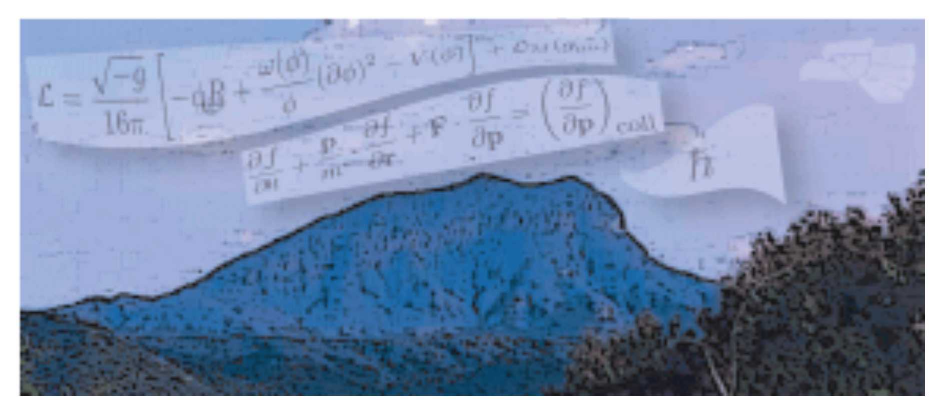
# NagBody lectures: Monte Carlo method



Mario Alberto Rodríguez-Meza
*Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares*
Correo Electrónico: marioalberto.rodriguez@inin.gob.mx
http://bitbucket.org/rodriguezmeza

Seminario de investigación,
Departamento de Física,
Universidad de Guanajuato
3 de febrero al XX de junio de 2022
Sesiones virtuales (Zoom, Meet, etcétera)



# References and material

- Cosmología numérica y estadística: NagBody kit (http://bitbucket.org/rodriguezmeza). Mario A. Rodríguez-Meza. And: https://github.com/rodriguezmeza/NagBody_pkg.git

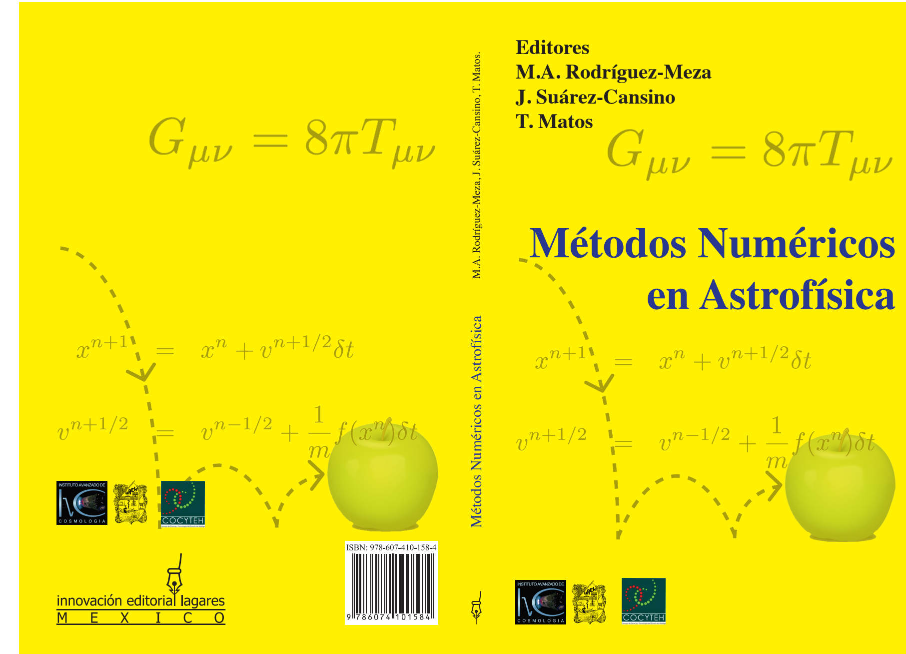
- Métodos numéricos en astrofísica, capítulo 1, Método de N-cuerpos en astrofísica. (https://www.researchgate.net/publication/316582859_Metodo_de_N-Cuerpos_en_Astrofisica)

- La estructura a gran escala del universo. Capítulo 22 en Travesuras cosmológicas de Einstein et al. https://www.researchgate.net/publication/316582400_La_estructura_a_gran_escala_del_universo_simulaciones_numericas

- https://www.researchgate.net/profile/Mario_Rodriguez-Meza

- https://www.researchgate.net/publication/314281416_Los_agujeros_negros_y_las_ondas_del_Dr_Einstein

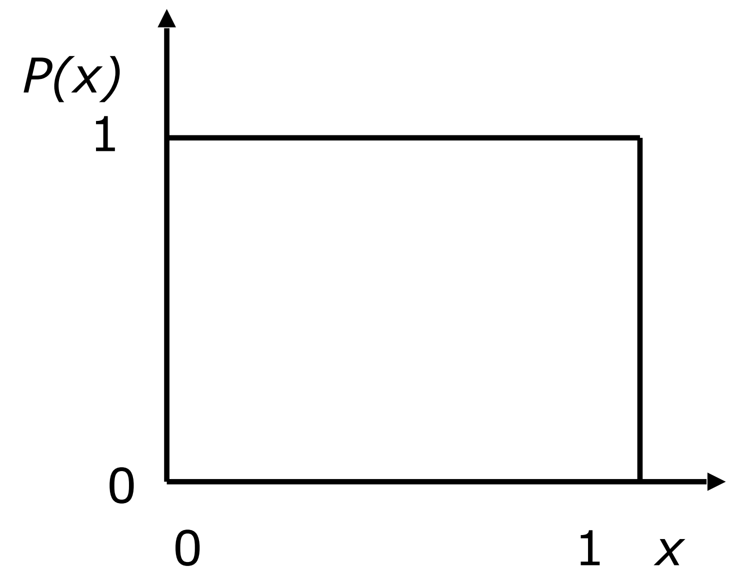
- M.A. Rodriguez-Meza, Adv. Astron. 2012, 509682 (2012). arXiv:1112.5201. (https://www.researchgate.net/publication/51967093_A_Scalar_Field_Dark_Matter_Model_and_Its_Role_in_the_Large-Scale_Structure_Formation_in_the_Universe)

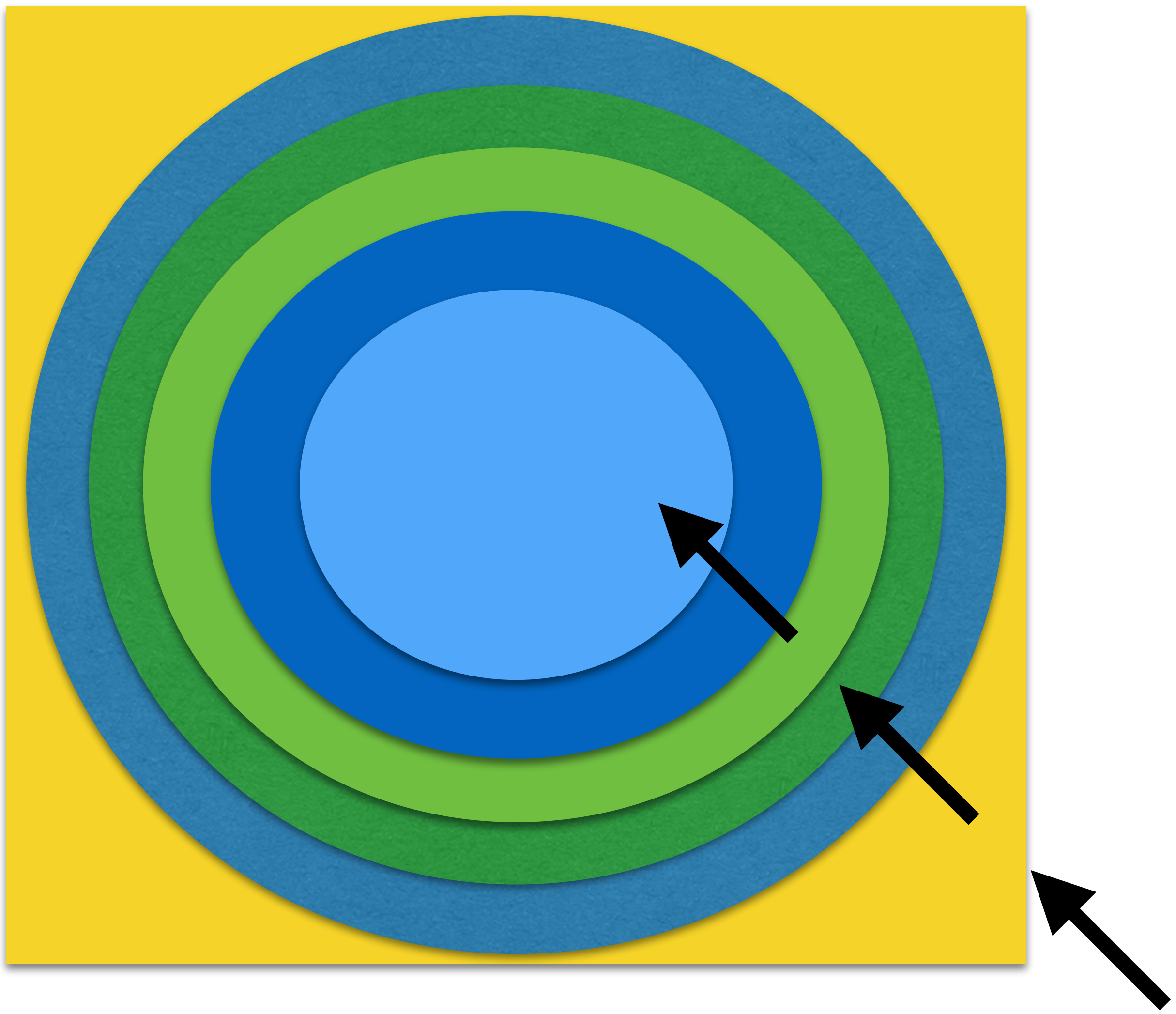



# Content:
# Monte Carlo method

- Meaning
- Examples
- Basic theory
- Using MC to generate models in astrophysics

# Monte Carlo method: Meaning



# Monte Carlo method: Meaning

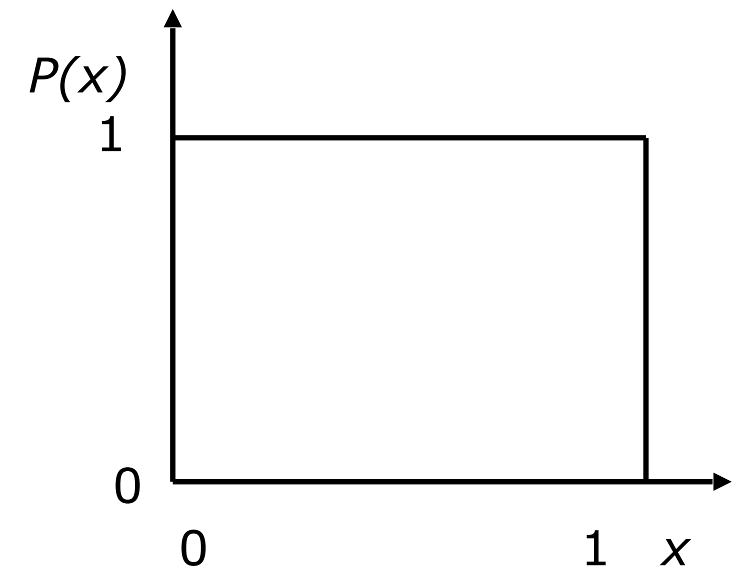
The basic random generator will be:

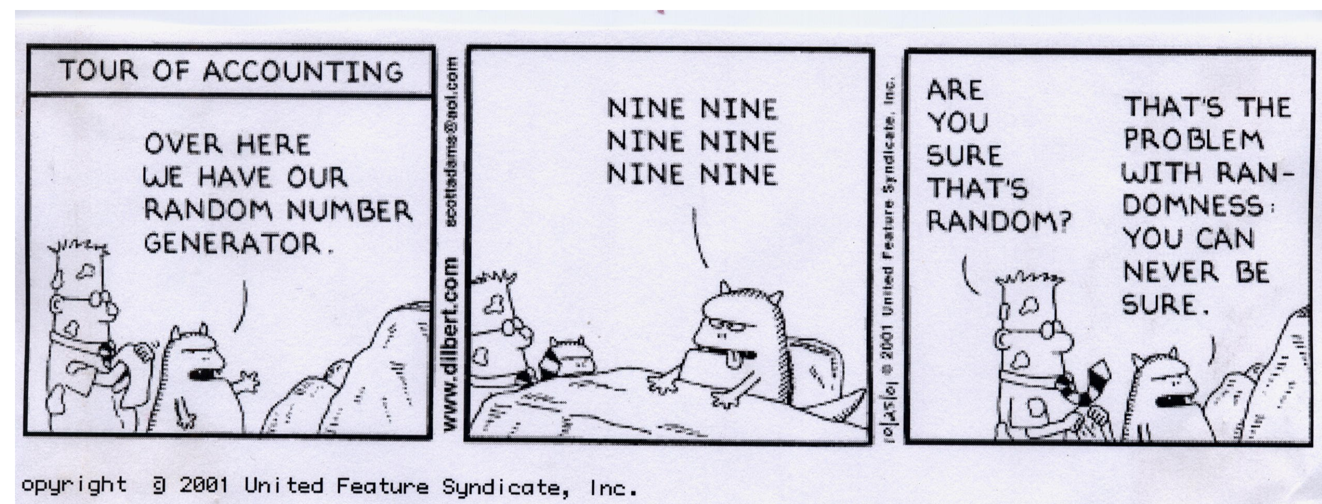
$0 \le x \le 1, \;\; P(x)dx = dx$

Every programming language have one:

```
iseed=1.
x=ran(iseed)
```

Look for them in Numerical Recipes.

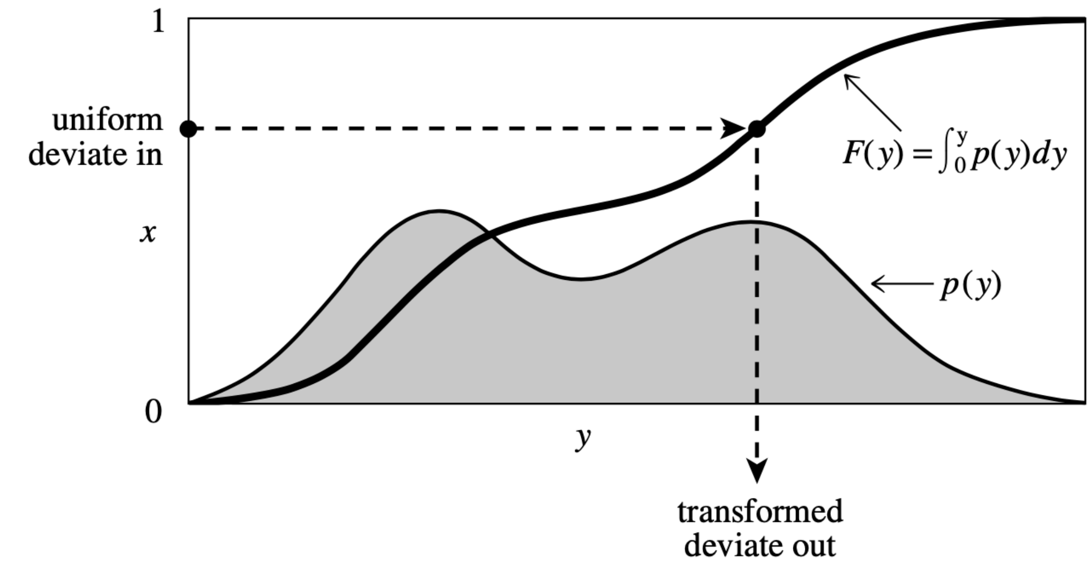



Collection DIEHARD of tests of randomness (George Marsaglia, [ftp://stat.fsu.edu/diehard/index.html](ftp://stat.fsu.edu/diehard/index.html))

Other tests of randomness and generators (http://burtleburtle.net/bob/rand/testsfor.html)

# Monte Carlo method: Basic theory




Sea $\chi$ una variable aleatoria que puede tomar los valores $x$ en el intervalo $[0,1]$ con densidad de probabilidad $f(x)$ dada por la distribución uniforme. Sea $\zeta$ otra variable aleatoria que puede tomar los valores $y$ en el intervalo $[c,d]$ con densidad de probabilidad $g(y)$. Queremos generar los eventos $y$ usando un generador uniforme, es decir, debemos encontrar una transformación $x \to y$ donde $x$ satisface la distribución uniforme y los eventos transformados $y$ satisfagan a la distribución $g(y)$ (ver [36]). La probabilidad de que $x$ esté en el intervalo $(a,b) \subset [0,1]$ debe ser igual a la probabilidad de que $y$ este en $(A,B) \subset [c,d]$ donde $a \to A$ y $b \to B$,

$$P\{a < x < b\} = P\{A < y < B\} \tag{B.13}$$

con

$$P\{a < x < b\} = \int_a^b dX\ f(X) \tag{B.14}$$

y

$$P\{A < y < B\} = \int_A^B dY\ g(Y) \tag{B.15}$$

lo que nos da la condición

$$\int_a^b dX\ f(X) = \int_A^B dY\ g(Y) \tag{B.16}$$

# Monte Carlo method: Basic theory

En particular se debe tener que

$$\int_0^x dX\ f(X) = \int_c^y dY\ g(Y) \tag{B.17}$$

Pero $f(x) = N$ donde $N$ es una constante de normalización que se obtiene de la condición $\int_0^1 dx f(x) = 1$, lo que da

$$x = \int_c^y dY\ g(Y) = G(y) - G(c) \tag{B.18}$$

donde $G(y)$ es una función tal que $g = dG/dy$. La función $g(y)$ es una densidad de probabilidad y como tal debe satisfacer que

$$g(y) > 0 \tag{B.19}$$

$$\int_c^d dy\ g(y) = 1 \tag{B.20}$$

# Monte Carlo method: Basic theory

Entonces, la función $x(y) = G(y) - G(c)$ satisface que

$$\begin{aligned} x(c) &= 0 \qquad \text{(B.21)} \\ x(d) &= 1 \qquad \text{(B.22)} \\ \frac{dx}{dy} &= g(y) > 0 \qquad \text{(B.23)} \end{aligned}$$

esto significa que $x(y)$ crece monótonamente en el intervalo $[0, 1]$. Por lo tanto, la Ec. (B.18) tiene siempre solución y es única.

La probabilidad de que $y \in (A, B)$ se obtiene como

$$P\{A < y < B\} = P\{a < x < b\} = b - a = \int_A^B dy\ g(y) \qquad \text{(B.24)}$$

es decir, dado que $\zeta \in (A, B)$ las Ecs. $a = G(A) - G(c)$ y $b = G(B) - G(c)$ nos dan el intervalo $(a, b)$ en donde estará la variable aleatoria $\chi$. Si por el contrario, $\chi \in (a, b)$, entonces $\zeta \in (A, B)$ con $A$ y $B$ dados por las soluciones a las Ecs. $a = G(A) - G(c)$ y $b = G(B) - G(c)$. Entonces, generado $x$ con la distribución uniforme se obtiene $y$ con la distribución $g(y)$ resolviendo (B.18).

# Monte Carlo method: Basic theory

## Random generator with spherical symmetry

Considerese el problema de generar una distribución de partículas con coordenadas espaciales $\mathbf{r} = (r, \theta, \phi)$ con una densidad normalizada a la unidad dada por $\rho(\mathbf{r})$. La distribución tiene simetría esférica. Si $r$ es fijo, la probabilidad de encontrar a la partícula con un ángulo sólido, $\Omega = (\theta, \phi)$, es[36],

$$P(\theta,\phi)\; d\theta d\phi = \frac{dA}{A}$$

donde $A$ es el área de la esfera de radio $r$ y $dA$ es el área del ángulo sólido. Entonces,

$$P(\theta,\phi)\; d\theta d\phi = \frac{\mathrm{sen}\theta}{4\pi}\; d\theta d\phi$$

de aquí se obtiene que

$$p_\theta(\theta) = \int_0^{2\pi} d\phi\; P(\theta,\phi) = \frac{1}{2}\mathrm{sen}\theta \tag{B.25}$$

y

$$p_\phi(\phi) = \int_0^{\pi} d\theta\; P(\theta,\phi) = \frac{1}{2\pi} \tag{B.26}$$

# Monte Carlo method: Basic theory

## Random generator with spherical symmetry

Para encontrar la densidad de probabilidad en $r$ integramos $\rho(\mathbf{r})$ sobre todos los ángulos

$$\begin{aligned} p_r(r) &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\theta d\phi \; r^2 \mathrm{sen}\theta \; \rho(\mathbf{r}) \\ &= 4\pi r^2 \rho(r) \end{aligned} \tag{B.27}$$

Notese que

$$\begin{aligned} p_r(r) p_\theta(\theta) p_\phi(\phi) \; dr d\theta d\phi &= 4\pi r^2 \rho(r) dr \; \frac{1}{2} \mathrm{sen}\theta \; d\theta \; \frac{1}{2\pi} \; d\phi \\ &= \rho(r) r^2 \mathrm{sen}\theta \; dr d\theta d\phi \\ &= \rho(\mathbf{r}) \; dV \end{aligned} \tag{B.28}$$

que es lo que debe de esperarse.

Usando la Ec. (B.18) y un generador de números aleatorios distribuidos uniformemente en el intervalo $[0,1]$ generamos la triáda $(x_r, x_\theta, x_\phi)$ con la cual se tiene la triáda $(r, \theta, \phi)$ dada por

$$\begin{aligned} \theta &= \cos^{-1}(1 - 2x_\theta) \\ \phi &= 2\pi x_\phi \\ r &= G^{-1}(x_r + G(0)) \end{aligned} \tag{B.29}$$

# Monte Carlo method: Basic theory

## Random generator with spherical symmetry

donde,

$$G(r) - G(0) = \int_0^r dr\ p_r(r)$$

La distribución asi obtenida se puede checar calculando los primeros momentos, i.e.,

$$\begin{aligned} 1 &= \int d^3x\ \rho(\mathbf{r}) \\ \langle \mathbf{r} \rangle &= \int d^3x\ \rho(\mathbf{r})\mathbf{r} = 0 \\ \langle (\mathbf{r} - \langle \mathbf{r} \rangle)^2 \rangle &= \int d^3x\ \rho(\mathbf{r})(\mathbf{r} - \langle \mathbf{r} \rangle)^2 = \int d^3x\ \rho(\mathbf{r}) r^2 \end{aligned} \tag{B.30}$$

donde se supone que $\rho(\mathbf{r})$ está normalizada a la unidad.

# Monte Carlo method: Basic theory

## Random generator with spherical symmetry

Una manera determinista de generar una distribución de $N$ partículas con densidad $\rho$ es como sigue. Si $\rho$ tiene de nuevo simetría esférica, entonces, se divide el intervalo $[0, 2\pi]$ de manera uniforme en $N$ pedazos. Con $\delta_\phi = 2\pi/N$ generamos el conjunto $\{\phi_j\}$ con

$$\phi_j = \frac{2j-1}{2}\delta_\phi \quad ; \quad j = 1, ..., N \tag{B.31}$$

El intervalo $[0, 1]$ se divide en $N$ pedazos. Si $\delta = 1/N$ entonces generamos el conjunto $\{x_i\}$ con

$$x_i = \frac{2i-1}{2}\delta \quad ; \quad i = 1, ..., N \tag{B.32}$$

Con el conjunto $\{x_i\}$ obtenemos el conjunto $\{r_i\}$ resolviendo la Ec. (B.18) con $g$ dado por $\rho(r)$ y también obtenemos el conjunto $\{\theta_i\}$

$$\theta_i = \cos^{-1}(1 - 2x_i) \tag{B.33}$$

# Monte Carlo method: Examples

Go to Mathematica notebooks

# Monte Carlo method: Examples

Go to NagBody model code

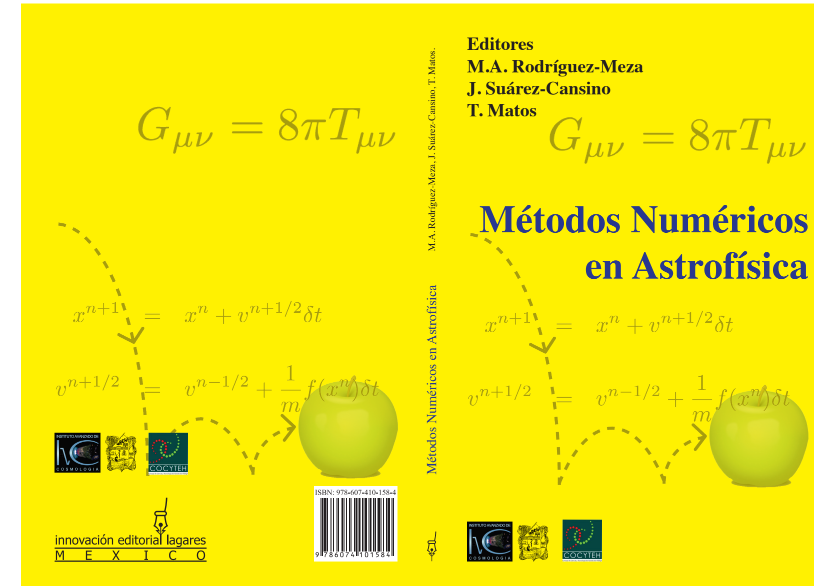
# Conclusions: Monte Carlo method

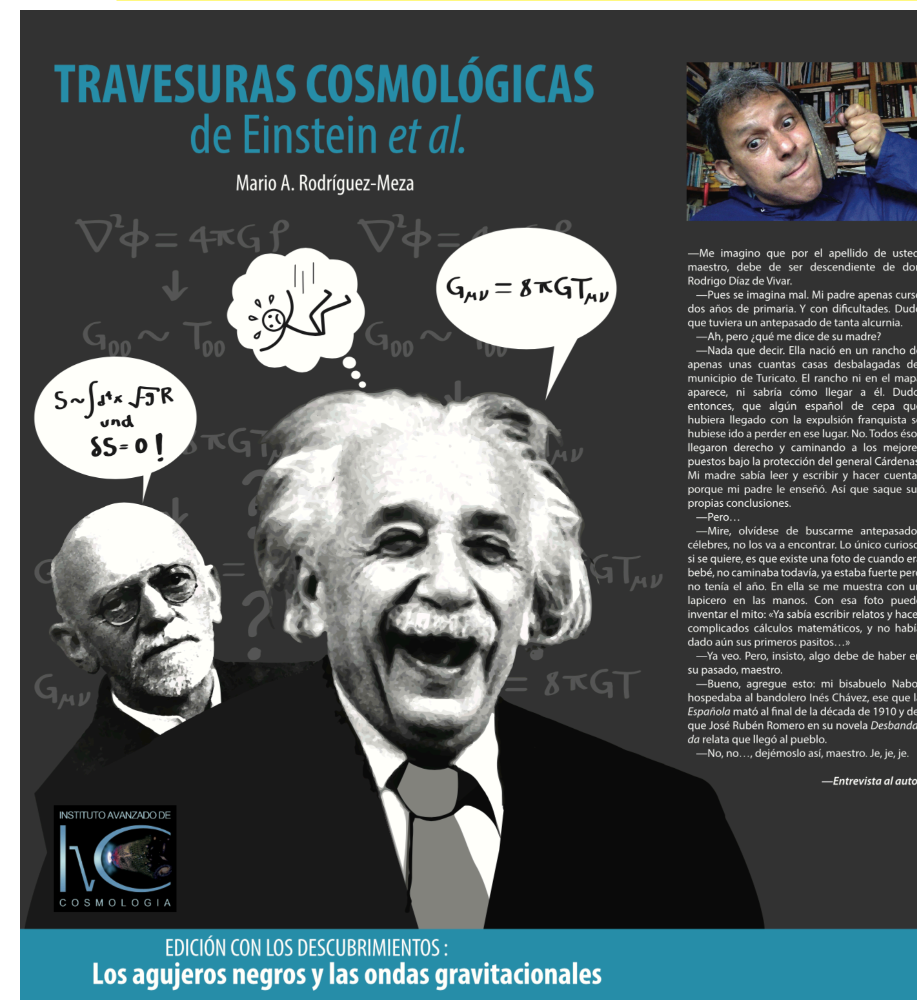
We have seen:

- The meaning of the Monte Carlo method.
- Some basic theory.
- Examples with Mathematica.
- How it is used to generate models: model code

# References and material


- Cosmología numérica y estadística: NagBody kit (http://bitbucket.org/rodriguezmeza). Mario A. Rodríguez-Meza. And: https://github.com/rodriguezmeza/NagBody_pkg.git
- Métodos numéricos en astrofísica, capítulo 1, Método de N-cuerpos en astrofísica. (https://www.researchgate.net/publication/316582859_Metodo_de_N-Cuerpos_en_Astrofisica)
- La estructura a gran escala del universo. Capítulo 22 en Travesuras cosmológicas de Einstein et al. https://www.researchgate.net/publication/316582400_La_estructura_a_gran_escala_del_universo_simulaciones_numericas
- https://www.researchgate.net/profile/Mario_Rodriguez-Meza
- https://www.researchgate.net/publication/314281416_Los_agujeros_negros_y_las_ondas_del_Dr_Einstein
- M.A. Rodriguez-Meza, Adv. Astron. 2012, 509682 (2012). arXiv:1112.5201. (https://www.researchgate.net/publication/51967093_A_Scalar_Field_Dark_Matter_Model_and_Its_Role_in_the_Large-Scale_Structure_Formation_in_the_Universe)

See you!